A matematikai analízis elemei
II.

(Folytonos lineáris és multilineáris operátorok, Differenciálelmélet,
Additív halmazfüggvények és mértékek, Integrálelmélet,
A geometriai integrálelmélet alapjai)

Kristóf János

NÉV SZERINTI HIVATKOZÁSOK

LOG	A matematikai analízis logikai alapjai (0. kötet, I. rész)
ENS	A matematikai analízis halmazelméleti alapjai (0. kötet, II. rész)
ALG	A matematikai analízis algebrai alapjai (0. kötet, III. rész)
TOP	A matematikai analízis topológiai alapjai (0. kötet, IV. rész)
STR	Bevezetés a matematikai struktúrák elméletébe (0. kötet, V. rész)
NUM	Számsorozatok és számsorok (1. kötet, VI. rész)
ANA	Egyváltozós függvények analízise (1. kötet, VII. rész)
INR	Valós változós függvények Riemann-integrálja (1. kötet, VIII. rész)
ESP	Függvényterek és függvényalgebrák (1. kötet, IX. rész)
MET	Metrikus terek (1. kötet, X. rész)
LIN	Folytonos lineáris és multilineáris operátorok (2. kötet, XI. rész)
DIF	Differenciálelmélet (2. kötet, XII. rész)
MES	Additív halmazfüggvények és mértékek (2. kötet, XIII. rész)
INT	Integrálelmélet (2. kötet, XIV. rész)
GEO	A geometriai integrálelmélet alapjai (2. kötet, XV. rész)
HOL	Holomorf függvények (3. kötet, XVI. rész)
FUN	A funkcionálanalízis elemei (3. kötet, XVII. rész)
GEA	Az analitikus geometria elemei (3. kötet, XVIII. rész)
EVT	Topologikus vektorterek (4. kötet, XIX. rész)
CON	Kompakt konvex halmazok (4. kötet, XX. rész)
ALN	Normált algebrák (4. kötet, XXI. rész)
AHA	Absztrakt harmonikus analízis (5. kötet, XXII. rész)
RAD	A topologikus integrálelmélet elemei (5. kötet, XXIII. rész)
VAR	Differenciálható sokaságok (6. kötet, XXIV. rész)
VEC	Vektormezők és kovariáns deriválások (6. kötet, XXV. rész)
TEN	Tenzormezők (6. kötet, XXVI. rész)
RIE	Pszeudo-Riemann sokaságok (6. kötet, XXVII. rész)
INV	Integrálás differenciálható sokaságokon (6. kötet, XXVIII. rész)
LIE	Lie-csoportok és Lie-algebrák (7. kötet, XXIX. rész)
REP	Lie-csoportok ábrázolásai (7. kötet, XXX. rész)

Tartalomjegyzék

XI. rész

Folytonos lineáris és multilineáris operátorok

BEVEZETÉS

A differenciálhatóság témakörének tárgyalása előtt feltételenül szükséges folytonos lineáris és multilineáris operátorokkal foglalkozni. Látjuk majd, hogy a differenciálható függvények deriváltjai folytonos lineáris operátorok, míg a magasabb rendű deriváltak folytonos multilineáris operátorok. Ezért a folytonos lineáris és multilineáris operátorok elméletének bizonyos mélységű ismerete nélkülözhetetlen a *deriváltfüggvények*, ezáltal a *differenciáloperátorok* konstrukciójához.

Másfelől, a modern analízis majd minden területén megjelennek folytonos lineáris operátorok. Ilyenek bizonyos integráloperátorok és parciális differenciáloperátorok, ha azok definíciós tartományát és érkezési terét megfelelő módon értelmezett normával látjuk el. A folytonos lineáris operátorokból álló *algebrák* lehetővé teszik a nem klasszikus valószínűségelmélet (például a *kvantum valószínűségelmélet*) felépítését, amely szükséges a kvantumelmélet matematikai struktúrájának megértéséhez, mind mechanikai, mind térelméleti szinten. Bizonyos típusú nem folytonos lineáris operátorok, például a Hilbert-terek normális operátorainak elmélete visszavezethető a folytonos lineáris operátorok algebráinak elméletére.

Az első fejezetben a folytonos lineáris operátorokkal kapcsolatos legfontosabb alapfogalmakról lesz szó, és a gyakorlatok között bemutatunk néhány nem triviális példát. A második fejezetben a lineáris funkcionálok legismertebb egzisztencia-tételét, a *Hahn-Banach tétel* analitikus formáját igazoljuk, és bevezetjük a *reflexív Banach-terek* fogalmát. A gyakorlatok is szemléltetik azt, hogy a Hahn-Banach-tétel milyen sokrétűen alkalmazható az analízisben. A harmadik fejezetben általánosítjuk az első fejezet eredményeit folytonos multilineáris operátorokra, és megvizsgáljuk a két legfontosabb algebrai operációt folytonos multilineáris operátorok terein: a *szimmetrizációt* és az *antiszimmetrizációt*.

Ettől kezdve metrikus és normált terekre azt az egyszerűsített jelölési konvenciót alkalmazzuk, amely szerint

– metrikus térre egyetlen szimbólummal, az alaphalmaz jelével hivatkozunk, és a metrikáját d-vel jelöljük;

– normált térre egyetlen szimbólummal, az alaphalmaz jelével hivatkozunk, és a normáját $\|\cdot\|$-val jelöljük,

ha ez nem okoz félreértést. Továbbá, ha egy kijelentésben több normált tér szerepel, akkor mindegyiket valós, vagy mindegyiket komplex normált térnek tekintjük. Minden normált teret egyben metrikus térként is kezelünk, amelynek metrikája a norma által generált metrika. A $\mathbb{K}$ testet mindenütt normált térnek tekintjük, amelynek normája az euklidészi abszolútérték-függvény.

Ezenkívül a következő jelöléseket alkalmazzuk.

– Ha E vektortér a K test felett, és $M, N \subseteq E$, valamint $\alpha \in K$, akkor

$$\begin{aligned} M + N &:= \{x + y | (x \in M) \wedge (y \in N)\} \\ \alpha.M &:= \{\alpha.x | x \in M\}. \end{aligned}$$

Továbbá, $M \oplus N$ jelöli az $M + N$ halmazt, ha M és N lineáris alterek E-ben, és $M \cap N = \{0\}$. Világos, hogy az $E = M \oplus N$ egyenlőség azt jelenti, hogy M és N olyan lineáris alterek E-ben, hogy az E minden eleme egyértelműen előáll $x + y$ alakban, ahol $x \in M$ és $y \in N$.

– Ha E és F vektorterek és $u : E \to F$ lineáris operátor, akkor a

$$\mathrm{Ker}(u) := \{x \in E | u(x) = 0\}$$

halmaz lineáris altér E-ben, és ezt az u lineáris operátor *magjának* nevezzük.

– Ha K test, akkor egy K-ban haladó $(\alpha_i)_{i \in I}$ nem üres véges rendszer *numerikus szorzatát* K-ban a $\underset{i \in I}{\mathrm{P}} \alpha_i$ szimbólummal jelöljük, megkülönböztetve az $(\alpha_i)_{i \in I}$ halmazrendszer (egészen mást jelentő) $\prod\limits_{i \in I} \alpha_i$ halmaz-szorzatától.

Ezekhez a megállapodásokhoz tartjuk magunkat nemcsak ebben a fejezetben, hanem az analízis további részében is.

Irodalomjegyzék

[1] H. Cartan, **Calcul différentiel, formes différentielles**, Hermann, Paris,

[2] T. Kato, **Perturbation theory for linear operators**, Springer-Verlag, 1966.

[3] Riesz F.-Szőkefalvi-Nagy B., **Funkcionálanalízis**, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[4] W. Rudin, **Functional Analysis**, McGraw Hill Book Comp., 1973.

[5] L. Schwartz, **Analyse mathématique**, Hermann, Paris, 1967.

[6] Г. Е. Шилов, **Математический анализ. Функции одного переменного**, Наука, Москва, 1970.

IRODALOMJEGYZÉK

1. fejezet

Folytonos lineáris operátorok

1.1. Lineáris operátor folytonosságának jellemzése

Ha E és F normált terek, akkor E és F metrikus terek is a normáik által generált metrikával ellátva, ezért minden $E \to F$ függvényre, így minden $E \to F$ *lineáris operátorra* is értelmes annak folytonosságáról beszélni. Az első állításunk jellemzést ad a normált terek között ható lineáris operátorok folytonosságára.

1.1.1. Állítás. *Ha E és F normált terek, valamint $u : E \to F$ lineáris operátor, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *u folytonos.*

(ii) *Létezik olyan $\mathfrak{a} \in E$, hogy u folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.*

(iii) *Létezik a $0 \in E$ vektornak olyan V környezete, hogy $u\langle V\rangle \subseteq F$ korlátos halmaz.*

(iv) *Minden $H \subseteq E$ korlátos halmazra $u\langle H\rangle \subseteq F$ korlátos halmaz.*

(v) $\sup\limits_{x \in \mathrm{B}_E} \|u(x)\| < +\infty$*, ahol* $\mathrm{B}_E := \{x \in E \,|\, \|x\| \leq 1\}$.

(vi) *Létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $x \in E$ esetén $\|u(x)\| \leq C\|x\|$.*

(vii) *u Lipschitz-függvény.*

(viii) *u egyenletesen folytonos függvény.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Triviális.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Legyen $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, amelyben u folytonos. Legyen $r \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített szám, és vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $u\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})\rangle \subseteq \mathrm{B}_r(u(\mathfrak{a}))$. Ha $x \in \mathrm{B}_\delta(0)$, akkor $\mathfrak{a}+x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$, tehát u additivitása miatt $u(\mathfrak{a})+u(x) = u(\mathfrak{a}+x) \in \mathrm{B}_r(u(\mathfrak{a}))$, vagyis $u(x) \in \mathrm{B}_r(0)$. Ez azt jelenti, hogy $V := \mathrm{B}_\delta(0)$ olyan környezete az $E \ni 0$-nak, hogy $u\langle V\rangle$ korlátos halmaz.

(iii)$\Rightarrow$(iv) A (iii) feltétel alapján rögzíthetünk olyan $\delta, \varrho \in \mathbb{R}_+^*$ számokat, amelyekre $u\langle \mathrm{B}_\delta(0)\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varrho(0)$. Legyen $H \subseteq E$ korlátos halmaz, és $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $H \subseteq \mathrm{B}_r(0)$. Ekkor $x \in H$ esetén $(\delta/r).x \in \mathrm{B}_\delta(0)$, így az u operátor homogenitása miatt $(\delta/r).u(x) = u((\delta/r).x) \in \mathrm{B}_\varrho(0)$. Ez azt jelenti, hogy $u\langle H\rangle \subseteq \mathrm{B}_{(\varrho r)/\delta}(0)$, tehát $u\langle H\rangle$ korlátos halmaz.

(iv)$\Rightarrow$(v) Nyilvánvaló, mert B_E korlátos halmaz E-ben.

(v)$\Rightarrow$(vi) Legyen $C := \sup\limits_{x \in \mathrm{B}_E} \|u(x)\|$. Ha $x \in E$ és $x \neq 0$, akkor $(1/\|x\|).x \in \mathrm{B}_E$, tehát ismét u homogenitása miatt $\|u(x)\|/\|x\| = \|u((1/\|x\|).x)\| \leq C$, amiből következik, hogy $\|u(x)\| \leq C\|x\|$. Ez utóbbi egyenlőtlenség természetesen az $x := 0$ vektorra is igaz, tehát

$C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, amelynek a létezését állítottuk.

(vi)⇒(vii) Legyen $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy minden $E \ni x$-re $\|u(x)\| \leq C\|x\|$ teljesül. Ha $x_1, x_2 \in E$, akkor u linearitását kihasználva kapjuk, hogy $\|u(x_1) - u(x_2)\| = \|u(x_1 - x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$, tehát u Lipschitz-függvény.

(vii)⇒(viii) Nyilvánvaló, mert Lipschitz-függvény egyenletesen folytonos.

(viii)⇒(i) Nyilvánvaló, mert egyenletesen folytonos függvény folytonos. ■

Az előző állításból látható, hogy ha egy normált terek között ható lineáris operátor *nem folytonos*, akkor annak *mindenütt szakadása van*.

A folytonos lineáris operátorokat az állításban megfogalmazott (iv) tulajdonság miatt *korlátos operátoroknak* is szokták nevezni. Mi ezt az elnevezést két ok miatt nem használjuk:

– egy nem nulla lineáris operátor az *eredeti értelemben* nem korlátos függvény a normák által meghatározott metrikák szerint, vagyis az értékkészlete biztosan nem korlátos halmaz, ezért a "korlátos operátor" elnevezés nincs összhangban a metrikus térbe érkező "korlátos függvény" elnevezéssel;

– a normált terek fogalmának létezik olyan természetes általánosítása (a *topologikus vektorterek*, **EVT** 1.1.1.), amelyekre a (iv)-ben megfogalmazott korlátossági tulajdonság *nem ekvivalens* a folytonossággal, hanem csak *következik* a folytonosságból (**EVT** 5.3.2.).

1.1.2. Definíció. *Ha E és F normált terek, akkor az $E \to F$ folytonos lineáris operátorok halmazát $\mathscr{L}(E;F)$ jelöli. Továbbá, ha E normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor az $E' := \mathscr{L}(E;\mathbb{K})$ jelölést alkalmazzuk, és E'-t az E* **topologikus duálisának**, *valamint E' elemeit E feletti* **folytonos lineáris funkcionáloknak** *nevezzük.*

Tehát az E normált tér topologikus duálisa részhalmaza az E vektortér algebrai duálisának, azaz $E' \subseteq E^*$, azonban itt általában nincs egyenlőség (**1**. gyakorlat). Sőt, később látni fogjuk, hogy ha E *végtelen dimenziós* normált tér, akkor szükségképpen létezik *nem folytonos* lineáris funkcionál E felett, vagyis $E' \neq E^*$ (**EVT** 5.4.6.).

Most jellemzést adunk a normált terek közötti *lineáris homeomorfizmusokra.*

1.1.3. Állítás. *Ha E és F normált terek, valamint $u : E \to F$ lineáris bijekció, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *u homeomorfizmus.*

(ii) *Léteznek olyan $C, C' \in \mathbb{R}_+^*$ számok, amelyekre minden $x \in E$ esetén*

$$C'\|x\| \leq \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

(iii) *Létezik olyan norma az E vektortér felett, amely ekvivalens az E normájával, és amely szerint u izometria.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Az (i) szerint $u : E \to F$ és $u^{-1} : F \to E$ folytonos lineáris operátorok, ezért léteznek olyan $C, C'' \in \mathbb{R}_+^*$ számok, amelyekre minden $x \in E$ és $y \in F$ esetén $\|u(x)\| \leq C\|x\|$ és $\|u^{-1}(y)\| \leq C''\|y\|$. A második egyenlőtlenségből kapjuk, hogy minden $x \in E$ esetén $\|x\| = \|u^{-1}(u(x))\| \leq C''\|u(x)\|$. Ezért a C és $C' := 1/C''$ valós számok eleget tesznek a (ii)-ben előírt feltételeknek.

(ii)⇒(iii) Legyenek $C, C' \in \mathbb{R}_+^*$ olyan valós számok, amelyekre minden $x \in E$ esetén $C'\|x\| \leq \|u(x)\| \leq C\|x\|$. Ekkor a $\|\cdot\| \circ u : E \to \mathbb{R}_+$ leképezés olyan norma E felett, amely ekvivalens az E normájával, és természetesen erre nézve u izometria (az F normáját változatlanul hagyva).

(iii)$\Rightarrow$(i) Jelölje $\|\cdot\|_E$ (illetve $\|\cdot\|_F$) az E (illetve F) normáját, és legyen $\|\cdot\|$ olyan norma E felett, amely $\|\cdot\|_E$-vel ekvivalens, és olyan, hogy u izometria a $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|_F$ normák szerint. Ekkor léteznek olyan $C, C' \in \mathbb{R}_+^*$ számok, hogy minden $x \in E$ vektorra $\|x\| \leq C\|x\|_E$ és $\|x\|_E \leq C'\|x\|$. Ekkor minden $E \ni x$-re $\|u(x)\|_F = \|x\|$ miatt fennállnak az $\|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$ és $\|x\|_E \leq C'\|u(x)\|_F$ egyenlőtlenségek. Az elsőből következik, hogy u folytonos lineáris operátor a $\|\cdot\|_E$ és $\|\cdot\|_F$ normák szerint. A másodikból kapjuk, hogy minden $F \ni y$-ra $\|u^{-1}(y)\|_E \leq C'\|u(u^{-1}(y))\|_F = \|y\|_F$, vagyis u^{-1} folytonos a $\|\cdot\|_F$ és $\|\cdot\|_E$ normák szerint. ■

1.2. Lineáris operátorok véges dimenziós normált téren

1.2.1. Tétel. *Véges dimenziós normált terek között ható lineáris bijekció szükségképpen homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyenek E és F véges dimenziós normált terek, és $u : E \to F$ lineáris bijekció. Ha $\|\cdot\|_E$ (illetve $\|\cdot\|_F$) jelöli az E (illetve F) normáját, akkor $\|\cdot\|_F \circ u$ norma az E véges dimenziós vektortér felett, ezért ez ekvivalens $\|\cdot\|_E$-vel (**MET** 5.7.2.). Az u operátor nyilvánvalóan izometria a $\|\cdot\|_F \circ u$ és $\|\cdot\|_F$ normák szerint, tehát az előző állítás alapján u lineáris homeomorfizmus a $\|\cdot\|_E$ és $\|\cdot\|_F$ normák szerint. ■

Azonban normált terek között ható lineáris homeomorfizmus nem szükségképpen izometria. Később példákat látunk olyan elvi szempontból fontos lineáris homeomorfizmusokra, amelyek nem izometriák; ilyenek lesznek bizonyos kitüntetett (*kanonikus*) azonosítások multilineáris folytonos operátorok terei között.

Vigyázzunk arra is, hogy normált terek közötti lineáris izometria természetesen folytonos lineáris injekció, de nem szükségképpen szürjektív, tehát nem feltételenül bijekció (**8**. gyakorlat).

1.2.2. Tétel. *Ha E véges dimenziós normált tér és F normált tér, akkor minden $E \to F$ lineáris operátor folytonos.*

Bizonyítás. (I) Megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor minden $\mathbb{K}^n \to F$ lineáris operátor folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ és $\|\cdot\|_F$ normák szerint, ahol $\|\cdot\|_F$ az F normája. Valóban, jelölje $(\mathbf{e}_k)_{k\in n}$ a kanonikus bázist $\mathbb{K}^n$-ben, és legyen $u : \mathbb{K}^n \to F$ tetszőleges lineáris operátor. Ekkor $x = (x_k)_{k\in n} \in \mathbb{K}^n$ esetén $x = \sum\limits_{k\in n} x_k.\mathbf{e}_k$, ezért

$$\begin{aligned}\|u(x)\|_F &= \Big\|u\Big(\sum_{k\in n} x_k.\mathbf{e}_k\Big)\Big\|_F = \Big\|\sum_{k\in n} x_k.u(\mathbf{e}_k)\Big\|_F \leq \\ &\leq \sum_{k\in n} |x_k|\|u(\mathbf{e}_k)\|_F \leq \Big(\sum_{k\in n}\|u(\mathbf{e}_k)\|_F\Big)\|x\|_\infty,\end{aligned}$$

tehát u folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ és $\|\cdot\|_F$ normák szerint.

(II) Legyen E véges dimenziós normált tér, F normált tér, és $u : E \to F$ lineáris operátor. Létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $v : \mathbb{K}^n \to E$ függvény, hogy v lineáris bijekció a $\mathbb{K}^n$ és E vektorterek között. Ekkor $u = (u\circ v)\circ v^{-1}$, továbbá az előző tétel alapján $v^{-1} : E \to \mathbb{K}^n$ homeomorfizmus a $\|\cdot\|_E$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák szerint, valamint (I) alapján $u \circ v : \mathbb{K}^n \to F$

folytonos lineáris operátor a $\|\cdot\|_\infty$ és $\|\cdot\|_F$ normák szerint, így u folytonos a $\|\cdot\|_E$ és $\|\cdot\|_F$ normák szerint. ■

1.2.3. Definíció. *Ha E normált tér, akkor az $E \to E$ lineáris homeomorfizmusok halmazát $\mathscr{GL}(E)$ jelöli. Ha E normált tér, akkor a $\mathscr{GL}(E)$ halmaz a függvénykompozícióval ellátva csoport; ezt nevezzük az E normált tér* **teljes lineáris csoportjának**.

1.3. Folytonos lineáris operátor normája

1.3.1. Állítás. *Ha E és F normált terek, továbbá $u : E \to F$ folytonos lineáris operátor, akkor*

$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in E,\ \|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x\in E,\ \|x\|\le 1} \|u(x)\| =$$
$$= \sup_{x\in E,\ \|x\|<1} \|u(x)\| = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ | (\forall x \in E) : \|u(x)\| \le C\|x\|\}$$

teljesül (azzal a konvencióval, hogy $E = \{0\}$ esetén a két első szám definíció szerint 0-val egyenlő).

Bizonyítás. Jelöljük ezeket a számokat rendre az a, b, c, d és e betűkkel; megmutatjuk, hogy $a \le b \le c \le d \le e \le a$ teljesül.

Ha $x \in E$ és $x \ne 0$, akkor $\|(1/\|x\|).x\| = 1$, ezért

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \|u((1/\|x\|).x)\| \le b,$$

következésképpen $a \le b$.

A $b \le c$ egyenlőtlenség nyilvánvaló, mert $\{x \in E | \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in E | \|x\| \le 1\}$.

Legyen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan $[0,1[$-ben haladó valós számsorozat, amely 1-hez konvergál. Ha $x \in E$ és $\|x\| \le 1$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|r_n.x\| = r_n\|x\| \le r_n < 1$, ezért $r_n\|u(x)\| = \|u(r_n.x)\| \le d$. Ebből határátmenettel kapjuk, hogy minden $x \in E$ vektorra, ha $\|x\| \le 1$, akkor $\|u(x)\| = \lim_{n\to\infty}(r_n\|u(x)\|) \le d$, így $c \le d$.

Legyen $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, amelyre minden $x \in E$ esetén $\|u(x)\| \le C\|x\|$. Ekkor $x \in E$ és $\|x\| < 1$ esetén $\|u(x)\| \le C$, így $d \le C$. Ebből következik, hogy $d \le e$.

Végül megjegyezzük, hogy $a < +\infty$, mert az u folytonossága miatt van olyan $C \in \mathbb{R}_+$, amelyre minden $x \in E$ esetén $\|u(x)\| \le C\|x\|$; ekkor minden $x \in E \setminus \{0\}$ vektorra $\|u(x)\|/\|x\| \le C$, így $a \le C$. Továbbá, könnyen látható, hogy ha $x \in E$, akkor $\|u(x)\| \le a\|x\|$, vagyis $a \in \{C \in \mathbb{R}_+ | (\forall x \in E) : \|u(x)\| \le C\|x\|\}$. Ezért $e \le a$ szükségképpen teljesül. ■

1.3.2. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, továbbá $u : E \to F$ folytonos lineáris operátor. Ekkor az*

$$\|u\| := \sup_{x\in E,\ \|x\|\le 1} \|u(x)\|$$

számot u **operátornormájának** *nevezzük. Ha u folytonos lineáris funkcionál az E normált tér felett, akkor az $\|u\|$ operátornormát u* **funkcionálnormájának** *nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy ha E és F normált terek, továbbá $u : E \to F$ folytonos lineáris operátor, akkor az előző állítás alapján minden $x \in E$ esetén $\|u(x)\| \le \|u\|\|x\|$, és $\|u\| = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ | (\forall x \in E) : \|u(x)\| \le C\|x\|\}$, ezért $\|u\|$ a legkisebb mindazon $C \in \mathbb{R}_+$ számok közül, amelyekre teljesül az, hogy minden $E \ni x$-re $\|u(x)\| \le C\|x\|$.

1.3.3. Állítás. *Ha E és F normált terek, akkor $\mathscr{L}(E;F)$ lineáris altere az $E \to F$ folytonos függvények $\mathscr{C}(E;F)$ vektorterének, és az $\mathscr{L}(E;F) \to \mathbb{R}_+;\ u \mapsto \|u\|$ leképezés norma az $\mathscr{L}(E;F)$ vektortér felett. Ha E normált tér és F Banach-tér, akkor $\mathscr{L}(E;F)$ az operátornormával ellátva szintén Banach-tér.*

Bizonyítás. Lineáris operátorok összege, illetve lineáris operátor számszorosa lineáris operátor. Továbbá, metrikus térről normált térbe ható folytonos függvények összege, és ilyen függvény számszorosa is folytonos, így $\mathscr{L}(E;F)$ lineáris altere $\mathscr{C}(E;F)$-nek.

Legyen $u \in \mathscr{L}(E;F)$ és $\|u\| = 0$. Ha $x \in E$, akkor van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\|r.x\| \leq 1$; ekkor $r.\|u(x)\| = \|u(r.x)\| \leq \|u\| = 0$, tehát $u(x) = 0$. Ezt jelenti, hogy $u = 0$, tehát az operátornormára $(\mathrm{NO_I})$ teljesül.

Ha $u \in \mathscr{L}(E;F)$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned}\|\alpha.u\| &:= \sup_{x\in E,\ \|x\|\leq 1} \|(\alpha.u)(x)\| := \sup_{x\in E,\ \|x\|\leq 1} \|\alpha.u(x)\| = \\ &= \sup_{x\in E,\ \|x\|\leq 1} |\alpha|\|u(x)\| = |\alpha| \sup_{x\in E,\ \|x\|\leq 1} \|u(x)\| =: |\alpha|\|u\|,\end{aligned}$$

tehát az operátornormára $(\mathrm{NO_{II}})$ teljesül.

Ha $u, v \in \mathscr{L}(E;F)$, akkor minden $x \in E$ elemre, ha $\|x\| \leq 1$, akkor

$$\|(u+v)(x)\| = \|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq \|u\| + \|v\|,$$

ezért $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$, tehát az operátornormára $(\mathrm{NO_{III}})$ teljesül. Ezzel megmutattuk, hogy az $\mathscr{L}(E;F) \to \mathbb{R}_+;\ u \mapsto \|u\|$ leképezés norma az $\mathscr{L}(E;F)$ vektortér felett.

Tegyük fel, hogy F Banach-tér, és legyen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{L}(E;F)$-ben haladó sorozat, amely az operátornorma szerint Cauchy-sorozat. Olyan $u \in \mathscr{L}(E;F)$ operátort keresünk, amelyhez az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál az operátornorma szerint.

Legyen $x \in E$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Az $\varepsilon/(\|x\|+1)$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N$ esetén $\|u_m - u_n\| < \varepsilon/(\|x\|+1)$; ekkor minden $m, n > N$ természetes számra

$$\|u_m(x) - u_n(x)\| = \|(u_m - u_n)(x)\| \leq \|u_m - u_n\|\|x\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{\|x\|+1}\right)\|x\| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in E$ esetén $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat F-ben, tehát F teljessége miatt konvergens. Ezért az $u := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ pontonkénti limeszfüggvény definíciós tartománya egyenlő E-vel. Nyilvánvaló, hogy az $u : E \to F$ függvény lineáris operátor, hiszen $x_1, x_2 \in E$ esetén

$$\begin{aligned}u(x_1 + x_2) &:= \lim_{n\to\infty} u_n(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} (u_n(x_1) + u_n(x_2)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n(x_1) + \lim_{n\to\infty} u_n(x_2) =: u(x_1) + u(x_2),\end{aligned}$$

hiszen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $u_n : E \to F$ additív függvény; továbbá $x \in E$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$u(\alpha.x) := \lim_{n\to\infty} u_n(\alpha.x) = \lim_{n\to\infty} (\alpha.u_n(x)) = \alpha. \lim_{n\to\infty} u_n(x) =: \alpha.u(x),$$

hiszen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $u_n : E \to F$ $\mathbb{K}$-homogén függvény.

Az $u : E \to F$ lineáris operátor folytonos, mert az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat korlátos is az operátornorma szerint, hiszen minden Cauchy-sorozat korlátos, tehát rögzíthetünk olyan $C \in \mathbb{R}_+$ számot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|u_n\| \leq C$, és akkor minden $x \in E$ esetén

$$\|u(x)\| := \left\|\lim_{n\to\infty} u_n(x)\right\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n(x)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n(x)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (\|u_n\|\|x\|) \leq C\|x\|.$$

Végül megmutatjuk, hogy az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat u-hoz konvergál az operátornorma szerint. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített, és vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N$ esetén $\|u_m - u_n\| < \varepsilon$. Legyenek $n \in \mathbb{N}$ és $x \in E$ olyanok, hogy $n > N$ és $\|x\| \leq 1$. Ekkor

$$\|(u-u_n)(x)\| = \|u(x) - u_n(x)\| = \left\|\Big(\lim_{m\to\infty} u_m(x)\Big) - u_n(x)\right\| =$$
$$= \left\|\Big(\lim_{k\to\infty} u_{k+N+1}(x)\Big) - u_n(x)\right\| = \left\|\lim_{k\to\infty}(u_{k+N+1}(x) - u_n(x))\right\| =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\|(u_{k+N+1} - u_n)(x)\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}\|u_{k+N+1} - u_n\|\|x\| \leq \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$\|u - u_n\| := \sup_{x\in E,\ \|x\|\leq 1}\|(u-u_n)(x)\| \leq \varepsilon,$$

tehát az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat u-hoz konvergál az operátornorma szerint. ■

1.3.4. Következmény. *Ha E normált tér, akkor E' a funkcionálnormával ellátva Banach-tér.*

Bizonyítás. A definíció szerint $E' := \mathscr{L}(E;\mathbb{K})$, és $\mathbb{K}$ az euklidészi abszolútértékkel, mint normával ellátva Banach-tér. ■

1.3.5. Állítás. *Legyenek E, F, G normált terek, valamint $u \in \mathscr{L}(E;F)$ és $v \in \mathscr{L}(F;G)$. Ekkor $v \circ u \in \mathscr{L}(E;G)$ és $\|v \circ u\| \leq \|v\|\|u\|$ teljesül.*

Bizonyítás. Vektorterek között ható lineáris operátorok kompozíciója lineáris operátor, és ha $x \in E$, akkor

$$\|(v\circ u)(x)\| = \|v(u(x))\| \leq \|v\|\|u(x)\| \leq \|v\|\|u\|\|x\|.$$

Az operátornorma definícója és tulajdonságai alapján ebből következik, hogy $v \circ u \in \mathscr{L}(E;G)$ és $\|v\circ u\| \leq \|v\|\|u\|$. ■

1.3.6. Következmény. *Legyen E normált tér és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor minden $(u_i)_{i\in n+1} \in \mathscr{L}(E;E)^{n+1}$ operátor-rendszerre*

$$\left\|\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n} u_i\right\| \leq \prod_{i=0}^{n}\|u_i\|.$$

Megjegyzés. *Az egyenlőtlenség bal oldalán álló operátor esetében* **rendezett** *véges mű-veletről van szó az* $(\mathscr{L}(E;E),\circ)$ *félcsoportban* (**ENS** 4.3.3. Definíció)). *Ezt az operátort a könnyebb megjegyezhetőség kedvéért, tehát mnemotechnikai okból a következő formában is felírhatjuk:*

$$u_0 \circ u_1 \circ \ldots \circ u_n.$$

Bizonyítás. n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

Mivel **ENS** 4.3.5. a) szerint minden $u_0 \in \mathscr{L}(E;E)$ operátorra $\left\|\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{0} u_i\right\| = \|u_0\|$ és $\prod_{i=0}^{0}\|u_i\| = \|u_0\|$, így az állítás $n = 0$ esetén igaz. Ha az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra, akkor minden $(u_i)_{i\in n+2} \in \mathscr{L}(E;E)^{n+2}$ operátor-rendszerre

$$\left\|\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n+1} u_i\right\| \overset{(1)}{=} \left\|\Big(\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n} u_i\Big)\circ u_{n+1}\right\| \overset{(2)}{\leq} \left\|\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n} u_i\right\|\|u_{n+1}\| \overset{(3)}{\leq} \Big(\prod_{i=0}^{n}\|u_i\|\Big)\|u_{n+1}\| \overset{(4)}{=} \prod_{i=0}^{n+1}\|u_i\|,$$

ahol

– az $\overset{(1)}{=}$ és $\overset{(4)}{=}$ egyenlőségnél az **ENS** 4.3.5. b) állítást alkalmaztuk;

– a $\overset{(2)}{\leq}$ egyenlőtlenségnél felhasználtuk az előző állításban igazolt egyenlőtlenséget az $u := u_{n+1}$ és $v := \mathop{\circ}\limits_{i=0}^{n} u_i$ operátorokra;

– a $\overset{(3)}{\leq}$ egyenlőtlenségnél alkalmaztuk az indukciós hipotézist. ■

1.4. Operátornormában konvergens operátorsorozatok

1.4.1. Állítás. *Ha E és F normált terek, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{L}(E;F)$-ben haladó sorozat, és $u \in \mathscr{L}(E;F)$, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat u-hoz konvergál az operátornorma szerint.*

(ii) *Az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat pontonként konvergens E-n, $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, és $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens az $\{x \in E | \|x\| \leq 1\}$ gömbön.*

(iii) *Az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat egyenletesen konvergens E minden korlátos részhalmazán és $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.*

(iv) *Az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat lokálisan egyenletesen konvergens E-n és $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ha $x \in E$ tetszőleges, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|u(x) - u_n(x)\| \leq \|u - u_n\|\|x\|$, ugyanakkor $\lim\limits_{n\to\infty} \|u - u_n\| = 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ teljesül. Tehát az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat pontonként konvergens E-n, és fennáll az $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ egyenlőség. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor az a) alapján vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\|u - u_n\| < \varepsilon$; ekkor az operátornorma definíciója szerint minden $x \in E$ vektorra, $\|x\| \leq 1$ esetén $\|u(x) - u_n(x)\| \leq \|u - u_n\| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens az $\{x \in E | \|x\| \leq 1\}$ gömbön.

(ii)⇒(iii) Tegyük fel, hogy (ii) teljesül és legyen $H \subseteq E$ korlátos halmaz. Vegyünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $H \subseteq \mathrm{B}_r(0)$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és rögzítsünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re és minden $E \ni x$-re, ha $n > N$ és $\|x\| \leq 1$, akkor $\|u(x) - u_n(x)\| < \varepsilon/r$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra és $x \in H$ vektorra $\|(1/r).x\| \leq 1$ miatt $\|u((1/r).x) - u_n((1/r).x)\| < \varepsilon/r$, vagyis $\|u(x) - u_n(x)\| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat egyenletesen konvergens H-n.

(iii)⇒(iv) Nyilvánvaló, hiszen E-ben minden pontnak vannak korlátos környezetei, például a gömbi környezetek.

(iv)⇒(i) A (iv) feltétel szerint van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat egyenletesen konvergens a $\overline{\mathrm{B}}_r(0)$ gömbön. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor az εr valós számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re és $E \ni x$-re, ha $n > N$ és $\|x\| \leq r$, akkor $\|u(x) - u_n(x)\| < \varepsilon r$. Ha most $n > N$ természetes szám és $x \in E$ olyan, hogy $\|x\| \leq 1$, akkor $\|r.x\| \leq r$, így $\|u(r.x) - u_n(r.x)\| < \varepsilon r$, vagyis $\|u(x) - u_n(x)\| < \varepsilon$. Ebből következik, hogy minden $n > N$ természetes számra $\|u - u_n\| = \sup\limits_{x\in E,\ \|x\|\leq 1} \|u(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon$ tehát (i) teljesül. ■

A funkcionálanalízis elemeiben majd megmutatjuk, hogy ha E Banach-tér, F normált tér, és $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{L}(E;F)$-ben haladó sorozat, amely pontonként konvergens E-n, akkor $\lim_{n\to\infty} u_n \in \mathscr{L}(E;F)$ és az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat egyenletesen konvergens az E minden *relatív kompakt* részhalmazán, azonban lehetséges, hogy ez az operátorsorozat nem konvergens az operátornorma szerint, habár $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| < +\infty$ is teljesül; lényegében ez a *Banach-Steinhaus-tétel* tartalma (**FUN** 10.2.1.).

1.5. Normált tér biduálisa

Ha E normált tér, akkor E', vagyis az E topologikus duálisa a természetes lineáris struktúrával és a funkcionálnormával ellátva Banach-tér. Ekkor $(E')'$, vagyis az E' Banach-tér topologikus duálisa szintén Banach-tér; ezt nevezzük az E normált tér *topologikus biduálisának*, és az E'' szimbólummal jelöljük. A következő állítás szerint normált tér szoros kapcsolatban áll a topologikus biduálisával.

1.5.1. Állítás. *Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett. Ha $x \in E$, akkor a*

$$\mathrm{j}_E(x) : E' \to \mathbb{K}; \quad u \mapsto u(x)$$

leképezés folytonos lineáris funkcionál az E' Banach-tér felett, tehát E''-nek eleme. Továbbá a

$$\mathrm{j}_E : E \to E'', \quad x \mapsto \mathrm{j}_E(x)$$

leképezés olyan folytonos lineáris operátor E és E'' között, hogy minden $E \ni x$-re $\|\mathrm{j}_E(x)\| \leq \|x\|$ teljesül (vagyis j_E norma nem-növelő).

Bizonyítás. Ha $x \in E$, akkor a $\mathrm{j}_E(x) : E' \to \mathbb{K}$ leképezés nyilvánvalóan lineáris funkcionál, és minden $E' \ni u$-ra $|\mathrm{j}_E(x)(u)| = |u(x)| \leq \|x\|\|u\|$, tehát $\mathrm{j}_E(x) \in E''$, és $\|\mathrm{j}_E(x)\| \leq \|x\|$. A $\mathrm{j}_E : E \to E''$ leképzés linearitása nyilvánvaló. ■

Később be fogjuk bizonyítani a *Hahn-Banach tételt*, amelynek egyik nevezetes következménye az lesz, hogy minden E normált tér esetében az imént bevezetett $\mathrm{j}_E : E \to E''$ lineáris operátor *izometria* (2.4.7.).

1.6. Folytonos lineáris operátorok normált szorzatterek között

Most három lépésben megvizsgáljuk a normált szorzatterek között ható lineáris operátorok folytonosságának jellemzését.

1.6.1. Állítás. *Legyen E normált tér és legyen F az $(F_i)_{i\in I}$ véges normált tér rendszer szorzata.*

a) *Minden $I \ni i$-re a $\mathrm{pr}_i : F \to F_i$ projekció-függvény folytonos lineáris operátor, azaz $\mathrm{pr}_i \in \mathscr{L}(F;F_i)$, továbbá $\|\mathrm{pr}_i\| \leq 1$ teljesül.*

b) *Az $u : E \to F$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha minden $i \in I$ indexre $\mathrm{pr}_i \circ u \in \mathscr{L}(E;F_i)$.*

c) *Az $\mathscr{L}(E;F) \to \prod_{i\in I} \mathscr{L}(E;F_i)$; $u \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ u)_{i\in I}$ leképezés izometrikus lineáris bijekció az $\mathscr{L}(E;F)$ feletti operátornorma és a $\prod_{i\in I} \mathscr{L}(E;F_i)$ feletti operátornorma-szorzat szerint.*

Bizonyítás. a) Ha $i \in I$ és $(y_k)_{k\in I} \in F$, akkor

$$\|\mathrm{pr}_i((y_k)_{k\in I})\| := \|y_i\| \leq \max_{k\in I} \|y_k\| = \|(y_k)_{k\in I}\|,$$

ezért $\mathrm{pr}_i \in \mathscr{L}(F; F_i)$ és $\|\mathrm{pr}_i\| \leq 1$.

b) Ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$, akkor minden $I \ni i$-re $\mathrm{pr}_i \circ u \in \mathscr{L}(E; F_i)$, mert az a) szerint $\mathrm{pr}_i \in \mathscr{L}(F; F_i)$. Megfordítva, legyen $u : E \to F$ lineáris operátor és minden $i \in I$ esetén $\mathrm{pr}_i \circ u \in \mathscr{L}(E; F_i)$. Ha $x \in E$, akkor a szorzatnorma definíciója szerint

$$\|u(x)\| := \max_{i\in I} \|\mathrm{pr}_i(u(x))\| = \max_{i\in I} \|(\mathrm{pr}_i \circ u)(x)\| \leq$$
$$\leq \max_{i\in I}(\|\mathrm{pr}_i \circ u\|\|x\|) \leq \Big(\max_{i\in I} \|\mathrm{pr}_i \circ u\|\Big)\|x\|,$$

ezért az u lineáris operátor folytonos, és láthatóan az is teljesül, hogy $\|u\| \leq \max_{i\in I} \|\mathrm{pr}_i \circ u\|$. Ha $i \in I$ akkor a) szerint $\|\mathrm{pr}_i\| \leq 1$, ezért $\|\mathrm{pr}_i \circ u\| \leq \|\mathrm{pr}_i\|\|u\| \leq \|u\|$, amiből következik, hogy $\max_{i\in I} \|\mathrm{pr}_i \circ u\| \leq \|u\|$, vagyis

$$\|u\| = \max_{i\in I} \|\mathrm{pr}_i \circ u\|.$$

c) Ha $(u_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{L}(E; F_i)$, akkor nyilvánvaló, hogy az

$$u : E \to F; \quad x \mapsto (u_i(x))_{i\in I}$$

leképezés olyan lineáris operátor, amelyre minden $i \in I$ esetén $\mathrm{pr}_i \circ u = u_i \in \mathscr{L}(E; F_i)$, tehát a b) szerint $u \in \mathscr{L}(E; F)$. Könnyen látható, hogy az a $\prod_{i\in I} \mathscr{L}(E; F_i) \to \mathscr{L}(E; F)$ leképezés, amely minden $(u_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{L}(E; F_i)$ rendszerhez a fent értelmezett u operátort rendeli az *inverze* a $\mathscr{L}(E; F) \to \prod_{i\in I} \mathscr{L}(E; F_i)$; $u \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ u)_{i\in I}$ lineáris operátornak. Tehát ez a lineáris operátor bijekció, és a b) bizonyításában szereplő utolsó egyenlőség alapján izometria is az állításban megnevezett normák szerint. ■

1.6.2. Következmény. *Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}$, és $\mathbb{K}^n$ felett vegyük a $\|\cdot\|_\infty$ normát. Ekkor az*

$$\mathscr{L}(E; \mathbb{K}^n) \to (E')^n; \quad u \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ u)_{i\in n}$$

leképezés izometrikus lineáris bijekció az $\mathscr{L}(E; \mathbb{K}^n)$ feletti operátornorma és az $(E')^n$ feletti funcionálnorma-szorzat szerint.

Bizonyítás. Azonnal következik az előző állításból, ha $I := n$ és minden $i \in I$ esetén $F_i := \mathbb{K}$. ■

1.6.3. Állítás. *Legyen E az $(E_i)_{i\in I}$ véges normált tér rendszer szorzata és F normált tér.*

a) *Minden $I \ni i$-re az $\mathrm{in}_{i,0} : E_i \to E$ leképezés lineáris izometria, így $\mathrm{in}_{i,0} \in \mathscr{L}(E_i; E)$ is teljesül.*

b) *Az $u : E \to F$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha minden $i \in I$ indexre*

$u \circ \mathrm{in}_{i,0} : E_i \to F \in \mathscr{L}(E_i; F)$.

c) *Az* $\mathscr{L}(E; F) \to \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i; F);\ u \mapsto (u \circ \mathrm{in}_{i,0})_{i \in I}$ *leképezés lineáris homeomorfizmus az* $\mathscr{L}(E; F)$ *feletti operátornorma és a* $\prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i; F)$ *feletti operátornorma-szorzat szerint.*

Bizonyítás. a) Ha $i \in I$ és $x_i \in E_i$, akkor az $\mathrm{in}_{i,0} : E_i \to E$ leképezés definícója alapján $\|\mathrm{in}_{i,0}(x_i)\| := \max_{k \in I} \|\mathrm{pr}_k(\mathrm{in}_{i,0}(x_i))\| = \|x_i\|$, hiszen minden $k \in I$ indexre

$$\mathrm{pr}_k(\mathrm{in}_{i,0}(x_i)) = \begin{cases} x_i & , \text{ha } k = i, \\ 0 & , \text{ha } k \neq i. \end{cases}$$

Tehát $\mathrm{in}_{i,0} : E_i \to E$ lineáris izometria.

b) Ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$, akkor minden $i \in I$ esetén $u \circ \mathrm{in}_{i,0} \in \mathscr{L}(E_i; F)$, mert a) szerint $\mathrm{in}_{i,0} \in \mathscr{L}(E_i; E)$. Megfordítva, legyen $u : E \to F$ lineáris operátor és minden $i \in I$ esetén $u \circ \mathrm{in}_{i,0} \in \mathscr{L}(E_i; F)$. Ha $x := (x_i)_{i \in I} \in E$, akkor nyilvánvaló, hogy

$$x = \sum_{k \in I} \mathrm{in}_{i,0}(x_i),$$

amiből következik, hogy

$$\|u(x)\| = \Big\|u\Big(\sum_{k \in I} \mathrm{in}_{i,0}(x_i)\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{k \in I} (u \circ \mathrm{in}_{i,0})(x_i)\Big\| \leq$$
$$\leq \sum_{k \in I} \|u \circ \mathrm{in}_{i,0}\| \|x_i\| \leq \Big(\sum_{k \in I} \|u \circ \mathrm{in}_{i,0}\|\Big) \|x\|,$$

ahol $\|x\| := \max_{i \in I} \|x_i\|$. Ez azt jelenti, hogy u folytonos és

$$\|u\| \leq \sum_{k \in I} \|u \circ \mathrm{in}_{i,0}\| \leq \mathrm{Card}(I) \max_{i \in I} \|u \circ \mathrm{in}_{i,0}\| \leq \mathrm{Card}(I) \|u\|,$$

hiszen minden $I \ni i$-re $\|u \circ \mathrm{in}_{i,0}\| \leq \|u\| \|\mathrm{in}_{i,0}\| \leq \|u\|$.

c) Ha $(u_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i; F)$, akkor nyilvánvaló, hogy az

$$u : E \to F; \quad (x_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} u_i(x_i)$$

leképezés olyan lineáris operátor, amelyre minden $i \in I$ esetén $u \circ \mathrm{in}_{i,0} = u_i \in \mathscr{L}(E_i; F)$, tehát a b) szerint $u \in \mathscr{L}(E; F)$. Könnyen látható, hogy az a $\prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i; F) \to \mathscr{L}(E; F)$ leképezés, amely minden $(u_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i; F)$ rendszerhez a fent értelmezett u operátort rendeli az *inverze* a $\mathscr{L}(E; F) \to \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i; F);\ u \mapsto (u \circ \mathrm{in}_{i,0})_{i \in I}$ lineáris operátornak. Tehát ez a lineáris operátor bijekció, továbbá a b) állítás bizonyításában szereplő operátornorma-egyenlőtlenségek szerint ez lineáris homeomorfizmus. ■

Azonban az előző állítás feltételei mellett előfordulhat, hogy az

$$\mathscr{L}(E;F) \to \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i;F); \quad u \mapsto (u \circ \mathrm{in}_{i,0})_{i \in I}$$

lineáris operátor *nem izometria*, az állításban megnevezett normák szerint.

1.6.4. Következmény. *Legyen F normált tér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}$, és $\mathbb{K}^n$ felett rögzítsünk egy tetszőleges normát. Ekkor az*

$$\mathscr{L}(\mathbb{K}^n;F) \to F^n; \quad u \mapsto \left((u \circ \mathrm{in}_{i,0})(1)\right)_{i \in n}$$

leképezés lineáris homeomorfizmus az $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n;F)$ feletti operátornorma és az F^n feletti szorzatnorma szerint. Ha $\mathbb{K}$ felett az euklidészi abszolútértéket vesszük normaként, akkor az

$$\mathscr{L}(\mathbb{K};F) \to F; \quad u \mapsto u(1)$$

leképezés izometrikus lineáris bijekció.

Bizonyítás. Az első kijelentés következik az előző állításból, ha azt arra az $(E_i)_{i \in n}$ normált tér rendszerre alkalmazzuk, amelyre minden $i \in n$ esetén $E := \mathbb{K}$; felhasználva azt, hogy $\mathbb{K}^n$ felett bármely két norma ekvivalens. A második kijelentés triviálisan igaz. ■

A következő állítás azt mutatja meg, hogy normált szorzatterek között ható folytonos lineáris operátor azonosítható olyan *mátrixszal*, amelynek elemei a komponensterek között ható folytonos lineáris operátorok; az ilyen alakú mátrixokat nevezzük *hipermátrixoknak*.

1.6.5. Állítás. *Legyen E az $(E_i)_{i \in I}$ és F az $(F_j)_{j \in J}$ véges normált tér rendszer szorzata. Ekkor minden $u \in \mathscr{L}(E;F)$ operátorra és minden $(i,j) \in I \times J$ párra $\mathrm{pr}_j \circ u \circ \mathrm{in}_{i,0} \in \mathscr{L}(E_i;F_j)$, és az*

$$\mathscr{L}(E;F) \to \prod_{(i,j) \in I \times J} \mathscr{L}(E_i;F_j); \quad u \mapsto (\mathrm{pr}_j \circ u \circ \mathrm{in}_{i,0})_{(i,j) \in I \times J}$$

leképezés lineáris homeomorfizmus az $\mathscr{L}(E;F)$ operátortér feletti operátornorma, valamint a $\prod\limits_{(i,j) \in I \times J} \mathscr{L}(E_i;F_j)$ szorzattér feletti operátornorma-szorzat szerint.

Bizonyítás. Láttuk, hogy az

$$f : \mathscr{L}(E;F) \to \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i;F); \quad u \mapsto (u \circ \mathrm{in}_{i,0})_{i \in I}$$

leképezés lineáris homeomorfizmus az $\mathscr{L}(E;F)$ feletti operátornorma, valamint a $\prod\limits_{i \in I} \mathscr{L}(E_i;F)$ feletti operátornorma-szorzat szerint. Továbbá minden $I \ni i$-re a

$$\mathscr{L}(E_i;F) \to \prod_{j \in J} \mathscr{L}(E_i;F_j); \quad v \mapsto (\mathrm{pr}_j \circ v)_{j \in J}$$

leképezés *izometrikus lineáris bijekció* az $\mathscr{L}(E_i;F)$ feletti operátornorma, valamint a $\prod_{j\in J}\mathscr{L}(E_i;F_j)$ feletti operátornorma-szorzat szerint, amiből nyilvánvalóan következik, hogy a

$$g:\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E_i;F)\to\prod_{i\in I}\Big(\prod_{j\in J}\mathscr{L}(E_i;F_j)\Big);\quad (v_i)_{i\in I}\mapsto((\mathrm{pr}_j\circ v_i)_{j\in J})_{i\in I}$$

leképezés is izometrikus lineáris bijekció az operátornormák szorzata szerint. Végül, a

$$h:\prod_{(i,j)\in I\times J}\mathscr{L}(E_i;F_j)\to\prod_{i\in I}\Big(\prod_{j\in J}\mathscr{L}(E_i;F_j)\Big);\quad (w_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}\mapsto((w_{i,j})_{j\in J})_{i\in I}$$

leképezés szintén izometrikus lineáris bijekció. Ezért a

$$h^{-1}\circ g\circ f:\mathscr{L}(E;F)\to\prod_{(i,j)\in I\times J}\mathscr{L}(E_i;F_j)$$

leképezés lineáris homeomorfizmus, és könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathscr{L}(E;F)\ni u$ esetén $(h^{-1}\circ g\circ f)(u)=(\mathrm{pr}_j\circ u\circ \mathrm{in}_{i,0})_{(i,j)\in I\times J}$. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állítás feltételei mellett az

$$\mathscr{L}(E;F)\to\prod_{(i,j)\in I\times J}\mathscr{L}(E_i;F_j);\quad u\mapsto(\mathrm{pr}_j\circ u\circ \mathrm{in}_{i,0})_{(i,j)\in I\times J}$$

leképezés általában nem izometria, bár norma nem-növelő.

1.6.6. Állítás. *Legyenek $(E_i)_{i\in I}$ és $(F_i)_{i\in I}$ (ugyanolyan indexhalmazú) véges normált tér rendszerek. Ha $(u_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E_i;F_i)$, akkor a*

$$\mathop{\times}_{i\in I}u_i:\prod_{i\in I}E_i\to\prod_{i\in I}F_i;\quad (x_i)_{i\in I}\mapsto(u_i(x_i))_{i\in I}$$

leképezés folytonos lineáris operátor a $\prod_{i\in I}E_i$ és $\prod_{i\in I}F_i$ normált szorzatterek között, és ha $I\neq\emptyset$, akkor

$$\Big\|\mathop{\times}_{i\in I}u_i\Big\|=\max_{i\in I}\|u_i\|.$$

Továbbá, a

$$\prod_{i\in I}\mathscr{L}(E_i;F_i)\to\mathscr{L}\Big(\prod_{i\in I}E_i;\prod_{i\in I}F_i\Big);\quad (u_i)_{i\in I}\mapsto\mathop{\times}_{i\in I}u_i$$

leképezés folytonos lineáris operátor.

Bizonyítás. Az állítás triviális, ha $I=\emptyset$, ezért feltesszük, hogy $I\neq\emptyset$. Jelölje E az $(E_i)_{i\in I}$ normált tér rendszer szorzatát és F az $(F_i)_{i\in I}$ normált tér rendszer szorzatát. Ha $(x_i)_{i\in I}\in E$, akkor

$$\Big\|\Big(\mathop{\times}_{i\in I}u_i\Big)((x_i)_{i\in I})\Big\|=\Big\|(u_i(x_i))_{i\in I}\Big\|=\max_{i\in I}\|u_i(x_i)\|\leq\max_{i\in I}\|u_i\|\|x_i\|\leq$$
$$\leq\Big(\max_{i\in I}\|u_i\|\Big)\max_{i\in I}\|x_i\|=\Big(\max_{i\in I}\|u_i\|\Big)\Big\|(x_i)_{i\in I}\Big\|,$$

amiből látható, hogy $\underset{i\in I}{\times} u_i \in \mathscr{L}(E;F)$ és

$$\Big\| \underset{i\in I}{\times} u_i \Big\| \leq \max_{i\in I} \|u_i\|.$$

A fordított egyenlőtlenség bizonyításához legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, amelyre $c < \max\limits_{i\in I} \|u_i\|$. Ekkor vehetünk olyan $k \in I$ indexet, amelyre $c < \|u_k\| = \sup\limits_{\substack{x\in E_k \\ \|x\|\leq 1}} \|u_k(x)\|$, így vehetünk olyan $x \in E_k$ vektort, amelyre $\|x\| \leq 1$ és $c < \|u_k(x)\|$. Nyilvánvalóan $\mathrm{in}_{k,0}(x) \in E$ olyan, hogy $\|\mathrm{in}_{k,0}(x)\| = \|x\| \leq 1$, és

$$\Big\| \underset{i\in I}{\times} u_i \Big\| \geq \Big\| \Big(\underset{i\in I}{\times} u_i \Big) (\mathrm{in}_{k,0}(x)) \Big\| = \|u_k(x)\| > c,$$

amiből következik, hogy

$$\Big\| \underset{i\in I}{\times} u_i \Big\| \geq \max_{i\in I} \|u_i\|.$$

A vektorterek szorzatában értelmezett lineáris műveletek definíciója szerint nyilvánvaló, hogy a

$$\prod_{i\in I} \mathscr{L}(E_i;F_i) \to \mathscr{L}\Big(\prod_{i\in I} E_i; \prod_{i\in I} F_i \Big); \quad (u_i)_{i\in I} \mapsto \underset{i\in I}{\times} u_i$$

leképezés lineáris, és ez előzőek szerint folytonos is (sőt $I \neq \emptyset$ esetén izometria). ■

Az előző állítás feltételei mellett világos, hogy a $\underset{i\in I}{\times} u_i \in \mathscr{L}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; \prod\limits_{i\in I} F_i \Big)$ operátor hipermátrixa *diagonális*, mert minden $j,k \in I$ esetén

$$\mathrm{pr}_k \circ \Big(\underset{i\in I}{\times} u_i \Big) \circ \mathrm{in}_{j,0} = \begin{cases} u_k & \text{, ha } j = k, \\ 0 & \text{, ha } j \neq k. \end{cases}$$

1.7. Normált faktorterek

1.7.1. Állítás. *Legyen E normált tér, $M \subseteq E$ lineáris altér, és az E/M lineáris faktortéren* (**ALG** 8.2.7.) *tekintsük a*

$$p : E/M \to \mathbb{R}_+; \quad \zeta \mapsto \inf_{x\in\zeta} \|x\|$$

leképezést. Ekkor p-re teljesül ($\mathrm{NO_{II}}$) *és* ($\mathrm{NO_{III}}$)*, és p pontosan akkor norma E/M felett, ha M zárt lineáris altér.*

Bizonyítás. Legyen $\zeta \in E/M$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ha $x \in \zeta$ tetszőleges, akkor $\lambda.x \in \lambda.\zeta$, tehát $p(\lambda.\zeta) \leq \|\lambda.x\| = |\lambda|\|x\|$. Ha $\lambda = 0$, akkor ebből látható, hogy $p(\lambda.\zeta) = 0 = |\lambda| p(\zeta)$. Ha $\lambda \neq 0$, akkor ebből az következik, hogy $|\lambda|^{-1} p(\lambda.\zeta) \leq \|x\|$, vagyis $p(\lambda.\zeta) \leq |\lambda| p(\zeta)$ teljesül minden $\zeta \in E/M$ és $\lambda \in \mathbb{K}^*$ esetén. Ebből kapjuk, hogy $\zeta \in E/M$ és $\lambda \in \mathbb{K}^*$ esetén $p(\zeta) = p(\lambda^{-1}.(\lambda.\zeta)) \leq |\lambda|^{-1} p(\lambda.\zeta)$ is, vagyis $|\lambda| p(\zeta) \leq p(\lambda.\zeta)$ is igaz. Tehát p-re ($\mathrm{NO_{II}}$) teljesül.

Legyenek $\zeta, \eta \in E/M$. Ha $x \in \zeta$ és $y \in \eta$ tetszőlegesek, akkor $x + y \in \zeta + \eta$, tehát $p(\zeta + \eta) \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Ebből következik, hogy p-re ($\mathrm{NO_{III}}$) teljesül.

Ha $\zeta := 0 \in E/M$, akkor $\zeta = M$, tehát $0 \in \zeta$, így $p(\zeta) \leq \|0\| = 0$, vagyis $p(\zeta) = 0$.

Tegyük fel, hogy M zárt, és legyen $\zeta \in E/M$ olyan, hogy $p(\zeta) = 0$. Ekkor létezik olyan ζ-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = p(\zeta) = 0$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Ha $x \in \zeta$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $x - x_n \in M$, tehát az M altér zártsága miatt $x = \lim\limits_{n\to\infty}(x - x_n) \in \overline{M} = M$. Ezért $\zeta = M$, vagyis ζ egyenlő az E/M lineáris faktortér additív neutrális elemével, tehát p-re ($\mathrm{NO_I}$) is teljesül.

Megfordítva, legyen p norma E/M felett, és vegyünk egy $x \in E \setminus M$ vektort. Megmutatjuk, hogy x belső pontja $E \setminus M$-nek. Ehhez jelölje π az $E \to E/M$ kanonikus szürjekciót. Ekkor $\mathrm{Ker}(\pi) = M$ miatt $\pi(x) \neq 0$, tehát a hipotézis szerint $0 < r := p(\pi(x)) = \inf\limits_{x'\in\pi(x)} \|x'\|$. Ez azt jelenti, hogy minden $x' \in \pi(x)$ esetén $r \leq \|x'\|$, következésképpen $\mathrm{B}_r(x; \|\cdot\|) \cap M = \emptyset$, hiszen ha $x' \in M$ olyan lenne, hogy $\|x - x'\| < r$, akkor $-x' \in M$ miatt $x - x' \in x + M = \pi(x)$ teljesülne, így $r \leq \|x - x'\|$ is igaz volna, ami lehetetlen. Tehát $\mathrm{B}_r(x; \|\cdot\|) \subseteq E \setminus M$, vagyis x belső pontja az $E \setminus M$ halmaznak. Ezért M zárt lineáris altér E-ben. ■

1.7.2. Definíció. *Ha E normált tér és $M \subseteq E$ zárt lineáris altér, akkor az*

$$E/M \to \mathbb{R}_+; \quad \zeta \mapsto \inf_{x\in\zeta} \|x\|$$

leképezést az E feletti norma M szerinti **faktornormájának** *nevezzük és a $\|\cdot\|_{E/M}$ szimbólummal jelöljük, továbbá, az E/M lineáris faktorteret a $\|\cdot\|_{E/M}$ faktornormával ellátva* **normált faktortérnek** *nevezzük.*

1.7.3. Állítás. *Legyen E normált tér, $M \subseteq E$ zárt lineáris altér, és jelölje π az $E \to E/M$ kanonikus szürjekciót. Ekkor π olyan folytonos lineáris operátor az E normált tér és az E/M normált faktortér között, amely norma-nem-növelő és nyílt leképezés.*

Bizonyítás. Ha $x \in E$, akkor $x \in \pi(x)$ miatt

$$\|\pi(x)\|_{E/M} = \inf_{y\in\pi(x)} \|y\| \leq \|x\|,$$

vagyis π norma-nem-növelő lineáris operátor, tehát folytonos.

Legyen $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz. Azt kell megmutatni, hogy $\pi\langle\Omega\rangle$ nyílt halmaz az E/M normált faktortérben. Ehhez legyen $\zeta_0 \in \pi\langle\Omega\rangle$ rögzített pont, és vegyünk olyan $x_0 \in \Omega$ elemet, amelyre $\pi(x_0) = \zeta_0$. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, hogy $\mathrm{B}_r(x_0; \|\cdot\|) \subseteq \Omega$; megmutatjuk, hogy ekkor $\mathrm{B}_r(\zeta_0; \|\cdot\|_{E/M}) \subseteq \pi\langle\Omega\rangle$, tehát ζ_0 belső pontja a $\pi\langle\Omega\rangle$ halmaznak a faktornorma szerint. Valóban, vegyünk tetszőleges $\zeta \in \mathrm{B}_r(\zeta_0; \|\cdot\|_{E/M})$ pontot. A π operátor szürjektivitása miatt vehetünk olyan $x \in E$ elemet, hogy $\pi(x) = \zeta$. Ekkor

$$r > \|\zeta - \zeta_0\|_{E/M} = \|\pi(x) - \pi(x_0)\|_{E/M} = \|\pi(x - x_0)\|_{E/M} = \inf_{y\in\pi(x-x_0)} \|y\|,$$

ezért van olyan $y \in \pi(x - x_0)$, amelyre $r > \|y\|$. Ekkor $(x - x_0) - y \in M$, vagyis $x - (x_0 + y) \in M$, amiből $x_0 + y \in \mathrm{B}_r(x_0; \|\cdot\|)$ miatt következik, hogy

$$\zeta = \pi(x) = \pi(x_0 + y) \in \pi\langle \mathrm{B}_r(x_0; \|\cdot\|)\rangle \subseteq \pi\langle\Omega\rangle,$$

tehát $\mathrm{B}_r(\zeta_0; \|\cdot\|_{E/M}) \subseteq \pi\langle\Omega\rangle$. ■

1.7.4. Állítás. *Legyen E normált tér, $M \subseteq E$ zárt lineáris altér, és jelölje π az $E \to E/M$ kanonikus szürjekciót. Egy $\Omega \subseteq E/M$ halmaz pontosan akkor nyílt az E/M feletti faktornorma szerint, ha $\overset{-1}{\pi}\langle\Omega\rangle \subseteq E$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Ha Ω nyílt az E/M feletti faktornorma szerint, akkor π folytonossága miatt $\overset{-1}{\pi}\langle\Omega\rangle \subseteq E$ nyílt halmaz.

Megfordítva, ha $\overset{-1}{\pi}\langle\Omega\rangle \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor a $\pi : E \to E/M$ leképezés nyíltsága miatt $\pi\langle\overset{-1}{\pi}\langle\Omega\rangle\rangle$ nyílt halmaz az E/M normált faktortérben, és π szürjektivitása miatt ez a halmaz egyenlő Ω-val. ■

A faktortopológia fogalmának (**TOP** 1.1. 7. példa) ismeretében az előző állítás úgy is megfogalmazható, hogy ha M zárt lineáris altere az E normált térnek, akkor az E/M feletti faktortopológia megegyezik faktornorma által generált topológiával.

1.7.5. Állítás. *Legyen E normált tér, $M \subseteq E$ zárt lineáris altér, és jelölje π az $E \to E/M$ kanonikus szürjekciót. Legyen N metrikus tér és $f : E/M \to N$ tetszőleges függvény. Az f függvény pontosan akkor folytonos az E/M normált faktortér és az N metrikus tér között, ha az $f \circ \pi : E \to N$ függvény folytonos az E normált tér és az N metrikus tér között.*

Bizonyítás. Ha $f : E/M \to N$ folytonos, akkor a $\pi : E \to E/M$ kanonikus szürjekció folytonossága miatt az $f \circ \pi : E \to N$ függvény folytonos.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $f \circ \pi : E \to N$ függvény folytonos és $\Omega \subseteq N$ nyílt halmaz. Ekkor az $\overset{-1}{(f \circ \pi)}\langle\Omega\rangle$ halmaz nyílt E-ben, és ez a halmaz egyenlő $\overset{-1}{\pi}\langle \overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle\rangle$-val. Ezért az előző állítás szerint $\overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle$ nyílt részhalmaz az E/M normált faktortérben, így f folytonos. ■

Most bemutatjuk a normált faktorterek elméletének két egyszerű, de nem triviális alkalmazását.

1.7.6. Állítás. *Legyenek E, F normált terek, és $u : E \to F$ olyan lineáris operátor, amelyre* $\mathrm{Im}(u)$ *véges dimenziós. Az u operátor pontosan akkor folytonos, ha* $\mathrm{Ker}(u)$ *zárt lineáris altér E-ben. Speciálisan, ha u lineáris funkcionál az E normált tér felett, akkor $u \in E'$ pontosan akkor teljesül, ha* $\mathrm{Ker}(u)$ *zárt.*

Bizonyítás. Ha $\mathrm{Ker}(u)$ zárt, akkor 1.7.1. szerint $E/\mathrm{Ker}(u)$ felett tekinthetjük a faktornormát, és e szerint a $\pi : E \to E/\mathrm{Ker}(u)$ kanonikus szürjekció folytonos lineáris operátor (1.7.3.). Ha $\dot{u} : E/\mathrm{Ker}(u) \to \mathrm{Im}(u)$ az u kanonikus faktorizáltja, akkor $\dot{u}$ lineáris bijekció az $E/\mathrm{Ker}(u)$ és $\mathrm{Im}(u)$ vektorterek között. Az $\mathrm{Im}(u)$ altér véges dimenziós, így $E/\mathrm{Ker}(u)$ is az, tehát $\dot{u}$ lineáris homeomorfizmus az $E/\mathrm{Ker}(u)$ és $\mathrm{Im}(u)$ véges dimenziós normált terek között (1.2.1.). Ebből következik, hogy az $u = \dot{u} \circ \pi$ operátor folytonos. ■

1.7.7. Állítás. *Legyen E normált tér, $M \subseteq E$ zárt lineáris altér, és $N \subseteq E$ véges dimenziós lineáris altér. Ekkor $M + N$ zárt lináris altér E-ben.*

Bizonyítás. Jelölje $\pi : E \to E/M$ a kanonikus szürjekciót, és lássuk el az E/M lineáris faktorteret a faktornormával (1.7.1.). Könnyen látható, hogy $M + N = \overset{-1}{\pi}\langle\pi\langle N\rangle\rangle$, és $\pi\langle N\rangle$ véges dimenziós, így zárt lineáris altere E/M-nek. Ezért a π folytonossága (1.7.3.) és a folytonosság topologikus jellemzése alapján $M + N$ zárt halmaz. ■

Végül, a normált faktorterek teljességével kapcsolatban igazolunk három érdekes állítást.

1.7.8. Állítás. *Ha E Banach-tér és $M \subseteq E$ zárt lineáris altér, akkor az E/M normált faktortér is Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az E/M normált faktortérben, és rögzítsünk egy $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot. Ekkor a **MET** 9.6.1. Lemma szerint vehetünk olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő sorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|\zeta_{\sigma(k)} - \zeta_{\sigma(k+1)}\| < \varepsilon_k$. Jelölje π az $E \to E/M$ kanonikus szürjekciót.

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének alkalmazásával megmutatjuk, hogy létezik olyan E-ben haladó $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\pi(x_k) = \zeta_{\sigma(k)}$ és $\|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon_k$.

Az $x_0 \in E$ elem tetszőlegesen megválasztható úgy, hogy $\pi(x_0) = \zeta_{\sigma(0)}$ teljesüljön. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $(x_k)_{0\le k\le n}$ olyan E-ben haladó rendszer, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \le n$, akkor $\pi(x_k) = \zeta_{\sigma(k)}$ és ha $k < n$, akkor $\|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon_k$ teljesül. Mivel

$$\varepsilon_n > \|\zeta_{\sigma(n)} - \zeta_{\sigma(n+1)}\| = \|\pi(x_n) - \zeta_{\sigma(n+1)}\| = \inf_{\substack{x\in E \\ \pi(x)=\pi(x_n)-\zeta_{\sigma(n+1)}}} \|x\|,$$

így vehetünk olyan $x \in E$ vektort, hogy $\varepsilon_n > \|x\|$ és $\pi(x) = \pi(x_n) - \zeta_{\sigma(n+1)}$. Ekkor $x_{n+1} := x_n - x \in E$ olyan, hogy $\pi(x_{n+1}) = \pi(x_n) - \pi(x) = \zeta_{\sigma(n+1)}$ és $\|x_n - x_{n+1}\| = \|x\| < \varepsilon_n$. Tehát $(x_k)_{0\le k\le n+1}$ olyan E-ben haladó rendszer, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \le n+1$, akkor $\pi(x_k) = \zeta_{\sigma(k)}$ és ha $k < n+1$, akkor $\|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon_k$. Ezért a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétel szerint vehetünk olyan E-ben haladó $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely eleget tesz a feltételeknek.

Könnyen látható, hogy ha az $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat olyan, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens, akkor $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat E-ben. Valóban, ekkor $m, n \in \mathbb{N}$ és $m < n$ esetén

$$\|x_m - x_n\| \le \sum_{k=m}^{n-1} \|x_k - x_{k+1}\| < \sum_{k=m}^{n-1} \varepsilon_k < \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k,$$

amiből következik, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|x_m - x_n\| < \sum_{k=\min(m,n)}^{\infty} \varepsilon_k,$$

és a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergenciája szerint $\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=\min(m,n)}^{\infty} \varepsilon_k = 0$. Tegyük fel, hogy $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens, így $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat E-ben. Az E normált tér teljessége miatt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens E-ben. Ekkor a $\pi : E \to E/M$ kanonikus szürjekció folytonossága miatt a $(\pi(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens az E/M normált faktortérben. Ez azt jelenti, hogy $\left(\zeta_{\sigma(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens részsorozata a $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozatnak, ezért a $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens az E/M normált faktortérben. ■

1.7.9. Állítás. *Ha E normált tér és M olyan teljes lineáris altér, hogy az E/M normált faktortér Banach-tér, akkor E Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az E normált térben. Ha π jelöli az $E \to E/M$ kanonikus szürjekciót, akkor π egyenletesen folytonos, így $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az E/M normált faktortérben, tehát E/M teljessége és π szürjektivitása miatt vehetünk olyan $x \in E$ vektort, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \pi(x_n) = \pi(x)$ teljesül az E/M normált faktortérben.

Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|\pi(x_n) - \pi(x)\| + \varepsilon_n > \|\pi(x_n - x)\| = \inf_{\substack{x'\in E \\ \pi(x')=\pi(x_n-x)}} \|x'\|,$$

ezért kiválasztható olyan E-ben haladó $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|\pi(x_n) - \pi(x)\| + \varepsilon_n > \|x'_n\|$ és $\pi(x'_n) = \pi(x_n - x)$, vagyis $x_n - x - x'_n \in M$. Látható, hogy $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat az E normált térben, ezért $(x_n - x - x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan Cauchy-sorozat E-ben, amely M-ben halad, így Cauchy-sorozat az M normált altérben is. Ekkor az M altér teljessége miatt $(x_n - x - x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat az M normált altérben, így konvergens az E normált térben is. Ekkor viszont az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens az E normált térben. ■

Az előző állításban *nem elegendő* az E normált tér teljességéhez az, hogy M csak *zárt* lineáris altere E-nek és az E/M normált faktortér teljes. Például, legyen X nem teljes normált tér, Y Banach-tér, $E := X \times Y$ a normált szorzattér, és $M := X \times \{0\}$. Ekkor könnyen látható, hogy M zárt, de nem teljes lineáris altere E-nek, mert ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens Cauchy-sorozat X-ben, akkor $((x_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$ olyan M-ben haladó Cauchy-sorozat, amely nem konvergens M-ben. Ugyanakkor az E/M normált faktortér izometrikusan izomorf Y-nal, tehát E/M Banach-tér. Világos, hogy E nem teljes normált tér.

1.7.10. Következmény. *Ha E normált tér és $M \subseteq E$ olyan teljes lineáris altér, hogy az E/M vektortér véges dimenziós, akkor E Banach-tér.*

Bizonyítás. Véges dimenziós normált tér Banach-tér, tehát ekkor teljesülnek az előző állítás feltételei. ■

1.8. Carl Neumann sorok

1.8.1. Állítás. *Legyen E Banach-tér, és $u \in \mathscr{L}(E;E)$ olyan operátor, amelyre $\|u\| < 1$. Ekkor $\mathrm{id}_E - u \in \mathscr{GL}(E)$, és a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u^k$ operátorsor abszolút konvergens az operátornorma szerint, továbbá fennáll a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u^k = (\mathrm{id}_E - u)^{-1}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $\|u^k\| \leq \|u\|^k$, ezért $\|u\| < 1$ miatt a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u^k$ operátorsor abszolút konvergens az operátornorma szerint. Az E normált tér teljessége miatt $\mathscr{L}(E;E)$ az operátornormával Banach-tér, így a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u^k$ operátorsor konvergens is az operátornorma szerint; legyen $v := \sum_{k=0}^{\infty} u^k$.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$(\mathrm{id}_E - u) \circ \Big(\sum_{k=0}^{n} u^k \Big) = \mathrm{id}_E - u^{n+1} = \Big(\sum_{k=0}^{n} u^k \Big) \circ (\mathrm{id}_E - u),$$

amiből $\sum_{k=0}^{n} u^k = v - \sum_{k=n+1}^{\infty} u^k$ miatt következik, hogy

$$(\mathrm{id}_E - u) \circ v - \mathrm{id}_E = (\mathrm{id}_E - u) \circ \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} u^k \Big) - u^{n+1} = v \circ (\mathrm{id}_E - u) - \mathrm{id}_E.$$

Ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|(\mathrm{id}_E - u) \circ v - \mathrm{id}_E\| \leq \|\mathrm{id}_E - u\| \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u^k \Big\| + \|u^{n+1}\|,$$

$$\|v \circ (\mathrm{id}_E - u) - \mathrm{id}_E\| \leq \|\mathrm{id}_E - u\| \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u^k \Big\| + \|u^{n+1}\|.$$

Az $\|u\| < 1$ hipotézis alapján $\lim_{n\to\infty} \|u^n\| = 0$ és $\lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} u^k \Big\| = 0$, ezért

$$(\mathrm{id}_E - u) \circ v = \mathrm{id}_E = v \circ (\mathrm{id}_E - u),$$

vagyis $\mathrm{id}_E - u \in \mathscr{GL}(E)$ és $v = (\mathrm{id}_E - u)^{-1}$. ■

Az előző állításban vizsgált $\sum_{k\in\mathbb{N}} u^k$ alakú operátorsorokat *Carl Neumann-soroknak* is nevezzük. Ezek a geometriai számsorok (**NUM** 4.3.1.) természetes általánosításai.

1.8.2. Következmény. *Ha E Banach-tér, F normált tér, és $u \in \mathscr{L}(E;F)$ nem nulla lineáris homeomorfizmus, akkor minden $v \in \mathscr{L}(E;F)$ lineáris operátorra, $\|u - v\| < 1/\|u^{-1}\|$ esetén v is lineáris homeomorfizmus E és F között.*

Bizonyítás. A feltevés alapján

$$\|\mathrm{id}_E - u^{-1} \circ v\| = \|u^{-1} \circ (u - v)\| \leq \|u^{-1}\|\|u - v\| < 1,$$

és E Banach-tér, ezért az előző állítás szerint $u^{-1} \circ v = \mathrm{id}_E - (\mathrm{id}_E - u^{-1} \circ v) \in \mathscr{GL}(E)$. Tehát $u^{-1} \circ v : E \to E$ és $u : E \to F$ lineáris homeomorfizmusok, így $v = u \circ (u^{-1} \circ v) : E \to F$ is lineáris homeomorfizmus. ■

1.8.3. Következmény. *Ha E Banach-tér és F normált tér, akkor az $E \to F$ lineáris homeomorfizmusok* $\mathrm{Iso}(E;F)$ *halmaza nyílt $\mathscr{L}(E;F)$-ben az operátornorma szerint.*

Bizonyítás. Ha $\mathrm{Iso}(E;F) = \emptyset$, akkor az állítás triviálisan igaz. Ha $\mathrm{Iso}(E;F) \neq \emptyset$, de $E = \{0\}$, akkor $F = \{0\}$, ezért $\mathrm{Iso}(E;F) = \{0\} = \mathscr{L}(E;F)$, tehát az állítás triviálisan igaz. Ha $\mathrm{Iso}(E;F) \neq \emptyset$ és $E \neq \{0\}$, akkor $u \in \mathrm{Iso}(E;F)$ esetén $u \neq 0$, így 1.8.2. szerint az u középpontú, $1/\|u^{-1}\|$ sugarú, operátornorma szerinti nyílt gömb részhalmaza $\mathrm{Iso}(E;F)$-nek, tehát u belső pontja $\mathrm{Iso}(E;F)$-nek az operátornorma szerint. ■

1.9. Gyakorlatok

1. Vegyük a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ sorozatteret a $\|\cdot\|_\infty$ normával ellátva, és tekintsük a

$$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{K}; \quad \mathbf{s} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)$$

lineáris funkcionált. Ez nem folytonos, tehát $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})' \neq (\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})^*$. Ugyanez a funkcionál folytonos a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ feletti $\|\cdot\|_1$ norma szerint.

2. Legyen $n \in \mathbb{N}$, és minden $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^n$ elemre

$$u_{\mathbf{s}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}; \quad \mathbf{s}' \mapsto \sum_{k \in n} \mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k).$$

Ekkor minden $\mathbb{K}^n \ni \mathbf{s}$-re $u_{\mathbf{s}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál (bármely $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}$ feletti normák szerint), és a

$$\mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^*; \quad \mathbf{s} \mapsto u_{\mathbf{s}}$$

leképezés lineáris homeomorfizmus (bármely $\mathbb{K}^n$ és $(\mathbb{K}^n)^*$ feletti normák szerint). Milyen normák szerint lesz ez a leképezés *izometria*?

3. Legyen T halmaz, és jelölje E a $T \to \mathbb{K}$ korlátos függvények vektorterét a sup-normával ellátva. Ekkor E Banach-tér, és minden $T \ni t$-re az $\varepsilon_t : E \to \mathbb{K}$; $x \mapsto x(t)$ leképezés olyan folytonos lineáris funkcionál E felett, amelyre $\|\varepsilon_t\| = 1$. Továbbá a $T \to E'$; $t \mapsto \varepsilon_t$ leképezés *injekció*, és az $(\varepsilon_t)_{t \in T}$ rendszer *lineárisan független* az E' vektortérben. (Az ε_t alakú E feletti leképezéseket *helyettesítő-funkcionáloknak* nevezzük.)

4. Minden $\mathbf{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozatra legyen

$$u_{\mathbf{s}} : l^1_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \mathbf{s}' \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k).$$

Ekkor $\mathbf{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ esetén $u_{\mathbf{s}} \in (l^1_{\mathbb{K}})'$, és az

$$l^\infty_{\mathbb{K}} \to (l^1_{\mathbb{K}})'; \quad \mathbf{s} \mapsto u_{\mathbf{s}}$$

leképezés *izometrikus lineáris bijekció*, vagyis az $l^\infty_{\mathbb{K}}$ normált sorozattér kitüntetett módon (a fenti leképezés által) azonosul az $(l^1_{\mathbb{K}})'$ funkcionál-térrel, ezért írható, hogy $l^\infty_{\mathbb{K}} = (l^1_{\mathbb{K}})'$.

(Ez a példa mutatja, hogy szeparábilis Banach-tér topologikus duálisa a funkcionálnormával ellátva nem szükségképpen szeparábilis.)

(*Útmutatás.* Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen $\mathbf{e}_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ az a sorozat, amelyre $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_n(k) = \delta_{n,k}$ (*Kronecker-szimbólum*). Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_n \in l^1_{\mathbb{K}}$ és $\|\mathbf{e}_n\|_1 = 1$.

Ha $\mathbf{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ rögzített, akkor $\|u_{\mathbf{s}}\| \geq |u_{\mathbf{s}}(\mathbf{e}_n)| = |\mathbf{s}(n)|$, ezért $\|u_{\mathbf{s}}\| \geq \|\mathbf{s}\|_\infty$ teljesül; ugyanakkor az $\|u_{\mathbf{s}}\| \leq \|\mathbf{s}\|_\infty$ egyenlőtlenség nyilvánvaló. Ezért az $l^\infty_{\mathbb{K}} \to (l^1_{\mathbb{K}})'$; $\mathbf{s} \mapsto u_{\mathbf{s}}$ leképezés lineáris izometria.

Megmutatjuk, hogy ha $u \in (l^1_{\mathbb{K}})'$, akkor létezik olyan $\mathbf{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$, amelyre $u_{\mathbf{s}} = u$. Legyen ugyanis $\mathbf{s}$ az a $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, amelyre $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) := u(\mathbf{e}_n)$. Az u lineáris funkcionál folytonos $l^1_{\mathbb{K}}$ felett, és az $l^1_{\mathbb{K}}$-ban haladó $(\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos a $\|\cdot\|_1$ norma szerint, ezért $\mathbf{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$. Ha $\mathbf{s}' \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, akkor a definíciók alapján

$$u_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}') = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k) = \sum_{k=0}^{\infty} u(\mathbf{e}_k)\mathbf{s}'(k) = u\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}'(k).\mathbf{e}_k\Big) = u(\mathbf{s}'),$$

és itt minden mindenütt véges összeg áll. Ez azt jelenti, hogy az u és $u_{\mathbf{s}}$ folytonos függvények egyenlők a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq l^1_{\mathbb{K}}$ halmazon, ami sűrű $l^1_{\mathbb{K}}$-ban, ezért $u = u_{\mathbf{s}}$.)

5. Minden $\mathbf{s} \in l^1_{\mathbb{K}}$ sorozatra legyen

$$u_{\mathbf{s}} : l^\infty_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \mathbf{s}' \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k).$$

Ekkor $\mathbf{s} \in l^1_{\mathbb{K}}$ esetén $u_{\mathbf{s}} \in (l^\infty_{\mathbb{K}})'$, és az

$$l^1_{\mathbb{K}} \to (l^\infty_{\mathbb{K}})'; \quad \mathbf{s} \mapsto u_{\mathbf{s}}$$

leképezés *lineáris izometria*, vagyis az $l^1_{\mathbb{K}}$ normált sorozattér kitüntetett módon (a fenti leképezés által) azonosul az $(l^\infty_{\mathbb{K}})'$ funkcionál-tér egy normált alterével, ezért írható, hogy $l^1_{\mathbb{K}} \subseteq (l^\infty_{\mathbb{K}})'$. Később megmutatjuk, hogy itt nincs egyenlőség (2.pont, **12**. gyakorlat).

(*Útmutatás.* Csak annak bizonyítása jelenthet problémát, hogy minden $\mathbf{s} \in l^1_{\mathbb{K}}$ esetén $\|u_{\mathbf{s}}\| = \|\mathbf{s}\|_1$. Ehhez legyen $\mathbf{s} \in l^1_{\mathbb{K}}$ rögzített és minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re $\mathbf{s}'_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq l^\infty_{\mathbb{K}}$ az a sorozat, amelyre $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{s}'_n(k) := \begin{cases} \overline{\mathbf{s}(k)}/|\mathbf{s}(k)| & \text{, ha } k < n \text{ és } \mathbf{s}(k) \neq 0; \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re $\|\mathbf{s}'_n\|_\infty \leq 1$, tehát

$$\|u_{\mathbf{s}}\| \geq |u_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}'_n)| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{s}(k)|,$$

következésképpen $\|u_{\mathbf{s}}\| \geq \|\mathbf{s}\|_1$. Ugyanakkor a $\|u_{\mathbf{s}}\| \leq \|\mathbf{s}\|_1$ egyenlőtlenség nyilvánvaló.)

6. Legyenek $p, q \in]1, \to[$ olyan valós számok, amelyekre $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, és minden $\mathbf{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$ sorozatra

$$u_{\mathbf{s}} : l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \mathbf{s}' \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k).$$

Ekkor $\mathbf{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$ esetén $u_{\mathbf{s}} \in (l^p_{\mathbb{K}})'$, és az

$$l^q_{\mathbb{K}} \to (l^p_{\mathbb{K}})'; \quad \mathbf{s} \mapsto u_{\mathbf{s}}$$

leképezés *lineáris izometria*, vagyis az $l^q_{\mathbb{K}}$ normált sorozattér kitüntetett módon (a fenti leképezés által) azonosul az $(l^p_{\mathbb{K}})'$ funkcionál-tér egy normált alterével, ezért írható, hogy $l^q_{\mathbb{K}} \subseteq (l^p_{\mathbb{K}})'$. Később megmutatjuk, hogy itt egyenlőség áll (XII. fejezet, 3. pont, **4**. gyakorlat), tehát valójában $l^q_{\mathbb{K}} = (l^p_{\mathbb{K}})'$ írható.

(*Útmutatás.* Az elemi Hölder-egyenlőtlenségből következik, hogy $\mathbf{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$ esetén $u_{\mathbf{s}}$ jól értelmezett, és minden $l^p_{\mathbb{K}} \ni \mathbf{s}'$-re $|u_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}')| \leq \|\mathbf{s}\|_q \|\mathbf{s}'\|_p$, így $u_{\mathbf{s}} \in (l^p_{\mathbb{K}})'$ és $\|u_{\mathbf{s}}\| \leq \|\mathbf{s}\|_q$. A fordított egyenlőség bizonyításához legyen $\mathbf{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$ rögzített, és minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re $\mathbf{s}'_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq l^p_{\mathbb{K}}$ az a sorozat, amelyre $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{s}'_n(k) := \frac{\overline{\mathbf{s}(k)}|\mathbf{s}(k)|^{q-2}}{\left(\sum_{j=0}^{n-1} |\mathbf{s}(j)|^q\right)^{1/p}},$$

ha $k < n$ és $\mathbf{s}(k) \neq 0$, míg $\mathbf{s}'_n(k) := 0$ egyébként. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re $\|\mathbf{s}'_n\|_p \leq 1$, ezért

$$\|u_{\mathbf{s}}\| \geq |u_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}'_n)| = \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{s}(k)|^q\right)^{1/q},$$

vagyis $\|u_{\mathbf{s}}\| \geq \|\mathbf{s}\|_q$.)

7. Legyen $p \in [1, \rightarrow[$ valós szám, vagy $p := \infty$. Minden $\mathbf{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozatra legyen

$$u_{\mathbf{s}} : l^p_{\mathbb{K}} \to l^p_{\mathbb{K}}; \quad \mathbf{s}' \mapsto \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'.$$

Ekkor $\mathbf{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ esetén $u_{\mathbf{s}} \in \mathscr{L}(l^p_{\mathbb{K}}; l^p_{\mathbb{K}})$, és az

$$l^\infty_{\mathbb{K}} \to \mathscr{L}(l^p_{\mathbb{K}}; l^p_{\mathbb{K}}); \quad \mathbf{s} \mapsto u_{\mathbf{s}}$$

leképezés *lineáris izometria* az $l^\infty_{\mathbb{K}}$ feletti $\|\cdot\|_\infty$ norma, és az $\mathscr{L}(l^p_{\mathbb{K}}; l^p_{\mathbb{K}})$ feletti operátornorma szerint. Tehát az $l^\infty_{\mathbb{K}}$ normált sorozattér kitüntetett módon (a fenti leképezés által) azonosul az $\mathscr{L}(l^p_{\mathbb{K}}; l^p_{\mathbb{K}})$ operátortér egy normált alterével, ezért írható, hogy $l^\infty_{\mathbb{K}} \subseteq \mathscr{L}(l^p_{\mathbb{K}}; l^p_{\mathbb{K}})$. Ez a leképezés *nem szürjektív*, és ha $p \in [1, \rightarrow[$, akkor egy $u \in \mathscr{L}(l^p_{\mathbb{K}}; l^p_{\mathbb{K}})$ pontosan akkor $u_{\mathbf{s}}$ alakú valamely $\mathbf{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ elemre, ha minden $l^\infty_{\mathbb{K}} \ni \mathbf{s}'$-re $u \circ u_{\mathbf{s}'} = u_{\mathbf{s}'} \circ u$ teljesül.

8. Legyen $p \in [1, \rightarrow[$ valós szám, vagy $p := \infty$. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen

$$u_n : l^p_{\mathbb{K}} \to l^p_{\mathbb{K}}; \quad \mathbf{s} \mapsto \mathbf{s} \circ \tau_n,$$

ahol $\tau_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\tau_n(m) := \begin{cases} m - n & \text{, ha } m \geq n, \\ 0 & \text{, ha } m < n. \end{cases}$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $u_n \in \mathscr{L}(l^p_{\mathbb{K}}; l^p_{\mathbb{K}})$, és u_n *izometria*, továbbá $\mathrm{Im}(u_n) = \{\mathbf{s} \in l^p_{\mathbb{K}} | \text{"}\mathbf{s}(k) = 0 \text{ , ha } k < n\text{"}\}$.

(Ez a példa mutatja, hogy végtelen dimenziós Banach-tér önmagába ható lineáris izometriája nem szükségképpen szürjektív, ellentétben a véges dimenziós esettel.)

12. Legyen E véges dimenziós és F tetszőleges normált tér. Ha $E \neq \{0\}$ és $u : E \to F$ lineáris operátor, akkor van olyan $x \in E \setminus \{0\}$, hogy $\|u(x)\| = \|u\|\|x\|$.

(*Útmutatás.* Ha $\mathbf{S}$ jelöli az egységgömb-felületet, akkor $\mathbf{S}$ kompakt, és az $\mathbf{S} \to \mathbb{R};\ x \mapsto$

$\|u(x)\|$ leképezés folytonos, ezért a Weierstrass-féle maximum-elv alapján **S**-en felveszi a maximális értékét.)

13. Tekintsük a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ sorozatteret a $\|\cdot\|_\infty$ normával ellátva, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen

$$u_n : \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{K}; \quad \mathbf{s} \mapsto n\mathbf{s}(n).$$

Ekkor $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})'$-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|u_n\| = n$, és az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionálsorozat pontonként konvergál $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-en, és $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Ugyanakkor $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergál 0-hoz a funkcionálnorma szerint.

15. Ha E normált tér, akkor $\mathscr{L}(E;E)$ az operátorok összeadásával, számmal vett szorzásával, az operátorkompozícióval, és az operátornormával ellátva egységelemes *normált algebra*, amely pontosan akkor kommutatív, ha E legfeljebb egy dimenziós.

16. Legyen E Banach-tér. Ha $u \in \mathscr{L}(E;E)$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{u^k}{k!}$$

operátorsor abszolút konvergens az operátornorma szerint, tehát konvergens is. Ezért jól értelmezett az

$$\mathrm{Exp} : \mathscr{L}(E;E) \to \mathscr{L}(E;E); \quad u \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$$

függvény. Mutassuk meg, hogy minden $\mathscr{L}(E;E) \ni u$-ra $\mathrm{Exp}(u) \in \mathscr{GL}(E)$, továbbá $(\mathrm{Exp}(u))^{-1} = \mathrm{Exp}(-u)$, és ha $u, v \in \mathscr{L}(E;E)$ *felcserélhető* operátorok, vagyis $u \circ v = v \circ u$, akkor

$$\mathrm{Exp}(u+v) = \mathrm{Exp}(u) \circ \mathrm{Exp}(v)$$

teljesül.

17. a) Ha E és F valós normált terek, akkor minden $E \to F$ folytonos additív függvény *lineáris operátor*.

b) A valós számok halmaza vektortér a $\mathbb{Q}$ test felett; legyen H algebrai bázishalmaz ebben a vektortérben (**ALG** 8.5.8.). Mutassuk meg, hogy az $\mathscr{F}(H;\mathbb{R})$ függvényhalmaz ekvipotens az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvények halmazával, és az $\mathscr{F}(H;\mathbb{R})$ halmaz nagyobb számosságú $\mathbb{R}$-nél, tehát nagyobb számosságú az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineáris funkcionálok halmazánál. (Ebből következik, hogy *létezik* nem folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény, sőt a nem folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvények halmaza *nagyobb számosságú* a folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvények halmazánál.)

(*Útmutatás.* a) Legyenek E és F tetszőleges valós vektorterek, és $u : E \to F$ additív függvény. Ekkor $u(0) + u(0) = u(0+0) = u(0)$, tehát $u(0) = 0$. Ebből következik, hogy minden $x \in E$ esetén $0 = u(0) = u(x + (-x)) = u(x) + u(-x)$, tehát $u(-x) = -u(x)$. Ha $x \in E$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor az u additivitása miatt $u(n.x) = n.u(x)$; ez n szerinti teljes indukcióval könnyen belátható. Ugyanakkor $x \in E$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $u((-n).x) = u(n.(-x)) = n.u(-x) = n.(-u(x)) = (-n).u(x)$. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbb{Z} \ni n$-re és $E \ni x$-re $u(n.x) = n.u(x)$. Ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $x \in E$, akkor az előzőek alapján $u(x) = u((n(1/n)).x) = u(n.((1/n).x)) = n.u((1/n).x)$, tehát $(1/n).u(x) = u((1/n).x)$.

Ebből következik, hogy minden $r \in \mathbb{Q}$ és $x \in E$ esetén $u(r.x) = r.u(x)$ (és eddig csak az u additivitását használtuk ki, a folytonosságát nem).

Tegyük most fel, hogy E és F valós normált terek, és u folytonos. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{Q}$-ban haladó sorozat, amelyre $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$ az $\mathbb{R}$-ben. Ekkor $x \in E$ esetén $\alpha.x = \lim\limits_{n\to\infty}(r_n.x)$, tehát az u folytonossága és az átviteli elv alapján

$$u(\alpha.x) = \lim_{n\to\infty} u(r_n.x) = \lim_{n\to\infty}(r_n.u(x)) = \Big(\lim_{n\to\infty} r_n\Big).u(x) = \alpha u(x),$$

ami azt jelenti, hogy u lineáris.

b) Legyen H algebrai bázishalmaz a $\mathbb{Q}$ test feletti $\mathbb{R}$ vektortérben. Ekkor minden $H \to \mathbb{R}$ függvény egyértelműen kiterjeszthető $\mathbb{Q}$-lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ operátorrá, így az $\mathscr{F}(H;\mathbb{R})$ függvényhalmaz és a $\mathbb{Q}$-lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza között létezik egy (kitüntetett) bijekció. Az a) állítás bizonyításában láttuk, hogy a $\mathbb{Q}$-lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ operátorok halmaza *egyenlő* az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvények halmazával. Végül, a $\mathbb{Q}^{(H)}$ halmaz ekvipotens $\mathbb{R}$-rel (**ALG** 8.5.13.), ezért H is ekvipotens $\mathbb{R}$-rel, vagyis az $\mathscr{F}(H;\mathbb{R})$ függvényhalmaz ekvipotens az $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ függvényhalmazzal. Ez utóbbi viszont $\mathscr{P}(\mathbb{R})$-rel ekvipotens (**ENS** 6.3.15.), ami a Cantor-tétel alapján $\mathbb{R}$-nél nagyobb számosságú. Ugyanakkor az $\mathbb{R}$-lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza ekvipotens $\mathbb{R}$-rel.)

XI. **FOLYTONOS LINEÁRIS ÉS MULTILINEÁRIS OPERÁTOROK**

1. FOLYTONOS LINEÁRIS OPERÁTOROK

2. fejezet

Hahn-Banach-tétel

2.1. Folytonos lineáris operátor folytonos kiterjesztése

Ebben a pontban azt vizsgáljuk meg, hogy normált tér felett "elég sok" folytonos lineáris funkcionál létezik-e? A funkcionálanalízisben sok probléma megoldása adott tulajdonságú folytonos lineáris funkcionálok létezésének bizonyítására redukálható, ezért ennek a problémakörnek az analízisben egészen széleskörű alkalmazása van.

Általában könnyű megadni egyszerű, például véges dimenziós lineáris altereken nem triviális folytonos lineáris operátorokat, ezért a nem triviális folytonos lineáris funkcionálok, illetve operátorok létezésének problémája kapcsolatba hozható a folytonos lineáris operátorok folytonos lineáris kiterjeszthetőségének feladatával. Ebből a témakörből származik a következő állítás.

2.1.1. Tétel. *Legyen E normált tér, M sűrű lineáris altere E-nek, és F Banach-tér. Ha $u : M \to F$ folytonos lineáris operátor (az M feletti altér-norma szerint), akkor létezik egyetlen $\hat{u} : E \to F$ folytonos lineáris operátor, amely u-nak kiterjesztése. Továbbá, az $\mathscr{L}(M; F) \to \mathscr{L}(E; F)$; $u \mapsto \hat{u}$ leképezés az operátornormák szerint izometrikus lineáris bijekció.*

Bizonyítás. Legyen $u \in \mathscr{L}(M; F)$; ekkor u egyenletesen folytonos függvény, így az egyenletesen folytonos függvények kiterjesztési tétele (V. fejezet, 9. pont) alapján létezik egyetlen olyan $\hat{u} : E \to F$ folytonos függvény, amely u-nak kiterjesztése. Ez az $\hat{u}$ függvény automatikusan lineáris, mert ha $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$, és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, valamint $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan M-ben haladó sorozatok, amelyekre $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ és $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, akkor $x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n)$ és $\alpha.x = \lim_{n\to\infty} (\alpha.x_n)$, így az $\hat{u}$ folytonossága és az átviteli elv alapján

$$\hat{u}(x + y) = \lim_{n\to\infty} u(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (u(x_n) + u(y_n)) = \hat{u}(x) + \hat{u}(y),$$
$$\hat{u}(\alpha.x) = \lim_{n\to\infty} u(\alpha.x_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha.u(x_n) = \alpha.\hat{u}(x).$$

Megmutatjuk, hogy $\|\hat{u}\| = \|u\|$. Ehhez jelölje B_E (illetve B_M) a 0 középpontú, 1 sugarú nyílt gömböt E-ben (illetve M-ben). Legyen $x \in \mathrm{B}_E$ rögzített, és vegyünk olyan M-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. A B_E halmaz az x-nek nyílt környezete, ezért tekinthetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $n > N$ természetes számra $x_n \in \mathrm{B}_E \cap M = \mathrm{B}_M$, így $\|u(x_n)\| \le \|u\|$. Ekkor

$$\|\hat{u}(x)\| = \left\| \lim_{n\to\infty} u(x_n) \right\| = \lim_{n\to\infty} \|u(x_n)\| \le \|u\|,$$

következésképpen

$$\|\hat{u}\| = \sup_{x \in \mathrm{B}_E} \|\hat{u}(x)\| \leq \|u\|.$$

Ugyanakkor az $\|\hat{u}\| \geq \|u\|$ egyenlőtlenség nyilvánvaló, tehát $\|\hat{u}\| = \|u\|$.

Ha $u, v \in \mathscr{L}(M;F)$, akkor $\hat{u} + \hat{v} \in \mathscr{L}(E;F)$ olyan operátor, amely az $u+v$-nek kiterjesztése, ezért a folytonos kiterjesztés egyértelműsége miatt $u \hat{+} v = \hat{u} + \hat{v}$ Ha $u \in \mathscr{L}(M;F)$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor $\alpha.\hat{u} \in \mathscr{L}(E;F)$ olyan operátor, amely $\alpha.u$-nak kiterjesztése, ezért a folytonos kiterjesztés egyértelműsége miatt $\alpha \hat{.} u = \alpha.\hat{u}$. Ez azt jelenti, hogy a $\mathscr{L}(M;F) \to \mathscr{L}(E;F)$; $u \mapsto \hat{u}$ leképezés olyan lineáris operátor, amely az operátornormák szerint izometria. Ez a leképezés nyilvánvalóan szürjektív, mert az $\mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(M;F)$; $u \mapsto u|_M$ leképzés triviálisan jobbinverze. ■

Természetesen az előző állítás nem alkalmazható nem triviális folytonos lineáris operátorok *létezésének* bizonyítására, mert végtelen dimenziós normált tér sűrű lineáris altere annyira bonyolult szerkezetű, hogy azon sem látszik nem triviális folytonos lineáris operátor létezése. Olyan kiterjesztési tételre volna szükség, amely *nem sűrű* lineáris altéren folytonos lineáris operátorra vonatkozik. Ilyen lesz a Hahn-Banach-tétel, amelynek kellő általánosságú megfogalmazásához be kell vezetnünk néhány fogalmat.

2.2. Szublineáris függvények és félnormák

2.2.1. Definíció. *Ha E valós vektortér, akkor egy $p : E \to \mathbb{R}$ függvényt* **szublineárisnak** *nevezünk, ha teljesülnek rá a következők.*

($\mathrm{SL_I}$) *Minden $E \ni x$-re és $\mathbb{R}_+ \ni \alpha$-ra $p(\alpha.x) = \alpha p(x)$* **(pozitív homogenitás)**.

($\mathrm{SL_{II}}$) *Minden $E \ni x, y$-ra $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$* **(szubadditivitás)**.

Megjegyezzük, hogy ha E valós vektortér és $p : E \to \mathbb{R}$ szublineáris függvény, akkor az ($\mathrm{SL_I}$) miatt $p(0) = 0$, ezért az ($\mathrm{SL_{II}}$) alkalmazásával $0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x)$ adódik, tehát $-p(-x) \leq p(x)$.

Most értelmezzük a szublineáris függvények legfontosabb típusát.

2.2.2. Definíció. *Ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor egy $p : E \to \mathbb{R}_+$ függvényt* **félnormának** *nevezünk E felett, ha teljesülnek rá a következők.*

($\mathrm{SN_I}$) *Minden $E \ni x$-re és $\mathbb{K} \ni \alpha$-ra $p(\alpha.x) = |\alpha| p(x)$.*

($\mathrm{SN_{II}}$) *Minden $E \ni x, y$-ra $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.*

Példák (szublineáris függvényekre és félnormákra).

1) Minden norma félnorma, és minden félnorma pozitív értékű szublineáris függvény.

2) Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett, és $H \subseteq E^*$ olyan nem üres funkcionálhalmaz, amelyre minden $x \in E$ esetén $\sup_{u \in H} |u(x)| < +\infty$. Ekkor az

$$E \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \sup_{u \in H} |u(x)|$$

leképezés félnorma E felett. Ez a félnorma pontosan akkor norma, ha minden $x \in E \setminus \{0\}$ vektorhoz létezik olyan $u \in H$, hogy $u(x) \neq 0$. Ez a tulajdonság ekvivalens azzal, hogy minden $E \ni x, y$-ra, $x \neq y$ esetén van olyan $u \in H$, amelyre $u(x) \neq u(y)$. Ha ez teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a H funkcionálhalmaz *szétválasztó* E felett.

3) Legyen E valós vektortér, és $H \subseteq E^*$ olyan nem üres funkcionálhalmaz, amelyre minden $x \in E$ esetén $\sup_{u \in H} u(x) < +\infty$. Ekkor az

$$E \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sup_{u \in H} u(x)$$

leképezés szublineáris függvény E felett. Speciálisan, minden lineáris funkcionál szublineáris függvény (az egy elemű H esete), tehát egy szublineáris függvény nem szükségképpen pozitív értékű.

4) Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett, és $C \subseteq E$ olyan halmaz, hogy minden $x \in E$ vektorhoz van olyan $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\alpha.x \in C$ (ilyenkor azt mondjuk, hogy a C halmaz *radiálisan elnyelő*). Ekkor $0 \in C$ és a

$$p_C : E \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+^* | \alpha^{-1}.x \in C\}$$

leképezés pozitív homogén (tehát $(\mathrm{SL_I})$ teljesül rá), továbbá

$$C \subseteq \{x \in E | p_C(x) \leq 1\}.$$

Ha a C halmaz még konvex is, akkor p_C szubadditív is (tehát $(\mathrm{SL_{II}})$ teljesül rá), és ekkor

$$\{x \in E | p_C(x) < 1\} \subseteq C.$$

Tehát ha $C \subseteq E$ konvex, radiálisan elnyelő halmaz, akkor p_C olyan szublineáris függvény, amelyre $\{x \in E | p_C(x) < 1\} \subseteq C \subseteq \{x \in E | p_C(x) \leq 1\}$.

Valóban, a C halmaz radiálisan elnyelő, ezért a 0 vektorhoz van olyan $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $0 = \alpha.0 \in C$. Ha $x \in E$ rögzített és $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, akkor minden $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ esetén, ha $\beta^{-1}.x \in C$, akkor $(\alpha.\beta)^{-1}.(\alpha.x) = \beta^{-1}.x \in C$, azaz $p_C(\alpha.x) \leq \alpha.\beta$, tehát $\alpha^{-1} p_C(\alpha.x) \leq p_C(x)$, vagyis $p_C(\alpha.x) \leq \alpha p_C(x)$. Ide x helyére $\alpha.x$-et és α helyére α^{-1}-et helyettesítve kapjuk, hogy $p_C(x) \leq \alpha^{-1} p_C(\alpha.x)$, vagyis $\alpha p_C(x) \leq p_C(\alpha.x)$. Ez azt jelenti, hogy p_C pozitív homogén. Ha $x \in C$, akkor $1.x \in C$, tehát $p_C(x) \leq 1$, így $C \subseteq \{x \in E | p_C(x) \leq 1\}$.

Tegyük fel, hogy C konvex is, és legyenek $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ olyanok, hogy $\alpha^{-1}.x \in C$ és $\beta^{-1}.y \in C$. Ekkor a C konvexitása miatt

$$(\alpha + \beta)^{-1}.(x + y) = \Big(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\Big).(\alpha^{-1}.x) + \Big(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\Big).(\beta^{-1}.y) \in C,$$

így $p_C(x + y) \leq \alpha + \beta$. Ebből következik, hogy $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$. Továbbá, $x \in E$ és $p_C(x) < 1$ esetén van olyan $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\alpha < 1$ és $\alpha^{-1}.x \in C$; ekkor $0 \in C$, $\alpha \in]0, 1[$ és a C konvexitása folytán $x = (1 - \alpha).0 + \alpha.(\alpha^{-1}.x) \in C$ teljesül, így $\{x \in E | p_C(x) < 1\} \subseteq C$.

(Ha C konvex és radiálisan elnyelő halmaz, akkor a p_C szublineáris függvényt a C halmaz *Minkowski-funkcionáljának* nevezzük.)

Megjegyezzük, hogy ha E valós vektortér, $p : E \to \mathbb{R}$ szublineáris függvény, és $u : E \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre minden $x \in E$ esetén $u(x) \leq p(x)$ teljesül, akkor minden $E \ni x$-re $-u(x) = u(-x) \leq p(-x)$, tehát fennállnak a

$$-p(-x) \leq u(x) \leq p(x)$$

egyenlőtlenségek.

2.3. A Hahn–Banach-tétel analitikus formája

2.3.1. Lemma. *Legyen E valós vektortér, $p : E \to \mathbb{R}$ szublineáris függvény, $M \subseteq E$ lineáris altér, és $u : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre minden $x \in M$ esetén $u(x) \leq p(x)$ teljesül. Ekkor $y \in E \setminus M$ esetén létezik olyan $\tilde{u} : M \oplus (\mathbb{R}.y) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és amelyre minden $x \in M \oplus (\mathbb{R}.y)$ esetén $\tilde{u}(x) \leq p(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. Az $M \oplus (\mathbb{R}.y) \subseteq E$ lineáris altér minden eleme egyértelműen előáll $x + \alpha.y$ alakban, ahol $x \in M$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ebből látható, hogy az $u : M \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál minden $\tilde{u} : M \oplus (\mathbb{R}.y) \to \mathbb{R}$ lineáris kiterjesztéséhez létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre $x \in M$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\tilde{u}(x + \alpha.y) = u(x) + c \cdot \alpha$ teljesül. Ugyanakkor az $M \oplus (\mathbb{R}.y) \subseteq E$ lineáris altér minden eleme *egyértelműen* áll elő $x + \alpha.y$ alakban, ahol $x \in M$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, ezért minden $c \in \mathbb{R}$ esetén jól értelmezett az

$$u_c : M \oplus (\mathbb{R}.y) \to \mathbb{R}; \quad x + \alpha.y \mapsto u(x) + c \cdot \alpha$$

leképezés, és ez nyilvánvalóan olyan lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése.

Tehát azt kell igazolni, hogy ha $u : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre minden $x \in M$ esetén $u(x) \leq p(x)$ teljesül, akkor létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $M \ni x$-re és $\mathbb{R} \ni \alpha$-ra $u(x) + c \cdot \alpha = u_c(x + \alpha.y) \leq p(x + \alpha.y)$. Ha c ilyen szám volna, akkor minden $M \ni x$-re $u(x) + c \leq p(x + y)$, így $c \leq p(x + y) - u(x)$, ami azt jelenti, hogy az $\{p(x + y) - u(x) | x \in M\} \subseteq \mathbb{R}$ halmaz alulról korlátos, és a $c_+ := \inf\{p(x + y) - u(x) | x \in M\}$ számra $c \leq c_+$ teljesül. Ugyanakkor c-re az is igaz, hogy minden $M \ni x$-re $u(x) - c \leq p(x - y)$, így $u(x) - p(x - y) \leq c$, ami azt jelenti, hogy az $\{u(x) - p(x - y) | x \in M\} \subseteq \mathbb{R}$ halmaz felülről korlátos, és a $c_- := \sup\{u(x) - p(x - y) | x \in M\}$ számra $c_- \leq c$ teljesül.

Megfordítva; megmutatjuk, hogy ha a $\{p(x + y) - u(x) | x \in M\}$ halmaz alulról, és az $\{u(x) - p(x - y) | x \in M\}$ halmaz felülről korlátos, továbbá $c_- \leq c_+$, akkor bármely $c \in [c_-, c_+]$ számra az u_c lineáris funkcionál olyan kiterjesztése u-nak, amelyre minden $x \in M \oplus (\mathbb{R}.y)$ esetén $u_c(x) \leq p(x)$ teljesül.

Legyen ugyanis $x \in M$ és $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Ekkor $\alpha^{-1}.x \in M$, ezért $c \leq c_+ \leq p(\alpha^{-1}.x + y) - u(\alpha^{-1}.x)$, így a p pozitív homogenitása és az u homogenitása miatt $c \leq \alpha^{-1}p(x + \alpha.y) - \alpha^{-1} \cdot u(x)$, amiből átrendezéssel $u_c(x + \alpha.y) = u(x) + c \cdot \alpha \leq p(x + \alpha.y)$ adódik. Ha viszont $x \in M$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\alpha < 0$, akkor $(-\alpha)^{-1}.x \in M$, ezért $c \geq c_- \geq u((-\alpha)^{-1}.x) - p((-\alpha)^{-1}.x - y)$, így a p pozitív homogenitása és az u homogenitása miatt $c \geq (-\alpha)^{-1} \cdot u(x) - (-\alpha)^{-1}p(x - (-\alpha).y)$, amiből átrendezéssel ismét $u_c(x + \alpha.y) = u(x) + c \cdot \alpha \leq p(x + \alpha.y)$ adódik.

Tehát azt kell bizonyítani, hogy a $\{p(x + y) - u(x) | x \in M\}$ halmaz alulról, és az $\{u(x) - p(x - y) | x \in M\}$ halmaz felülről korlátos, továbbá fennáll a $\sup\{u(x) - p(x - y) | x \in M\} \leq \inf\{p(x + y) - u(x) | x \in M\}$ egyenlőtlenség.

Legyenek $x_1, x_2 \in M$ tetszőlegesek; ekkor az u additivitása és a p szubadditivitása folytán $u(x_1) + u(x_2) = u(x_1 + x_2) \leq p(x_1 + x_2) = p((x_1 - y) + (x_2 + y)) \leq p(x_1 - y) + p(x_2 + y)$ teljesül, amiből átrendezéssel $u(x_1) - p(x_1 - y) \leq p(x_2 + y) - u(x_2)$ adódik. Ebből azonnal következik, hogy a $\{p(x + y) - u(x) | x \in M\}$ halmaz alulról korlátos (például $-p(-y)$ alsó korlát), és az $\{u(x) - p(x - y) | x \in M\}$ halmaz felülről korlátos (például $p(y)$ felső korlát), továbbá fennáll a $\sup\{u(x) - p(x - y) | x \in M\} \leq \inf\{p(x + y) - u(x) | x \in M\}$ egyenlőtlenség. ■

2.3.2. Tétel. (A Hahn-Banach-tétel analitikus formája) *Legyen E valós vektortér, $p : E \to \mathbb{R}$ szublineáris függvény, $M \subseteq E$ lineáris altér, és $u : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre minden $x \in M$ esetén $u(x) \le p(x)$ teljesül. Ekkor létezik olyan $\tilde{u} : E \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és amelyre minden $x \in M$ esetén $\tilde{u}(x) \le p(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{S}$ azon $v : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények halmazát, amelyekre $\mathrm{Dom}(v) \subseteq E$ lineáris altér, és v lineáris funkcionál, továbbá $M \subseteq \mathrm{Dom}(v)$, $v|_M = u$, valamint minden $\mathrm{Dom}(v) \ni x$-re $v(x) \le p(x)$. Természetesen $u \in \mathfrak{S}$ teljesül. Jelölje $\le$ a $\subseteq$ relációt az $\mathfrak{S}$ halmazon.

Megmutatjuk, hogy $\le$ *induktív rendezés* az $\mathfrak{S}$ halmaz felett. Ehhez legyen $(v_i)_{i\in I}$ olyan $\mathfrak{S}$-ben haladó nem üres rendszer, hogy minden $I \ni i, j$-re $v_i \le v_j$ vagy $v_j \le v_i$. Ekkor jól értelmezett az a $v : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(v) := \bigcup_{i\in I} \mathrm{Dom}(v_i)$, és minden $\mathrm{Dom}(v) \ni x$-re $v(x) := v_i(x)$, ahol $i \in I$ tetszőleges olyan index, amelyre $x \in \mathrm{Dom}(v_i)$. Könnyen látható, hogy $v \in \mathfrak{S}$, és nyilvánvaló, hogy minden $i \in I$ esetén $v_i \le v$, vagyis v felső korlátja a $(v_i)_{i\in I}$ rendszernek az $(\mathfrak{S}, \le)$ rendezett halmazban. (Sőt még az is igaz, hogy v a legkisebb felső korlátja, vagyis a szuprémuma a $(v_i)_{i\in I}$ rendszernek.) Ezért a $(\mathfrak{S}, \le)$ pár induktívan rendezett halmaz.

A Kuratowski-Zorn lemma alapján létezik maximális eleme az $(\mathfrak{S}, \le)$ rendezett halmaznak; legyen v ilyen elem. Ha létezne $y \in E \setminus \mathrm{Dom}(v)$ vektor, akkor az előző lemma alapján találhatunk olyan $\tilde{v} : \mathrm{Dom}(v) \oplus (\mathbb{R}.y) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált, amely a v kiterjesztése, és amelyre minden $\mathrm{Dom}(v) \oplus (\mathbb{R}.y) \ni x$-re $\tilde{v}(x) \le p(x)$ teljesül. Ekkor $\tilde{v} \in \mathfrak{S}$, $v \le \tilde{v}$ és $v \ne \tilde{v}$ teljesülne, ami ellentmond a v maximalitásának a $\le$ rendezés szerint. Ezért $\mathrm{Dom}(v) = E$, így $v \in \mathfrak{S}$ miatt $v : E \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és minden $x \in E$ esetén $v(x) \le p(x)$ teljesül. ■

2.4. A Hahn–Banach-tétel következményei

Nyilvánvaló, hogy ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor az E halmaz a $+$ művelettel és a $\mathbb{K} \times E \to E$ leképezés $\mathbb{R} \times E$-re vett leszűkítésével ellátva valós vektortér; ezt nevezzük az *E alatt fekvő valós vektortérnek*, és $E_{\mathbb{R}}$-rel jelöljük. Ha E normált tér, akkor $E_{\mathbb{R}}$ az E normájával ellátva nyilvánvalóan valós normált tér; ezt nevezzük az *E alatt fekvő valós normált térnek*.

2.4.1. Lemma. *Legyen E komplex vektortér. Ha $u : E \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál, akkor a $v : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \Re(u(x))$ leképezés olyan lineáris funkcionál az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér felett, amelyre minden $x \in E$ esetén $u(x) = v(x) - \mathbf{i}v(\mathbf{i}.x)$ teljesül. Megfordítva, ha $v : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ tetszőleges lineáris funkcionál az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér felett, akkor az $u : E \to \mathbb{C}$; $x \mapsto v(x) - \mathbf{i}v(\mathbf{i}.x)$ leképezés olyan lineáris funkcionál az E komplex vektortér felett, amelyre minden $x \in E$ esetén $v(x) = \Re(u(x))$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $u : E \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál és $x \in E$, akkor $\Re(u(\mathbf{i}.x)) = \Re(\mathbf{i}u(x)) = -\Im(u(x))$, következésképpen $u(x) = \Re(u(x)) - \mathbf{i}\Re(u(\mathbf{i}.x))$. Ebből következik az első állítás.

Legyen $v : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér felett, és vezessük be az $u : E \to \mathbb{C}$; $x \mapsto v(x) - \mathbf{i}v(\mathbf{i}.x)$ leképezést. Nyilvánvaló, hogy az u függvény additív és minden $x \in E$ esetén $v(x) = \Re(u(x))$ teljesül. Ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $x \in E$, akkor

$$u((\alpha + \mathbf{i}\beta).x) := v((\alpha + i\beta).x) - \mathbf{i}v(\mathbf{i}.(\alpha + \mathbf{i}\beta).x) =$$
$$= v(\alpha.x + \beta.(\mathbf{i}.x)) - \mathbf{i}v(\alpha.(\mathbf{i}.x) - \beta.x) = \alpha v(x) + \beta v(\mathbf{i}.x) - \alpha\mathbf{i}v(\mathbf{i}.x) + \beta\mathbf{i}v(x) =$$
$$= (\alpha + \mathbf{i}\beta)(v(x) - \mathbf{i}v(x)) =: (\alpha + \mathbf{i}\beta)u(x),$$

tehát $u : E \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál. ∎

2.4.2. Tétel. *Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett, p félnorma E felett, $M \subseteq E$ lineáris altér, és $u : M \to \mathbb{K}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre minden $x \in M$ esetén $|u(x)| \leq p(x)$ teljesül. Ekkor létezik olyan $\tilde{u} : E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és minden $E \ni x$-re $|\tilde{u}(x)| \leq p(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. Először arra az esetre bizonyítunk, amikor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ekkor a p félnorma szublineáris függvény az E valós vektortér felett, és minden $M \ni x$-re $u(x) \leq |u(x)| \leq p(x)$. Ezért a Hahn-Banach-tétel szerint van olyan $\tilde{u} : E \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és minden $E \ni x$-re $\tilde{u}(x) \leq p(x)$ teljesül. Ekkor $x \in E$ esetén $-\tilde{u}(x) = \tilde{u}(-x) \leq p(-x) = p(x)$, így $|\tilde{u}(x)| \leq p(x)$ is igaz.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ekkor a p félnorma szublineáris függvény az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér felett, és M lineáris altere az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortérnek, továbbá a $v : M \to \mathbb{R};\ x \mapsto \Re(u(x))$ leképezés olyan lineáris funkcionál, amelyre $x \in M$ esetén $v(x) := \Re(u(x)) \leq |u(x)| \leq p(x)$ teljesül. Ezért a Hahn-Banach-tétel szerint van olyan $\tilde{v} : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amely v-nek kiterjesztése, és minden $E \ni x$-re $\tilde{v}(x) \leq p(x)$ teljesül. Az előző lemma alapján az $\tilde{u} : E \to \mathbb{C};\ x \mapsto \tilde{v}(x) - \mathbf{i}\tilde{v}(\mathbf{i}.x)$ leképezés olyan lineáris funkcionál az E komplex vektortér felett, amelyre minden $x \in E$ esetén $\Re(\tilde{u}(x)) = \tilde{v}(x)$. Ezért $x \in M$ esetén $\Re(\tilde{u}(x)) = \tilde{v}(x) = v(x) = \Re(u(x))$, továbbá $i.x \in M$ miatt $-\Im(\tilde{u}(x)) = \Re(\mathbf{i}\tilde{u}(x)) = \Re(\tilde{u}(\mathbf{i}.x)) = \tilde{v}(\mathbf{i}.x) = v(\mathbf{i}.x) = \Re(u(\mathbf{i}.x)) = \Re(\mathbf{i}u(x)) = -\Im(u(x))$, vagyis $\Im(\tilde{u}(x)) = \Im(u(x))$. Ez azt jelenti, hogy $\tilde{u}$ az u-nak kiterjesztése. Ha $x \in E$, akkor van olyan $z \in \mathbb{C}$, hogy $|z| = 1$ és $\tilde{u}(x) = z|\tilde{u}(x)|$; ekkor kihasználva azt, hogy p félnorma

$$|\tilde{u}(x)| = \overline{z}\tilde{u}(x) = \tilde{u}(\overline{z}.x) = \Re(\tilde{u}(\overline{z}.x)) = \tilde{v}(\overline{z}.x) \leq p(\overline{z}.x) = |\overline{z}|p(x) = p(x)$$

adódik, tehát $\tilde{u} : E \to \mathbb{C}$ olyan leképezés, amelynek a létezését állítottuk. ∎

2.4.3. Következmény. *Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor E minden M lineáris alteréhez, és minden $u : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionálhoz létezik olyan $\tilde{u} : E \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és amelyre $\|u\| = \|\tilde{u}\|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $p : E \to \mathbb{R}_+;\ x \mapsto \|u\|\|x\|$. Ekkor p olyan félnorma E felett, amelyre minden $x \in M$ esetén $|u(x)| \leq \|u\|\|x\| =: p(x)$. Ezért az előző tétel alapján létezik olyan $\tilde{u} : E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és minden $x \in E$ esetén $|\tilde{u}(x)| \leq p(x) := \|u\|\|x\|$. Ekkor a funkcionálnorma definíciója szerint $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$, ugyanakkor $\|u\| \leq \|\tilde{u}\|$ nyilvánvalóan igaz, mert $\tilde{u}$ az u kiterjesztése, és az M egységgömbje része az E egységgömbjének. ∎

2.4.4. Következmény. *Legyen E normált tér, $M \subseteq E$ lineáris altér, F véges dimenziós normált tér, és $u : M \to F$ folytonos lineáris operátor. Ekkor létezik olyan $\tilde{u} : E \to F$ folytonos lineáris operátor, amely u-nak kiterjesztése.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy létezik $v : F \to \mathbb{K}^n$ lineáris bijekció. Minden $k < n$ természetes számra legyen $\mathrm{pr}_k : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ a k-adik kanonikus projekció. Ekkor minden

$k < n$ természetes számra $\mathrm{pr}_k \circ v \circ u : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, így vehetünk neki egy $\tilde{u}_k : E \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris kiterjesztését. Ekkor az

$$\tilde{u} : E \to F; \quad x \mapsto v^{-1}((\tilde{u}_k(x))_{k\in n})$$

leképezés az u-nak folytonos lineáris kiterjesztése. ■

2.4.5. Következmény. *Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett, $(x_i)_{i\in I}$ lineárisan független véges rendszer E-ben, és $(\alpha_i)_{i\in I}$ tetszőleges (ugyanolyan indexhalmazú) rendszer $\mathbb{K}$-ban. Ekkor létezik olyan $u : E \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, amelyre minden $i \in I$ esetén $u(x_i) = \alpha_i$ teljesül.*

Bizonyítás. Jelölje M az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer által generált lineáris alteret E-ben. Ekkor

$$w : \mathbb{K}^I \to M; \quad (\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i.x_i$$

olyan *lineáris bijekció*, amelyre minden $i \in I$ esetén $w(\mathbf{e}_i) = x_i$, ahol $\mathbf{e}_i \in \mathbb{K}^I$ az a függvény, amelyre $j \in I$ esetén $\mathbf{e}_i(j) = \delta_{i,j}$ (*Kronecker-szimbólum*). Tekintsük a

$$v : \mathbb{K}^I \to \mathbb{K}; \quad (\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i\alpha_i$$

leképezést, amely lineáris funkcionál $\mathbb{K}^I$ felett. Ekkor $v \circ w^{-1} : M \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, és folytonos az M normált altéren, hiszen M véges dimenziós. Ezért az előző állítás szerint létezik olyan $u : E \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, amely $v \circ w^{-1}$-nek kiterjesztése; ekkor $u \circ w = v$, következésképpen minden $i \in I$ esetén $u(x_i) = u(w(\mathbf{e}_i)) = v(\mathbf{e}_i) = \alpha_i$. ■

2.4.6. Következmény. *Ha E normált tér, és $x, y \in E$ olyan vektorok, hogy $x \neq y$, akkor létezik olyan $u \in E'$, amelyre $u(x) \neq u(y)$ (vagyis az E' halmaz szétválasztó E felett).*

Bizonyítás. Az állítás azzal ekvivalens, hogy $x \in E$ és $x \neq 0$ esetén van olyan $u \in E'$, amelyre $u(x) \neq 0$. Ez viszont az előző állításból következik, mert egy nem nulla vektorból álló egy tagú rendszer lineárisan független. ■

2.4.7. Tétel. *Ha E normált tér, akkor a $j_E : E \to E''$ kanonikus leképezés izometria, tehát minden $x \in E$ esetén fennáll az*

$$\|x\| = \sup_{u\in E',\ \|u\|\leq 1} |u(x)|$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $x \in E$ esetén van olyan $u \in E'$, amelyre $\|u\| \leq 1$ és $\|x\| = |u(x)|$ teljesül, tehát még

$$\|x\| = \max_{u\in E',\ \|u\|\leq 1} |u(x)|$$

is igaz. Valóban, ha $x = 0$, akkor $u := 0$ ilyen funkcionál, ezért feltehető, hogy $x \neq 0$. Legyen $x_0 := \|x\|^{-1}.x$, és vegyük a $\mathbb{K}.x_0 \subseteq E$ egy dimenziós lineáris alteret, valamint a $\mathbb{K}.x_0 \to \mathbb{K}$; $\alpha.x_0 \mapsto \alpha$ lineáris funkcionált. Ez nyilvánvalóan folytonos, és a funkcionálnormája egyenlő 1-gyel. Ezért van olyan $u \in E'$, amelyre minden $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén $u(\alpha.x_0) = \alpha$, és $\|u\| = 1$; ekkor $u(x) = u(\|x\|.x_0) = \|x\|$. ■

2.5. Reflexív Banach-terek

2.5.1. Definíció. *Az E normált teret* **reflexívnek** *nevezzük, ha a $j_E : E \to E''$ kanonikus leképezés szürjektív.*

Ha E reflexív normált tér, akkor a $j_E : E \to E''$ kanonikus leképezés izometrikus lineáris bijekció az E és E'' normált terek között, és E'' Banach-tér, ezért E is Banach-tér. Tehát minden reflexív normált tér Banach-tér, azonban léteznek nem reflexív Banach-terek (**18**. gyakorlat). A XII. fejezetben bevezetjük a *Hilbert-tereket*, amelyek a legfontosabb reflexív Banach-terek.

2.6. Gyakorlatok

1. A következő állítások ekvivalensek.

a) Ha E vektortér és $M \subseteq E$ lineáris altér, akkor létezik olyan $N \subseteq E$ lineáris altér, amelyre $E = M \oplus N$ (minden ilyen N alteret az M altér *algebrai komplementerének* nevezünk).

b) Ha E vektortér és $M \subseteq E$ lineáris altér, akkor az $\mathrm{id}_M : M \to M$ leképezés kiterjeszthető $E \to M$ lineáris operátorrá.

c) Ha E és F vektorterek, $M \subseteq E$ lineáris altér, és $u : M \to F$ lineáris operátor, akkor létezik olyan $\tilde{u} : E \to F$ lineáris operátor, amely u-nak kiterjesztése.

A Zorn-lemma alkalmazásával mutassuk meg, hogy a) igaz (következésképpen b) és c) is igaz).

(*Útmutatás.* a)⇒b) Legyen E vektortér és $M \subseteq E$ lineáris altér. Az a) alapján vegyünk olyan N lineáris alteret E-ben, amelyre $E = M \oplus N$. Jelölje u azt az $E \to M$ leképzést, amely minden $x \in E$ vektorhoz azt a $u(x) \in M$ elemet rendeli, amelyre $x - u(x) \in N$. Ekkor $u : E \to M$ lineáris operátor, és $u|_M = \mathrm{id}_M$, tehát u az id_M függvény lineáris kiterjesztése.

b)⇒c) Legyenek E és F vektorterek, $M \subseteq E$ lineáris altér, és $u : M \to F$ lineáris operátor. A b) alapján legyen $v : E \to M$ olyan lineáris operátor, amely az $M \to M$ identikus függvény kiterjesztése. Ekkor $u \circ v : E \to F$ az u lineáris kiterjesztése.

c)⇒a) Legyen E vektortér és $M \subseteq E$ lineáris altér. A c) alapján van olyan $u : E \to M$ lineáris operátor, amely az $\mathrm{id}_M : M \to M$ lineáris operátor kiterjesztése. Ekkor $N := \mathrm{Ker}(u)$ az M-nek algebrai komplementere.

Az a) bizonyításához jelölje $\mathfrak{S}_M$ azon $N \subseteq E$ lineáris alterek halmazát, amelyekre $M \cap N = \{0\}$. Jelölje $\leq$ a $\subseteq$ relációt az $\mathfrak{S}_M$ halmazon. Ekkor $(\mathfrak{S}_M, \leq)$ *induktívan rendezett* halmaz, hiszen ha $(N_i)_{i \in I}$ olyan nem üres rendszer $\mathfrak{S}_M$-ben, amelyre minden $I \ni i, j$-re $N_i \leq N_j$ vagy $N_j \leq N_i$, akkor $N := \bigcup_{i \in I} N_i \in \mathfrak{S}_M$ és minden $I \ni i$-re $N_i \leq N$. Ezért a Kuratowski-Zorn lemma alapján vehetünk egy $N \in \mathfrak{S}_M$ elemet, amely maximális a $\leq$ rendezés szerint. Ekkor $M \cap N = \{0\}$, és $M + N = E$, különben véve egy $x \in E \setminus (M + N)$ vektort, az $N + K.x$ lineáris altér tartalmazza N-t, nem egyenlő N-nel, és $N + K.x \in \mathfrak{S}_M$, ami ellentmond N maximalitásának $\leq$ szerint. Ezért $E = M \oplus N$, vagyis N algebrai komplementere M-nek.)

3. Ha T halmaz, F normált tér, és $f, g : T \to F$ függvények, akkor $f = g$ ekvivalens azzal, hogy minden $u \in F'$ funkcionálra $u \circ f = u \circ g$ teljesül. Ha M metrikus tér, F

normált tér, $f, g : M \to F$ folytonos függvények, és $D \subseteq M$ sűrű halmaz, akkor $f = g$ ekvivalens azzal, hogy minden $u \in F'$ funkcionálra $u \circ f = u \circ g$ teljesül a D halmazon.

4. Ha E normált tér, és $(e_i)_{i \in I}$ E-ben haladó rendszer, akkor a következő állítások ekvivalensek.

a) Minden $I \ni i$-re e_i nem eleme az $\{e_j | j \in I \setminus \{i\}\}$ halmaz által generált zárt lineáris altérnek.

b) Létezik olyan E'-ben haladó $(u_i)_{i \in I}$ rendszer, hogy minden $I \ni i, j$-re $u_i(e_j) = \delta_{i,j}$ teljesül.

(Normált térben *topologikusan függetlennek* nevezünk minden olyan $(e_i)_{i \in I}$ rendszert, amelyre ezek az állítások teljesülnek.)

Minden topologikusan független rendszer lineárisan független, de ennek megfordítása nem igaz. Véges dimenziós normált térben egy rendszer topologikus és lineáris függetlensége ekvivalens egymással.

(*Útmutatás.* a)⇒b) Legyen $i \in I$ rögzített, és jelölje E_i az $\{e_j | j \in I \setminus \{i\}\}$ halmaz által generált zárt lineáris alteret. Ekkor $e_i \notin E_i$ miatt az $E_i \oplus (\mathbb{K}.e_i) \to \mathbb{K};\ x + \alpha.e_i \mapsto \alpha$ lineáris funkcionál jól értelmezett, és a magja egyenlő E_i-vel, ami az 1. pont **11**. gyakorlat szerint zárt lineáris altér az $E_i \oplus (\mathbb{K}.e_i)$ normált altérben. Ezért az 1. pont **9**. gyakorlat alapján ez folytonos lineáris funkcionál, így a Hahn-Banach-tétel alkalmazásával vehetünk olyan $u_i \in E'$ funkcionált, amely ennek kiterjesztése. Ekkor $E_i \subseteq \mathrm{Ker}(u_i)$ és $u_i(e_i) = 1$. Ez azt jelenti, hogy minden $I \ni i$-re $\{u \in E' | (E_i \subseteq \mathrm{Ker}(u_i)) \wedge (u_i(e_i) = 1)\} \neq \emptyset$, így a kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{i \in I} \{u \in E' | (E_i \subseteq \mathrm{Ker}(u_i)) \wedge (u_i(e_i) = 1)\} \neq \emptyset,$$

és ha $(u_i)_{i \in I}$ eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor $(u_i)_{i \in I}$ eleget tesz b)-nek.)

5. Legyen p szublineáris függvény az E valós vektortér felett és $H_p := \{u \in E^* | (\forall x \in E) : u(x) \leq p(x)\}$. Ekkor minden $E \ni x$-hez létezik olyan $u \in H_p$, amelyre $u(x) = p(x)$, ezért $H_p \neq \emptyset$, és minden $x \in E$ esetén

$$p(x) = \sup_{u \in H_p} u(x).$$

(Ez azt mutatja, hogy a 3. példában bemutatott szublineáris függvény-típus az elképzelhető legáltalánosabb.)

(*Útmutatás.* Legyen $x \in E$ rögzített, és értelmezzük az $u_x : \mathbb{R}.x \to \mathbb{R};\ \alpha.x \mapsto \alpha p(x)$ lineáris funkcionált. Minden $z \in \mathbb{R}.x$ esetén $u_x(z) \leq p(z)$ teljesül, ezért a Hahn-Banach-tétel alapján van olyan $\tilde{u}_x \in E^*$, hogy $\tilde{u}_x$ az u_x kiterjesztése és $\tilde{u}_x \in H_p$. Ezért $H_p \neq \emptyset$ és fennállnak a $p(x) = u_x(x) = \tilde{u}_x(x) \leq \sup_{u \in H_p} u(x) \leq p(x)$ egyenlőtlenségek.)

6. Ha E normált tér, és $C \subseteq E$ olyan konvex elnyelő halmaz, amely *nyílt*, akkor a C halmaz p_C Minkowski-funkcionáljára $C = \{x \in E | p_C(x) < 1\}$ teljesül.

(*Útmutatás.* Azt tudjuk, hogy $\{x \in E | p_C(x) < 1\} \subseteq C$ (még akkor is, ha C nem nyílt). Legyen $x \in C$ rögzített, és $f : \mathbb{R}_+^* \to E; \alpha \mapsto \alpha^{-1}.x$. Ekkor f folytonos, tehát a C nyíltsága miatt az $\overset{-1}{f}\langle C \rangle$ halmaz nyílt $\mathbb{R}_+^*$-ban, és $1 \in \overset{-1}{f}\langle C \rangle$. Ezért van olyan $r \in]0, 1[$

valós szám, amelyre $]1-r,1+r[\subseteq \overset{-1}{f}\langle C\rangle$, így tetszőleges $\alpha\in]1-r,1[$ esetén $\alpha^{-1}.x\in C$, azaz $p_C(x)\leq\alpha<1$.)

7. Ha E normált tér $\mathbb{K}$ felett, $\Omega\subseteq E$ nem üres nyílt konvex halmaz, és $x\in E\setminus\Omega$, akkor létezik olyan $u\in E'$ és $\alpha\in\mathbb{R}$, hogy $\Re(u(x))$=1 és minden $y\in\Omega$ esetén $\Re(u(y))$<1.

(Ezt az állítást, illetve ennek általánosításait nevezzük a Hahn-Banach-tétel *geometriai alakjának*. A Hahn-Banach-tétel legáltalánosabb geometriai alakját majd az **EVT** 4.2.3. tételben fogalmazzuk meg.)

(*Útmutatás.* A probléma visszavezethető arra a speciális esetre, amikor $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ és $0\in\Omega$; ezt feltesszük a következőkben.

Minden 0-t tartalmazó nyílt halmaz elnyelő, ezért elkészíthető az Ω halmaz p_Ω Minkowski-funkcionálja. Ez szublineáris függvény E felett, és a **6**. gyakorlat szerint $\Omega=\{y\in E|p_\Omega(y)<1\}$. Az **5**. gyakorlat alapján van olyan $u:E\to\mathbb{R}$ lineáris funkcionál, hogy $p_\Omega(x)=u(x)$ és minden $y\in E$ esetén $u(y)\leq p_\Omega(y)$ teljesül. A 0 vektor belső pontja Ω-nak, ezért van olyan $r\in\mathbb{R}_+^*$, amelyre $\overline{\mathrm{B}}_r(0)\subseteq\Omega$. Ha $y\in E$ és $y\neq 0$, akkor $(r/\|y\|).y\in\Omega$, ezért a p_Ω pozitív homogenitása alapján $(r/\|y\|)p_\Omega(y)=p_\Omega((r/\|y\|).y)<1$, tehát $u(y)\leq p_\Omega(y)<(1/r)\|y\|$. Ebből következik, hogy minden $y\in E$ vektorra $|u(y)|\leq(1/r)\|y\|$, tehát u folytonos. Továbbá, az $\alpha:=u(x)\in\mathbb{R}$ számra teljesül az, hogy $\Omega=\{y\in E|p_\Omega(y)<1\}\subseteq\{y\in E|u(y)<1\}\subseteq\{y\in E|u(y)<\alpha\}$, hiszen $x\notin\Omega$ miatt $\alpha=u(x)=p_\Omega(x)\geq 1$.)

8. Legyen E normált tér, $K\subseteq E$ nem üres *kompakt konvex* halmaz, és $F\subseteq E$ nem üres *zárt konvex* halmaz. Ha $K\cap F=\emptyset$, akkor létezik olyan $u\in E'$ és $\alpha\in\mathbb{R}$, hogy minden $K\ni x$-re és $F\ni y$-ra $\Re(u(x))<\alpha<\Re(u(y))$.

(Ezt az állítást, illetve ennek általánosításait nevezzük a Hahn-Banach *szétválasztási tételnek*. A Hahn-Banach szétválasztási tétel legáltalánosabb alakját a XIV. fejezet 4. pontjában fogalmazzuk meg.)

(*Útmutatás.* A K kompaktsága és F zártsága alapján, a Weierstrass-féle minimum elvet alkalmazva kapjuk olyan $r\in\mathbb{R}_+^*$ létezését, hogy $(K+\mathrm{B}_r(0))\cap F=\emptyset$. Ekkor $K+\mathrm{B}_r(0)$ *nyílt* és konvex halmaz, ezért az

$$\Omega:=\{x-y|(x\in K+\mathrm{B}_r(0))\wedge(y\in F)\}$$

halmaz is nyílt és konvex, továbbá $0\notin\Omega$. A Hahn-Banach-tétel geometriai alakja (**7**. gyakorlat) szerint létezik olyan $u\in E'$ és $\beta\in\mathbb{R}$, hogy minden $\Omega\ni y$-ra $\Re(u(y))<\beta$ és $0=\Re(u(0))=\beta$; ami azt jelenti, hogy minden $\Omega\ni y$-ra $\Re(u(y))<0$. Ekkor a $v:E\to\mathbb{R};\ x\mapsto\Re(u(x))$ függvény additív és nem azonosan nulla (!), ezért rögzíthetünk olyan $z\in\mathrm{B}_r(0)$ vektort, amelyre $v(z)<0$. Ha $x\in K$ és $y\in F$, akkor $(x-z)-y\in\Omega$, ezért $v(x)<v(z)+v(y)$, amiből következik, hogy

$$\sup_{x\in K}v(x)\leq v(z)+\inf_{y\in F}v(y)<\inf_{y\in F}v(y).$$

Ha $\alpha\in\mathbb{R}$ olyan, hogy $\sup\limits_{x\in K}v(x)<\alpha<\inf\limits_{y\in F}v(y)$, akkor minden $K\ni x$-re és $F\ni y$-ra $\Re(u(x))<\alpha<\Re(u(y))$ teljesül.)

9. Legyen E normált tér és $C\subseteq E$ olyan *zárt konvex* halmaz, hogy $C\neq E$. Ekkor létezik olyan $(u_i)_{i\in I}$ rendszer E'-ben, és olyan $(\alpha_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $I \neq \emptyset$ és

$$C = \bigcap_{i\in I} (\Re \circ u_i)^{-1}\langle] \leftarrow, \alpha_i]\rangle,$$

vagyis minden $E \ni x$-re: $x \in C$ pontosan akkor teljesül, ha minden $i \in I$ esetén $\Re(u_i(x)) \leq \alpha_i$.

(*Útmutatás.* Legyen $I := \{(u,\alpha) \in E' \times \mathbb{R} | C \subseteq (\Re \circ u)^{-1}\langle] \leftarrow, \alpha]\rangle\}$. Ha $x \in E \setminus C$, akkor az $\{x\}$ kompakt konvex halmazra és a C zárt konvex halmazra alkalmazva a Hahn-Banach szétválasztási tételt (**8**. gyakorlat) kapjuk, hogy létezik olyan $(u,\alpha) \in E' \times \mathbb{R}$ pár, amelyre

$$\{x\} \subseteq (\Re \circ u)^{-1}\langle] \leftarrow, \alpha[\rangle, \quad C \subseteq (\Re \circ u)^{-1}\langle]\alpha, \rightarrow [\rangle.$$

Ekkor $(-u, -\alpha) \in I$ (így $I \neq \emptyset$), továbbá $x \notin (\Re \circ (-u))^{-1}\langle] \leftarrow, -\alpha[\rangle$. Nyilvánvaló, hogy $C \subseteq (\Re \circ u)^{-1}\langle]\alpha, \rightarrow [\rangle = (\Re \circ (-u))^{-1}\langle] \leftarrow, -\alpha[\rangle \subseteq (\Re \circ (-u))^{-1}\langle] \leftarrow, -\alpha]\rangle$. Ez azt jelenti, hogy $E \setminus C \subseteq E \setminus \bigcap_{(u,\alpha)\in I} (\Re \circ u)^{-1}\langle] \leftarrow, \alpha]\rangle$, amiből nyilvánvalóan következik, hogy $\bigcap_{(u,\alpha)\in I} (\Re \circ u)^{-1}\langle] \leftarrow, \alpha]\rangle \subseteq C$.)

10. (*Klasszikus momentumtétel.*) Ha E normált tér $\mathbb{K}$ felett, $H \subseteq E$ tetszőleges halmaz, és $u : H \to \mathbb{K}$ tetszőleges függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek.

a) Létezik olyan E feletti folytonos lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése.

b) Létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden H-ban haladó $(x_i)_{i\in I}$ véges rendszerre, és minden $\mathbb{K}$-ban haladó, ugyanolyan indexhalmazú $(\alpha_i)_{i\in I}$ rendszerre teljesül az

$$\Big| \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i) \Big| \leq C \Big\| \sum_{i\in I} \alpha_i . x_i \Big\|$$

egyenlőtlenség.

(*Útmutatás.* a)⇒b) Nyilvánvaló, mert ha $v \in E'$ az u-nak kiterjesztése, és $(x_i)_{i\in I}$ H-ban haladó véges rendszer, és $(\alpha_i)_{i\in I}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszer, akkor

$$\Big| \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i) \Big| = \Big| v\Big(\sum_{i\in I} \alpha_i . x_i \Big) \Big| \leq \|v\| \Big\| \sum_{i\in I} \alpha_i . x_i \Big\|,$$

tehát bármely $C \geq \|v\|$ valós szám eleget tesz a b) követelményének.

b)⇒a) Vegyünk olyan $C \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre teljesülnek a b) feltételei, és jelölje M a H halmaz által generált lineáris alteret. Ha $(x_i)_{i\in I}$ H-ban haladó véges rendszer, $(\alpha_i)_{i\in I}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszer, és $\sum_{i\in I} \alpha_i . x_i = 0$, akkor $\sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i) = 0$. Ebből következik, hogy létezik egyetlen olyan $v : M \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, amelyre teljesül az, hogy minden $(x_i)_{i\in I}$ H-ban haladó véges rendszerre és $(\alpha_i)_{i\in I}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszerre $v\Big(\sum_{i\in I} \alpha_i . x_i \Big) = \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i)$. A C-re vonatkozó feltétel szerint v folytonos (és $\|v\| \leq C$), így a Hahn-Banach-tétel szerint v-nek létezik folytonos lineáris kiterjesztése E-re. Egy ilyen kiterjesztés az u-nak is folytonos lineáris kiterjesztése.)

11. Létezik olyan $u : l^\infty_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amely $\|\cdot\|_\infty$ szerint folytonos, $\|u\| = 1$, és minden $l^\infty_\mathbb{R} \ni \mathbf{s}$-re

$$\liminf(\mathbf{s}) \leq u(\mathbf{s}) \leq \limsup(\mathbf{s})$$

teljesül.

(Minden ilyen tulajdonságú lineáris funkcionált *Banach-limesznek* nevezünk $l^\infty_\mathbb{R}$ felett. Világos, hogy ha u Banach-limesz $l^\infty_\mathbb{R}$ felett, akkor minden $\mathbf{s}$ konvergens valós számsorozatra $u(\mathbf{s}) = \lim(\mathbf{s})$, tehát u a klasszikus limesz-operáció lineáris és folytonos kiterjesztése az összes korlátos valós sorozatok terére.)

(*Útmutatás.* Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen

$$u_n : l^\infty_\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \mathbf{s} \mapsto \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k).$$

Világos, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén u_n folytonos lineáris funkcionál $l^\infty_\mathbb{R}$ felett. Legyen $M := \{\mathbf{s} \in l^\infty_\mathbb{R} | \lim\limits_{n\to\infty} u_n(\mathbf{s})$ létezik$\}$, és

$$u_M : M \to \mathbb{R}; \quad \mathbf{s} \mapsto \lim_{n\to\infty} u_n(\mathbf{s}),$$

vagyis u_M az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti limeszfüggvénye. Világos, hogy $u_M : M \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál. Legyen

$$p : l^\infty_\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \mathbf{s} \mapsto \limsup(\mathbf{s}).$$

Könnyen látható, hogy p szublineáris függvény $l^\infty_\mathbb{R}$ felett. Megmutatjuk, hogy minden $\mathbf{s} \in M$ esetén $u_M(\mathbf{s}) \leq p(\mathbf{s})$. Tekintettel arra, hogy $\mathbf{s} \in M$ esetén $u_M(\mathbf{s}) := \lim\limits_{n\to\infty} u_n(\mathbf{s}) = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n(\mathbf{s})$, ezért elegendő azt igazolni, hogy ha $\mathbf{s} \in \mathbf{l}^\infty_\mathbb{R}$, akkor $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n(\mathbf{s}) \leq \limsup(\mathbf{s})$. Ennek bizonyításához legyen $\mathbf{s} \in \mathbf{l}^\infty_\mathbb{R}$ rögzített, és vegyünk tetszőleges $c > \limsup(\mathbf{s})$ valós számot. Ekkor választhatunk olyan $\mathbb{N} \ni N$-t, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$, $k > N$ esetén $c > \mathbf{s}(k)$. Ha $n > N$ tetszőleges természetes szám, akkor

$$u_n(\mathbf{s}) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N} \mathbf{s}(k) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n} \mathbf{s}(k) \leq$$
$$\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N} \mathbf{s}(k) + \left(\frac{n-N}{n+1}\right)c.$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés c-hez tart, ha $n \to \infty$, ezért $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n(\mathbf{s}) \leq c$. Ebből következik, hogy $u_M(\mathbf{s}) \leq p(\mathbf{s})$.

Most a Hahn-Banach-tételt alkalmazzuk, tehát vehetünk olyan $u : l^\infty_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált, amely u_M-nek kiterjesztése, és amelyre minden $\mathbf{s} \in l^\infty_\mathbb{R}$ esetén $u(\mathbf{s}) \leq p(\mathbf{s}) := \limsup(\mathbf{s})$ teljesül. Ha $\mathbf{s} \in l^\infty_\mathbb{R}$, akkor $-u(\mathbf{s}) = u(-\mathbf{s}) \leq \limsup(-\mathbf{s}) = -\liminf(\mathbf{s})$, tehát $\liminf(\mathbf{s}) \leq u(\mathbf{s}) \leq \limsup(s)$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{s} \in l^\infty_\mathbb{R}$ esetén $-\|\mathbf{s}\|_\infty \leq \liminf(\mathbf{s}) \leq \limsup(\mathbf{s}) \leq \|\mathbf{s}\|_\infty$, ezért $|u(\mathbf{s})| \leq \|\mathbf{s}\|_\infty$, így u folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint, és $\|u\| \leq 1$. Ha $\mathbf{1}$ jelöli az azonosan 1 sorozatot, akkor $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$ és $u(\mathbf{1}) = \lim(\mathbf{1}) = 1$, tehát $\|u\| \geq 1$.)

12. A VI. fejezet, 1. pontjának, **5**. gyakorlatában értelmezett $l^1_{\mathbb{R}} \to (l^\infty_{\mathbb{R}})'$ lineáris izometria *nem szürjektív.*

(*Útmutatás.* Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen $\mathbf{e}_n$ az a számsorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_n(m) = \delta_{m,n}$. Legyen u Banach-limesz $\mathbf{l}^\infty_{\mathbb{R}}$ felett (**11**. gyakorlat). Ha létezne olyan $\mathbf{s} \in l^1_{\mathbb{R}}$, hogy minden $l^\infty_{\mathbb{R}} \ni \mathbf{s}'$-re $u(\mathbf{s}') = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k)$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $0 = \lim(\mathbf{e}_n) = u(\mathbf{e}_n) = \mathbf{s}(n)$, vagyis $\mathbf{s} = 0$, így $u = 0$, holott $\|u\| = 1$. Ez azt jelenti, hogy a kitüntetett $l^1_{\mathbb{R}} \to (l^\infty_{\mathbb{R}})'$ lineáris izometria értékkészletének egyetlen Banach-limesz sem lehet az eleme. Ugyanakkor a **11**. gyakorlat szerint létezik Banach-limesz $l^\infty_{\mathbb{R}}$ felett.)

13. Ha E normált tér, akkor egy $M \subseteq E$ lineáris altér pontosan akkor sűrű, ha minden $u \in E'$ funkcionálra: $M \subseteq \mathrm{Ker}(u)$ esetén $u = 0$.

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy M nem sűrű, és legyen $y \in E \setminus \overline{M}$. Tekintsük az $u : \overline{M} \oplus (\mathbb{K}.y) \to \mathbb{K};\ x + \alpha.y \mapsto \alpha$ lineáris funkcionált. Az 1. pont, **11**. gyakorlat szerint $\overline{M} \oplus (\mathbb{K}.y)$ zárt lineáris altér E-ben, és $\overline{M}$ zárt E-ben, így $\overline{M}$ zárt lineáris altere az $\overline{M} \oplus (\mathbb{K}.y)$ normált altérnek. Ugyanakkor $\mathrm{Ker}(u) = \overline{M}$, tehát az 1. pont, **10**. gyakorlat szerint u folytonos. A Hahn-Banach-tétel alapján van olyan $\tilde{u} \in E'$, amely kiterjesztése u-nak; ekkor $\tilde{u} \neq 0$, de $M \subseteq \mathrm{Ker}(\tilde{u})$.)

14. Ha E normált tér (illetve Banach-tér) $\mathbb{K}$ felett, akkor létezik olyan M teljes metrikus tér, hogy az $M \to \mathbb{K}$ folytonos korlátos függvények sup-normával ellátott normált terének van olyan F normált altere (illetve zárt normált altere), amely E-vel izometrikusan izomorf.

(*Útmutatás.* Jelölje M a 0 középpontú, 1 sugarú zárt gömböt E'-ben, a funkcionálnorma által meghatározott metrikával ellátva. Ekkor M zárt halmaz az E' Banachtérben, tehát M teljes metrikus tér. Minden $E \ni x$-re legyen $j(x) := j_E(x)|_M$, vagyis $j(x) : M \to \mathbb{K};\ u \mapsto u(x)$. Ekkor $j : E \to \mathscr{C}^b(M;\mathbb{K})$ lineáris operátor, és minden $E \ni x$-re $\|j(x)\| := \sup_{u \in M} |u(x)| = \|x\|$, vagyis j izometria. Ezért $F := \mathrm{Im}(j)$ olyan lineáris altere $\mathscr{C}^b(M;\mathbb{K})$-nek, amelynek a létezését állítottuk.)

15. (*Normált tér teljesítése.*) Legyen E normált tér.

a) Létezik olyan $(\hat{E}, j)$ pár, hogy $\hat{E}$ Banach-tér, $j : E \to \hat{E}$ lineáris izometria, és $\mathrm{Im}(j)$ sűrű altér $\hat{E}$-ban.

b) Ha $(\hat{E}_1, j_1)$ és $(\hat{E}_2, j_2)$ olyan párok, hogy $\hat{E}_1$ és $\hat{E}_2$ Banach-terek, valamint $j_1 : E \to \hat{E}_1$ és $j_2 : E \to \hat{E}_2$ lineáris izometriák, valamint $\mathrm{Im}(j_1)$ sűrű $\hat{E}_1$-ben és $\mathrm{Im}(j_2)$ sűrű $\hat{E}_2$-ben, akkor létezik egyetlen olyan $u : \hat{E}_1 \to \hat{E}_2$ izometrikus lineáris bijekció, amelyre $u \circ j_1 = j_2$.

(Az E normált tér *teljes burkának* nevezünk minden olyan $(\hat{E}, j)$ párt, amely rendelkezik az a)-ban megfogalmazott tulajdonságokkal.)

(*Útmutatás.* a) A $j_E : E \to E''$ leképezés lineáris izometria, és E'' Banach-tér, ezért az $(\overline{\mathrm{Im}(j_E)}, j_E)$ pár teljes burka E-nek.

b) A feltételek mellett a $j_2 \circ {j_1}^{-1} : \mathrm{Im}(j_1) \to \hat{E}_2$ leképezés lineáris izometria, $\hat{E}_2$ teljes, és $\mathrm{Im}(j_1)$ sűrű $\hat{E}_1$-ben. Ezért létezik egyetlen olyan $u : \hat{E}_1 \to \hat{E}_2$ folytonos lineáris operátor, amely $j_2 \circ {j_1}^{-1}$-nek kiterjesztése. Az u operátor nyilvánvalóan izometria, és $u \circ j_1 = j_2$ teljesül. A j_1 és j_2 felcserélésével kapjuk olyan $v : \hat{E}_2 \to \hat{E}_1$ folytonos lineáris operátor létezését, amely $j_1 \circ {j_2}^{-1}$-nek kiterjesztése. Világos, hogy $v \circ u = \mathrm{id}_{\hat{E}_1}$ és $u \circ v = \mathrm{id}_{\hat{E}_2}$, ezért u bijekció.)

16. Az $(\hat{E}, j)$ pár pontosan akkor teljes burka az E normált térnek, ha $\hat{E}$ Banach-tér, $j : E \to \hat{E}$ lineáris izometria, és teljesül rá a következő állítás.

(C) Minden F Banach-térhez, és minden $u : E \to F$ folytonos lineáris operátorhoz létezik egyetlen olyan $\hat{u} : \hat{E} \to F$ folytonos lineáris operátor, amelyre $\hat{u} \circ j = u$.

(*Útmutatás.* Legyen $(\hat{E}, j)$ teljes burka az E normált térnek. Rögzítsünk egy F Banach-teret, és egy $u : E \to F$ folytonos lineáris operátort. Ekkor $u \circ j^{-1} : \mathrm{Im}(j) \to F$ folytonos lineáris operátor, F teljes, és $\mathrm{Im}(j)$ sűrű $\hat{E}$-ben, ezért ennek létezik egyetlen folytonos lineáris kiterjesztése $\hat{E}$-re; erre az $\hat{u} \in \mathscr{L}(\hat{E}; F)$ operátorra $\hat{u} \circ j = u$ nyilvánvalóan teljesül.

Megfordítva, legyen $(\hat{E}, j)$ olyan pár, amelyre a (C) állítás igaz. Ha $v \in (\hat{E})'$ olyan, hogy $\mathrm{Im}(j) \subseteq \mathrm{Ker}(v)$, akkor $v \circ j = 0$, ugyanakkor $0 \in (\hat{E})'$ szintén olyan, hogy $0 \circ j = 0$, így a (C)-ben szereplő egyértelműségi feltétel alapján $v = 0$. A **13**. gyakorlat alapján $\mathrm{Im}(j)$ sűrű $\hat{E}$-ban, így $(\hat{E}, j)$ teljes burka E-nek.)

17. Legyenek E és F normált terek.

a) Ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$, akkor az $u' : F' \to E'$; $f \mapsto f \circ u$ leképezés folytonos lineáris operátor, és az $\mathscr{L}(E; F) \to \mathscr{L}(F'; E')$; $u \mapsto u'$ leképezés olyan lineáris operátor, amely izometria az operátornormák szerint.

b) Ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$, akkor az $u'' := (u')' \in \mathscr{L}(E''; F'')$ operátorra teljesül az $u'' \circ j_E = j_F \circ u$ egyenlőség, vagyis ha E-t (illetve F-t) a j_E (illetve j_F) lineáris izometria által azonosítjuk az E'' (illetve F'') egy normált alterével, akkor u'' az u folytonos lineáris kiterjesztése. Továbbá, ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$, akkor $\|u''\| = \|u\|$

c) Ha G szintén normált tér, $u \in \mathscr{L}(E; F)$ és $v \in \mathscr{L}(F; G)$, akkor $(v \circ u)' = u' \circ v'$.

d) Ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$, akkor az u' operátor pontosan akkor injektív, ha $\mathrm{Im}(u)$ sűrű F-ben.

(Ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$, akkor az $u' \in \mathscr{L}(F'; E')$ operátort az u *topologikus duálisának*, míg az $u'' \in \mathscr{L}(E''; F'')$ operátort az u *topologikus biduálisának* nevezzük.)

(*Útmutatás.* Ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$, akkor $\|u'\| = \|u\|$, mert

$$\|u'\| := \sup_{f \in F',\ \|f\| \le 1} \|u'(f)\| = \sup_{f \in F',\ \|f\| \le 1} \left(\sup_{x \in E,\ \|x\| \le 1} |f(u(x))| \right) =$$

$$= \sup_{x \in E,\ \|x\| \le 1} \left(\sup_{f \in F',\ \|f\| \le 1} |f(u(x))| \right) = \sup_{x \in E,\ \|x\| \le 1} \|u(x)\| =: \|u\|.$$

Bebizonyítjuk a d) állítást. Ha $\mathrm{Im}(u)$ sűrű F-ben, és $f \in F'$ olyan, hogy $u'(f) = 0$, akkor $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(f) = \{y \in F | f(y) = 0\}$, így az egyenlőségek folytatásának elve alapján $f = 0$, tehát u' injektív. Megfordítva, ha $\mathrm{Im}(u)$ nem sűrű F-ben, akkor a **11**. gyakorlat szerint van olyan $f \in F'$, hogy $f \neq 0$ és $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, tehát $u'(f) := f \circ u = 0$, vagyis u' nem injektív.)

18. Az $l^1_{\mathbb{R}}$ Banach-tér nem reflexív.

(*Útmutatás.* Jelölje $u : l^\infty_{\mathbb{R}} \to (l^1_{\mathbb{R}})'$ az 1. pont **4**. gyakorlatban értelmezett izometrikus lineáris bijekciót, és tekintsük az $u' : (l^1_{\mathbb{R}})'' \to (l^\infty_{\mathbb{R}})'$ topologikus duális operátort, amely szintén izometrikus lineáris bijekció. Jelölje $v : l^1_{\mathbb{R}} \to (l^\infty_{\mathbb{R}})'$ az 1. pont **5**. gyakorlatban értelmezett lineáris izometriát, és képezzük az $(u')^{-1} \circ v : l^1_{\mathbb{R}} \to (l^1_{\mathbb{R}})''$ leképezést. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez megegyezik az $l^1_{\mathbb{R}}$ és az $(l^1_{\mathbb{R}})''$ közötti kanonikus lineáris izometriával. A **12**. gyakorlatban láttuk, hogy v nem szürjektív, ezért az $(u')^{-1} \circ v$ operátor sem lehet szürjektív, így $l^1_{\mathbb{R}}$ nem reflexív.)

19. Legyen E vektortér a K test felett, E^* az E algebrai duálisa, és $E^{**} := (E^*)^*$ az E^* algebra duálisa, amit az E *algebrai biduálisának* nevezünk. Ekkor minden $E \ni x$-re a $j(x) : E^* \to K;\ u \mapsto u(x)$ leképezés lineáris funkcionál, tehát $j(x) \in E^{**}$. Továbbá az $E \to E^{**};\ x \mapsto j(x)$ leképezés lineáris *injekció.* Ha E véges dimenziós, akkor a j leképezés lineáris *bijekció*, tehát szürjektív is.

(*Útmutatás.* A j operátor injektivitásának bizonyításához azt kell megmutatni, hogy ha $x \in E$ és $x \neq 0$, akkor $j(x) \neq 0$, vagyis létezik olyan $u \in E^*$, hogy $u(x) \neq 0$. Ez viszont így van, mert az **1**. gyakorlat szerint $x \in E$, $x \neq 0$ esetén a $K.x \to K;\ \alpha \mapsto \alpha.x$ lineáris funkcionál kiterjeszthető egy $u : E \to K$ lineáris funkcionállá, és világos, hogy $u(x) = 1$.)

3. fejezet

Folytonos multilineáris operátorok

3.1. Multilineáris operátorok

Ha $(E_i)_{i\in I}$ véges vektortér rendszer és F vektortér (mind ugyanazon test felett), akkor képezhető a $\prod_{i\in I} E_i$ lineáris szorzattér, és a $\prod_{i\in I} E_i \to F$ függvények halmazának kijelölhető egy nevezetes részhalmaza; a lineáris operátorok $\mathbf{L}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ halmaza. Azonban ekkor mód van arra, hogy egy másik függvénytípust is értelmezzünk; a $\prod_{i\in I} E_i \to F$ *multilineáris operátorok* típusát.

A definíció előtt emlékeztetünk arra, hogy ha $(E_i)_{i\in I}$ halmazrendszer, $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$, és $k \in I$, akkor $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}$ jelöli azt az $E_k \to \prod_{i\in I} E_i$ függvényt, amely minden $x \in E_k$ ponthoz azt a rendszert rendeli a $\prod_{i\in I} E_i$ szorzathalmazból, amelynek i-edik komponense $\mathfrak{a}_i$, ha $i \in I$ és $i \neq k$, továbbá a k-adik komponense x. Fontos az, hogy az $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : E_k \to \prod_{i\in I} E_i$ injekció *nem függ* az $\mathfrak{a}$ pont k-adik komponensétől, tehát ha $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}'_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ olyan pont, amelyre minden $i \in I \setminus \{k\}$ esetén $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}'_i$, akkor $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} = \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'}$.

3.1.1. Definíció. *Legyen $(E_i)_{i\in I}$ véges vektortér rendszer, és F vektortér a K test felett. Egy $u : \prod_{i\in I} E_i \to F$ függvényt* **multilineáris operátornak** *nevezünk, ha minden $k \in I$ és minden $\mathfrak{a} \in \prod_{i\in I} E_i$ esetén az $u \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : E_k \to F$ leképezés lineáris operátor. A $\prod_{i\in I} E_i \to F$ multilineáris operátorok halmazát $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ jelöli. A $\prod_{i\in I} E_i \to K$ multilineáris operátorokat* **multilineáris funkcionáloknak** *nevezzük. Ha E és F vektorterek, akkor $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathbf{Mult}(E^n; F)$ halmazt az $\mathbf{L}_n(E; F)$ szimbólummal is jelöljük.*

Nyilvánvaló, hogy ha $(E_i)_{i\in I}$ vektorterek rendszere és F vekortér a K test felett, akkor $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ lineáris altere az $\mathscr{F}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ függvénytérnek, hiszen ha

$u, v \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ és $\lambda \in K$, akkor minden $k \in I$ és $\mathfrak{a} \in \prod_{i\in I} E_i$ esetén

$$(u+v)\circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} = u\circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} + v\circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} \in \mathbf{L}(E_k; F),$$

$$(\lambda.u)\circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} = \lambda.(u\circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}) \in \mathbf{L}(E_k; F),$$

ahol azt használjuk ki, hogy $\mathbf{L}(E_k; F)$ lineáris altere az $\mathscr{F}(E_k; F)$ függvénytérnek. Ezért a továbbiakban a $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ halmazt a pontonként értelmezett műveletekkel ellátva vektortérnek fogjuk tekinteni.

3.1.2. Lemma. *Legyen $(E_i)_{i\in I}$ vektorterek rendszere, $k \in I$ és $z \in E_k$. Értelmezzük a*

$$\tau_{k,z} : \prod_{i\in I\setminus\{k\}} E_i \to \prod_{i\in I} E_i$$

függvényt úgy, hogy minden $x = (x_i)_{i\in I\setminus\{k\}}$ esetén $\tau_{k,z}(x) \in \prod_{i\in I} E_i$ az a rendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén

$$(\tau_{k,z}(x))_i := \begin{cases} x_i & , \text{ha } i \in I\setminus\{k\}, \\ z & , \text{ha } i = k. \end{cases}.$$

Ha F vektortér és $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$, akkor $u\circ\tau_{k,z} \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I\setminus\{k\}} E_i; F\Big)$.

Bizonyítás. Legyen $j \in I\setminus\{k\}$ és $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I\setminus\{k\}} \in \prod_{i\in I\setminus\{k\}} E_i$. Azt kell igazolni, hogy az $(u\circ\tau_{k,z})\circ \mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}} : E_j \to F$ leképezés lineáris operátor.
Ehhez vegyünk egy $x \in E_j$ vektort és tetszőleges $i \in I$ indexet. Ekkor a definíció szerint

$$((\tau_{k,z}\circ \mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}})(x))_i = \begin{cases} (\mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}}(x))_i & , \text{ha } i \neq k \\ z & , \text{ha } i = k, \end{cases}$$

ami azt jelenti, hogy

$$((\tau_{k,z}\circ \mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}})(x))_i = \begin{cases} \mathfrak{a}_i & , \text{ha } i \neq k \text{ és } i \neq j \\ x & , \text{ha } i \neq k \text{ és } i = j \\ z & , \text{ha } i = k, \end{cases}.$$

De $j \neq k$ miatt az $(i \neq k) \wedge (i = j)$ és $i = j$ kijelentések ekvivalensek, ezért

$$((\tau_{k,z}\circ \mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}})(x))_i = \begin{cases} \mathfrak{a}_i & , \text{ha } i \neq k \text{ és } i \neq j \\ x & , \text{ha } i = j \\ z & , \text{ha } i = k, \end{cases}.$$

Ha most bevezetjük azt az $\mathfrak{a}' \in \prod_{i\in I} E_i$ rendszert, amelyre minden $i \in I$ esetén

$$\mathfrak{a}'_i := \begin{cases} \mathfrak{a}_i & , \text{ha } i \neq k \\ z & , \text{ha } i = k \end{cases},$$

akkor világos, hogy minden $x \in E_j$ és $i \in I$ esetén

$$(\mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}'}(x))_i = \begin{cases} \mathfrak{a}'_i & , \text{ha } i \neq j \\ x & , \text{ha } i = j \end{cases},$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$(\mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}'}(x))_i = \begin{cases} \mathfrak{a}_i & , \text{ha } i \neq j \text{ és } i \neq k \\ z & , \text{ha } i \neq j \text{ és } i = k \\ x & , \text{ha } i = j \end{cases}.$$

De $j \neq k$ miatt az $(i \neq j) \wedge (i = k)$ és $i = k$ kijelentések ekvivalensek, ezért minden $x \in E_j$ és $i \in I$ esetén

$$(\mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}'}(x))_i = \begin{cases} \mathfrak{a}_i & , \text{ha } i \neq j \text{ és } i \neq k \\ z & , \text{ha } i = k \\ x & , \text{ha } i = j \end{cases}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\tau_{k,z} \circ \mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}} = \mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}'}$, következésképpen

$$(u \circ \tau_{k,z}) \circ \mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}} = u \circ \mathrm{in}_{j,\mathfrak{a}'} \in \mathbf{L}(E_j; F),$$

amit bizonyítani kellett. ■

3.1.3. Állítás. **(Multilineáris operátor multihomogenitása)** *Legyen $(E_i)_{i\in I}$ vektorterek véges rendszere, továbbá F vektortér a K test felett, és $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$. Ha $(\lambda_i)_{i\in I} \in K^I$ és $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$, akkor*

$$u((\lambda_i.\mathfrak{a}_i)_{i\in I}) = \Big(\mathrm{P}_{i\in I} \lambda_i\Big).u((\mathfrak{a}_i)_{i\in I}).$$

Bizonyítás. Az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ehhez jelölje $\mathscr{A}(n)$ a következő kijelentés rövidítését:

"Vektorterek minden $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszerére, ha $\mathrm{Card}(I) = n$, akkor minden F vektortérre, minden $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ függvényre, valamint minden $(\lambda_i)_{i\in I} \in K^I$ és $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ rendszerre: $u((\lambda_i.\mathfrak{a}_i)_{i\in I}) = \Big(\mathrm{P}_{i\in I} \lambda_i\Big).u((\mathfrak{a}_i)_{i\in I})$."

Azt kell igazolni, hogy $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\mathscr{A}(n)$ teljesül. Az $\mathscr{A}(1)$ állítás azért igaz, mert $\mathrm{Card}(I) = 1$ és $I = \{i\}$ esetén $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ azonosul $\mathbf{L}(E_i; F)$-fel, és ekkor az egyenlőség az u lineáris operátor homogenitását fejezi ki.

Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy $\mathscr{A}(n)$ teljesül, és legyen $(E_i)_{i\in I}$ vektortereknek olyan véges rendszere, hogy $\mathrm{Card}(I) = n + 1$, valamint legyen F vektortér és $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$.

Kijelölünk egy $k \in I$ indexet, és bevezetjük az $I' := I \setminus \{k\}$ jelölést. Világos, hogy ekkor $(E_i)_{i\in I'}$ vektortereknek olyan véges rendszere, hogy $\mathrm{Card}(I') = n$. Rögzítünk egy

$(\lambda_i)_{i\in I} \in K^I$ és egy $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ rendszert. Bevezetjük a $z := \lambda_k.\mathfrak{a}_k \in E_k$ vektort, és tekintjük a 3.1.2. lemmában értelmezett $\tau_{k,z} : \prod_{i\in I'} E_i \to \prod_{i\in I} E_i$ leképezést, amelyre teljesül az, hogy $u \circ \tau_{k,z} \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I'} E_i; F\Big)$.

Most alkalmazhatjuk az $\mathscr{A}(n)$ kijelentést az $(E_i)_{i\in I'}$ vektortér rendszerre, az F vektortérre, az $u \circ \tau_{k,z} \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I'} E_i; F\Big)$ multilineáris operátorra, valamint a $(\lambda_i)_{i\in I'} \in K^{I'}$ és $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I'} \in \prod_{i\in I'} E_i$ rendszerekre. Tehát az

$$(u \circ \tau_{k,z})\left((\lambda_i.\mathfrak{a}_i)_{i\in I'}\right) = \Big(\mathrm{P}_{i\in I'} \lambda_i\Big).(u \circ \tau_{k,z})\left((\mathfrak{a}_i)_{i\in I'}\right).$$

egyenlőség az *indukciós hipotézis miatt* teljesül.

Ha $i \in I$, akkor a definíció szerint

$$\left(\tau_{k,z}\left((\lambda_i.\mathfrak{a}_i)_{i\in I'}\right)\right)_i := \begin{cases} \lambda_i.\mathfrak{a}_i & , \text{ha } i \in I', \\ z & , \text{ha } i = k. \end{cases}$$

továbbá $z = \lambda_k.\mathfrak{a}_k \in E_k$, így

$$\tau_{k,z}\left((\lambda_i.\mathfrak{a}_i)_{i\in I'}\right) = (\lambda_i.\mathfrak{a}_i)_{i\in I}.$$

Ha $j \in I$, akkor a definíció szerint

$$\left(\tau_{k,z}\left((\mathfrak{a}_i)_{i\in I'}\right)\right)_j := \begin{cases} \mathfrak{a}_j & , \text{ha } j \in I', \\ z & , \text{ha } j = k, \end{cases}$$

ami azt jelenti, hogy

$$\tau_{k,z}\left((\mathfrak{a}_i)_{i\in I'}\right) = \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(z) = \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(\lambda_k.\mathfrak{a}_k).$$

Ugyanakkor, az $u \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : E_k \to F$ leképezés lineáris, ezért homogén, így

$$(u \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}})(\lambda_k.\mathfrak{a}_k) = \lambda_k.(u \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}})(\mathfrak{a}_k)$$

is teljesül. Végül nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_k) = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I}.$$

Felhasználva ezeket az összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u((\lambda_i.\mathfrak{a}_i)_{i\in I}) &= u\left(\tau_{k,z}\left((\lambda_i.\mathfrak{a}_i)_{i\in I'}\right)\right) = (u \circ \tau_{k,z})\left((\lambda_i.\mathfrak{a}_i)_{i\in I'}\right) = \\ &= \Big(\mathrm{P}_{i\in I'} \lambda_i\Big).(u \circ \tau_{k,z})\left((\mathfrak{a}_i)_{i\in I'}\right) = \Big(\mathrm{P}_{i\in I'} \lambda_i\Big).u\left(\tau_{k,z}((\mathfrak{a}_i)_{i\in I'})\right) = \\ &= \Big(\mathrm{P}_{i\in I'} \lambda_i\Big).u\left(\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(\lambda_k.\mathfrak{a}_k)\right) = \Big(\mathrm{P}_{i\in I'} \lambda_i\Big).\left(\lambda_k.u\left(\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_k)\right)\right) = \Big(\mathrm{P}_{i\in I} \lambda_i\Big)u\left((\mathfrak{a}_i)_{i\in I}\right), \end{aligned}$$

tehát $\mathscr{A}(n+1)$ is igaz. ■

3.1.4. Következmény. *Legyen* $(E_i)_{i\in I}$ *vektorterek véges rendszere, továbbá* F *vektortér a* K *test felett, valamint* $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$. *Ha* $\lambda \in K$ *és* $\mathfrak{a} \in \prod_{i\in I} E_i$, *akkor*

$$u(\lambda.\mathfrak{a}) = \lambda^{\mathrm{Card}(I)}.u(\mathfrak{a}).$$

Bizonyítás. Elegendő a 3.1.3. állítást alkalmazni arra a $(\lambda_i)_{i\in I}$ rendszerre, amelyre minden $i \in I$ esetén $\lambda_i := \lambda$, figyelembe véve, hogy ekkor $\prod_{i\in I} \lambda_i = \lambda^{\mathrm{Card}(I)}$. ■

3.1.5. Állítás. (Multilineáris operátor multiadditivitása) *Legyen* $(E_i)_{i\in I}$ *vektorterek véges rendszere,* F *vektortér, valamint* $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$. *Ha minden* $I \ni i$*-re* $(\mathfrak{a}_{i,j})_{j\in J_i}$ *véges rendszer* E_i*-ben, és* $J := \prod_{i\in I} J_i$, *akkor*

$$u\Big(\Big(\sum_{j\in J_i} \mathfrak{a}_{i,j}\Big)_{i\in I}\Big) = \sum_{\sigma\in J} u((\mathfrak{a}_{i,\sigma(i)})_{i\in I}).$$

Bizonyítás. Az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ehhez jelölje $\mathscr{A}(n)$ a következő kijelentés rövidítését:

"Vektorterek minden $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszerére, ha $\mathrm{Card}(I) = n$, akkor minden F vektortérre, minden $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ függvényre, valamint minden olyan $((\mathfrak{a}_{i,j})_{j\in J_i})_{i\in I}$ rendszerre, amelyre minden $i \in I$ esetén $(\mathfrak{a}_{i,j})_{j\in J_i}$ véges rendszer E_i-ben, teljesül az $u\Big(\Big(\sum_{j\in J_i} \mathfrak{a}_{i,j}\Big)_{i\in I}\Big) = \sum_{\sigma\in J} u((\mathfrak{a}_{i,\sigma(i)})_{i\in I})$ egyenlőség."

Azt kell igazolni, hogy $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\mathscr{A}(n)$ teljesül. Az $\mathscr{A}(1)$ állítás azért igaz, mert $\mathrm{Card}(I) = 1$ és $I = \{i\}$ esetén $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ azonosul $\mathbf{L}(E_i; F)$-fel, és ekkor az egyenlőség az u lineáris operátor additivitását fejezi ki.

Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy $\mathscr{A}(n)$ teljesül, és legyen $(E_i)_{i\in I}$ vektortereknek olyan véges rendszere, hogy $\mathrm{Card}(I) = n + 1$, valamint legyen F vektortér és $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$.

Kijelölünk egy $k \in I$ indexet, és bevezetjük az $I' := I \setminus \{k\}$ jelölést. Világos, hogy ekkor $(E_i)_{i\in I'}$ vektortereknek olyan véges rendszere, hogy $\mathrm{Card}(I') = n$. Rögzítünk egy olyan $\Big((\mathfrak{a}_{i,j})_{j\in J_i}\Big)_{i\in I}$ rendszert, amelyre $i \in I$ esetén $(\mathfrak{a}_{i,j})_{j\in J_i}$ véges rendszer E_i-ben. Bevezetjük a $z := \sum_{j\in J_k} \mathfrak{a}_{k,j} \in E_k$ vektort, és tekintjük a 3.1.2. lemmában értelmezett $\tau_{k,z} : \prod_{i\in I'} E_i \to \prod_{i\in I} E_i$ leképezést, amelyre teljesül az, hogy $u \circ \tau_{k,z} \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I'} E_i; F\Big)$.

Most alkalmazhatjuk az $\mathscr{A}(n)$ kijelentést az $(E_i)_{i\in I'}$ vektortér rendszerre, az F vektortérre, az $u \circ \tau_{k,z} \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I'} E_i; F\Big)$ multilineáris operátorra, valamint a $((\mathfrak{a}_{i,j})_{j\in J_i})_{i\in I'}$ rendszerre, amelyre minden $i \in I'$ esetén $(\mathfrak{a}_{i,j})_{j\in J_i}$ véges rendszer E_i-ben. Tehát ha $J' := \prod_{i\in I'} J_i$, akkor az

$$(u \circ \tau_{k,z})\Big(\Big(\sum_{j\in J_i} \mathfrak{a}_{i,j}\Big)_{i\in I'}\Big) = \sum_{\sigma'\in J'} (u \circ \tau_{k,z})((\mathfrak{a}_{i,\sigma'(i)})_{i\in I'}),$$

egyenlőség az *indukciós hipotézis miatt* teljesül.
A $\tau_{k,z} : \prod_{i\in I'} E_i \to \prod_{i\in I} E_i$ leképezés és a z vektor definíciója alapján nyilvánvaló, hogy

$$(u\circ\tau_{k,z})\Big(\Big(\sum_{j\in J_i}\mathfrak{a}_{i,j}\Big)_{i\in I'}\Big) = u\Big(\Big(\sum_{j\in J_i}\mathfrak{a}_{i,j}\Big)_{i\in I}\Big).$$

Legyen most $\sigma' \in J' = \prod_{i\in I'} J_i$. Ha $i \in I$, akkor $\tau_{k,z}$ definíciója szerint

$$\left(\tau_{k,z}\left((\mathfrak{a}_{i,\sigma'(i)})_{i\in I'}\right)\right)_i = \begin{cases} \mathfrak{a}_{i,\sigma'(i)} & \text{, ha } i\neq k\\ z & \text{, ha } i=k,\end{cases}$$

amiből következik, hogy ha az $\mathfrak{a}' \in \prod_{i\in I} E_i$ rendszert úgy értelmezzük, hogy minden $i \in I$ esetén

$$\mathfrak{a}'_i := \begin{cases} \mathfrak{a}_{i,\sigma'(i)} & \text{, ha } i\neq k\\ 0 & \text{, ha } i=k,\end{cases}$$

akkor fennáll az

$$\tau_{k,z}\left((\mathfrak{a}_{i,\sigma'(i)})_{i\in I'}\right) = \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'}(z)$$

egyenlőség. (Megjegyezzük, hogy itt az $\mathfrak{a}'_k \in E_k$ vektor *bármi* lehetne, hiszen az $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'}$ leképezés *független* a $\mathfrak{a}'$ rendszer k-adik komponensétől.) Felhasználva az $u\circ\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'} : E_k \to F$ leképezés additivitását és a $z := \sum_{j\in J_k}\mathfrak{a}_{k,j}$ definíciót kapjuk, hogy

$$(u\circ\tau_{k,z})\left((\mathfrak{a}_{i,\sigma'(i)})_{i\in I'}\right) = \Big(u\circ\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'}\Big)(z) = (u\circ\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'})\Big(\sum_{j\in J_k}\mathfrak{a}_{k,j}\Big) = \sum_{j\in J_k}(u\circ\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'})\left(\mathfrak{a}_{k,j}\right).$$

Vezessük be azt a $\varrho_k : J'\times J_k \to J$ függvényt, amelyre minden $(\sigma', j) \in J'\times J_k$ esetén minden $i \in I$ indexre

$$(\varrho_k(\sigma', j))(i) := \begin{cases} \sigma'(i) & \text{, ha } i\neq k\\ j & \text{, ha } i=k\end{cases}.$$

Világos, hogy ekkor minden $j \in J_k$ esetén

$$\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'}\left(\mathfrak{a}_{k,j}\right) = \left(\mathfrak{a}_{i,(\varrho_k(\sigma',j))(i)}\right)_{i\in I}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$u\Big(\Big(\sum_{j\in J_i}\mathfrak{a}_{i,j}\Big)_{i\in I}\Big) = \sum_{\sigma'\in J'}\Big(\sum_{j\in J_k} u\left(\left(\mathfrak{a}_{i,(\varrho_k(\sigma',j))(i)}\right)_{i\in I}\right)\Big) = \sum_{(\sigma',j)\in J'\times J_k} u\left(\left(\mathfrak{a}_{i,(\varrho_k(\sigma',j))(i)}\right)_{i\in I}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy a $\varrho_k : J'\times J_k \to J$ függvény bijekció, ezért

$$\sum_{(\sigma',j)\in J'\times J_k} u\left(\left(\mathfrak{a}_{i,(\varrho_k(\sigma',j))(i)}\right)_{i\in I}\right) = \sum_{\sigma\in J} u((\mathfrak{a}_{i,\sigma(i)})_{i\in I}),$$

így $\mathscr{A}(n+1)$ is igaz. ■

3.1.6. Következmény. *Legyen* $(E_i)_{i\in I}$ *vektorterek véges rendszere,* F *vektortér, valamint* $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$*. Ha* $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$*,* $\mathfrak{b} := (\mathfrak{b}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$*, és minden* $H \subseteq I$ *halmazra* $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_H \in \prod_{i\in I} E_i$ *az a rendszer, amelyre minden* $i \in I$ *esetén*

$$((\mathfrak{a},\mathfrak{b})_H)_i := \begin{cases} \mathfrak{a}_i & , \text{ha } i \in H \\ \mathfrak{b}_i & , \text{ha } i \notin H \end{cases},$$

akkor

$$u(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = u(\mathfrak{a}) + u(\mathfrak{b}) + \sum_{\substack{H\subseteq I \\ \emptyset\neq H\neq I}} u((\mathfrak{a},\mathfrak{b})_H).$$

Bizonyítás. Legyen minden $i \in I$ esetén $J_i := \{0,1\}$, és $\mathfrak{c}_{i,0} := \mathfrak{b}_i$ és $\mathfrak{c}_{i,1} := \mathfrak{a}_i$. Ekkor minden $i \in I$ esetén $(\mathfrak{c}_{i,j})_{j\in J_i}$ véges rendszer E_i-ben, és világos, hogy

$$\sum_{j\in J_i} \mathfrak{c}_{i,j} = \mathfrak{b}_i + \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_i = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_i,$$

tehát alkalmazva a 3.1.5. állítást kapjuk, hogy

$$u(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = u\Bigg(\bigg(\sum_{j\in J_i} \mathfrak{c}_{i,j}\bigg)_{i\in I}\Bigg) = \sum_{\sigma\in\{0,1\}^I} u((\mathfrak{c}_{i,\sigma(i)})_{i\in I}),$$

hiszen $\prod_{i\in I} J_i = \{0,1\}^I$. Tudjuk, hogy a $\mathscr{P}(I) \to \{0,1\}^I$; $H \mapsto \chi_H$ leképezés *bijekció*, ezért

$$u(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \sum_{H\in\mathscr{P}(I)} u\left(\left(\mathfrak{c}_{i,\chi_H(i)}\right)_{i\in I}\right).$$

Minden $H \subseteq I$ esetén $\left(\mathfrak{c}_{i,\chi_H(i)}\right)_{i\in I}$ az az eleme $\prod_{i\in I} E_i$-nek, amelynek minden $i \in I$ esetén az i-edik komponense $\mathfrak{c}_{i,1} = \mathfrak{a}_i$, ha $i \in H$, és $\mathfrak{c}_{i,0} = \mathfrak{b}_i$, ha $i \notin H$, tehát a definíció szerint

$$\left(\mathfrak{c}_{i,\chi_H(i)}\right)_{i\in I} = (\mathfrak{a},\mathfrak{b})_H.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$u(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \sum_{H\in\mathscr{P}(I)} u\left((\mathfrak{a},\mathfrak{b})_H\right) =$$
$$= u\left((\mathfrak{a},\mathfrak{b})_I\right) + u\left((\mathfrak{a},\mathfrak{b})_\emptyset\right) + \sum_{\substack{H\subseteq I \\ \emptyset\neq H\neq I}} u\left((\mathfrak{a},\mathfrak{b})_H\right),$$

amiből $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_I = \mathfrak{a}$ és $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})_\emptyset = \mathfrak{b}$ miatt következik a bizonyítandó egyenlőség. ■

Legyen $(E_i)_{i\in I}$ véges vektortér rendszer, továbbá F vektortér a K test felett, valamint $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$. Ha $(G_i)_{i\in I}$ szintén vektortér rendszer, H vektortér, és minden $I \ni i$-re $v_i : G_i \to E_i$ lineáris operátor, valamint $w : F \to H$ lineáris operátor, akkor a

$$\prod_{i\in I} G_i \to H; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto w(u((v_i(x_i))_{i\in I}))$$

leképezés multilineáris operátor.

Vigyázzunk arra, hogy $\mathbf{L}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ és $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ általában *teljesen különböző* lineáris alterek az $\mathscr{F}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ függvénytérben; ha I legalább két elemű, akkor csak Z az azonosan 0 függvény a közös elemük. Ha $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$, akkor u általában nem homogén és nem is additív; ezek helyett u-ra a fent bizonyított multihomogenitás és multiadditivitás teljesül.

3.2. Példák multilineáris operátorokra

Példák multilineáris operátorokra.

1) Ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan vektortér rendszer, amelyre $\mathrm{Card}(I) = 1$, akkor a $\prod_{i\in I} E_i$ vektortér kanonikusan azonosul E-vel, ahol $E := E_i$ (az I indexhalmaz egyetlen i elemére), és ekkor minden F vektortérre $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ azonosul $\mathbf{L}(E; F)$-fel.

2) Legyenek E_1, E_2 és F vektorterek. Egy $u : E_1 \times E_2 \to F$ leképezés pontosan akkor multilineáris, ha minden $\mathfrak{a}_2 \in E_2$ esetén az $u(\cdot, \mathfrak{a}_2) : E_1 \to F$ leképezés lineáris operátor, és minden $\mathfrak{a}_1 \in E_1$ esetén az $u(\mathfrak{a}_1, \cdot) : E_2 \to F$ leképezés lineáris operátor. Az $E_1 \times E_2 \to F$ multilineáris operátorokat *bilineáris* operátoroknak nevezzük.

3) Ha E vektortér a K test felett, akkor a

$$K \times E \to E; \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha.x$$

leképezés bilineáris operátor.

4) Ha A algebra, akkor az

$$A \times A \to A; \quad (a, b) \mapsto a \cdot b$$

belső szorzás bilineáris operátor.

5) Ha E, F és G vektorterek, akkor az

$$\mathbf{L}(E; F) \times \mathbf{L}(F; G) \to \mathbf{L}(E; G); \quad (u, v) \mapsto v \circ u$$

leképezés bilineáris operátor.

6) Ha E és F vektorterek, akkor az

$$\mathbf{L}(E; F) \times E \to F; \quad (u, x) \mapsto u(x)$$

leképezés bilineáris operátor.

7) Ha $(E_i)_{i\in I}$ véges vektortér rendszer és F vektortér, akkor a

$$\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big) \times \prod_{i\in I} E_i \mapsto F; \quad (u, (x_i)_{i\in I}) \mapsto u((x_i)_{i\in I})$$

leképezés multilineáris operátor.

8) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ véges vektortér rendszer a K test felett, és $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$. Ekkor a

$$\bigotimes_{i\in I} x_i : \prod_{i\in I} E_i^* \to K; \quad (u_i)_{i\in I} \mapsto \prod_{i\in I} u_i(x_i)$$

leképezés multilineáris funkcionál, tehát $\bigotimes\limits_{i\in I} x_i \in \mathbf{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i^*; K\Big)$. Valóban, ha $k \in I$ és $\mathfrak{u} \in \prod\limits_{i\in I} E_i^*$, akkor minden $E_k^* \ni u$-ra

$$\Big((\bigotimes_{i\in I} x_i) \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{u}}\Big)(u) = \Big(\prod_{i\in I\setminus\{k\}} \mathfrak{u}_i(x_i)\Big) \cdot u(x_k),$$

amiből látható, hogy $(\bigotimes\limits_{i\in I} x_i) \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{u}} : E_k^* \to K$ lineáris funkcionál. A $\{\bigotimes\limits_{i\in I} x_i | (x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i\}$ halmaz által generált lineáris alteret $\mathbf{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i^*; K\Big)$-ben a $\bigotimes\limits_{i\in I} E_i$ szimbólummal jelöljük, és az $(E_i)_{i\in I}$ vektortér rendszer *tenzorszorzatának* nevezzük. Könnyen látható, hogy a

$$\prod_{i\in I} E_i \to \bigotimes_{i\in I} E_i; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \bigotimes_{i\in I} x_i$$

leképezés multilineáris operátor.

9) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ véges vektortér rendszer a K test felett. Ekkor $(E_i^*)_{i\in I}$ szintén véges vektortér rendszer a K test felett, ezért a 8) példa alapján jól értelmezett a $\bigotimes\limits_{i\in I} E_i^*$ tenzorszorzat, és minden $(u_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i^*$ esetén a $\bigotimes\limits_{i\in I} u_i \in \bigotimes\limits_{i\in I} E_i^*$ elem is. A definíció szerint minden $(u_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i^*$ esetén

$$\bigotimes_{i\in I} u_i : \prod_{i\in I} E_i^{**} \to K; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \prod_{i\in I} x_i(u_i).$$

Ugyanakkor minden $I \ni i$-re E_i kitüntetett módon azonosítható az E_i^{**} vektortér egy lineáris alterével (2. pont, **19**. gyakorlat), így a $\prod\limits_{i\in I} E_i$ lineáris szorzattér is kitüntetett módon azonosul a $\prod\limits_{i\in I} E_i^{**}$ lineáris szorzattér egy lineáris alterével. Ezért minden $\prod\limits_{i\in I} E_i^* \ni (u_i)_{i\in I}$-re a $\bigotimes\limits_{i\in I} u_i : \prod\limits_{i\in I} E_i^{**} \to K$ multilineáris funkcionál leszűkíthető $\prod\limits_{i\in I} E_i$-re, és nyilvánvaló, hogy $(\bigotimes\limits_{i\in I} u_i)|_{\prod_{i\in I} E_i} : \prod\limits_{i\in I} E_i \to K$ szintén multilineáris funkcionál. Ezért létezik egy kitüntetett

$$\prod_{i\in I} E_i^* \to \mathbf{Mult}(\prod_{i\in I} E_i; K); \quad (u_i)_{i\in I} \mapsto (\bigotimes_{i\in I} u_i)|_{\prod_{i\in I} E_i}$$

leképezés, amely multilineáris operátor. Ha $(u_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i^*$, akkor a hozzátartozó $\prod\limits_{i\in I} E_i \to K$ multilineáris funkcionál az $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$ rendszerhez a $\prod\limits_{i\in I} u_i(x_i) \in K$ elemet rendeli.

3.3. Multilineáris operátor folytonosságának jellemzése

Ha $(E_i)_{i\in I}$ véges normált tér rendszer és F normált tér, akkor a $\prod_{i\in I} E_i$ lineáris szorzattér a szorzatnormával ellátva normált tér, ezért van értelme a $\prod_{i\in I} E_i \to F$ multilineáris operátorok *folytonosságáról* beszélni. A következő állítás a multilineáris operátorok folytonosságát jellemzi.

3.3.1. Állítás. *Ha $(E_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere, F normált tér, és $u : \prod_{i\in I} E_i \to F$ multilineáris operátor, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *u folytonos.*

(ii) *u folytonos a $0 \in \prod_{i\in I} E_i$ pontban.*

(iii) *Létezik a $0 \in \prod_{i\in I} E_i$ vektornak olyan V környezete, amelyre $u\langle V\rangle \subseteq F$ korlátos halmaz.*

(iv) *Minden $H \subseteq \prod_{i\in I} E_i$ korlátos halmazra $u\langle H\rangle \subseteq F$ korlátos halmaz.*

(v) $\sup_{x\in B} \|u(x)\| < +\infty$*, ahol* $B := \prod_{i\in I}\{x_i \in E_i | \|x_i\| \le 1\}$.

(vi) *Létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $\prod_{i\in I} E_i \ni (x_i)_{i\in I}$-re*

$$\|u((x_i)_{i\in I})\| \le C \operatorname*{P}_{i\in I} \|x_i\|.$$

Bizonyítás. (i)⇒(ii) triviális, és (ii)⇒(iii) a **MET** 7.1.3. állításból következik.

(iii)⇒(iv) A (iii) feltétel alapján rögzíthetünk olyan $\delta, \varrho \in \mathbb{R}_+^*$ számokat, amelyekre $u\left\langle \mathrm{B}_\delta\left(0; \prod_{i\in I} E_i\right)\right\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varrho(0; F)$, ahol $\mathrm{B}_\delta\left(0; \prod_{i\in I} E_i\right)$ a 0 középpontú, δ sugarú nyílt gömb $\prod_{i\in I} E_i$-ben a szorzatnorma szerint, és $\mathrm{B}_\varrho(0; F)$ a 0 középpontú, ϱ sugarú nyílt gömb az F normált térben. Legyen $H \subseteq \prod_{i\in I} E_i$ korlátos halmaz, és $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $H \subseteq \mathrm{B}_\delta\left(0; \prod_{i\in I} E_i\right)$. Ekkor $x \in H$ esetén $(\delta/r).x \in \mathrm{B}_\delta\left(0; \prod_{i\in I} E_i\right)$, így a multilineáris operátorok multihomogenitása (3.1.4.) miatt $(\delta/r)^{\mathrm{Card}(I)}.u(x) = u((\delta/r).x) \in \mathrm{B}_\varrho(0; F)$. Ez azt jelenti, hogy $u\langle H\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varrho(r/\delta)^{\mathrm{Card}(I)}}(0; F)$, tehát $u\langle H\rangle$ korlátos halmaz.

(iv)⇒(v) Nyilvánvaló, mert B korlátos halmaz $\prod_{i\in I} E_i$-ben.

(v)⇒(vi) Legyen $C := \sup_{x\in B} \|u(x)\|$. Ha $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $((\|x_i\| + \varepsilon)^{-1}.x_i)_{i\in I} \in B$, tehát a multilineáris operátorok multihomogenitása (3.1.3.) miatt

$$\left(\operatorname*{P}_{i\in I} (\|x_i\| + \varepsilon)^{-1}\right) \|u((x_i)_{i\in I})\| = \|u(((\|x_i\| + \varepsilon)^{-1}.x_i)_{i\in I})\| \le C,$$

következésképpen

$$\|u((x_i)_{i\in I})\| \leq C \prod_{i\in I}(\|x_i\| + \varepsilon),$$

amiből az $\varepsilon \to 0$ határátmenettel látható, hogy a C szám eleget tesz a (vi) állítás követelményének.

(vi)⇒(i) Legyen $C \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy minden $\prod_{i\in I} E_i \ni (x_i)_{i\in I}$-re

$$\|u((x_i)_{i\in I})\| \leq C \prod_{i\in I} \|x_i\|$$

teljesül. Rögzítve egy $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ pontot, meg fogjuk mutatni, hogy u folytonos $\mathfrak{a}$-ban. Tudjuk, hogy minden $x \in \prod_{i\in I} E_i$ vektorra érvényes az

$$u(\mathfrak{a} + x) = u(\mathfrak{a}) + u(x) + \sum_{\substack{H\subseteq I\\ \emptyset\neq H\neq I}} u\left((\mathfrak{a}, x)_H\right)$$

multiadditivitás formula (3.1.6.), és minden $H \subseteq I$ halmazra $(\mathfrak{a}, x)_H \in \prod_{i\in I} E_i$ az a rendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén

$$\Big((\mathfrak{a}, x)_H\Big)_i := \begin{cases} \mathfrak{a}_i & \text{, ha } i \in H \\ x_i & \text{, ha } i \notin H \end{cases}.$$

A multiadditivitás formulát most így írjuk át: minden $x \in \prod_{i\in I} E_i$ vektorra

$$u(\mathfrak{a} + x) = u(\mathfrak{a}) + \sum_{\substack{H\subseteq I\\ H\neq I}} u\Big((\mathfrak{a}, x)_H\Big).$$

Ebből következik, hogy minden $x \in \prod_{i\in I} E_i$ vektorra

$$\|u(\mathfrak{a} + x) - u(\mathfrak{a})\| \leq \sum_{\substack{H\subseteq I\\ H\neq I}} \|u\left((\mathfrak{a}, x)_H\right)\| \leq C \sum_{\substack{H\subseteq I\\ H\neq I}} \prod_{i\in I} \|\left((\mathfrak{a}, x)_H\right)_i\| =$$

$$= C \sum_{\substack{H\subseteq I\\ H\neq I}} \Big(\prod_{i\in H} \|\mathfrak{a}_i\|\Big)\Big(\prod_{i\in I\setminus H} \|x_i\|\Big) \leq C \sum_{\substack{H\subseteq I\\ H\neq I}} \|\mathfrak{a}\|^{\mathrm{Card}(H)} \|x\|^{\mathrm{Card}(I\setminus H)} =$$

$$= \left(C \sum_{\substack{H\subseteq I\\ H\neq I}} \|\mathfrak{a}\|^{\mathrm{Card}(H)} \|x\|^{\mathrm{Card}(I\setminus H)-1}\right) \cdot \|x\|.$$

Tehát ha $R \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített szám, és $x \in \prod_{i\in I} E_i$ olyan, hogy $\|x\| < R$, akkor

$$\|u(\mathfrak{a} + x) - u(\mathfrak{a})\| \leq \left(C \sum_{\substack{H\subseteq I\\ H\neq I}} \|\mathfrak{a}\|^{\mathrm{Card}(H)} R^{\mathrm{Card}(I\setminus H)-1}\right) \cdot \|x\|,$$

amiből látható, hogy u folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. ∎

3.3.2. Következmény. *Minden I véges halmazra a $\mathrm{P}_I : \mathbb{K}^I \to \mathbb{K};\ (\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \prod_{i\in I} \lambda_i$ leképezés folytonos multilineáris funkcionál.*

Bizonyítás. Ha $(\lambda_i)_{i\in I} \in \overline{\mathrm{B}}_1(0;\mathbb{K})^I$, azaz minden $i \in I$ esetén $|\lambda_i| \leq 1$, akkor

$$\Big|\mathrm{P}_I\Big((\lambda_i)_{i\in I}\Big)\Big| = \Big|\prod_{i\in I} \lambda_i\Big| = \prod_{i\in I} |\lambda_i| \leq 1,$$

tehát a $\mathrm{P}_I : \mathbb{K}^I \to \mathbb{K}$ multilineáris funkcionál (**ALG** 10.4.3. példa) korlátos a $\mathrm{B}_1(0;\mathbb{K})^I$ halmazon, amely a 0 vektornak környezete a $\mathbb{K}^I$ topologikus szorzattérben. Ezért az előző állítás alapján P_I folytonos multilineáris funkcionál. ■

Vigyázzunk arra, hogy $\mathrm{Card}(I) > 1$ esetén semmilyen $\prod_{i\in I} E_i \to F$ nem nulla folytonos
Z multilineáris operátor *nem egyenletesen folytonos* (**4**. gyakorlat).

3.3.3. Jelölés. *Ha $(E_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere és F normált tér, akkor az $\prod_{i\in I} E_i \to F$ folytonos multilineáris operátorok halmazát $\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ jelöli. Ha E és F normált terek, továbbá $n \in \mathbb{N}$, akkor az $E^n \to F$ folytonos multilineáris operátorok halmazát $\mathscr{L}_n(E;F)$ jelöli.*

3.3.4. Állítás. *Legyenek $(E_i)_{i\in I}$ és $(G_i)_{i\in I}$ normált terek ugyanolyan indexhalmazú nem üres véges rendszere, továbbá F és H normált terek. Ha $w : F \to H$ folytonos lineáris operátor, valamint minden $i \in I$ esetén $v_i : G_i \to E_i$ folytonos lineáris operátor, akkor minden $u \in$ **Mult**$\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ folytonos multilineáris operátorra*

$$w \circ u \circ \Big(\underset{i\in I}{\times} v_i\Big) : \prod_{i\in I} G_i \to H; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto w(u((v_i(x_i))_{i\in I}))$$

leképezés folytonos multilineáris operátor.

Bizonyítás. A $w \circ u \circ \Big(\underset{i\in I}{\times} v_i\Big) : \prod_{i\in I} G_i \to H$ leképezés **ALG** 10.1.3. szerint multilineáris. Legyen $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy minden $\prod_{i\in I} E_i \ni (z_i)_{i\in I}$-re

$$\|u((z_i)_{i\in I})\| \leq C \prod_{i\in I} \|z_i\|.$$

Ekkor minden $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ esetén

$$\|w(u((v_i(x_i))_{i\in I}))\| \leq \|w\| \|u((v_i(x_i))_{i\in I})\| \leq C\|w\| \prod_{i\in I} \|v_i(x_i)\| \leq$$
$$\leq C\|w\| \prod_{i\in I} \|v_i\|\|x_i\| = C\|w\|\Big(\prod_{i\in I} \|v_i\|\Big)\Big(\prod_{i\in I} \|x_i\|\Big),$$

tehát $K := C\|w\|\Big(\prod_{i\in I} \|v_i\|\Big) \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy minden $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ esetén

$$\|w(u((v_i(x_i))_{i\in I}))\| \leq K \prod_{i\in I} \|x_i\|,$$

így 3.3.1. szerint $w \circ u \circ \Big(\underset{i\in I}{\times} v_i\Big) : \prod_{i\in I} G_i \to H$ multilineáris operátor folytonos. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha $(E_i)_{i\in I}$ normált terek nem üres rendszere, F normált tér, $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$, és $(G_i)_{i\in I}$ szintén (ugyanolyan indexhalmazú) normált tér rendszer, $v : \prod_{i\in I} G_i \to \prod_{i\in I} E_i$ *tetszőleges* folytonos lineáris operátor, H normált tér és $w : F \to H$ folytonos lineáris operátor, akkor a $w \circ u \circ v : \prod_{i\in I} G_i \to H$ függvény nem feltétlenül folytonos multilineáris operátor, sőt még az sem biztos, hogy multilineáris. Az előző állítás szerint ez a függvény akkor lesz folytonos multilineáris operátor, ha a v lineáris operátor $\underset{i\in I}{\times} v_i$ alakú, ahol $(v_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $v_i : G_i \to E_i$ folytonos lineáris operátor.

3.4. Multilineáris operátorok véges dimenziós normált terek szorzatán

3.4.1. Állítás. *Ha $(E_i)_{i\in I}$ véges dimenziós normált terek véges rendszere, akkor minden F normált térre, minden $\prod_{i\in I} E_i \to F$ multilineáris operátor folytonos.*

Bizonyítás. Minden $I \ni i$-re legyen $n_i := \dim(E_i)$, és $(\mathbf{e}_{i,j})_{j\in n_i}$ algebrai bázis E_i-ben, továbbá $v_i : \mathbb{K}^{n_i} \to E_i$ az a lineáris bijekció, amelyre $(x_{i,j})_{j\in n_i} \in \mathbb{K}^{n_i}$ esetén $v_i((x_{i,j})_{j\in n_i}) := \sum_{j\in n_i} x_{i,j}.\mathbf{e}_{i,j}$. Minden $I \ni i$-re jelölje $\|\cdot\|_i$ az E_i normáját; ekkor a $\|\cdot\|_i \circ v_i$ és a $\mathbb{K}^{n_i}$ feletti max-norma *ekvivalensek*, tehát létezik olyan $C_i \in \mathbb{R}_+$ szám, amelyre minden $(x_{i,j})_{j\in n_i} \in \mathbb{K}^{n_i}$ esetén

$$\max_{j\in n_i} |x_{i,j}| = \|(x_{i,j})_{j\in n_i}\|_\infty \le C_i \|v_i((x_{i,j})_{j\in n_i})\|_i = C_i \Big\| \sum_{j\in n_i} x_{i,j}.\mathbf{e}_{i,j} \Big\|_i .$$

Legyen most $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ rögzített rendszer, és minden $I \ni i$-re $(x_{i,j})_{j\in n_i} \in \mathbb{K}^{n_i}$ az a rendszer, amelyre $x_i = \sum_{j\in n_i} x_{i,j}.\mathbf{e}_{i,j}$ teljesül. Ekkor a multilineáris operátorok multiadditivitása (3.1.5.) és multihomogenitása (3.1.3.) miatt

$$u((x_i)_{i\in I}) = u\bigg(\Big(\sum_{j\in n_i} x_{i,j}.\mathbf{e}_{i,j}\Big)_{i\in I}\bigg) =$$

$$= \sum_{\sigma\in J} u((x_{i,\sigma(i)}.\mathbf{e}_{i,\sigma(i)})_{i\in I}) = \sum_{\sigma\in J} \Big(\prod_{i\in I} x_{i,\sigma(i)}\Big) u((\mathbf{e}_{i,\sigma(i)})_{i\in I}),$$

ahol $J := \prod_{i\in I} n_i$ *halmazszorzat*, nem pedig *numerikus szorzat*. Ebből következik, hogy

$$\|u((x_i)_{i\in I})\| \le \sum_{\sigma\in J} \Big(\prod_{i\in I} |x_{i,\sigma(i)}|\Big) \|u((\mathbf{e}_{i,\sigma(i)})_{i\in I})\| \le \sum_{\sigma\in J} \Big(\prod_{i\in I} \max_{j\in n_i} |x_{i,j}|\Big) \|u((\mathbf{e}_{i,\sigma(i)})_{i\in I})\| \le$$

$$\le \sum_{\sigma\in J} \Big(\prod_{i\in I} C_i \Big\|\sum_{j\in n_i} x_{i,j}.\mathbf{e}_{i,j}\Big\|_i\Big) \|u((\mathbf{e}_{i,\sigma(i)})_{i\in I})\| = \sum_{\sigma\in J} \Big(\prod_{i\in I} C_i \|x_i\|_i\Big) \|u((\mathbf{e}_{i,\sigma(i)})_{i\in I})\| \le C \prod_{i\in I} \|x_i\|_i,$$

ahol

$$C := \Big(\max_{i\in I} C_i\Big)^{\mathrm{Card}(I)} \sum_{\sigma\in J} \|u((\mathbf{e}_{i,\sigma(i)})_{i\in I})\| \in \mathbb{R}_+.$$

Ez azt jelenti, hogy az u multilineáris operátor folytonos. ■

Megjegyezzük, hogy ha $(E_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere, F normált tér, és $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$, akkor minden $I \ni k$-ra és $\prod_{i\in I} E_i \ni \mathfrak{a}$-ra $u \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} \in \mathscr{L}(E_k; F)$, amit úgy mondunk, hogy az u függvény *változóiban folytonos*. Azonban változóiban folytonos multilineáris operátor *nem feltétlenül folytonos* (**5**. gyakorlat).

3.5. Folytonos multilineáris operátor normája

3.5.1. Állítás. *Legyen $(E_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere és F normált tér. Ha $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$, akkor*

$$\sup_{x\in B} \|u(x)\| = \inf\Big\{C \in \mathbb{R}_+ \Big| \Big(\forall (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i\Big)\ \|u((x_i)_{i\in I})\| \le C \prod_{i\in I} \|x_i\|\Big\},$$

ahol $B := \prod_{i\in I}\{x_i \in E_i \mid \|x_i\| \le 1\}$ a 0 középpontú, 1 sugarú zárt gömb $\prod_{i\in I} E_i$-ben a szorzatnorma szerint. Továbbá, a

$$\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big) \to \mathbb{R}_+; \quad u \mapsto \|u\| := \sup_{x\in B} \|u(x)\|$$

leképezés norma $\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ felett, és ha F teljes, akkor $\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ ezzel a normával ellátva Banach-tér.

Bizonyítás. A $\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big) \to \mathbb{R}_+;\ u \mapsto \sup_{x\in B}\|u(x)\|$ leképezésre $(\mathrm{NO_{II}})$ és $(\mathrm{NO_{III}})$ triviális, és $(\mathrm{NO_I})$ azon múlik, hogy ha $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ olyan, hogy minden $B \ni x$-re $u(x) = 0$, akkor minden $x \in \prod_{i\in I} E_i$ vektorra és $r > \|x\|$ valós számra $r^{-\mathrm{Card}(I)}.u(x) = u(r^{-1}.x) = 0$, tehát $u(x) = 0$.

Tegyük fel, hogy F Banach-tér, és legyen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ térben az imént értelmezett norma szerint. Legyen $x \in \prod_{i\in I} E_i$ rögzített vektor, és $r > \|x\|$ valós szám. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra és $z \in B$ vektorra, ha $m > N$ és $n > N$, akkor $\|u_m(z) - u_n(z)\| < r^{\mathrm{Card}(I)}\varepsilon$; ezért $r^{-1}.x \in B$ miatt $\|u_m(x) - u_n(x)\| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $\prod_{i\in I} E_i \ni x$-re $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat F-ben. Az F teljességéből következik, hogy az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $\prod_{i\in I} E_i$ halmazon *pontonként konvergens*; legyen $u := \lim_{n\to\infty} u_n$. Ekkor minden $I \ni k$-ra és $\prod\limits_{i\in I} E_i \ni \mathfrak{a}$-ra $u \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} = \lim\limits_{n\to\infty}(u_n \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}})$, ezért $u \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : E_k \to F$ lineáris operátor. Ebből következik, hogy u multilineáris operátor. Megmutatjuk, hogy u folytonos, és az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat u-hoz konvergál az előző norma szerint, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty}\|u - u_n\| = 0$.

A feltevés alapján $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big)$-ben az imént értelmezett norma szerint, ezért korlátos is, vagyis $C := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\| < +\infty$. Ha $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$, akkor

$$\|u((x_i)_{i\in I})\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n((x_i)_{i\in I})\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n((x_i)_{i\in I})\| \le$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\|u_n\| \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I}\|x_i\|\Big) \le C \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I}\|x_i\|,$$

tehát a multilineáris operátorok folytonosságának jellemzése alapján u folytonos, vagyis $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big)$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n > N$ természetes számra $\|u_m - u_n\| < \varepsilon$. Tehát $m, n \in \mathbb{N}$ és $m, n > N$ esetén minden $x \in B$ vektorra $\|u_m(x) - u_n(x)\| < \varepsilon$, így $\|u(x) - u_n(x)\| = \lim\limits_{m\to\infty}\|u_m(x) - u(x)\| \le \varepsilon$. Ezért minden $n > N$ természetes számra $\|u - u_n\| := \sup\limits_{x\in B}\|u(x) - u_n(x)\| \le \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\|u - u_n\| = 0$. ■

3.5.2. Definíció. *Ha $(E_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere és F normált tér, akkor minden $\mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big) \ni u$-ra az $\|u\| := \sup\limits_{x\in B}\|u(x)\|$ számot (ahol B a 0 középpontú, 1 sugarú zárt gömb a $\prod\limits_{i\in I} E_i$ normált szorzattérben) az u* **multilineáris operátornormájának** *nevezzük, és a $\mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big)$ vektorteret a multilineáris operátornorma-függvénnyel ellátva normált térnek tekintjük.*

3.6. Példák folytonos multilineáris operátorokra

1) Ha $(E_i)_{i\in I}$ normált terek olyan véges rendszere, amelyre $\mathrm{Card}(I) = 1$, akkor a $\prod\limits_{i\in I} E_i$ normált szorzattér kanonikusan azonosul E-vel, ahol $E := E_i$ (az I egyetlen i elemére), és ekkor minden F normált térre $\mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big)$ azonosul $\mathscr{L}(E; F)$-fel.

2) Ha E normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a

$$\mathbb{K} \times E \to E; \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha.x$$

leképezés folytonos bilineáris operátor, és ha $E \ne \{0\}$, akkor ennek a normája egyenlő 1-gyel, mert minden $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E$ esetén $\|\alpha.x\| = |\alpha|\|x\|$.

3) Ha A normált algebra, akkor az

$$A \times A \to A; \quad (a, b) \mapsto a \cdot b$$

belső szorzás folytonos bilineáris operátor, mert minden $(a,b) \in A \times A$ esetén $\|a \cdot b\| \leq \|a\|\|b\|$.

4) Ha E, F és G normált terek, akkor az

$$\mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G) \to \mathscr{L}(E;G); \quad (u,v) \mapsto v \circ u$$

leképezés olyan folytonos bilineáris operátor, amelynek normája kisebb-egyenlő 1-nél, mert minden $(u,v) \in \mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G)$ esetén $\|v \circ u\| \leq \|u\|\|v\|$.

5) Ha E és F normált terek, akkor az

$$\mathscr{L}(E;F) \times E \to F; \quad (u,x) \mapsto u(x)$$

leképezés folytonos bilineáris operátor, mert minden $(u,x) \in \mathscr{L}(E;F) \times E$ esetén $\|u(x)\| \leq \|u\|\|x\|$.

6) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere és F normált tér. Vegyünk egy i_* halmazt, amelyre $i_* \notin I$, és legyen $I_* := I \cup \{i_*\}$, valamint minden $i \in I_*$ indexre

$$V_i := \begin{cases} \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big) & \text{, ha } i = i_*, \\ E_i & \text{, ha } i \in I. \end{cases}$$

Ekkor az

$$m : \prod_{i\in I_*} V_i \to F; \quad (x_i)_{i\in I_*} \mapsto x_{i_*}\left((x_i)_{i\in I}\right)$$

leképezés folytonos multilineáris operátor.

7) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere és $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$. Ekkor a

$$\bigotimes_{i\in I} x_i : \prod_{i\in I} E_i^* \to \mathbb{K}; \quad (u_i)_{i\in I} \mapsto \mathrm{P}_{i\in I}\, u_i(x_i)$$

multilineáris funkcionál $\prod\limits_{i\in I} E_i'$-re vett leszűkítése folytonos multilineáris funkcionál, és ezt (kissé pontatlanul) szintén $\bigotimes\limits_{i\in I} x_i$-vel jelölve

$$\Big\|\bigotimes_{i\in I} x_i\Big\| = \mathrm{P}_{i\in I}\, \|x_i\|$$

teljesül. Valóban, ha $(u_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i'$, akkor

$$\begin{aligned} \Big|\Big(\bigotimes_{i\in I} x_i\Big)((u_i)_{i\in I})\Big| &= \Big|\mathrm{P}_{i\in I}\, u_i(x_i)\Big| = \mathrm{P}_{i\in I}\, |u_i(x_i)| \leq \mathrm{P}_{i\in I}\, \|u_i\|\|x_i\| \leq \\ &\leq \Big(\mathrm{P}_{i\in I}\, \|x_i\|\Big) \max_{i\in I} \|u_i\| = \Big(\mathrm{P}_{i\in I}\, \|x_i\|\Big) \|(u_i)_{i\in I}\|, \end{aligned}$$

ezért $\bigotimes\limits_{i\in I} x_i \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i'; \mathbb{K}\Big)$, és $\Big\|\bigotimes\limits_{i\in I} x_i\Big\| \leq \mathrm{P}_{i\in I}\, \|x_i\|$. A fordított egyenlőtlenség bizonyításához megjegyezzük, hogy a Hahn-Banach-tétel alapján minden $I \ni i$-hez létezik olyan $u_i \in E_i'$, amelyre $|u_i(x_i)| = \|x_i\|$ és $\|u_i\| \leq 1$; ekkor

$$\mathrm{P}_{i\in I}\, \|x_i\| = \mathrm{P}_{i\in I}\, |u_i(x_i)| = \Big|\mathrm{P}_{i\in I}\, u_i(x_i)\Big| = \Big|\Big(\bigotimes_{i\in I} x_i\Big)((u_i)_{i\in I})\Big| \leq \Big\|\bigotimes_{i\in I} x_i\Big\|,$$

így $\mathrm{P}_{i\in I}\, \|x_i\| \leq \Big\|\bigotimes\limits_{i\in I} x_i\Big\|$ is igaz.

3.7. Kanonikus azonosítások

3.7.1. Állítás. *Legyen* $(E_i)_{i\in I}$ *normált terek véges rendszere, és* F *az* $(F_j)_{j\in J}$ *véges normált tér rendszer szorzata. Minden* $j \in J$ *esetén jelölje* pr_j *az* $F \to F_j$ *kanonikus projekciót. Ekkor* $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ *és* $j \in J$ *esetén* $\mathrm{pr}_j \circ u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F_j\Big)$, *továbbá a*

$$\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; \prod_{j\in J} F_j\Big) \to \prod_{j\in J}\Big(\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F_j\Big)\Big); \quad u \mapsto (\mathrm{pr}_j \circ u)_{j\in J}$$

leképezés izometrikus lineáris bijekció.

Bizonyítás. Jelölje E az $(E_i)_{i\in I}$ véges normált tér rendszer szorzatát. Legyen $u \in \mathfrak{Mult}(E; F)$ és $j \in J$. Mivel $\mathrm{pr}_j \in \mathscr{L}(F; F_j)$, így 3.3.4. alapján $\mathrm{pr}_j \circ u \in \mathfrak{Mult}(E; F_j)$. Továbbá, $u \in \mathfrak{Mult}(E; F)$ esetén

$$\|u\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\le 1}} \|u(x)\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\le 1}} \Big(\max_{j\in J} \|\mathrm{pr}_j(u(x))\|\Big) = \max_{j\in J}\Big(\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\le 1}} \|(\mathrm{pr}_j \circ u)(x)\|\Big) =$$
$$= \max_{j\in J} \|\mathrm{pr}_j \circ u\| = \|\,(\mathrm{pr}_j \circ u)_{j\in J}\,\|.$$

Nyilvánvaló, hogy a $\mathfrak{Mult}(E; F) \to \prod_{j\in J}\Big(\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F_j\Big)\Big)$; $u \mapsto (\mathrm{pr}_j \circ u)_{j\in J}$ leképezés lineáris, így az imént igazolt egyenlőség alapján lineáris izometria is. E leképezés szürjektivitásának bizonyításához legyen $(v_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} \mathfrak{Mult}(E; F_j)$. Értelmezzük az

$$u : E \to F; \quad x \mapsto (v_j(x))_{j\in J}$$

leképezést. Ha $i \in I$, $\mathfrak{a} \in E$, és $z \in E_i$, akkor $(u \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}})(z) = ((v_j \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}})(z))_{j\in J}$, és minden $j \in J$ esetén $v_j \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \to F_j$ lineáris operátor, ezért $u \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \to F$ is lineáris operátor, ami azt jelenti, hogy az $u : E \to F$ leképezés multilineáris operátor. Továbbá, minden $x \in E$ esetén

$$\|u(x)\| = \|(v_j(x))_{j\in J}\| = \max_{j\in J} \|v_j(x)\| \le \Big(\max_{j\in J} \|v_j\|\Big) \prod_{i\in I} \|x_i\|,$$

tehát $u \in \mathfrak{Mult}(E; F)$. Ugyanakkor világos, hogy $(\mathrm{pr}_j \circ u)_{j\in J} = (v_j)_{j\in J}$, következésképpen a $\mathfrak{Mult}(E; F) \to \prod_{j\in J} \mathfrak{Mult}(E; F_j)$; $u \mapsto (\mathrm{pr}_j \circ u)_{j\in J}$ leképezés szürjektív. ■

3.7.2. Állítás. *Legyen* $(E_i)_{i\in I}$ *normált terek véges rendszere,* F *normált tér, valamint* A *és* B *olyan nem üres diszjunkt halmazok, hogy* $I = A \cup B$. *Ekkor minden* $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in A} E_i; \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i; F\Big)\Big)$ *esetén az*

$$\widehat{u} : \prod_{i\in I} E_i \to F; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto u\left((x_i)_{i\in A}\right)\left((x_i)_{i\in B}\right)$$

leképezés eleme $\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$*-nek, és a*

$$\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in A} E_i; \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i; F\Big)\Big) \to \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big); \quad u \mapsto \widehat{u}$$

leképezés izometrikus lineáris bijekció a $\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in A} E_i;\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i;F\Big)\Big)$, *valamint a* $\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i;F\Big)$ *multilineáris operátorterek között.*

Bizonyítás. Az **ALG** 10.6.4. állítás szerint $u\in\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in A} E_i;\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i;F\Big)\Big)$ esetén az

$$\widehat{u}:\prod_{i\in I} E_i\to F;\quad (x_i)_{i\in I}\mapsto u\left((x_i)_{i\in A}\right)\left((x_i)_{i\in B}\right)$$

függvény eleme $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i;F\Big)$-nek, és a

$$\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in A} E_i;\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i;F\Big)\Big)\to\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i;F\Big);\quad u\mapsto\widehat{u}$$

leképezés izomorfizmus az $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in A} E_i;\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i;F\Big)\Big)$ és $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i;F\Big)$ vektorterek között. Ezért csak két állítást kell igazolni:
1) Minden $u\in\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in A} E_i;\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i;F\Big)\Big)$ esetén az $\widehat{u}:\prod_{i\in I} E_i\to F$ multilineáris operátor folytonos és $\|\widehat{u}\|=\|u\|$.
2) Minden $v\in\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i;F\Big)$ esetén, ha $u\in\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in A} E_i;\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i;F\Big)\Big)$ az a multilineáris operátor, amelyre $\widehat{u}=v$, akkor $u\in\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in A} E_i;\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i;F\Big)\Big)$.

1) Legyen $u\in\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in A} E_i;\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i;F\Big)\Big)$. Ekkor minden $(x_i)_{i\in A}\in\prod_{i\in A} E_i$ esetén az $u\left((x_i)_{i\in A}\right):\prod_{i\in B} E_i\to F$ multilineáris operátor folytonos és az u multilineáris operátor is folytonos, így a multilineáris operátornormák tulajdonságai szerint

$$\|\widehat{u}\left((x_i)_{i\in I}\right)\|=\|u\left((x_i)_{i\in A}\right)\left((x_i)_{i\in B}\right)\|\leq\|u\left((x_i)_{i\in A}\right)\|\prod_{i\in B}\|x_i\|\leq$$
$$\leq\left(\|u\|\prod_{i\in A}\|x_i\|\right)\prod_{i\in B}\|x_i\|=\|u\|\prod_{i\in I}\|x_i\|,$$

tehát a $\widehat{u}:\prod_{i\in I} E_i\to F$ multilineáris operátor folytonos, és $\|\widehat{u}\|\leq\|u\|$.

A fordított egyenlőtlenség bizonyításához legyen $(x_i)_{i\in A}\in\prod_{i\in A} E_i$. Ha $(y_i)_{i\in B}\in\prod_{i\in B} E_i$ tetszőleges, és $(z_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I} E_i$ az a rendszer, amelyre minden $i\in I$ esetén

$$z_i:=\begin{cases} x_i & \text{, ha } i\in A,\\ y_i & \text{, ha } i\in B,\end{cases}\tag{1}$$

akkor $\widehat{u}$ definíciója alapján

$$\|u\left((x_i)_{i\in A}\right)\left((y_i)_{i\in B}\right)\|=\|\widehat{u}\left((z_i)_{i\in I}\right)\|\leq\|\widehat{u}\|\prod_{i\in I}\|z_i\|=\left(\|\widehat{u}\|\prod_{i\in A}\|x_i\|\right)\prod_{i\in B}\|y_i\|,$$

amiből következik, hogy

$$\|u\left((x_i)_{i\in A}\right)\| \le \|\widehat{u}\| \prod_{i\in A} \|x_i\|.$$

Ez minden $(x_i)_{i\in A} \in \prod\limits_{i\in A} E_i$ esetén teljesül, ezért $\|u\| \le \|\widehat{u}\|$.

2) Legyen $v \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big)$, és jelölje $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in A} E_i; \mathbf{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in B} E_i; F\Big)\Big)$ azt a multilineáris operátort, amelyre $\widehat{u} = v$. Rögzítsünk egy $(x_i)_{i\in A} \in \prod\limits_{i\in A} E_i$ rendszert. Ha $(y_i)_{i\in B} \in \prod\limits_{i\in B} E_i$ tetszőleges, és $(z_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$ az a rendszer, amelyre (1) teljesül, akkor

$$\|u\left((x_i)_{i\in A}\right)\left((y_i)_{i\in B}\right)\| = \|\widehat{u}\left((z_i)_{i\in I}\right)\| = \|v\left((z_i)_{i\in I}\right)\| \le$$
$$\le \|v\| \prod_{i\in I} \|z_i\| = \left(\|v\| \prod_{i\in A} \|x_i\|\right) \prod_{i\in B} \|y_i\|,$$

amiből következik, hogy $u\left((x_i)_{i\in A}\right) \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in B} E_i; F\Big)$, és látható, hogy

$$\|u\left((x_i)_{i\in A}\right)\| \le \|v\| \prod_{i\in A} \|x_i\|.$$

Ez az egyenlőtlenség minden $(x_i)_{i\in A} \in \prod\limits_{i\in A} E_i$ esetén teljesül, ezért az

$$u : \prod_{i\in A} E_i \to \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in B} E_i; F\Big)$$

multilineáris operátor folytonos, vagyis $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in A} E_i; \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in B} E_i; F\Big)\Big)$. ■

3.7.3. Következmény. *Legyenek E, F és G normált terek. Ekkor $u \in \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$ és $f \in F$ esetén az*

$$E \to G; \quad e \mapsto u(e)(f)$$

leképezés folytonos lineáris operátor, és az

$$F \to \mathscr{L}(E; G); \quad f \mapsto (e \mapsto u(e)(f))$$

leképezés folytonos lineáris operátor, valamint az

$$\mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G)) \to \mathscr{L}(F; \mathscr{L}(E; G)); \quad u \mapsto (f \mapsto (e \mapsto u(e)(f)))$$

leképezés lineáris izometria az $\mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$ és $\mathscr{L}(F; \mathscr{L}(E; G))$ operátorterek között.

Bizonyítás. Az előző állításból következik, hogy a

$$\alpha : \mathfrak{Mult}(E \times F; G) \to \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G)); \quad \mathbf{b} \mapsto (e \mapsto \mathbf{b}(e, \cdot))$$

leképezés lineáris izometria a $\mathfrak{Mult}(E \times F; G)$ bilineáris operátortér és a $\mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$ operátortér között.

Az E és F terek felcserélésével kapjuk, hogy az előző állításból következik, hogy a

$$\beta : \mathfrak{Mult}(F \times E; G) \to \mathscr{L}(F; \mathscr{L}(E; G)); \quad \mathbf{b} \mapsto (f \mapsto \mathbf{b}(\cdot, f))$$

leképezés lineáris izometria a $\mathfrak{Mult}(F \times E; G)$ bilineáris operátortér és a $\mathscr{L}(F; \mathscr{L}(E; G))$ operátortér között.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$\mathrm{ex} : \mathfrak{Mult}(E \times F; G) \to \mathfrak{Mult}(F \times E; G); \quad \mathbf{b} \mapsto ((f, e) \mapsto \mathbf{b}(e, f))$$

leképezés lineáris izometria a $\mathfrak{Mult}(E \times F; G)$ és $\mathfrak{Mult}(F \times E; G)$ bilineáris operátorterek között.

Ezért a $\beta \circ \mathrm{ex} \circ \alpha^{-1} : \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G)) \to \mathscr{L}(F; \mathscr{L}(E; G))$ leképezés lineáris izometria az $\mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$ és $\mathscr{L}(F; \mathscr{L}(E; G))$ operátorterek között. Egyszerűen kiszámítható, hogy ez a leképezés egyenlő a

$$\mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G)) \to \mathscr{L}(F; \mathscr{L}(E; G)); \quad u \mapsto (f \mapsto (e \mapsto u(e)(f)))$$

leképezéssel. ■

Természetesen az előző állítás könnyen igazolható a definíciók alapján közvetlenül is, a 3.7.2. állításra való hivatkozás nélkül.

3.7.4. Állítás. *Legyenek E és F normált terek, valamint $m, n \in \mathbb{N}$. Minden $u \in \mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F))$ operátorra értelmezzük a következő leképezést:*

$$\pi_{m,n}(u) : E^{m+n} \to F; \quad (x_i)_{i \in m+n} \mapsto u((x_i)_{i \in m})((x_{m+j})_{j \in n})).$$

Ekkor $u \in \mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F))$ esetén $\pi_{m,n}(u) \in \mathscr{L}_{m+n}(E; F)$ és a

$$\pi_{m,n} : \mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F)) \to \mathscr{L}_{m+n}(E; F); \quad u \mapsto \pi_{m,n}(u)$$

leképezés izometrikus lineáris bijekció a multilineáris operátornormák szerint.

Bizonyítás. Ha $m = 0$ vagy $n = 0$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz, mert $m = 0$ esetén a definíció szerint $\mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F)) := \mathscr{L}_n(E; F) = \mathscr{L}_{m+n}(E; F)$, míg $n = 0$ esetén a definíció szerint $\mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F)) := \mathscr{L}_m(E; F) = \mathscr{L}_{m+n}(E; F)$, és mindkét esetben $\pi_{m,n}$ az identikus függvény.

Legyen $u \in \mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F))$ rögzített. Először megmutatjuk, hogy a $\pi_{m,n}(u) : E^{m+n} \to F$ függvény multilineáris. Ehhez legyen $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i \in m+n} \in E^{m+n}$, $\mathfrak{a}' := (\mathfrak{a}_i)_{i \in m}$ és $\mathfrak{a}'' := (\mathfrak{a}_{m+j})_{j \in n}$. Rögzítsünk egy $k \in m + n$ számot; azt kell igazolni, hogy a $\pi_{m,n}(u) \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : E \to F$ függvény lineáris. Könnyen látható, hogy ha $x \in E$ és $i \in m + n$, akkor

– ha $k < m$, akkor

$$(\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(x))(i) = \begin{cases} (\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'}(x))(i) & , \text{ha } i < m \\ \mathfrak{a}_i & , \text{ha } i \geq m, \end{cases}$$

– ha $k \geq m$, akkor

$$(\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(x))(i) = \begin{cases} \mathfrak{a}_i & , \text{ha } i < m \\ (\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}''}(x))(i - m) & , \text{ha } i \geq m. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy minden $E \ni x$-re,

– ha $k < m$, akkor

$$(\pi_{m,n}(u) \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}})(x) = (u(\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'}(x)))(\mathfrak{a}'') = ((u \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'})(x))(\mathfrak{a}''),$$

– ha $k \geq m$, akkor

$$(\pi_{m,n}(u) \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}})(x) = (u(\mathfrak{a}'))(\mathrm{in}_{k-m,\mathfrak{a}''}(x)) = (u(\mathfrak{a}') \circ \mathrm{in}_{k-m,\mathfrak{a}''})(x).$$

Ha tehát $k < m$, akkor a $\pi_{m,n}(u) \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : E \to F$ függvény egyenlő az $u \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}'} : E \to F$ lineáris operátor és az $\mathscr{L}_n(E;F) \to F;\ v \mapsto v(\mathfrak{a}'')$ lineáris operátor kompozíciójával, vagyis lineáris. Ha viszont $k \geq m$, akkor a $\pi_{m,n}(u) \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} = u(\mathfrak{a}') \circ \mathrm{in}_{k-m,\mathfrak{a}''}$, tehát a $\pi_{m,n}(u) \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : E \to F$ függvény lineáris. Ezzel megmutattuk, hogy a $\pi_{m,n}(u) : E^{m+n} \to F$ függvény multilineáris.

Megmutatjuk, hogy a $\pi_{m,n}(u) : E^{m+n} \to F$ multilineáris operátor folytonos, és $\|\pi_{m,n}(u)\| = \|u\|$. Ha $(x_k)_{k \in m+n} \in E^{m+n}$, akkor

$$\|\pi_{m,n}(u)((x_k)_{k\in m+n})\| = \|u((x_i)_{i\in m})((x_{m+j})_{j\in n})\| \leq \|u((x_i)_{i\in m})\| \sum_{j\in n} \|x_{m+j}\| \leq$$
$$\leq \|u\| \Big(\sum_{i\in m} \|x_i\| \Big) \Big(\sum_{j\in n} \|x_{m+j}\| \Big) = \|u\| \sum_{k\in m+n} \|x_k\|,$$

amiből látható, hogy $\pi_{m,n}(u)$ folytonos multilineáris operátor, és $\|\pi_{m,n}(u)\| \leq \|u\|$. Legyenek $(x_i)_{i\in m} \in E^m$ és $(y_j)_{j\in n} \in E^n$ tetszőleges rendszerek. Legyen $(z_k)_{k\in m+n} \in E^{m+n}$ az a rendszer, amelyre $k < m$ esetén $z_k := x_k$, és $m \leq k < m+n$ esetén $z_k := y_{k-m}$. Ekkor

$$\|u((x_i)_{i\in m})((y_j)_{j\in n})\| = \|\pi_{m,n}(u)((z_k)_{k\in m+n})\| \leq \|\pi_{m,n}(u)\| \sum_{k\in m+n} \|z_k\| =$$
$$= \|\pi_{m,n}(u)\| \Big(\sum_{i\in m} \|x_i\| \Big) \Big(\sum_{j\in m} \|y_j\| \Big).$$

Ebből azonnal látható, hogy minden $E^m \ni (x_i)_{i\in m}$-re

$$\|u((x_i)_{i\in m})\| \leq \|\pi_{m,n}(u)\| \Big(\sum_{i\in m} \|x_i\| \Big),$$

következésképpen fennáll a $\|u\| \leq \|\pi_{m,n}(u)\|$ egyenlőtlenség is.

Ezzel igazoltuk, hogy a $\pi_{m,n} : \mathscr{L}_m(E;\mathscr{L}_n(E;F)) \to \mathscr{L}_{m+n}(E;F)$ leképezés izometrikus, és a linearitása nyilvánvaló. E leképezés szürjektivitásának bizonyításához legyen $v \in \mathscr{L}_{m+n}(E;F)$ rögzített. Minden $(x_i)_{i\in m} \in E^m$ esetén legyen $p((x_i)_{i\in m}) : E^n \to E^{m+n}$ az a leképezés, amely minden $(y_j)_{j\in n} \in E^n$ elemhez azt a $(z_k)_{k\in m+n} \in E^{m+n}$ rendszert rendeli, amelyre $k < m$ esetén $z_k := x_k$, és $m \leq k < m+n$ esetén $z_k := y_{k-m}$. Ekkor minden $(x_i)_{i\in m} \in E^m$ elemre $v \circ p((x_i)_{i\in m}) \in \mathscr{L}_n(E;F)$, és az

$$u : E^m \to \mathscr{L}_n(E;F); \quad (x_i)_{i\in m} \mapsto v \circ p((x_i)_{i\in m})$$

leképezés az az eleme $\mathscr{L}_m(E;\mathscr{L}_n(E;F))$-nek, amelyre $\pi_{m,n}(u) = v$. ■

3.8. Szimmetrikus és antiszimmetrikus folytonos multilineáris operátorok

Emlékeztetünk arra, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathfrak{S}_n$ jelöli az $n \to n$ bijekciók halmazát a kompozíció művelettel ellátva, tehát $\mathfrak{S}_n$ az n halmaz *teljes permutációcsoportja* (**ALG** 3.2.1.). Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén ε_n jelöli az $\mathfrak{S}_n$ csoport előjel-függvényét, tehát azt az $\mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ csoport-morfizmust, amely az n halmaz minden transzpozíciójához a -1 értéket rendeli (**ALG** 3.3.5.).

3.8.1. Definíció. *Legyenek E, F vektorterek és $n \in \mathbb{N}$. Egy $u \in \mathbf{L}_n(E; F)$ multilineáris operátort* **szimmetrikusnak** *nevezünk, ha minden $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permutációra és $E^n \ni (x_i)_{i\in n}$-re fennáll az*

$$u((x_{\sigma(i)})_{i\in n}) = u((x_i)_{i\in n})$$

egyenlőség. Az $E^n \to F$ szimmetrikus multilineáris operátorok halmazát $\mathbf{L}^s_n(E; F)$ vagy $\mathbf{S}_n(E; F)$ jelöli. Ha E és F normált terek, akkor az $E^n \to F$ szimmetrikus folytonos multilineáris operátorok halmazát $\mathscr{L}^s_n(E; F)$ vagy $\mathscr{S}_n(E; F)$ jelöli.

A definíció természete alapján nyilvánvaló, hogy ha E, F vektorterek (illetve normált terek) és $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathbf{L}^s_n(E; F)$ (illetve $\mathscr{L}^s_n(E; F)$) *lineáris altere* $\mathbf{Mult}(E^n; F)$-nek (illetve $\mathfrak{Mult}(E^n; F)$-nek).

3.8.2. Állítás. (A szimmetrikus multilineáris operátorok meghatározottságának tétele) *Legyenek E, F vektorterek a K test felett és $n \in \mathbb{N}^*$. Tegyük fel, hogy* $\mathrm{Char}(K) = 0$ *vagy* $n < \mathrm{Char}(K)$*. Ha $u \in \mathbf{L}^s_n(E; F)$ olyan, hogy minden $E \ni x$-re $u(x^{[n]}) = 0$, akkor $u = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $u \in \mathbf{L}^s_n(E; F)$ és $(x_i)_{i\in n} \in E^n$. Azt kell megmutatni, hogy a K testre és az u-ra vonatkozó feltételek teljesülése esetén $u((x_i)_{i\in n}) = 0$.

Legyen $(t_i)_{i\in n} \in K^n$, továbbá $i \in n$ esetén $J_i := n$, és minden $J_i \ni j$-re $z_{i,j} := t_j.x_j$. Ekkor fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned}
0 = u\Big(\Big(\sum_{j\in n} t_j.x_j\Big)^{[n]}\Big) &= u\Big(\Big(\sum_{j\in J_i} z_{i,j}\Big)_{i\in n}\Big) \overset{(1)}{=} \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(n;n)} u((z_{i,\sigma(i)})_{i\in n}) = \\
= \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(n;n)} u((t_{\sigma(i)}.x_{\sigma(i)})_{i\in n}) &\overset{(2)}{=} \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(n;n)} \Big(\prod_{i\in n} t_{\sigma(i)}\Big).u((x_{\sigma(i)})_{i\in n}) \overset{(3)}{=} \\
\overset{(3)}{=} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \Big(\prod_{i\in n} t_{\sigma(i)}\Big).u((x_{\sigma(i)})_{i\in n}) &+ \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(n;n)\setminus\mathfrak{S}_n} \Big(\prod_{i\in n} t_{\sigma(i)}\Big).u((x_{\sigma(i)})_{i\in n}) \overset{(4)}{=} \\
\overset{(4)}{=} n!\Big(\prod_{i\in n} t_i\Big).u((x_i)_{i\in n}) &+ \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(n;n)\setminus\mathfrak{S}_n} \Big(\prod_{i\in n} t_{\sigma(i)}\Big).u((x_{\sigma(i)})_{i\in n}),
\end{aligned}$$

ahol

– az $\overset{(1)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk u multiadditivitását és azt, hogy $\prod_{i\in n} J_i = \mathscr{F}(n; n)$;

– a $\overset{(2)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk u multihomogenitását;

– a $\overset{(3)}{=}$ egyenlőségnél az $\mathscr{F}(n; n)$ halmazt az $\mathfrak{S}_n$ és $\mathscr{F}(n; n) \setminus \mathfrak{S}_n$ halmazok diszjunkt uniójaként írtuk fel, és ennek megfelelően felbontottuk az összegzést;

– a $\overset{(4)}{=}$ egyenlőségnél alkalmaztuk u szimmetrikusságát, így minden $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permutációra $u((\sigma(x_i))_{i\in n}) = u((x_i)_{i\in n})$, és felhasználtuk a K-beli szorzás általános kommutativitását, így minden $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permutációra $\underset{i\in n}{\mathrm{P}}\, t_{\sigma(i)} = \underset{i\in n}{\mathrm{P}}\, t_i$.

Tehát azt kaptuk, hogy minden $(x_i)_{i\in n} \in E^n$ esetén az

$$f_{(x_i)_{i\in n}} : K^n \to F; \quad (t_i)_{i\in n} \mapsto n!\Big(\underset{i\in n}{\mathrm{P}}\, t_i\Big).u((x_i)_{i\in n}) + \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(n;n)\setminus\mathfrak{S}_n} \Big(\underset{i\in n}{\mathrm{P}}\, t_{\sigma(i)}\Big).u((x_{\sigma(i)})_{i\in n})$$

leképezés azonosan nulla. Azonban minden $(x_i)_{i\in n} \in K^n$ esetén $f_{(x_i)_{i\in n}} : K^n \to F$ *polinomiális vektorfüggvény*, ezért a polinomiális vektorfüggvények együtthatóinak egyértelműségi tétele (**1.** gyakorlat) alapján kapjuk, hogy $n!.u((x_i)_{i\in n}) = 0$ (és mellesleg minden $\sigma \in \mathscr{F}(n;n) \setminus \mathfrak{S}_n$ függvényre $u((x_{\sigma(i)})_{i\in n}) = 0$). Mivel a K test karakterisztikájára tett feltevés szerint $n!$ invertálható elem K-ban, ebből következik, hogy minden $(x_i)_{i\in n} \in E^n$ esetén $u((x_i)_{i\in n}) = 0$, vagyis $u = 0$. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha E, F vektorterek a K test felett, $n \in \mathbb{N}^*$, és $u \in \mathbf{L}_n(E;F)$ *nem szimmetrikus* multilineáris operátor, akkor lehetséges az, hogy minden $E \ni x$-re $u(x^{[n]}) = 0$, de $u \neq 0$ (még akkor is, ha a K test nulla karakterisztikájú). Például, tetszőleges K test esetén az

$$u : K^2 \times K^2 \to K; \quad ((x_0, x_1), (y_0, y_1)) \mapsto x_1 y_0 - x_0 y_1$$

leképezés olyan bilineáris funkcionál a K^2 vektortér felett, hogy minden $(x_0, x_1) \in K^2$ esetén $u((x_0, x_1), (x_0, x_1)) = 0$, de $u \neq 0$.

Legyenek E, F vektorterek a K test felett, és tegyük fel, hogy a $\mathbb{Z} \to K$ kanonikus leképezés injektív (vagyis a K test nulla karakterisztikájú). Legyen továbbá $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített. Ekkor minden $u \in \mathbf{L}_n(E;F)$ multilineáris operátorra az

$$\mathbb{S}(u) : E^n \to F; \quad (x_i)_{i\in n} \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} u((x_{\sigma(i)})_{i\in n})$$

leképezés eleme $\mathbf{L}_n^s(E;F)$-nek; az $\mathbb{S}(u)$ operátort nevezzük u *szimmetrizáltjának*. Ha $u \in \mathbf{L}_n(E;F)$, akkor $u = \mathbb{S}(u)$ ekvivalens azzal, hogy u szimmetrikus. Ha E és F normált terek, továbbá $u \in \mathscr{L}_n(E;F)$, akkor $\mathbb{S}(u) \in \mathscr{L}_n^s(E;F)$ és $\|\mathbb{S}(u)\| \leq \|u\|$. Legyen $(u_i)_{i\in n} \in (E')^n$, és tekintsük a $\bigotimes_{i\in n} u_i \in \mathbf{L}_n(E;K)$ multilineáris funkcionált. Ekkor az

$$\bigvee_{i\in n} u_i := \mathbb{S}\Big(\bigotimes_{i\in n} u_i\Big)$$

szimmetrikus multilineáris funkcionált az $(u_i)_{i\in n}$ funkcionál rendszer *szimmetrikus tenzorszorzatának* nevezzük. A definíció szerint minden $(x_i)_{i\in n} \in E^n$ rendszerre

$$(\bigvee_{i\in n} u_i)((x_i)_{i\in n}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \Big(\underset{i\in n}{\mathrm{P}}\, u_i(x_{\sigma(i)})\Big)$$

teljesül.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az E és F normált terek között ható, egy pontban n-szer differenciálható függvény n-edik deriváltja $E^n \to F$ folytonos szimmetrikus multilineáris operátor, vagyis eleme $\mathscr{L}_n^s(E;F)$-nek (**DIF** 7.2.1.). Ez indokolja a folytonos szimmetrikus multilineáris operátorok vizsgálatát.

3.8.3. Definíció. *Legyenek E, F vektorterek és $n \in \mathbb{N}$. Egy $u \in \mathbf{L}_n(E;F)$ multilineáris operátort* **antiszimmetrikusnak** *nevezünk, ha minden $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permutációra és $E^n \ni (x_i)_{i \in n}$-re fennáll az*

$$u((x_{\sigma(i)})_{i\in n}) = \varepsilon_n(\sigma)u((x_i)_{i\in n})$$

egyenlőség. Az $E^n \to F$ antiszimmetrikus multilineáris operátorok halmazát $\mathbf{L}_n^a(E;F)$ vagy $\mathbf{A}_n(E;F)$ jelöli. Ha E és F normált terek, akkor az $E^n \to F$ antiszimmetrikus folytonos multilineáris operátorok halmazát $\mathscr{L}_n^a(E;F)$ vagy $\mathscr{A}_n(E;F)$ jelöli.

Legyenek E, F vektorterek a K test felett, és tegyük fel, hogy a $\mathbb{Z} \to K$ kanonikus leképezés injektív (vagyis a K test nulla karakterisztikájú). Legyen továbbá $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített. Ekkor minden $u \in \mathbf{L}_n(E;F)$ multilineáris operátorra az

$$\mathbb{A}(u) : E^n \to F; \quad (x_i)_{i\in n} \mapsto \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon_n(\sigma)u((x_{\sigma(i)})_{i\in n})$$

leképezés eleme $\mathbf{L}_n^a(E;F)$-nek; az $\mathbb{A}(u)$ operátort nevezzük u *antiszimmetrizáltjának.* Ha $u \in \mathbf{L}_n(E;F)$, akkor $u = \mathbb{A}(u)$ ekvivalens azzal, hogy u antiszimmetrikus. Ha E és F normált terek, továbbá $u \in \mathscr{L}_n(E;F)$, akkor $\mathbb{A}(u) \in \mathscr{L}_n^a(E;F)$ és $\|\mathbb{A}(u)\| \leq \|u\|$. Legyen $(u_i)_{i\in n} \in (E')^n$, és tekintsük a $\bigotimes\limits_{i\in n} u_i \in \mathbf{L}_n(E;K)$ multilineáris funkcionált. Ekkor az

$$\bigwedge_{i\in n} u_i := n!\mathbb{A}\Big(\bigotimes_{i\in n} u_i\Big)$$

antiszimmetrikus multilineáris funkcionált az $(u_i)_{i\in n}$ funkcionál rendszer *antiszimmetrikus tenzorszorzatának* vagy *külső szorzatának* nevezzük. A definíció szerint minden $(x_i)_{i\in n} \in E^n$ rendszerre

$$\Big(\bigwedge_{i\in n} u_i\Big)((x_i)_{i\in n}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon_n(\sigma) \prod_{i\in n} u_i(x_{\sigma(i)}) = \det\Big((u_i(x_j))_{(i,j)\in n\times n}\Big)$$

teljesül.

Később külön fejezetben részletesen foglalkozunk a folytonos antiszimmetrikus multilineáris operátorértékű függvények (az ún. *differenciálható formák*) elemi analízisével (**DIF** 15. fejezet). Ez indokolja a folytonos antiszimmetrikus multilineáris operátorok vizsgálatát.

3.9. Gyakorlatok

1. (*Többváltozós polinomiális függvények.*) Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített, és az $\mathbb{N}^n$ halmaz elemeit nevezzük n-*dimenziós multiindexeknek.* Ha $\alpha \in \mathbb{N}^n$, akkor $|\alpha| := \sum\limits_{i\in n} \alpha_i$, továbbá minden K testre és $t \in K^n$ elemre $t^\alpha := \prod\limits_{i\in n} t_i^{\alpha_i}$.

a) Legyen F vektortér a K test felett. Egy $f : K^n \to F$ leképezést F-be ható, n-változós *polinomiális függvénynek* nevezünk, ha létezik olyan $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \in F^{(\mathbb{N}^n)}$ rendszer, hogy minden $K^n \ni t$-re

$$f(t) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} t^\alpha.z_\alpha$$

teljesül. (Itt véges összegzés áll, hiszen $F^{(\mathbb{N}^n)}$ azon $\mathbb{N}^n \to F$ függvények halmaza, amelyek csak véges sok helyen vesznek fel nem nulla értéket.) Jelölje $\mathrm{P}(K^n; F)$ az F-be érkező n-változós polinomiális függvények halmazát. Ekkor $\mathrm{P}(K^n; F)$ lineáris altere az $\mathscr{F}(K^n; F)$ függvénytérnek, továbbá az

$$F^{(\mathbb{N}^n)} \to \mathrm{P}(K^n; F); \quad (z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mapsto \Big(t \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} t^\alpha . z_\alpha\Big)$$

leképzés *szürjekció.*

b) Ha K *végtelen* test és F vektortér K felett, akkor az előző leképzés *injekció* (tehát az a) alapján *bijekció is*). Ekkor minden $f : K^n \to F$ polinomiális függvényhez *egyértelműen* létezik olyan $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \in F^{(\mathbb{N}^n)}$ rendszer, hogy minden $K^n \ni t$-re $f(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} t^\alpha . z_\alpha$. (Ez a *polinomiális függvények együtthatói egyértelműségének* tétele.)

(*Útmutatás.* A b) bizonyításához azt kell igazolni, hogy ha K végtelen test és F vektortér K felett, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra és minden $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \in F^{(\mathbb{N}^n)}$ rendszerre; ha minden $K^n \ni t$-re $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} t^\alpha . z_\alpha = 0$, akkor minden $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindexre $z_\alpha = 0$. Ezt n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az $n = 1$ esetben legyen $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in F^{(\mathbb{N})}$ olyan rendszer, amelyre minden $t \in K$ esetén $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} t^\alpha . z_\alpha = 0$. Ekkor minden $F^* \ni u$-ra és $K \ni t$-re $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} t^\alpha u(z_\alpha) = 0$ teljesül. Tehát ha az állítás igaz az $F := K$ esetben, akkor minden $F^* \ni u$-ra és minden $\mathbb{N} \ni \alpha$-ra $u(z_\alpha) = 0$, így a VI. fejezet, 2. pont, **19**. gyakorlat szerint minden $\mathbb{N} \ni \alpha$-ra $z_\alpha = 0$. Ezzel az $n = 1$ esetben a problémát visszavezettük az $F := K$ speciális esetre. Ekkor az $f : K \to K;\ t \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} t^\alpha . z_\alpha$ polinomiális függvénynek legfeljebb N darab nullhelye létezhet, ha a $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in K[X]$ polinom N-ed fokú és $N > 0$ (II. fejezet, 1. pont, **12**. gyakorlat). Ezért a K végtelensége miatt minden $\mathbb{N} \ni \alpha$-ra $z_\alpha = 0$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és legyen $(z_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} \in F^{(\mathbb{N}^{n+1})}$ olyan rendszer, hogy az

$$f : K^{n+1} \to F; \quad t \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} t^\alpha . z_\alpha$$

függvény azonosan 0. Rögzítsünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ esetén, ha $|\alpha| > N$, akkor $z_\alpha = 0$. Minden $s \in K$ elemre értelmezzük a következő függvényt

$$f_s : K^n \to F; \quad (t_i)_{i \in n} \mapsto f(t_0, ..., t_{n-1}, s).$$

Ha $s \in K$, akkor minden $(t_i)_{i \in n} \in K^n$ elemre

$$\begin{aligned}
& f_s((t_i)_{i \in n}) := f(t_0, ..., t_{n-1}, s) = \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n,\ |\beta| \le N} t^\beta z_{\beta_0, ..., \beta_{n-1}, 0} + \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{n+1},\ |\beta| \le N,\ \beta_n > 0} \Big(\mathrm{P}_{i \in n}\, t_i^{\beta_i}\Big) s^{\beta_n} z_\beta = \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n,\ |\beta| \le N} t^\beta z_{\beta_0, ..., \beta_{n-1}, 0} + \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n,\ |\beta| < N} t^\beta \Big(\sum_{k=1}^{N-|\beta|} s^k . z_{\beta_0, ..., \beta_{n-1}, k}\Big) = \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n,\ |\beta| = N} t^\beta z_{\beta_0, ..., \beta_{n-1}, 0} + \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n,\ |\beta| < N} t^\beta \Big(z_{\beta_0, ..., \beta_{n-1}, 0} + \sum_{k=1}^{N-|\beta|} s^k z_{\beta_0, ..., \beta_{n-1}, k}\Big)
\end{aligned}$$

tehát $f_s \in \mathrm{P}(K^n; F)$, és a feltevés szerint f_s az azonosan 0 függvény. Az indukciós hipotézis alapján ebből következik, hogy minden $K \ni s$-re és minden $N^n \ni \beta$-ra; ha $|\beta| = N$, akkor $z_{\beta_0,\dots,\beta_{n-1},0} = 0$, és ha $|\beta| < N$, akkor

$$z_{\beta_0,\dots,\beta_{n-1},0} + \sum_{k=1}^{N-|\beta|} s^k z_{\beta_0,\dots,\beta_{n-1},k} = 0.$$

Alkalmazva az állítást $n = 1$ esetén; ebből kapjuk, hogy minden $N^n \ni \beta$-ra; ha $|\beta| = N$, akkor $z_{\beta_0,\dots,\beta_{n-1},0} = 0$, és ha $|\beta| < N$, akkor $z_{\beta_0,\dots,\beta_{n-1},0} = 0$ és minden $1 \leq k \leq N - |\beta|$ természetes számra $z_{\beta_0,\dots,\beta_{n-1},k} = 0$. Könnyen látható, hogy ez azt jelenti, hogy minden $\beta \in \mathbb{N}^{n+1}$ multiindexre $z_\beta = 0$.)

2. Legyen $(E_i)_{i\in I}$ vektorterek véges rendszere a K test felett, és tekintsük azt a $\bigotimes_{i\in I} E_i$ vektorteret, amit a multilineáris operátorokkal kapcsolatos 8. példában értelmeztünk, tehát $\bigotimes_{i\in I} E_i$ az a lineáris altere $\mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i^*; K\Big)$-nak, amelynek elemei előállnak véges sok $\bigotimes_{i\in I} x_i$ alakú multilineáris funkcionál lineáris kombinációjaként, ahol $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$. Legyen

$$\otimes : \prod_{i\in I} E_i \to \bigotimes_{i\in I} E_i; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \bigotimes_{i\in I} x_i.$$

a) Ekkor $\otimes \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; \bigotimes_{i\in I} E_i\Big)$, és minden K feletti F vektortérhez, és minden $f \in \mathbf{Mult}(\prod_{i\in I} E_i; F)$ multilineáris operátorhoz létezik egyetlen olyan $\tilde{f} \in \mathbf{L}(\bigotimes_{i\in I} E_i; F)$, amelyre $\tilde{f} \circ \otimes = f$ teljesül, vagyis minden $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ esetén $\tilde{f}(\bigotimes_{i\in I} x_i) = f((x_i)_{i\in I})$.

b) Legyen G olyan vektortér a K test felett, és legyen $u \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; G\Big)$ olyan multilineáris operátor, hogy minden F veltortérhez és minden $f \in \mathbf{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ multilineáris operátorhoz létezik egyetlen olyan $\tilde{f} \in \mathbf{L}(G; F)$, hogy $\tilde{f} \circ u = f$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $v : \bigotimes_{i\in I} E_i \to G$ *lineáris bijekció*, amelyre $u = v \circ \otimes$.

3. Legyen E vektortér a K test felett, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re értelmezzük a $\overset{n}{\otimes} E$ vektorteret a következő módon: $\overset{0}{\otimes} E := K$, és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\overset{n}{\otimes} E := \bigotimes_{i\in n} E_i$, ahol minden $i \in n$ számra $E_i := E$. Tekintsük a $(\overset{n}{\otimes} E)_{n\in\mathbb{N}}$ vektortér-sorozatot, és legyen

$$\mathbf{T}(E) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\overset{n}{\otimes} E).$$

a) Minden $m, n \in \mathbb{N}$ számhoz létezik egyetlen olyan

$$p_{m,n} : (\overset{m}{\otimes} E) \times (\overset{n}{\otimes} E) \to \overset{m+n}{\otimes} E$$

bilineáris operátor, hogy minden $(x_i)_{i\in m} \in E^m$ és $(y_j)_{j\in n} \in E^n$ esetén

$$p_{m,n}\Big(\bigotimes_{i\in m} x_i, \bigotimes_{j\in n} y_j\Big) = \bigotimes_{k\in m+n} z_k,$$

ahol $k < m$ esetén $z_k := x_k$ és $m \leq k < m+n$ esetén $z_k := y_{k-m}$.

b) Létezik egyetlen olyan

$$p : \mathbf{T}(E) \times \mathbf{T}(E) \to \mathbf{T}(E)$$

bilineáris operátor, amelynek minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén a leszűkítése $(\overset{m}{\otimes} E) \times (\overset{n}{\otimes} E)$-re egyenlő $p_{m,n}$-nel.

c) A $\mathbf{T}(E)$ vektortér a p művelettel ellátva *egységelemes algebra* a K test felett, és a $j : E \to \mathbf{T}(E)$ kanonikus lekepezés lineáris injekció. Ha A egységelemes algebra K felett, akkor minden $f : E \to A$ lineáris operátorhoz létezik egyetlen olyan $\tilde{f} : \mathbf{T}(E) \to A$ egységelem-tartó algebra-morfizmus (IV. fejezet, 2. pont, **2**. gyakorlat), amelyre $\tilde{f} \circ j = f$.

d) Ha B egységelemes algebra K felett és $u : E \to B$ olyan lineáris operátor, hogy minden K feletti A egységelemes algebrához, és minden $f : E \to A$ lineáris operátorhoz létezik egyetlen olyan $\tilde{f} : B \to A$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{f} \circ u = f$, akkor egyértelműen létezik olyan $v : \mathbf{T}(E) \to B$ *algebra-izomorfizmus*, amelyre $v \circ j = u$.

(A $\mathbf{T}(E)$ egységelemes algebrát az E vektortér *tenzoralgebrájának* nevezzük.)

4. Legyen $(E_i)_{i \in I}$ normált terek véges rendszere, F normált tér, és $u : \prod_{i \in I} E_i \to F$ multilineáris operátor. Ha $u \neq 0$ és $\mathrm{Card}(I) > 1$, akkor u *nem egyenletesen folytonos*.

(*Útmutatás.* Kövessük az V. fejezet, 7. pont, **5**. gyakorlatának gondolatmenetét!)

5. Legyen E a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ vektortér a $\|\cdot\|_\infty$ normával, és F a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ vektortér a $\|\cdot\|_2$ normával ellátva. Értelmezzük a következő leképzést:

$$u : E \times F \to \mathbb{K}; \quad (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k).$$

Ekkor u *változóiban folytonos* bilineáris funkcionál, de nem folytonos.

(*Útmutatás.* Minden $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \ni \mathbf{s}, \mathbf{s}'$-re az elemi Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával $|u(\mathbf{s}, \mathbf{s}')| \leq \|\mathbf{s}\|_2 \|\mathbf{s}'\|_2$, tehát az $u(\mathbf{s}, \cdot) : \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{K}$ leképezés a $\|\cdot\|_2$ szerint folytonos lineáris funkcionál, továbbá triviális, hogy $|u(\mathbf{s}, \mathbf{s}')| \leq \|\mathbf{s}\|_\infty \|\mathbf{s}'\|_1$, tehát az $u(\cdot, \mathbf{s}') : \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{K}$ leképezés a $\|\cdot\|_\infty$ szerint folytonos lineáris funkcionál, így u változóiban folytonos.

Legyen $\mathbf{a} \in l^2_{\mathbb{K}}$ olyan sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\mathbf{a}(k) \in \mathbb{R}^*_+$ és $\mathbf{a} \notin l^1_{\mathbb{K}}$ (például $\mathbf{a} := \left(\frac{1}{k+1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$). Minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyenek $\mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ azok a sorozatok, amelyekre $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{a}_n(k) := \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j)\right)^{-1} & ; \text{ha } k \leq n \\ 0 & ; \text{ha } k > n, \end{cases}$$

valamint

$$\mathbf{a}'_n(k) := \begin{cases} \mathbf{a}(k) & ; \text{ha } k \leq n \\ 0 & ; \text{ha } k > n. \end{cases}$$

Ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|\mathbf{a}_n\|_\infty = \Big(\sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j)\Big)^{-1}$, ezért $\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = 0$ a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|\mathbf{a}'_n\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_2$, ezért az $(\mathbf{a}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *korlátos* $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-ben a $\|\cdot\|_2$ norma szerint. Ha u folytonos volna, akkor létezne olyan $C \geq 0$ valós szám, amelyre minden $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ esetén $|u(\mathbf{s}, \mathbf{s}')| \leq C\|\mathbf{s}\|_\infty\|\mathbf{s}'\|_2$ teljesülne. Ebből következne, hogy $\lim_{n\to\infty} u(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_n) = 0$, holott egyszerű számolás mutatja, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén $u(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}'_n) = 1$.)

6. Ha $(E_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere, F normált tér, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$-ben haladó sorozat, és $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$, akkor a következő állítások ekvivalensek.

a) Az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat u-hoz konvergál a multilineáris operátornorma szerint.

b) Az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens $\prod_{i\in I} E_i$-n, $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, és $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $0 \in \prod_{i\in I} E_i$ vektor valamely környezetén.

c) Az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $\prod_{i\in I} E_i$ normált szorzattér minden korlátos részhalmazán egyenletesen konvergens és $u = \lim_{n\to\infty} u_n$.

d) Az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens $\prod_{i\in I} E_i$-n és $u = \lim_{n\to\infty} u_n$.

8. a) Legyen E halmaz, és jelölje $\mathbf{S}_E$ az $E \to E$ bijekciók (vagyis permutációk) halmazát. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $(\sigma_i)_{i\in n}$ egy $\mathbf{S}_E$-ben haladó rendszer. Minden $k \geq n$ természetes számra legyen $\sigma_k := \mathrm{id}_E$, és értelmezzük az

$$f : \mathbb{N} \times \mathbf{S}_E \to \mathbf{S}_E; \quad (k, \sigma) \mapsto \sigma \circ \sigma_k$$

leképezést. Jelölje $(\tilde{\sigma}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a σ_0 kezdőpont és az f függvény által meghatározott rekurzív sorozatot. Ekkor bármely $j, k \geq n$ természetes számra $\tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_k$ teljesül. Megállapodunk, hogy $\tilde{\sigma}_n$-t a $(\sigma_i)_{i\in n}$ *permutáció rendszer kompozíciójának* nevezzük, és a $\underset{i\in n}{\mathbb{P}}\, \sigma_i$ szimbólummal jelöljük. Mutassuk meg, hogy az $n = 1$ esetben $\underset{i\in 1}{\mathbb{P}}\, \sigma_i = \sigma_0$; az $n = 2$ esetben $\underset{i\in 2}{\mathbb{P}}\, \sigma_i = \sigma_0 \circ \sigma_1$; az $n = 3$ esetben $\underset{i\in 3}{\mathbb{P}}\, \sigma_i = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$, s.í.t.

b) Ha E halmaz, akkor egy $\sigma \in \mathbf{S}_E$ permutációt *transzpozíciónak* nevezünk, ha léteznek olyan $x_1, x_2 \in E$ elemek, amelyekre $x_1 \neq x_2$, $\sigma(x_1) = x_2$, $\sigma(x_2) = x_1$ és minden $x \in E \setminus \{x_1, x_2\}$ esetén $\sigma(x) = x$. Mutassuk meg, hogy ha E véges halmaz és $\mathrm{Card}(E) \geq 2$, akkor minden $\sigma \in \mathbf{S}_E$ permutációhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}^*$ és olyan $(\sigma_i)_{i\in n}$ transzpozíció rendszer, hogy $\sigma = \underset{i\in n}{\mathbb{P}}\, \sigma_i$.

(*Útmutatás.* A b) állítást az E véges halmaz számossága szerinti teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Az állítás triviálisan igaz, ha $\mathrm{Card}(E) = 2$, mert ekkor $\mathrm{id}_E = \sigma \circ \sigma$, ahol σ az E kételemű halmaz egyetlen transzpozíciója. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ olyan természetes szám, hogy az állítás minden n elemű E halmazra igaz. Legyen E olyan véges halmaz, hogy $\mathrm{Card}(E) = n + 1$, továbbá legyen $\sigma \in \mathbf{S}_E$ rögzítve. Két eset lehetséges.

(I) Létezik olyan $x \in E$, hogy $\sigma(x) = x$; ekkor az $E' := E \setminus \{x\}$ halmazra $\mathrm{Card}(E') = n$ teljesül, és $\sigma|_{E'} \in \mathbf{S}_{E'}$. Ezért az indukciós hipotézis szerint van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(\sigma'_i)_{i\in n}$ rendszer, hogy minden $n \ni i$-re σ'_i az E' halmaznak transzpozíciója, és $\sigma|_{E'} = \underset{i\in n}{\mathbb{P}}\, \sigma'_i$.

Legyen minden $n \ni i$-re $\sigma_i \in \mathbf{S}_E$ az a permutáció, amelynek E'-re vett leszűkítése egyenlő σ'_i-vel, és amelyre $\sigma_i(x) := x$. Ekkor $(\sigma_i)_{i\in n}$ olyan transzpozíció rendszer $\mathbf{S}_E$-ben, amelyre $\sigma = \underset{i\in n}{\mathbb{P}} \sigma_i$.

(II) Nem létezik olyan $x \in E$, hogy $\sigma(x) = x$. Legyen $x \in E$ tetszőlegesen rögzített pont, és jelölje τ az E-nek azt a permutációját, amelyre $\tau(\sigma(x)) := x$, $\tau(x) := \sigma(x)$, és minden $x' \in E \setminus \{x, \sigma(x)\}$ pontra $\tau(x') := x'$. Ekkor a $\sigma \circ \tau \in \mathbf{S}_E$ permutáció olyan , hogy $(\sigma \circ \tau)(\sigma(x)) = \sigma(x)$, ezért az (I) alapján $\sigma \circ \tau$-hoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}^*$ és olyan $(\sigma_i)_{i\in n}$ transzpozíció rendszer $\mathbf{S}_E$-ben, hogy $\sigma \circ \tau = \underset{i\in n}{\mathbb{P}} \sigma_i$. Ekkor $\sigma = \left(\underset{i\in n}{\mathbb{P}} \sigma_i\right) \circ \tau^{-1}$, és τ^{-1} az E-nek transzpozíciója, így a $\sigma_n := \tau^{-1}$ választással kapjuk, hogy a $(\sigma_i)_{i\in n}$ transzpozíció rendszerre $\sigma = \underset{i\in n+1}{\mathbb{P}} \sigma_i$ teljesül.)

9. Minden E véges halmazhoz egyértelműen létezik olyan $\varepsilon : \mathbf{S}_E \to \{-1, 1\}$ leképezés, amelyre teljesülnek a következők.

a) $\varepsilon(\mathrm{id}_E) = 1$.

b) Minden $\mathbf{S}_E \ni \sigma, \tau$-ra $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)$.

c) Minden $\sigma \in \mathbf{S}_E$ transzpozícióra $\varepsilon(\sigma) = -1$.

(Ezt az ε függvényt az $\mathbf{S}_E$ teljes permutációcsoport *szignatúra-függvénynek* nevezzük, és $\sigma \in \mathbf{S}_E$ esetén az $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ számot a σ permutáció *szignatúrájának* vagy *paritásának* nevezzük.)

(*Útmutatás.* Az ε függvény egyértelműsége a b) és c) tulajdonságokból, valamint a **8**. gyakorlat b) pontjának állításából következik.

Az ε függvény létezésének bizonyításához először megjegyezzük, hogy az állítást elegendő arra az esetre bizonyítani, amikor $E = n \in \mathbb{N}$. Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re és $\mathbf{S}_n \ni \sigma$-ra

$$\mathrm{T}_n(\sigma) := \{(j, k) \in n \times n | (j < k) \wedge (\sigma(j) > \sigma(k))\}.$$

Ekkor n szerinti teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re az

$$\varepsilon_n : \mathbf{S}_n \to \{-1, 1\}; \quad \sigma \mapsto (-1)^{\mathrm{Card}(\mathrm{T}_n(\sigma))}$$

függvény eleget tesz a feltételeknek. Az indukciós lépésben azt kell kihasználni, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $\sigma \in \mathbf{S}_{n+1}$ olyan, hogy $\sigma(n) = n$, akkor $\sigma|_n \in \mathbf{S}_n$ és $\mathrm{T}_{n+1}(\sigma) = \mathrm{T}_n(\sigma|_n)$, tehát fennáll az $\varepsilon_{n+1}(\sigma) = \varepsilon_n(\sigma|_n)$ egyenlőség.)

10. Legyenek E és F vektorterek a K test felett, valamint $n \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az $u \in \mathbf{L}_n(E; F)$ multilineáris operátor *antiszimmetrikus*, ha minden $\sigma \in \mathbf{S}_n$ permutációra és $E^n \ni (x_i)_{i\in n}$-re fennáll az

$$u((x_{\sigma(i)})_{i\in n}) = \varepsilon(\sigma).u((x_i)_{i\in n})$$

egyenlőség, ahol $\varepsilon(\sigma)$ a σ permutáció szignatúrája. Az $E^n \to F$ antiszimmetrikus multilineáris operátorok halmazát $\mathbf{L}^a_n(E; F)$ jelöli. Ha E és F normált terek, akkor az $E^n \to F$ folytonos antiszimmetrikus multilineáris operátorok halmazát $\mathscr{L}^a_n(E; F)$ jelöli.

a) Ha $u \in \mathbf{L}^a_n(E; F)$, akkor minden $\sigma \in \mathbf{S}_n$ transzpozícióra

$$u((x_{\sigma(i)})_{i\in n}) = -u((x_i)_{i\in n})$$

teljesül. Megfordítva, ha $u \in \mathbf{L}_n(E; F)$ olyan, hogy minden $\sigma \in \mathbf{S}_n$ transzpozícióra $u((x_{\sigma(i)})_{i\in n}) = -u((x_i)_{i\in n})$ és $\mathbf{1} + \mathbf{1} \neq 0$ a K testben (vagyis a K test nem 2 karakterisztikájú), akkor u antiszimmetrikus.

b) Az $\mathbf{L}_n^a(E;F)$ halmaz lineáris altere $\mathbf{L}_n(E;F)$-nek, és ha E, F normált terek, akkor $\mathscr{L}_n^a(E;F)$ lineáris altere $\mathscr{L}_n(E;F)$-nek.

c) Tegyük fel, hogy a K test nulla karakterisztikájú (vagyis a $\mathbb{Z} \to K$ kanonikus leképezés injektív). Minden $u \in \mathbf{L}_n(E;F)$ multilineáris operátorra az

$$\mathbf{A}(u) : E^n \to F; \quad (x_i)_{i\in n} \mapsto \frac{1}{n!}. \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \varepsilon(\sigma).u((x_{\sigma(i)})_{i\in n})$$

leképezés eleme $\mathbf{L}_n^a(E;F)$-nek (az $\mathbf{A}(u)$ operátort nevezzük az u *antiszimmertizáltjának*. Ha $u \in \mathbf{L}_n(E;F)$, akkor az $\mathbf{A}(u) = u$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $u \in \mathbf{L}_n^a(E;F)$. Ha E, F normált terek és $u \in \mathscr{L}_n(E;F)$, akkor $\mathbf{A}(u) \in \mathscr{L}_n^a(E;F)$ és $\|\mathbf{A}(u)\| \leq \|u\|$.

d) Tegyük fel, hogy a K test nulla karakterisztikájú. Legyen $(u_i)_{i\in n} \in (E^*)^n$, és tekintsük a $\bigotimes\limits_{i\in n} u_i \in \mathbf{L}_n(E;K)$ multilineáris funkcionált. Ekkor a

$$\bigwedge_{i\in n} u_i := \mathbf{A}\Big(\bigotimes_{i\in n} u_i\Big)$$

antiszimmetrikus multilineáris funkcionált az $(u_i)_{i\in n}$ funkcionál rendszer *külső szorzatának* nevezzük. A definíció szerint minden $E^n \ni (x_i)_{i\in n}$-re

$$(\bigwedge_{i\in n} u_i)((x_i)_{i\in n}) = \frac{1}{n!}. \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \varepsilon(\sigma)\Big(\prod_{i\in n} u_i(x_{\sigma(i)})\Big) = \frac{1}{n!} \cdot \det\Big((u_i(x_j))_{(i,j)\in n\times n}\Big)$$

teljesül, vagyis $n! \cdot \Big(\bigwedge\limits_{i\in n} u_i\Big)((x_i)_{i\in n})$ egyenlő az $(u_i(x_j))_{(i,j)\in n\times n} \in \mathrm{M}_n(K)$ mátrix *determinánsával.*

11. Legyen E véges dimenziós és F tetszőleges vektortér a K test felett. Legyen I véges halmaz, és $(\mathbf{e}_i)_{i\in\dim(E)}$ algebrai bázis E-ben. Minden $(\mathbf{x}_i)_{i\in I} \in E^I$ rendszerre jelölje $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times\dim(E)}$ azt a K-ban haladó rendszert, amelyre teljesül, hogy minden $I \ni i$-re $\mathbf{x}_i = \sum\limits_{j\in\dim(E)} x_{i,j}.\mathbf{e}_j$.

a) Ha $u \in \mathbf{Mult}(E^I;F)$, akkor minden $(\mathbf{x}_i)_{i\in I} \in E^I$ rendszerre

$$u((\mathbf{x}_i)_{i\in I}) = \sum_{\sigma\in(\dim(E))^I} \Big(\prod_{i\in I} x_{i,\sigma(i)}\Big).u((\mathbf{e}_{\sigma(i)})_{i\in I})$$

teljesül. Továbbá, a

$$\mathbf{Mult}(E^I;F) \to \mathscr{F}((\dim(E))^I;F); \quad u \mapsto (u((\mathbf{e}_{\sigma(i)})_{i\in I}))_{\sigma\in(\dim(E))^I}$$

leképezés *lineáris bijekció.* Ha F is véges dimenziós, akkor

$$\dim(\mathbf{Mult}(E^I;F)) = \dim(F) \cdot (\dim(E))^{\mathrm{Card}(I)},$$

következésképpen $n \in \mathbb{N}$ esetén $\dim(\mathbf{L}_n(E;F)) = \dim(F) \cdot (\dim(E))^n$.

b) Ha $n \in \mathbb{N}$ és F véges dimenziós, akkor

$$\dim(\mathbf{L}_n^s(E;F)) = \dim(F) \cdot \binom{\dim(E)+n-1}{n}.$$

c) Ha $n \in \mathbb{N}$ és F véges dimenziós, akkor $n \leq \dim(E)$ esetén

$$\dim(\mathbf{L}^a_n(E;F)) = \dim(F) \cdot \binom{\dim(E)}{n},$$

továbbá $n > \dim(E)$ esetén

$$\dim(\mathbf{L}^a_n(E;F)) = 0.$$

12. Legyen $(E_i)_{i\in I}$ normált terek nem üres véges rendszere, F normált tér, valamint $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$. Minden $\alpha \in \mathbb{N}^I$ multiindexre legyen $|\alpha|_\infty := \max_{i\in I} \alpha(i)$, valamint $|\alpha|_1 := \sum_{i\in I} \alpha(i)$. Legyen $((x_{i,j})_{j\in\mathbb{N}})_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $(x_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ E_i-ben haladó sorozat.

a) Ha minden $I \ni i$-re a $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{i,j}$ sor *konvergens*, akkor minden $I \ni i$-re az F-ben haladó

$$\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_\infty \leq n}} u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I}) \Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat konvergens, és fennáll az

$$u\Big(\Big(\sum_{j=0}^{\infty} x_{i,j}\Big)_{i\in I}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_\infty \leq n}} u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})$$

egyenlőség.

b) Ha minden $I \ni i$-re a $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{i,j}$ sor *konvergens és abszolút konvergens*, akkor az F-ben haladó

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1 = k}} u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I}) \Big)$$

sor konvergens és abszolút konvergens, továbbá fennáll az

$$u\Big(\Big(\sum_{j=0}^{\infty} x_{i,j}\Big)_{i\in I}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1 = k}} u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I}) \Big)$$

egyenlőség.

(*Útmutatás.* Ha I egy elemű, akkor a következő állításról van szó: legyenek E, F normált terek és $u : E \to F$ folytonos lineáris operátor, valamint $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ E-ben haladó sorozat, akkor:

a) ha a $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$ sor konvergens, akkor a $\Big(\sum_{j=0}^{n} u(x_j)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$u\Big(\sum_{j=0}^{\infty} x_j\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} u(x_j);$$

b) ha a $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$ sor konvergens és abszolút konvergens, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u(x_k)$ sor konvergens és abszolút konvergens, valamint

$$u\Big(\sum_{j=0}^{\infty} x_j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} u(x_k).$$

Az a) állítás nyilvánvalóan igaz u additivitása és folytonossága, valamint vektorsor konvergenciájának és összegének definíciója szerint. A b) állításban szereplő, $\sum_{k\in\mathbb{N}} u(x_k)$ sorra vonatkozó abszolút konvergencia azért igaz, mert ha a $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$ sor abszolút konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{j=0}^{n} \|u(x_j)\| \leq \sum_{j=0}^{n} \|u\|\|x_j\| = \|u\| \sum_{j=0}^{n} \|x_j\| \leq \|u\| \sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\| < +\infty.$$

Ezért ettől kezdve feltesszük, hogy $\mathrm{Card}(I) > 1$.
a) Minden $\mathbb{N} \ni n$-re az u multiadditivitása folytán

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_\infty\leq n}} u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I}) = \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(I;n+1)} u((x_{i,\sigma(i)})_{i\in I}) = u\bigg(\Big(\sum_{j=0}^{n} x_{i,j}\Big)_{i\in I}\bigg),$$

továbbá a $\prod_{i\in I} E_i$ normált szorzattérben

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} x_{i,j}\Big)_{i\in I} = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} x_{i,j}\Big)_{i\in I}$$

teljesül, mert a feltevés szerint minden $I \ni i$-re a $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{i,j}$ sor konvergens E_i-ben. Ezért u folytonossága miatt

$$u\bigg(\Big(\sum_{j=0}^{\infty} x_{i,j}\Big)_{i\in I}\bigg) = u\bigg(\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} x_{i,j}\Big)_{i\in I}\bigg) = \lim_{n\to\infty} u\bigg(\Big(\sum_{j=0}^{n} x_{i,j}\Big)_{i\in I}\bigg) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_\infty\leq n}} u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I}).$$

b) Tegyük fel, hogy minden minden $I \ni i$-re a $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{i,j}$ sor abszolút konvergens E_i-ben. Megmutatjuk, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Bigg(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1=k}} \Big\|u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big\|\Bigg)$$

számsor konvergens. Valóban, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1=k}}\Big\|u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big\|\Big) \le \|u\|\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1=k}}\Big(\prod_{i\in I}\|x_{i,\alpha(i)}\|\Big)\Big) =$$

$$= \|u\|\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1\le n}}\Big(\prod_{i\in I}\|x_{i,\alpha(i)}\|\Big) \le \|u\|\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_\infty\le n}}\Big(\prod_{i\in I}\|x_{i,\alpha(i)}\|\Big) =$$

$$= \|u\|\prod_{i\in I}\Big(\sum_{j=0}^{n}\|x_{i,j}\|\Big) \le \|u\|\prod_{i\in I}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\|x_{i,j}\|\Big) < +\infty,$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $\alpha \in \mathbb{N}^I$ esetén $|\alpha|_1 \le n$ maga után vonja, hogy $|\alpha|_\infty \le n$, tehát

$$\bigcup_{k=0}^{n}\{\alpha\in\mathbb{N}^I \,|\, |\alpha|_1 = k\} = \{\alpha\in\mathbb{N}^I \,|\, |\alpha|_1\le n\} \subseteq \{\alpha\in\mathbb{N}^I \,|\, |\alpha|_\infty\le n\},$$

valamint **ALG** 6.3.1. alapján

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_\infty\le n}}\Big(\prod_{i\in I}\|x_{i,\alpha(i)}\|\Big) = \prod_{i\in I}\Big(\sum_{j=0}^{n}\|x_{i,j}\|\Big).$$

Ebből azonnal következik, hogy az F-ben haladó

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1=k}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big)$$

sor abszolút konvergens. Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$\Big\|\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_\infty\le n}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I}) - \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1=k}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big)\Big\| =$$

$$= \Big\|\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_\infty\le n}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I}) - \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1\le n}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big\| =$$

$$= \Big\|\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_\infty\le n,\ |\alpha|_1>n}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big\| \le \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_\infty\le n,\ |\alpha|_1>n}}\|u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\| \le$$

$$\le \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ n<|\alpha|_1\le n\mathrm{Card}(I)}}\|u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\| = \sum_{k=n+1}^{n\mathrm{Card}(I)}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1=k}}\|u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1=k}}\|u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\|\Big),$$

ahol kihasználtuk azt, hogy $\alpha \in \mathbb{N}^I$ és $|\alpha|_\infty \le n$ esetén $|\alpha|_1 \le n \cdot \mathrm{Card}(I)$. A

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\ |\alpha|_1=k}}\Big\|u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big\|\Big)$$

számsor konvergenciájából következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\|\alpha|_1=k}}\|u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\|\Big)=0.$$

Ha $n\in\mathbb{N}^*$, akkor

$$\begin{aligned}\Big\|u\Big(\Big(\sum_{j=0}^{\infty}x_{i,j}\Big)_{i\in I}\Big)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\|\alpha|_1=k}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big\|&\leq\\ \leq\Big\|u\Big(\Big(\sum_{j=0}^{\infty}x_{i,j}\Big)_{i\in I}\Big)-\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\|\alpha|_\infty\leq n}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big\|&+\\ +\Big\|\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\|\alpha|_\infty\leq n}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})-\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\|\alpha|_1=k}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big\|&,\end{aligned}$$

így az előzőek alapján az F-ben haladó

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\|\alpha|_1=k}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big)$$

sor konvergens, és fennáll az

$$u\Big(\Big(\sum_{j=0}^{\infty}x_{i,j}\Big)_{i\in I}\Big)=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^I,\\|\alpha|_1=k}}u((x_{i,\alpha(i)})_{i\in I})\Big)$$

egyenlőség.)

13. Minden $p,n\in\mathbb{N}$ esetén jelölje $\mathscr{M}(p;n)$ a $p\to n$ szigorúan monoton növő függvények halmazát. Legyenek E és F vektorterek a K test felett, és minden $f:E\to F$ függvényre, $\mathbb{N}^*\ni n$-re és $\mathbf{x}:=(x_i)_{i\in n}\in E^n$ rendszerre értelmezzük a

$$\Delta_{\mathbf{x}}f:E\to F;\quad z\mapsto\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(p;n)}f\Big(z+\sum_{k\in p}x_{\sigma(k)}\Big)$$

függvényt (azzal a megállapodással, hogy üres indexhalmaz esetén az összeg egyenlő 0-val).

a) Ha $f:E\to F$ függvény, $x_0,x_1,x_2\in E$ és $z\in E$, akkor

$$\begin{gathered}(\Delta_{(x_0)}f)(z)=f(z+x_0)-f(z),\\ (\Delta_{(x_0,x_1)}f)(z)=f(z+x_0+x_1)-f(z+x_0)-f(z+x_1)+f(z),\\ (\Delta_{(x_0,x_1,x_2)}f)(z)=f(z+x_0+x_1+x_1)-f(z+x_0+x_1)-f(z+x_0+x_2)-\\ -f(z+x_1+x_2)+f(z+x_0)+f(z+x_1)+f(z+x_2)-f(z).\end{gathered}$$

Ennek alapján sejthető, hogy ha $f:E\to F$ függvény, $n\in\mathbb{N}^*$, és $(x_i)_{i\in n+1}\in E^{n+1}$, akkor

$$\Delta_{(x_i)_{i\in n+1}}f=\Delta_{(x_n)}(\Delta_{(x_i)_{i\in n}}f).$$

Ez n szerinti teljes indukcióval könnyen igazolható.

b) Legyen $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathbf{L}_n^s(E;F)$, és jelölje $u \circ \mathrm{id}_E^{[n]}$ az $E \to F;\ x \mapsto u(x^{[n]})$ függvényt. Ekkor minden $\mathbf{x} \in E^n$ és $z \in E$ esetén

$$n!u(\mathbf{x}) = \Big(\Delta_{\mathbf{x}}(u \circ \mathrm{id}_E^{[n]})\Big)(z),$$

tehát a $\Delta_{\mathbf{x}}(u \circ \mathrm{id}_E^{[n]})$ függvény *állandó*, és az értéke egyenlő $n!u(\mathbf{x})$-szel. Ha a K test nulla karakterisztikájú, vagy $n < \mathrm{Char}(K)$, akkor minden $\mathbf{x} \in E^n$ elemre

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{n!}\Big(\Delta_{\mathbf{x}}(u \circ \mathrm{id}_E^{[n]})\Big)(0)$$

teljesül. Ebből új bizonyítást nyerhetünk a szimmetrikus multilineáris operátorok meghatározottsági tételére.

14. Legyenek E, F normált terek és $n \in \mathbb{N}^*$. Minden $u \in \mathscr{L}_n^s(E;F)$ operátorra legyen

$$\|u\|_* := \sup_{x \in E,\ \|x\| \le 1} \|u(x^{[n]})\|.$$

Ekkor az

$$\mathscr{L}_n^s(E;F) \to \mathbb{R}_+;\quad u \mapsto \|u\|_*$$

leképezés olyan *norma*, amely ekvivalens az $\mathscr{L}_n^s(E;F)$ feletti multilineáris operátornormával (amit $\|\cdot\|$-val jelölünk), és minden $\mathscr{L}_n^s(E;F) \ni u$-ra

$$\|u\|_* \le \|u\| \le \frac{(2n)^n}{n!}\|u\|_*.$$

(*Útmutatás.* Az $\mathscr{L}_n^s(E;F) \to \mathbb{R}_+;\ u \mapsto \|u\|_*$ leképezésre $(\mathrm{NO_{II}})$ és $\mathrm{NO_{III}})$ triviálisan teljesül, és $(\mathrm{NO_I})$ a szimmetrikus multilineáris operátorok meghatározottsági tételéből következik.

A **13**. gyakorlat szerint $u \in \mathscr{L}_n^s(E;F)$ és $(x_i)_{i \in n} \in E^n$ esetén

$$u((x_i)_{i\in n}) = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\sum_{\sigma \in A(p,n)} u\Big(\Big(\sum_{k \in p} x_{\sigma(k)}\Big)^{[n]}\Big)$$

teljesül, ahol $p, n \in \mathbb{N}$ esetén $A(p,n)$ a $p \to n$ szigorúan monoton növő függvények halmaza. Tehát ha $u \in \mathscr{L}_n^s(E;F)$ és $(x_i)_{i\in n} \in E^n$ olyan, hogy minden $n \ni i$-re $\|x_i\| \le 1$, akkor

$$\|u((x_i)_{i\in n})\| \le \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\sum_{\sigma\in A(p,n)}\|u\|_*\Big\|\sum_{k\in p}x_{\sigma(k)}\Big\|^n \le \frac{1}{n!}\|u\|_*\sum_{p=0}^{n}\sum_{\sigma\in A(p,n)}p^n =$$
$$= \frac{1}{n!}\|u\|_*\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}p^n \le \frac{1}{n!}\|u\|_* 2^n n^n,$$

mert $p \in \mathbb{N}$, $p \le n$ esetén $\mathrm{Card}(A(p,n)) = \binom{n}{p}$ és

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}p^n \le \Big(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\Big)n^n = 2^n n^n.$$

Ezért $\|u\| \leq \dfrac{(2n)^n}{n!}\|u\|_*$ teljesül, továbbá a $\|u\|_* \leq \|u\|$ egyenlőtlenség nyilvánvalóan igaz.

Megjegyzés. Bebizonyítható a (jóval) finomabb

$$\|u\| \leq \frac{n^n}{n!}\|u\|_*$$

becslés is.)

XII. rész

Differenciálelmélet

BEVEZETÉS

A *differenciálelmélet* a függvények differenciálhatóságának fogalmával és a differenciálhatóság tényéből levonható következmények vizsgálatával foglalkozik. Ez a témakör is, a matematika majd minden területéhez hasonlóan, az általánosság többféle szintjén tárgyalható. A problémakör vizsgálatának aktuális általánossági szintjét rendszerint a származtatható eredmények elméleti és gyakorlati alkalmazhatóságának követelménye szabályozza. Például az **ANA** 3.1. szakaszban foglalkoztunk a differenciálelmélet elemeivel valós változós, valós értékű, illetve komplex változós, komplex értékű függvények esetében. Az általánosságnak ez a minimális foka elegendő volt az elemi függvényanalízis céljaira. Azonban mind a matematikában (pl. a differenciálgeometriában), mind a matematika elméleti alkalmazásaiban (pl. a fizikai térelméletekben) szükség van *többváltozós* és *vektorértékű* függvények differenciálelméletére. Sőt, a modern elméleti fizika variációelméletre alapozott része egyenesen megköveteli *végtelen dimenziós* normált terekben értelmezett függvények differenciálását.

Ebben a részben megismerkedünk a normált terek között ható függvények differenciálelméletének legtipikusabb fogalmaival és módszereivel, a szóban forgó normált terek dimenziójára vonatkozó korlátozás nélkül. A differenciálelmélet ennél általánosabb szinten is tárgyalható; ilyen általánosítás például a *Banach-sokaságok* között ható függvények differenciálásának elmélete. Azonban bármely további általánosítás feltételezi a normált térben értelmezett, normált térbe érkező függvények differenciálelméletének ismeretét. A sokaságokkal kapcsolatos differenciálelmélet néhány alapfogalmáról és alaptételéről a **VAR** részben lesz szó.

Az első fejezetben bevezetjük a legfontosabb differenciálhatósági fogalmakat: az *iránymenti differenciálhatóságot*, a *differenciálhatóságot* és a *szigorú differenciálhatóságot*. Megvizsgáljuk ezek egymással való kapcsolatait, és igazoljuk a folytonos multilineáris operátorok differenciálhatóságát, valamint a folytonos affin függvények szigorú differenciálhatóságát.

A második fejezetben megvizsgáljuk a differenciálható függvények lineáris kombinációjának és kompozíciójának differenciálhatóságát. Egyszerű szükséges feltételt adunk normált szorzatterek között ható függvények differenciálhatóságára. Itt vezetjük be a *parciális deriváltak* és a *Jacobi-mátrix* fogalmát.

A harmadik fejezetben értelmezzük a normált terek között ható függvények *deriváltfüggvényeinek* sorozatát, és bevezetjük a *magasabb rendű differenciálhatóság* fogalmát. Néhány megállapítást teszünk a magasabb rendű deriváltfüggvények kapcsolataira, majd definíciót adunk normált szorzattérben értelmezett függvény *parciális deriváltfüggvényeire*. Kiderül, hogy speciális típusú függvények esetében a deriváltfüggvényekből egyszerű algebrai transzformációkkal újabb deriváltfüggvények származtathatók. Ilyenek a vektoranalízis nevezetes deriváltfüggvényei: a *divergencia*, az *euklidészi-* és *Lorentz-gradiens*, a *Laplace-* és *D'Alembert-derivált*, valamint a *rotáció*.

Az elemi differenciálelmélet technikai szempontból legfontosabb eszköze a *véges növekmények formulája*. Utólag kiderül, hogy a nem triviális differenciális tételek jelentős része, legalábbis közvetve felhasználja ezt a formulát. A negyedik fejezetben bebizonyítjuk a véges növekmények formulájának egy viszonylag egyszerű alakját, és ennek elemi alkalmazásaként megmutatjuk, hogy konvex halmazon differenciálható és korlátos deriváltú függvény Lipschitz-függvény, továbbá összefüggő halmazon nulla deriváltú függvény szükségképpen állandó. Ugyancsak a véges növekmények formulájának alkalmazásaként bemutatunk egy tételt a *megszüntethető szingularitások* témaköréből.

Az ötödik fejezetben értelmezzük a függvények magasabb rendű *folytonos differenciálhatóságát*, és bevezetjük a folytonosan differenciálható függvények tereit. Megmutatjuk, hogy a deriváltfüggvény folytonossága és a szigorú differenciálhatóság minden olyan pontban egyenértékű, amely belső pontja a deriváltfüggvény definíciós tartományának. Látni fogjuk, hogy szoros kapcsolat van egy függvény parciális deriváltfüggvényeinek adott pontbeli folytonossága, és a pontbeli szigorú differenciálhatóság között.

Az analízisben sok függvényt egyszerűbb függvények sorozatának pontonkénti limeszfüggvényeként vagy sorösszegeként állítunk elő, ezért fontos tudni azt, hogy a függvények differenciálhatósága milyen feltételek mellett öröklődik a pontonkénti limeszfüggvényre. A hatodik fejezetben, a véges növekmények formulájának alkalmazásával választ adunk erre a kérdésre, sőt még arra is elégséges feltételt kapunk, hogy a pontonkénti limeszfüggvény-képzés és a differenciálás operációk felcserélhetők legyenek. Látjuk majd, hogy ebből a szempontból a deriváltfüggvények sorozatának lokálisan egyenletes konvergenciája lényeges.

Minden magasabb rendű derivált *szimmetrikus* folytonos multilineáris operátor. Ez a *Young-tétel*, amit - lényegesen nem triviális teljes indukcióval - részletesen bizonyítunk a hetedik fejezetben.

A nyolcadik fejezetben értelmezzük a normált terek között ható függvények *Taylor-polinomjait.* A *Taylor-formulák* megmutatják, hogy egy pontban n-szer differenciálható függvény n-ed rendű Taylor-polinomja milyen értelemben közelíti az eredeti függvényt.

Az *infinitezimális Taylor-formula* alkalmazásával lehetővé válik a valós értékű differenciálható függvények szélsőértékeinek differenciális jellemzésére. Ezzel a témakörrel foglalkozunk a kilencedik fejezetben.

A tizedik fejezetben értelmezzük a végtelenszer differenciálható függvények *Taylor-sorát.* Ezek felépítésének elemzése elvezet az általános *vektoriális hatványfüggvény-sor* fogalmához. Részletes vizsgálat alá vetjük a vektoriális hatványfüggvény-sorok konvergenciájának és az összegfüggvény differenciálhatóságának problémáját. Bebizonyítjuk az általános *Cauchy–Hadamard-tételt*, és bevezetjük a pontbeli *analitikusság* fogalmát, amely az utolsó és egyben legerősebb differenciális tulajdonság. A vektoriális hatványfüggvény-sorok *átrendezési tétele* alapján megmutatjuk, hogy egy pontban analitikus függvény a pont valamely környezetének minden pontjában is analitikus. Nem triviális példaként igazoljuk az operátorinverzió analitikusságát Banach-tér teljes lineáris csoportján.

A tizenegyedik és tizenkettedik fejezetben két olyan problémát vizsgálunk, amelyek szorosan összefüggenek egymással: az *inverz függvények* és az *implicit függvények* létezésének, valamint azok simaságának problémáját. Megmutatjuk, hogyan lehet következtetni egy függvény adott pontbeli szigorú differenciálhatóságából és a deriváltoperátor bizonyos tulajdonságaiból a függvény viselkedésére a pont közelében.

A tizenharmadik fejezetben, az implicitfüggvény-tétel alkalmazásaként, szükséges feltételt adunk a *feltételes szélsőértékek* létezésére.

A tizennegyedik fejezetben az inverzfüggvény-tétel természetes általánosításával foglalkozunk. Az inverzfüggvény-tételben különös jelentősége van annak, hogy a vizsgált pontban a függvény deriváltoperátora *lineáris homeomorfizmus.* Ennek a feltételnek gyengítésével bevezetjük a differenciálható függvények két nevezetes típusát: az *immerziókat* és a *szubmerziókat.* Ezek közös általánosításai a *szubimmerziók.* Itt csak a differenciálható függvények *rangjának* fogalmáról, és a rang lokális állandóságának szubimmerzivitással való kapcsolatát tisztázzuk: ez az *állandó rang tétele.* De fontos tudni, hogy később, a differenciálható sokaságok elméletében, az immerziók különös jelentőséget nyernek a *részsokaságokkal* kapcsolatban (**VAR** 2. fejezet), míg a szubmerziók nélkülözhetetlenek a *faktorsokaságok* elméletében (**VAR** 3. fejezet).

Az utolsó fejezetben a differenciálható formákkal foglalkozunk. Értelmezzük ezek külső szorzatát és külső deriváltját, továbbá megvizsgáljuk a külső operációk néhány alapvető tulajdonságát.

Irodalomjegyzék

[1] N. Bourbaki, **Éléments de mathématique. Variétés différentielles et analytiques, Fascicule de résultats**, Hermann, Paris, 1967-1971.

[2] H. Cartan, **Calcul différentiel, formes différentielles**, Hermann, Paris,

[3] S. Lang, **Differential Manifolds**, Springer P.C., New-York-Berlin-Heidelberg, 1985.

[4] L. Schwartz, **Analyse mathématique**, Hermann, Paris, 1967.

[5] Г. Е. Шилов, **Математический анализ, Функции нескольких вещественных переменных**, Наука, Москва, 1972

IRODALOMJEGYZÉK

1. fejezet

Differenciálható függvények

1.1. Iránymenti differenciálhatóság

1.1.1. Definíció. *Legyen E vektortér és F normált tér $\mathbb{K}$ felett. Legyen továbbá $f : E \rightarrowtail F$ függvény és $\mathbf{e} \in E$. Azt mondjuk, hogy f-nek létezik az $\mathfrak{a} \in E$ pontban az* **e irányú deriváltja**, *ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ és létezik a*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathfrak{a} + t.\mathbf{e}) - f(\mathfrak{a})}{t}$$

határérték, amit $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}} f)(\mathfrak{a})$-val jelölünk, és az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli, $\mathbf{e}$ irányú deriváltjának nevezünk. Az iránymenti deriváltat **Gâteaux-deriváltnak** *is nevezzük.*

Világos, hogy ha E vektortér, F normált tér $\mathbb{K}$ felett, valamint $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathbf{e} \in E$, akkor $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén a $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}} f)(\mathfrak{a})$ iránymenti derivált létezéséhez szükséges az, hogy 0 *torlódási pontja* legyen $\mathbb{K}$-ban a

$$\{t \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid \mathfrak{a} + t.\mathbf{e} \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

halmaznak, hiszen egy függvénynek csak a definíciós tartománya torlódási pontjaiban beszélhetünk a határértékéről.

Az iránymenti differenciálhatóság fogalmi szempontból a legegyszerűbb, azonban sem algebrai, sem topológiai szempontból nem megfelelő az analízis céljaira. Ennek indoklásához legyen E vektortér és F normált tér $\mathbb{K}$ felett, továbbá $f : E \rightarrowtail F$ függvény.

– Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ és $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in E$ vektorok, akkor lehetséges az, hogy létezik a $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} f)(\mathfrak{a})$ iránymenti derivált, de sem $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}_1} f)(\mathfrak{a})$, sem $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}_2} f)(\mathfrak{a})$ nem létezik. Lehetséges továbbá, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ és $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in E$ olyan vektorok, amelyekre a $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}_1} f)(\mathfrak{a})$, $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}_2} f)(\mathfrak{a})$ és $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} f)(\mathfrak{a})$ vektorok léteznek, azonban

$$(\mathrm{D}_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} f)(\mathfrak{a}) \neq (\mathrm{D}_{\mathbf{e}_1} f)(\mathfrak{a}) + (\mathrm{D}_{\mathbf{e}_2} f)(\mathfrak{a}).$$

Ezek a jelenségek már egészen egyszerű példákon is megfigyelhetők.

– Ha E is normált tér, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor lehetséges az, hogy minden $\mathbf{e} \in E$ esetén $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}} f)(\mathfrak{a})$ létezik, sőt az

$$E \to F; \quad \mathbf{e} \mapsto (\mathrm{D}_{\mathbf{e}} f)(\mathfrak{a})$$

leképezés folytonos lineáris operátor, azonban f nem folytonos $\mathfrak{a}$-ban (**1**. gyakorlat).

1.2. Függvények érintkezése

Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$. Az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli differenciálhatósága a **ANA** 3.1.1. Definíció szerint egyenértékű olyan $c \in \mathbb{K}$ szám létezésével, amelyre a

$$g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto f(\mathfrak{a}) + c.(x - \mathfrak{a})$$

függvény rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$ és

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - g(x)}{|x - \mathfrak{a}|} = 0.$$

Ez a határérték-tulajdonság az f és g függvények egyfajta "érintkezését" fejezi ki az $\mathfrak{a}$ pontban. Továbbá világos, hogy a g függvény "egyszerű szerkezetű", legalábbis az f-hez képest. Pontosabban; a g olyan, hogy létezik egy $u : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ lineáris operátor (a c számmal való szorzás), amelyre minden $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ esetén $g(x_2) - g(x_1) = u(x_2 - x_1)$ teljesül.

Tehát az egyváltozós függvények differenciálhatóságának általánosításához juthatunk a következőképpen. Ha E és F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha létezik olyan "egyszerű szerkezetű" $g : E \to F$ függvény, amely f-fel "érintkezik" a $\mathfrak{a}$ pontban. Nyilvánvaló, hogy az egzakt definícióhoz pontos választ kell adni a következő kérdésekre.

– Mit jelent a normált terek között ható függvények "érintkezése" egy pontban?

– Melyek azok a normált terek között ható függvények, amelyeket "egyszerű szerkezetűeknek" gondolunk?

1.2.1. Definíció. *Legyenek E, F normált terek, $f, g : E \to F$ függvények, és $\mathfrak{a}$ belső pontja* Dom(f)*-nek és* Dom(g)*-nek. Ha $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, akkor azt mondjuk, hogy f és g az $\mathfrak{a}$ pontban α-***rendben érintkezik***, ha $f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$ és*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)) \Big(\|x - \mathfrak{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon \|x - \mathfrak{a}\|^\alpha \Big)$$

teljesül. Az 1*-rendben érintkezést* **elsőrendben** *érintkezésnek mondjuk.*

1.2.2. Állítás. *Legyenek E, F normált terek, $f, g : E \to F$ függvények, és $\mathfrak{a}$ belső pontja* Dom(f)*-nek és* Dom(g)*-nek. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, és tegyük fel, hogy $E \neq \{0\}$. Ekkor az f és g függvények pontosan akkor érintkeznek az $\mathfrak{a}$ pontban α-rendben, ha $f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$ és*

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - g(x)}{\|x - \mathfrak{a}\|^\alpha} = 0.$$

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy $E \neq \{0\}$ miatt minden $\varrho \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\mathfrak{a}$ torlódási pontja a $\mathrm{B}_\varrho(\mathfrak{a})$ nyílt gömbnek (**MET** 2.2.8.), továbbá $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f)) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(g))$ folytán van olyan $\varrho \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_\varrho(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$, így $E \neq \{0\}$ következtében $\mathfrak{a}$ torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ halmaznak is, tehát az $\mathfrak{a}$ pontbeli határérték *értelmes*, és a

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - g(x)}{\|x - \mathfrak{a}\|^\alpha} = 0$$

egyenlőség – a határérték definíciója szerint – azzal ekvivalens, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)) : \Big(0 < \|x - \mathfrak{a}\| < \delta \Rightarrow \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - \mathfrak{a}\|^\alpha} \leq \varepsilon \Big).$$

Ha $f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$, akkor ez a formula nyilvánvalóan ekvivalens

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)) : \Big(\|x - \mathfrak{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon \|x - \mathfrak{a}\|^\alpha \Big)$$

formulával. ■

Megjegyezzük, hogy ha az előző állításban nem tesszük fel, hogy $E \neq \{0\}$, akkor az $\mathfrak{a}$ $(=0)$ pont nem torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ halmaznak, így *nincs értelme* a $\lim\limits_{x \to \mathfrak{a}} \dfrac{f(x) - g(x)}{\|x - \mathfrak{a}\|^\alpha}$ határértéknek. A triviális esetek elkerülése érdekében a továbbiakban mindig feltesszük, hogy a normált terek között ható függvények indulási tere *nem nulla dimenziós*, és ehhez a konvencióhoz tartjuk magunkat akkor is, ha ezt a feltételt külön Z nem említjük.

Most néhány megjegyzést teszünk a függvények érintkezésével kapcsolatban. Az alábbi megjegyzésekben E és F normált terek, továbbá $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Ha $\mathfrak{a} \in E$ és $H_\mathfrak{a} := \{f : E \rightarrowtail F | \mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))\}$, akkor az

$$f \approx g \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} (f \in H_\mathfrak{a}) \wedge (g \in H_\mathfrak{a}) \wedge (\text{"}f \text{ és } g \text{ az } \mathfrak{a} \text{ pontban } \alpha\text{-rendben érintkeznek"})$$

reláció *ekvivalencia* a $H_\mathfrak{a}$ függvényhalmaz felett.

b) Ha $f, g : E \rightarrowtail F$ olyan függvények, amelyek a $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f)) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(g))$ pontban α-rendben érintkeznek, akkor minden $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ számra: $\beta \leq \alpha$ esetén f és g az $\mathfrak{a}$ pontban β-rendben is érintkeznek.

c) Ha $f, g : E \rightarrowtail F$ olyan függvények, amelyek a $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f)) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(g))$ pontban α-rendben érintkeznek, akkor az f folytonossága $\mathfrak{a}$-ban *ekvivalens* a g függvény folytonosságával $\mathfrak{a}$-ban. Ez következik a folytonosság és határérték kapcsolatából, a határérték lokalitásából, és abból, hogy az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén, az $\mathfrak{a}$-n kívül fennáll az

$$f = g + \Big(\frac{f - g}{\|\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}\|^\alpha} \Big) \|\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}\|^\alpha$$

egyenlőség.

d) Ha $f, g : E \rightarrowtail F$ függvények, és $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, amelynek létezik olyan V környezete, hogy $V \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ a V halmazon, akkor minden $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ számra f és g az $\mathfrak{a}$-ban α-rendben érintkeznek, hiszen ekkor minden $x \in V \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra

$$\frac{f(x) - g(x)}{\|x - \mathfrak{a}\|^\alpha} = 0,$$

és $f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$ is teljesül.

e) Jelölje $\|\cdot\|_E$ (illetve $\|\cdot\|_F$) az E (illetve F) normáját, továbbá legyen $\|\cdot\|_{E,1}$ (illetve $\|\cdot\|_{F,1}$) olyan norma az E (illetve F) vektortér felett, amely ekvivalens a $\|\cdot\|_E$ (illetve $\|\cdot\|_F$) normával. Legyenek $f, g : E \rightarrowtail F$ függvények, $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f)) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(g))$ és $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Az f és g függvények pontosan akkor érintkeznek $\mathfrak{a}$-ban α-rendben a $\|\cdot\|_E$ és $\|\cdot\|_F$ normák szerint, az $\mathfrak{a}$ pontban α-rendben érintkeznek a $\|\cdot\|_{E,1}$ és $\|\cdot\|_{F,1}$ normák szerint. Valóban, legyenek $A, A', B, B' \in \mathbb{R}_+^*$ olyan számok, hogy

$$A\|\cdot\|_{E,1} \leq \|\cdot\|_E \leq A'\|\cdot\|_{E,1}, \quad B\|\cdot\|_{F,1} \leq \|\cdot\|_F \leq B'\|\cdot\|_{F,1}$$

teljesül. A $\|\cdot\|_E$ és $\|\cdot\|_{E,1}$ normák ekvivalenciája folytán az $\mathfrak{a}$ pont akkor és csak akkor belső pontja $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$-nek a $\|\cdot\|_E$ szerint, ha a $\|\cdot\|_{E,1}$ norma szerint is belső pontja ennek a halmaznak. Továbbá, minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ pontra, ha $x \neq \mathfrak{a}$, akkor

$$\Big(\frac{B}{(A')^\alpha}\Big)\Big(\frac{\|f(x)-g(x)\|_{F,1}}{(\|x-\mathfrak{a}\|_{E,1})^\alpha}\Big) \leq \frac{\|f(x)-g(x)\|_F}{(\|x-\mathfrak{a}\|_E)^\alpha} \leq \Big(\frac{B'}{A^\alpha}\Big)\Big(\frac{\|f(x)-g(x)\|_{F,1}}{(\|x-\mathfrak{a}\|_{E,1})^\alpha}\Big),$$

amiből következik az állítás. Ez azt jelenti, hogy az érintkezés fogalma csak az indulási és az érkezési vektorterekben adott normák *ekvivalencia-osztályaitól* függ, és nem az adott ekvivalencia-osztályokból konkrétan választott normáktól. Speciálisan: ha E és F véges dimenziós vektorterek $\mathbb{K}$ felett, akkor *bármilyen* E vagy F feletti norma választásától függetlenül beszélhetünk két $E \rightarrowtail F$ függvény adott pontbeli, adott rendben való érintkezéséről.

Most arra a kérdésre válaszolunk, hogy a differenciálhatóság milyen típusú függvényekkel való érintkezést jelent?

1.2.3. Definíció. *Ha E és F vektorterek a K test felett, akkor egy $g : E \to F$ leképezést* **affin függvénynek** *nevezünk, ha létezik olyan $u \in \mathbf{L}(E;F)$, hogy minden $E \ni x_1, x_2$-re $g(x_2) - g(x_1) = u(x_2 - x_1)$ teljesül. Az $E \to F$ affin függvények halmazát $\mathbf{Aff}(E;F)$ jelöli.*

Most néhány megjegyzést teszünk az affin függvényekkel kapcsolatban. Az alábbi megjegyzésekben E és F vektorterek a K test felett.

a) Ha $g : E \to F$ affin függvény, akkor *egyértelműen* létezik olyan $u \in \mathbf{L}(E;F)$, hogy minden $E \ni x_1, x_2$-re $g(x_2)-g(x_1) = u(x_2-x_1)$ teljesül, hiszen ha u ilyen, akkor minden $E \ni x$-re az $x_2 := x$ és $x_1 := 0$ választással kapjuk, hogy $u(x) = g(x)-g(0)$, tehát u-t a g függvény egyértelműen meghatározza. Szokás szerint, ezt az egyértelműen meghatározott $u : E \to F$ lineáris operátort a g affin függvény *érintő-operátorának* nevezzük.

b) Minden $E \to F$ konstansfüggvény olyan affin függvény, amelynek érintő-operátora a 0 operátor. Továbbá, $\mathbf{L}(E;F) \subseteq \mathbf{Aff}(E;F)$ és $u \in \mathbf{L}(E;F)$ esetén az u érintő-operátora egyenlő u-val.

c) Minden $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in E \times F$ párhoz és $u \in \mathbf{L}(E;F)$ operátorhoz *egyértelműen létezik* olyan $g \in \mathbf{Aff}(E;F)$, amelyre $g(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$, és g érintő operátora egyenlő u-val; ez az affin függvény a következő: $E \to F;\ x \mapsto \mathfrak{b} + u(x-\mathfrak{a})$.

d) Ha E és F normált terek $\mathbb{K}$ felett, $g, g' \in \mathbf{Aff}(E;F)$ és létezik olyan $\mathfrak{a} \in E$ pont, amelyben g és g' elsőrendben érintkeznek, akkor $g = g'$. Ez nyilvánvalóan igaz, ha $E = \{0\}$, ezért feltehető, hogy $E \neq \{0\}$. Ha u (illetve u') a g (illetve g') érintő-operátora, akkor $g(\mathfrak{a}) = g'(\mathfrak{a})$ miatt minden $x \in E$ pontra

$$g(x) - g'(x) = g(\mathfrak{a}) + u(x-\mathfrak{a}) - g'(\mathfrak{a}) - u'(x-\mathfrak{a}) = (u-u')(x-\mathfrak{a}),$$

tehát ha g és g' elsőrendben érintkeznek $\mathfrak{a}$-ban, akkor

$$0 = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{g(x)-g'(x)}{\|x-\mathfrak{a}\|} = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{(u-u')(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|} = \lim_{x\to\mathfrak{a}} (u-u')\Big(\frac{x-\mathfrak{a}}{\|x-\mathfrak{a}\|}\Big).$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre minden $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\Big\|(u-u')\Big(\frac{x-\mathfrak{a}}{\|x-\mathfrak{a}\|}\Big)\Big\| < \varepsilon.$$

Ha $e \in E$ olyan vektor, hogy $0 < \|e\| < 1$, akkor $\mathfrak{a} + \delta.e \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, ezért az előző egyenlőtlenségből az $x := \mathfrak{a} + \delta.e$ választással $\|u(e) - u'(e)\| < \varepsilon\|e\| < \varepsilon$ adódik, amiből következik, hogy $u = u'$ a $\mathrm{B}_1(0)$ nyílt egységgömbön. Ebből az u és u' homogenitása alapján $u = u'$ adódik. Tehát a g és g' affin függvények érintő-operátorai egyenlők, továbbá az $\mathfrak{a}$ pontban mindketten ugyanazt az értéket veszik fel, következésképpen a c) állítás alapján $g = g'$.

e) Ha E és F normált terek, akkor egy $g \in \mathbf{Aff}(E;F)$ függvény pontosan akkor folytonos, ha a g érintő-operátora folytonos lineáris operátor E és F között; ez nyilvánvaló, hiszen ha u a g érintő-operátora, akkor $g = g(0) + u$ és $u = g - g(0)$ teljesül.

f) Egy $g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ leképezés pontosan akkor folytonos affin függvény, ha létezik olyan $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ pár és $c \in \mathbb{K}$, hogy minden $\mathbb{K} \ni x$-re $g(x) = \mathfrak{b} + c \cdot (x - \mathfrak{a})$.

1.3. Differenciálhatóság

1.3.1. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, valamint $\mathfrak{a} \in E$. Azt mondjuk, hogy f* **differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban**, *ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$, és létezik olyan $E \to F$ folytonos affin függvény, amely f-fel elsőrendben érintkezik az $\mathfrak{a}$ pontban. Ha f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor az f függvény $\mathfrak{a}$-beli deriváltjának (vagy* **derivált-operátorának***) nevezzük és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$-val jelöljük azt az egyetlen $E \to F$ folytonos lineáris operátort, amely az érintő-operátora annak az $E \to F$ folytonos affin függvénynek, amely f-fel az $\mathfrak{a}$ pontban elsőrendben érintkezik. Ezt a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ deriváltat* **Fréchet-deriváltnak** *is nevezzük.*

1.3.2. Definíció. *Ha E és F normált terek, akkor azt mondjuk, hogy* **az $f : E \rightarrowtail F$ függvény differenciálható**, *ha f a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz minden pontjában differenciálható.*

Tehát ha E és F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $E \neq \{0\}$, valamint $\mathfrak{a} \in E$, akkor az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli differenciálhatósága azt jelenti, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ és létezik olyan $u \in \mathscr{L}(E;F)$, hogy

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - u(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|} = 0.$$

Ha ez teljesül, akkor u egyértelműen van meghatározva, és $u = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$.

Az affin függvényekkel kapcsolatos f) megjegyzés és a differenciálhatóság fenti definíciója szerint egy $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor differenciálható egy pontban, ha a **ANA** 3.1.1. definíció szerint differenciálható.

1.3.3. Állítás. *Legyenek E és F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, valamint $\mathfrak{a} \in E$. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, és minden $\mathbf{e} \in E$ vektorra létezik az f függvény $\mathbf{e}$ iránymenti deriváltja az $\mathfrak{a}$-ban, továbbá $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}}f)(\mathfrak{a}) = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e})$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor f elsőrendben érintkezik $\mathfrak{a}$-ban egy folytonos (affin) függvénnyel, ezért a függvények érintkezésével kapcsolatos c) megjegyzés alapján f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

Tegyük fel, hogy f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\mathbf{e} \in E \setminus \{0\}$ rögzített vektor. Értelmezzük a

$$\varphi : \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to F; \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|}$$

függvényt, amelyre $\lim_{\mathfrak{a}} \varphi = 0$ teljesül, hiszen f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Legyen továbbá

$$\psi : \mathbb{K} \to E; \quad t \mapsto \mathfrak{a} + t.\mathbf{e},$$

amelyre $\lim\limits_{0} \psi = \psi(0) = \mathfrak{a} \notin \mathrm{Dom}(\varphi)$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Dom}(\varphi \circ \psi) = \{t \in \mathbb{K} | (t \neq 0) \wedge (\mathfrak{a} + t.\mathbf{e} \in \mathrm{Dom}(f))\}$, és ennek a halmaznak a 0 torlódási pontja. Ezért a függvénykompozíció határértékének tétele alapján kapjuk, hogy $\lim\limits_{0}(\varphi \circ \psi) = \lim\limits_{\mathfrak{a}} \varphi = 0$, vagyis

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathfrak{a} + t.\mathbf{e}) - f(\mathfrak{a}) - t.((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e})}{|t| \|\mathbf{e}\|} = \lim_{0}(\varphi \circ \psi) = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(\mathfrak{a} + t.\mathbf{e}) - f(\mathfrak{a}) - t.((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e})}{|t| \|\mathbf{e}\|} \right\| = 0.$$

Ugyanakkor $t \in \mathbb{K}$, $t \neq 0$, $\mathfrak{a} + t.\mathbf{e} \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\left\| \frac{f(\mathfrak{a} + t.\mathbf{e}) - f(\mathfrak{a}) - t.((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e})}{|t| \|\mathbf{e}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{e}\|} \left\| \frac{f(\mathfrak{a} + t.\mathbf{e}) - f(\mathfrak{a})}{t} - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}) \right\|,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(\mathfrak{a} + t.\mathbf{e}) - f(\mathfrak{a})}{t} - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}) \right\| = 0,$$

tehát f-nek létezik az $\mathbf{e}$ iránymenti deriváltja $\mathfrak{a}$-ban, és látható, hogy $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}} f)(\mathfrak{a}) = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e})$. ■

1.3.4. Következmény. *Legyen F normált tér $\mathbb{K}$ felett, $f : \mathbb{K} \rightarrowtail F$ függvény, valamint $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}; F)$ lineáris operátorra*

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(1) = \lim_{z \to \mathfrak{a}} \frac{f(z) - f(\mathfrak{a})}{z - \mathfrak{a}}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint létezik f-nek az $1 \in \mathbb{K}$ irányú deriváltja az $\mathfrak{a}$ pontban, és az iránymenti derivált definíciója szerint

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(1) = (\mathrm{D}_1 f)(\mathfrak{a}) = \lim_{z' \to 0} \frac{f(\mathfrak{a} + z'.1) - f(\mathfrak{a})}{z'} = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(z) - f(\mathfrak{a})}{z - \mathfrak{a}}. \ ■$$

Nyilvánvaló, hogy ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a

$$\mathscr{L}(\mathbb{K}; F) \to F; \quad u \mapsto u(1)$$

leképezés lineáris bijekció az $\mathscr{L}(\mathbb{K}; F)$ operátortér és az F vektortér között. Ezt a leképezést nevezzük az $\mathscr{L}(\mathbb{K}; F)$ és F vektorterek közötti *kanonikus azonosításnak.*

1.3.5. Definíció. *Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett, $f : \mathbb{K} \rightarrowtail F$ függvény, valamint $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ olyan pont, amelyben f differenciálható, akkor $(\mathbb{D}f)(\mathfrak{a}) \in F$ jelöli azt a vektort, amely kanonikusan azonosul a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}; F)$ deriváltoperátorral (tehát a 1.3.4. állítás szerint*

$$(\mathbb{D}f)(\mathfrak{a}) = \lim_{z \to \mathfrak{a}} \frac{f(z) - f(\mathfrak{a})}{z - \mathfrak{a}}$$

teljesül.)

Vigyázzunk arra, hogy az előző definíció feltételei mellett a $(\mathbb{D}f)(\mathfrak{a}) \in F$ és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}; F)$ objektumok *nem egyenlők*, hanem csak kitüntetett módon azonosíthatóak.

1.4. Szigorú differenciálhatóság

Felvetődik a kérdés, hogy ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor a függvény folytonos-e a pont valamely környezetének minden pontjában? Az $\chi_{\mathbb{Q}} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2$ függvény példája mutatja, hogy ez nincs így; ez az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a 0 pontban differenciálható, tehát itt folytonos is, de egyetlen más pontban sem folytonos. Létezik azonban olyan erősebb differenciálhatósági feltétel (a *szigorú differenciálhatóság*), amely már biztosítja a függvény folytonosságát nemcsak az adott pontban, hanem annak valamely környezetén is.

A szigorú differenciálhatóság fogalmának bevezetése előtt megjegyezzük, hogy ha $E \neq \{0\}$ normált tér, $D \subseteq E$ és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(D)$, akkor az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ pár *torlódási pontja* az $\{(x_1, x_2) \in D \times D | x_1 \neq x_2\}$ halmaznak az $E \times E$ normált szorzattérben. Valóban, $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(D)$ miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a}) \subseteq D$, és ha V tetszőleges környezete az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ pontnak az $E \times E$ normált szorzattérben, akkor van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \times \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq V$, tehát ha rögzítünk egy $e \in E \setminus \{0\}$ vektort és olyan $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ számokat, hogy $\max(r_1, r_2) < \min(r, R)$ és $r_1 \neq r_2$, akkor nyilvánvaló, hogy

$$\left(\mathfrak{a} + \frac{r_1}{\|e\|}.e, \mathfrak{a} + \frac{r_2}{\|e\|}.e\right) \in V \cap \Big(\{(x_1, x_2) \in D \times D | x_1 \neq x_2\} \setminus \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\}\Big).$$

Ezért értelmes a következő definíció.

1.4.1. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, $E \neq \{0\}$, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, továbbá $\mathfrak{a} \in E$. Azt mondjuk, hogy f* **szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban**, *ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ és létezik olyan $u \in \mathscr{L}(E; F)$, hogy*

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(\mathfrak{a},\mathfrak{a})} \frac{f(x_1) - f(x_2) - u(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|} = 0$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy **az f függvény szigorúan differenciálható**, *ha* $\mathrm{Dom}(f)$ *minden pontjában szigorúan differenciálható. Megállapodunk abban, hogy $E = \{0\}$ esetén minden $E \rightarrowtail F$ függvényt szigorúan differenciálhatónak tekintünk.*

A differenciálhatóság és szigorú differenciálhatóság kapcsolatáról szól a következő állítás.

1.4.2. Állítás. *Legyenek E és F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, továbbá $\mathfrak{a} \in E$. Ha f szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ az az egyetlen elem $\mathscr{L}(E; F)$-ben, amelyre*

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(\mathfrak{a},\mathfrak{a})} \frac{f(x_1) - f(x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|} = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $D := \{(x_1, x_2) \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f) | x_1 \neq x_2\}$, és $u \in \mathscr{L}(E; F)$ olyan, hogy a

$$g : D \to F; \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{f(x_1) - f(x_2) - u(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|}$$

függvényre $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(\mathfrak{a},\mathfrak{a})} g(x_1, x_2) = 0$ teljesül. Mivel, hogy $\mathrm{Dom}(g(\cdot, \mathfrak{a})) = \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, így $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(g(\cdot, \mathfrak{a}))$-nak. Ezért a $g(\cdot, \mathfrak{a})$ parciális függvénynek is létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} g(\cdot, \mathfrak{a}) = 0$ (**MET** 6.6.2.). Tehát

$$0 = \lim_{x\to\mathfrak{a}} g(x, \mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - u(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|},$$

vagyis az $E \to F$; $x \mapsto f(\mathfrak{a}) + u(x - \mathfrak{a})$ folytonos affin függvény elsőrendben érinti az f függvényt az $\mathfrak{a}$ pontban. Ezért f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és $u = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$. ■

1.4.3. Állítás. *Legyenek E és F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, továbbá $\mathfrak{a} \in E$. Ha f szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor minden $C > \|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\|$ valós számhoz létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan V környezete, hogy $V \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és minden $V \ni x_1, x_2$-re*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|,$$

vagyis az $f|_V : V \to F$ függvény C együtthatójú Lipschitz-függvény.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az f függvény szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és minden $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ pontra

$$\|f(x_1) - f(x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon\|x_1 - x_2\|$$

teljesül, tehát

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| - \|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon\|x_1 - x_2\|.$$

Ebből következik, hogy $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ esetén

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_1 - x_2)\| + \varepsilon\|x_1 - x_2\| \leq (\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| + \varepsilon)\|x_1 - x_2\|.$$

Ha tehát $C > \|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\|$ valós szám, és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\varepsilon < C - \|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\|$, akkor az ε-hoz imént megválasztott δ számra a $V := \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ halmaz az $\mathfrak{a}$ pontnak olyan környezete E-ben, amelyre $V \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $V \ni x_1, x_2$-re $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$. ■

Az előző állításból következik, hogy a szigorú differenciálhatóság *szigorúan erősebb* feltétel, mint a differenciálhatóság. Például, a $\chi_{\mathbb{Q}} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a 0-ban differenciálható, de nem szigorúan differenciálható.

A szigorú differenciálhatóság elégséges ahhoz, hogy a függvény az adott pont valamely környezetén folytonos (sőt Lipschitz-függvény) legyen. Ahhoz azonban már nem elégséges, hogy a pont valamely környezetének minden pontjában *differenciálható* is legyen. Erre példát az **5.** gyakorlatban adunk, és ott azt is látni fogjuk, hogy az előző állításban szereplő $C > \|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\|$ feltétel nem cserélhető le a gyengébb $C \geq \|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\|$ feltételre.

Később (a 10. szakaszban) bevezetünk majd még egy differenciálhatósági fogalmat (az *analitikusságot*), amely már azt is biztosítja, hogy egy pontban analitikus függvény a pont valamely környezetén (végtelenszer) differenciálható (sőt analitikus) legyen.

1.4.4. Állítás. *Legyenek E és F normált terek, valamint $f : E \to F$ folytonos affin függvény. Ekkor az f függvény minden $\mathfrak{a} \in E$ pontban szigorúan differenciálható, és ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$ az f függvény érintő-operátora, akkor $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = u$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $x_1, x_2 \in E$ és $x_1 \neq x_2$, akkor az érintő-operátor definíciója szerint

$$\frac{f(x_1) - f(x_2) - u(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|} = 0,$$

ezért bármely $\mathfrak{a} \in E$ pontra

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(\mathfrak{a},\mathfrak{a})} \frac{f(x_1) - f(x_2) - u(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|} = 0$$

teljesül, azaz f az $\mathfrak{a}$ pontban szigorúan differenciálható, és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = u$. ■

1.5. Folytonos multilineáris operátor differenciálhatósága

1.5.1. Állítás. *Legyen* $(E_i)_{i\in I}$ *normált terek véges rendszere,* F *normált tér, és* $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$*. Ekkor* u *minden* $\mathfrak{a} \in \prod_{i\in I} E_i$ *pontban differenciálható, és minden* $\prod_{i\in I} E_i \ni (x_i)_{i\in I}$*-re*

$$((\mathrm{D}u)(\mathfrak{a}))((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} (u \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}})(x_i)$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha I üres vagy egy elemű, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz, ezért feltehető, hogy $\mathrm{Card}(I) > 1$. Legyen $\mathfrak{a} \in \prod_{i\in I} E_i$ rögzített, és értelmezzük az

$$w_{\mathfrak{a}} : \prod_{i\in I} E_i \to F; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} (u \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}})(x_i)$$

leképzést, ami az u multilinearitása és folytonossága miatt eleme $\mathscr{L}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$-nek. Azt kell igazolni, hogy

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{u(x) - u(\mathfrak{a}) - w_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|} = 0$$

teljesül. Legyen $x \in \prod_{i\in I} E_i$ tetszőleges és $n := \mathrm{Card}(I)$; ekkor a **LIN** 3.1.6. állítást alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
u(x) - u(\mathfrak{a}) - w_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a}) &= u(\mathfrak{a} + (x-\mathfrak{a})) - u(\mathfrak{a}) - w_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a}) = \\
&= \sum_{H\subseteq I} u((\mathfrak{a}, x-\mathfrak{a})_H) - u(\mathfrak{a}) - w_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a}) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{H\subseteq I,\\ \mathrm{Card}(H)=k}} u((\mathfrak{a}, x-\mathfrak{a})_H) - u(\mathfrak{a}) - w_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a}) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{\substack{H\subseteq I,\\ \mathrm{Card}(H)=k}} u((\mathfrak{a}, x-\mathfrak{a})_H) + \sum_{\substack{H\subseteq I,\\ \mathrm{Card}(H)=n-1}} u((\mathfrak{a}, x-\mathfrak{a})_H) - w_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a}).
\end{aligned}$$

Azonban $x \in \prod_{i\in I} E_i$ esetén minden $I \ni i$-re $(\mathfrak{a}, x-\mathfrak{a})_{I\setminus\{i\}} = \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}(x_i - \mathfrak{a}_i)$, ezért

$$\sum_{\substack{H\subseteq I,\\ \mathrm{Card}(H)=n-1}} u((\mathfrak{a}, x-\mathfrak{a})_H) = \sum_{i\in I} u((\mathfrak{a}, x-\mathfrak{a})_{I\setminus\{i\}}) = \sum_{i\in I} u(\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}(x_i - \mathfrak{a}_i)) = w_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a}).$$

Ez azt jelenti, hogy $x \in \prod_{i\in I} E_i$ esetén

$$u(x) - u(\mathfrak{a}) - w_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a}) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{\substack{H\subseteq I,\\ \mathrm{Card}(H)=k}} u((\mathfrak{a}, x-\mathfrak{a})_H).$$

Ebből és az u multilineáris operátor folytonosságából következik, hogy minden $x \in \prod_{i\in I} E_i$ pontra, ha $\|x-\mathfrak{a}\| \leq 1$, akkor

$$\begin{aligned}\|u(x)-u(\mathfrak{a})-w_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a})\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n-2} \Bigg(\sum_{\substack{H\subseteq I,\\ \mathrm{Card}(H)=k}} u((\mathfrak{a}, x-\mathfrak{a})_H)\Bigg) \right\| \leq \\ &\leq \|u\| \sum_{k=0}^{n-2} \left(\sum_{\substack{H\subseteq I,\\ \mathrm{Card}(H)=k}} \Big(\mathrm{P}_{i\in I} \|(\mathfrak{a}, x-\mathfrak{a})_H(i)\|\Big)\right) = \\ &= \|u\| \sum_{k=0}^{n-2} \left(\sum_{\substack{H\subseteq I,\\ \mathrm{Card}(H)=k}} \Big(\mathrm{P}_{i\in H} \|\mathfrak{a}_i\|\Big)\Big(\mathrm{P}_{i\in I\setminus H} \|x_i-\mathfrak{a}_i\|\Big)\right) \leq \\ &\leq \|u\| \sum_{k=0}^{n-2} \|\mathfrak{a}\|^k \|x-\mathfrak{a}\|^{n-k} \Bigg(\sum_{\substack{H\subseteq I,\\ \mathrm{Card}(H)=k}} 1\Bigg) = \\ &= \|u\| \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \|\mathfrak{a}\|^k \|x-\mathfrak{a}\|^{n-k} = \|u\| \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \|\mathfrak{a}\|^{n-j} \|x-\mathfrak{a}\|^{j} = \\ &= \|u\|\|x-\mathfrak{a}\|^2 \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \|\mathfrak{a}\|^{n-j} \|x-\mathfrak{a}\|^{j-2} \leq \|u\|\|x-\mathfrak{a}\|^2 \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \|\mathfrak{a}\|^{n-j}\end{aligned}$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\mathfrak{a}$-hoz létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, amelyre minden $x \in \mathrm{B}_1(\mathfrak{a})$ esetén

$$\|u(x)-u(\mathfrak{a})-w_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a})\| \leq C\|x-\mathfrak{a}\|^2,$$

amiből következik, hogy u differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és $(\mathrm{D}u)(\mathfrak{a}) = w_{\mathfrak{a}}$. ■

1.5.2. Következmény. *Ha E, F és G normált terek, és $\mathfrak{b} : E\times F \to G$ folytonos bilineáris operátor, akkor minden $(e,f) \in E\times F$ esetén $\mathfrak{b}$ differenciálható az (e,f) pontban, és minden $(\mathbf{e},\mathbf{f}) \in E\times F$ párra*

$$((\mathrm{D}\mathfrak{b})(e,f))(\mathbf{e},\mathbf{f}) = \mathfrak{b}(e,\mathbf{f}) + \mathfrak{b}(\mathbf{e},f).$$

Bizonyítás. Megfelelő szereposztás és azonosítás után nyilvánvalóan következik a 1.5.1. állításból, de itt közvetlen bizonyítást adunk. Legyen $(e,f) \in E\times F$ rögzített pont, ahol a $\mathfrak{b}$ függvény differenciálhatóságát vizsgáljuk. Ekkor minden $(\mathbf{e},\mathbf{f}) \in E\times F$ esetén $\mathfrak{b}$ bilinearitása folytán

$$\mathfrak{b}(e+\mathbf{e}, f+\mathbf{f}) = \mathfrak{b}(e,f) + \Big(\mathfrak{b}(e,\mathbf{f}) + \mathfrak{b}(\mathbf{e},f)\Big) + \mathfrak{b}(\mathbf{e},\mathbf{f}).$$

Mivel $\mathfrak{b}$ bilineáris és folytonos, így a $\mathfrak{b}(e,\cdot) : F \to G$ és $\mathfrak{b}(\cdot,f) : E \to G$ leképezések folytonos lineáris operátorok, ezért az

$$u : E\times F \to G; \quad (\mathbf{e},\mathbf{f}) \mapsto \mathfrak{b}(e,\mathbf{f}) + \mathfrak{b}(\mathbf{e},f)$$

leképezés szintén folytonos lineáris operátor. Ugyanakkor minden $(\mathbf{e},\mathbf{f}) \in E\times F$ párra, ha $(\mathbf{e},\mathbf{f}) \neq (0,0)$, akkor

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\mathfrak{b}(e+\mathbf{e}, f+\mathbf{f}) - \mathfrak{b}(e,f) - u(\mathbf{e},\mathbf{f})}{\|(\mathbf{e},\mathbf{f})\|} \right\| &= \frac{\|\mathfrak{b}(\mathbf{e},\mathbf{f})\|}{\max(\|\mathbf{e}\|,\|\mathbf{f}\|)} \leq \\ \leq \frac{\|\mathfrak{b}\|\|\mathbf{e}\|\|\mathbf{f}\|}{\max(\|\mathbf{e}\|,\|\mathbf{f}\|)} &\leq \|\mathfrak{b}\| \max(\|\mathbf{e}\|,\|\mathbf{f}\|) = \|\mathfrak{b}\|\|(\mathbf{e},\mathbf{f})\|,\end{aligned}$$

és a jobb oldal 0-hoz tart, ha $(\mathbf{e},\mathbf{f}) \to (0,0)$ az $E \times F$ normált szorzattérben. Ezért $\mathfrak{b}$ differenciálható az (e,f) pontban, és $(\mathrm{D}\mathfrak{b})(e,f) = u$, amit bizonyítani kellett. ■

1.5.3. Következmény. *Ha E, F és G normált terek, akkor minden $(u,v) \in \mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G)$ esetén a*

$$\mathfrak{b} : \mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G) \to \mathscr{L}(E;G); \quad (u,v) \mapsto v \circ u$$

függvény differenciálható az (u,v) pontban, és minden $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G)$ párra

$$((\mathrm{D}\mathfrak{b})(u,v))(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{v} \circ u + v \circ \mathbf{u}.$$

Bizonyítás. Az előző következményből triviálisan adódik, mert az itt értelmezett $\mathfrak{b}$ leképezés az operátornormák szerint folytonos bilineáris operátor. ■

1.6. Gyakorlatok

1. Legyen $E := \{(t,t^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | t \neq 0\}$, és tekintsük a $\chi_{_E}$ karakterisztikus függvényt. Ekkor az $\chi_{_E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ leképezés a $(0,0)$ pontban *nem folytonos*, de itt *minden* iránymenti deriváltja létezik és 0-val egyenlő, tehát az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\mathbf{e} \mapsto (\mathrm{D}_{\mathbf{e}}\chi_{_E})(0,0)$ leképezés *folytonos* és *lineáris.*

2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ az a leképezés, amely az $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ponthoz az

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & ; \text{ha } (x,y) = (0,0), \\ x^5/((y-x^2)^2 + x^8) & ; \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

értéket rendeli. Az f függvény *nem folytonos* a $(0,0)$ pontban, de itt *minden* iránymenti deriváltja létezik. Ugyanakkor az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\mathbf{e} \mapsto (\mathrm{D}_{\mathbf{e}}f)(0,0)$ leképezés *nem lineáris.*

3. Legyen F normált tér $\mathbb{K}$ felett és $f : \mathbb{K} \rightarrowtail F$ függvény. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ pontban, ha létezik a

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x - \mathfrak{a}}$$

határérték. Ha létezik ez a határérték, akkor $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(\mathbb{K};F)$ éppen az a lineáris operátor, amely ezzel a határérték-vektorral azonosul az $\mathscr{L}(\mathbb{K};F) \to F$; $u \mapsto u(1)$ izometrikus lineáris bijekció által; vagyis minden $\mathbb{K} \ni t$-re

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(t) = t.\lim_{x \to \mathfrak{a}} \Big(\frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x - \mathfrak{a}}\Big).$$

4. Legyen F valós normált tér, $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha a

$$g : \{(x_1,x_2) \in (\mathrm{Dom}(f)) \times (\mathrm{Dom}(f)) | (x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \leq \mathfrak{a} \leq x_2)\} \to F;$$
$$(x_1,x_2) \mapsto \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

függvénynek létezik határértéke az $(\mathfrak{a},\mathfrak{a})$ pontban. Ha létezik ez a határérték, akkor $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \lim\limits_{(x_1,x_2)\to(\mathfrak{a},\mathfrak{a})} g(x_1,x_2)$.

(*Útmutatás.* Ha $(x_1,x_2) \in (\mathrm{Dom}(f)) \times (\mathrm{Dom}(f))$, $x_1 < \mathfrak{a} < x_2$, akkor

$$g(x_1,x_2) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) =$$
$$= \Big(\frac{x_2-\mathfrak{a}}{x_2-x_1}\Big)\Big(\frac{f(x_2)-f(\mathfrak{a})}{x_2-\mathfrak{a}} - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\Big) + \Big(\frac{\mathfrak{a}-x_1}{x_2-x_1}\Big)\Big(\frac{f(x_1)-f(\mathfrak{a})}{x_1-\mathfrak{a}} - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\Big)$$

és természetesen az $(x_2-\mathfrak{a})/(x_2-x_1)$ és $(\mathfrak{a}-x_1)/(x_2-x_1)$ számok benne vannak a $[0,1]$ intervallumban, következésképpen:

$$\|g(x_1,x_2) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| = \left\|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\right\| \le$$
$$\le \left\|\frac{f(x_2)-f(\mathfrak{a})}{x_2-\mathfrak{a}} - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\right\| + \left\|\frac{f(x_1)-f(\mathfrak{a})}{x_1-\mathfrak{a}} - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\right\|.$$

Ugyanakkor $x_1 \in \mathrm{Dom}(f)$ és $x_1 < \mathfrak{a}$ esetén

$$g(x_1,\mathfrak{a}) = \frac{f(\mathfrak{a})-f(x_1)}{\mathfrak{a}-x_1} = \frac{f(x_1)-f(\mathfrak{a})}{x_1-\mathfrak{a}},$$

tehát

$$\|g(x_1,\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| = \left\|\frac{f(x_1)-f(\mathfrak{a})}{x_1-\mathfrak{a}} - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\right\|,$$

valamint $x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ és $\mathfrak{a} < x_2$ esetén

$$g(\mathfrak{a},x_2) = \frac{f(x_2)-f(\mathfrak{a})}{x_2-\mathfrak{a}},$$

tehát

$$\|g(\mathfrak{a},x_2) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| = \left\|\frac{f(x_2)-f(\mathfrak{a})}{x_2-\mathfrak{a}} - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\right\|.$$

Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor az iménti egyenlőtlenségekből következik, hogy létezik a $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(\mathfrak{a},\mathfrak{a})} g(x_1,x_2)$ határérték, és egyenlő a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ vektorral. Megfordítva, ha létezik g-nek határértéke az $(\mathfrak{a},\mathfrak{a})$ pontban, akkor a $g(\cdot,\mathfrak{a})$ és $g(\mathfrak{a},\cdot)$ parciális függvényeknek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ami azzal ekvivalens, hogy az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli különbségihányados-függvényének létezik baloldali és jobboldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban és azok egyenlők, így a **3**. gyakorlat szerint f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.)

5. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a *páros* függvény, amely minden $t \in \mathbb{R}_+$ számhoz az

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{, ha } t = 0; \\ \dfrac{(2n+1)t-1}{n(n+1)} & \text{, ha } t \in \Big[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\Big[; \\ t^2 & \text{, ha } t \ge 1 \end{cases}$$

értéket rendeli. Az f függvény a 0 pontban szigorúan differenciálható, de a 0 minden környezete tartalmaz megszámlálhatóan végtelen sok olyan pontot, ahol f nem differenciálható.

6. Legyenek E, F, E_1 és F_1 normált terek, továbbá $u \in \mathscr{L}(E_1; E)$ és $v \in \mathscr{L}(F; F_1)$ *lineáris homeomorfizmusok*. Legyen $f : E \mapsto F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in E$. Az f pontosan akkor (szigorúan) differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha a $v \circ f \circ u : E_1 \mapsto F_1$ függvény (szigorúan) differenciálható az $u^{-1}(\mathfrak{a})$ pontban. Továbbá, ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor

$$(\mathrm{D}(v \circ f \circ u))(u^{-1}(\mathfrak{a})) = v \circ ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \circ u.$$

7. Ha E valós normált tér és $U \subseteq E$ konvex nyílt halmaz, akkor egy $f : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha minden $U \ni x_1, x_2$-re

$$f(x_2) - f(x_1) \geq ((\mathrm{D}f)(x_1))(x_2 - x_1).$$

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy f konvex és legyenek $x_1, x_2 \in U$ különböző elemek. Az f differenciálható x_1-ben, ezért létezik f-nek x_1-ben az $x_2 - x_1$ irányú deriváltja és

$$\begin{aligned}((\mathrm{D}f)(x_1))(x_2 - x_1) = (\mathrm{D}_{x_2 - x_1} f)(x_1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + t.(x_2 - x_1)) - f(x_1))}{t} = \\ = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x_1 + t.(x_2 - x_1)) - f(x_1))}{t}.\end{aligned}$$

Ha $t \in]0, 1]$ tetszőleges valós szám, akkor az f konvexitása miatt

$$f(x_1 + t.(x_2 - x_1)) - f(x_1) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2) - f(x_1) = t(f(x_2) - f(x_1)),$$

következésképpen

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{f(x_1 + t.(x_2 - x_1) - f(x_1))}{t} \leq f(x_2) - f(x_1).$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy f-re teljesül az adott egyenlőtlenség, és legyenek $x_1, x_2 \in U$, valamint $\alpha \in [0, 1]$ tetszőleges valós szám. Ekkor az $x := (1 - \alpha).x_1 + \alpha.x_2$ vektorra teljesülnek a következők

$$\begin{aligned}(1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) - f(x) = (1 - \alpha)(f(x_1) - f(x)) + \alpha(f(x_2) - f(x)) \geq \\ \geq (1 - \alpha)((\mathrm{D}f)(x))(x_1 - x) + \alpha((\mathrm{D}f)(x))(x_2 - x) = \\ = ((\mathrm{D}f)(x))((1 - \alpha).x_1 + \alpha.x_2 - x) = 0,\end{aligned}$$

tehát f konvex.)

8. Legyen E Banach-tér, és $A := \mathscr{L}(E; E)$, ami az operátornormával ellátva szintén Banach-tér. Ekkor az

$$\mathrm{Exp}_A : A \to A; \quad \mathfrak{a} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}^n}{n!}$$

függvény differenciálható, és minden $A \ni \mathfrak{a}$-ra $(\mathrm{D}(\mathrm{Exp}_A))(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(A; A)$ az az operátor amely minden $x \in A$ elemhez a

$$((\mathrm{D}(\mathrm{Exp}_A))(\mathfrak{a}))(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{a}^k x \mathfrak{a}^{n-k-1} \Big)$$

értéket rendeli.

(*Útmutatás.* (I) Ha $\mathfrak{a}, x \in A$, akkor a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{a}^k x \mathfrak{a}^{n-k-1}$$

sor abszolút konvergens A-ban, mert $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\Big\| \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{a}^k x \mathfrak{a}^{n-k-1} \Big\| \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathfrak{a}\|^k \|x\| \|\mathfrak{a}\|^{n-k-1} = \|x\| \frac{\|\mathfrak{a}\|^{n-1}}{(n-1)!},$$

és a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\|\mathfrak{a}\|^{n-1}}{(n-1)!}$ számsor konvergens. Ezért $\mathfrak{a} \in A$ esetén jól értelmezett az

$$u_{\mathfrak{a}} : A \to A; \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{a}^k x \mathfrak{a}^{n-k-1} \Big)$$

függvény, és ez folytonos lineáris operátor, hiszen minden $A \ni x$-re

$$\|u_{\mathfrak{a}}(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\| \frac{\|\mathfrak{a}\|^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\|\mathfrak{a}\|} \|x\|.$$

(II) Minden $A \ni \mathfrak{a}, x$-re és $\mathbb{N}^* \ni n$-re legyen

$$\Delta_n(\mathfrak{a}, x) := (\mathfrak{a} + x)^n - \mathfrak{a}^n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{a}^k x \mathfrak{a}^{n-k-1},$$

és $\Delta_0(\mathfrak{a}, x) := 0$. Az (I) alapján nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{a}, x \in A$ esetén

$$\mathrm{Exp}_A(\mathfrak{a} + x) - \mathrm{Exp}_A(\mathfrak{a}) - u_{\mathfrak{a}}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta_n(\mathfrak{a}, x)}{n!},$$

és a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 2} \frac{\Delta_n(\mathfrak{a}, x)}{n!}$ sor abszolút konvergens A-ban.

(III) Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $A \ni \mathfrak{a}, x$-re és $\mathbb{N}^* \ni n$-re

$$\|\Delta_{n+1}(\mathfrak{a}, x)\| \leq \|\Delta_n(\mathfrak{a}, x)\| (\|\mathfrak{a}\| + \|x\|) + n \|\mathfrak{a}\|^{n-1} \|x\|^2$$

teljesül.

(IV) Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós számsorozatok, hogy $c_0 = c_1 = 0$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $a_n \geq 0$. Teljes indukcióval belátható, hogy ha minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re $c_n \leq c_{n-1} a_{n-1} + b_{n-1}$ teljesül, akkor minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra

$$c_n \leq b_{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-j} \Big(\mathrm{P}_{k=1}^{j-1} a_{n-k} \Big)$$

is igaz.

(V) A (III) és (IV) alapján belátható, hogy minden $\mathfrak{a} \in A$ elemhez van olyan $C_{\mathfrak{a}} \in \mathbb{R}_+$ szám, hogy minden $A \ni x$-re, ha $\|x\| \leq 1$, akkor

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|\Delta_n(\mathfrak{a}, x)\|}{n!} \leq C_{\mathfrak{a}} \|x\|^2.$$

Ebből következik, hogy $\mathfrak{a} \in A$ esetén az Exp_A függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $(\mathrm{D}(\mathrm{Exp}_A))(\mathfrak{a}) = u_{\mathfrak{a}}$.)

2. fejezet

Összetett függvények differenciálhatósága és parciális deriváltak

2.1. A differenciálhatóság lokalitása

A differenciálhatóság gyakorlati vizsgálatában sűrűn alkalmazzuk a következő állítást.

2.1.1. Állítás. (A differenciálhatóság lokalitása) *Legyenek E, F normált terek, $f, g : E \rightarrowtail F$ függvények, és $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, amelynek létezik olyan V környezete, hogy $V \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ a V halmazon. Az f függvény pontosan akkor differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha g differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ha f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})$ teljesül.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. A V halmaz tulajdonságaiból következik, hogy

$$\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to F; \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|};$$
$$\mathrm{Dom}(g) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to F; \quad x \mapsto \frac{g(x) - g(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|}$$

függvények a $V \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon egyenlők, és az elsőnek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és a határérték 0, ezért a határérték lokalitása miatt a második függvénynek is van határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és a határérték 0. Ezért g is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})$. Az f és g felcserélésével hasonlóan kapjuk, hogy ha g differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor f is differenciálható a $\mathfrak{a}$ pontban. ■

2.2. Összetett függvények differenciálhatósága

Semmiféle algoritmust nem ismerünk, amelynek alkalmazásával eldönthető volna, hogy egy normált terek között ható függvény differenciálható-e egy adott pontban. Ezért fontosak azok az állítások, amelyek bonyolult szerkezetű, összetett függvények differenciálhatóságáról szólnak, ha az összetevő függvények differenciálhatóak.

2.2.1. Állítás. *Legyenek E, F normált terek $\mathbb{K}$ felett, $f, g : E \rightarrowtail F$ függvények, $h : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $\alpha \in \mathbb{K}$, és $\mathfrak{a} \in E$.*

a) *Ha f és g differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f+g$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és*

$$(\mathrm{D}(f+g))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) + (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}).$$

b) *Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\alpha.f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és*

$$(\mathrm{D}(\alpha.f))(\mathfrak{a}) = \alpha.(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}).$$

c) *Ha f és h differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, akkor $h.f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és minden $x \in E$ esetén*

$$((\mathrm{D}(h.f))(\mathfrak{a}))(x) = ((\mathrm{D}h)(\mathfrak{a}))(x).f(\mathfrak{a}) + h(\mathfrak{a}).((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x).$$

Bizonyítás. a) Az f és g függvények differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, ezért

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|} = 0 = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{g(x)-g(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|},$$

így az összegfüggvény határértékére vonatkozó tétel alapján

$$0 = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|} + \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{g(x)-g(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|} =$$
$$= \lim_{x\to\mathfrak{a}} \Big(\frac{(f+g)(x)-(f+g)(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})+(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|}\Big),$$

vagyis $f+g$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és $(\mathrm{D}(f+g))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) + (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})$ teljesül.
b) Az f függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ezért

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|} = 0,$$

következésképpen

$$0 = \alpha. \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|} =$$
$$= \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{(\alpha.f)(x)-(\alpha.f)(\mathfrak{a})-(\alpha.(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|},$$

vagyis $\alpha.f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $(\mathrm{D}(\alpha.f))(\mathfrak{a}) = \alpha.(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$.
c) Vezessük be az

$$u_{\mathfrak{a}} : E \to F; \quad x \mapsto ((\mathrm{D}h)(\mathfrak{a}))(x).f(\mathfrak{a}) + h(\mathfrak{a}).((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x)$$

leképezést, amely nyilvánvalóan lineáris, és folytonos is, hiszen $x \in E$ esetén

$$\|u_{\mathfrak{a}}(x)\| \leq |((\mathrm{D}h)(\mathfrak{a}))(x)|\|f(\mathfrak{a})\| + |h(\mathfrak{a})|\|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x)\| \leq$$
$$\leq (\|((\mathrm{D}h)(\mathfrak{a}))(x)\|\|f(\mathfrak{a})\| + |h(\mathfrak{a})|\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\|)\|x\|.$$

Ha $x \in \mathrm{Dom}(h.f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor

$$\frac{(h.f)(x)-(h.f)(\mathfrak{a})-u_{\mathfrak{a}}(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|} = \Big(\frac{h(x)-h(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}h)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|}\Big).f(x)+$$
$$+h(\mathfrak{a}).\Big(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|}\Big) + ((\mathrm{D}h)(\mathfrak{a}))\Big(\frac{x-\mathfrak{a}}{\|x-\mathfrak{a}\|}\Big).(f(x)-f(\mathfrak{a})).$$

Itt az egyenlőség jobb oldalán álló

– első tag 0-hoz tart $\mathfrak{a}$-ban, mert h differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és f korlátos az $\mathfrak{a}$ valamely környezetén, hiszen f folytonos $\mathfrak{a}$-ban;

– második tag 0-hoz tart $\mathfrak{a}$-ban, mert f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban;

– harmadik tag 0-hoz tart $\mathfrak{a}$-ban, mert f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, tehát $f(\cdot)-f(\mathfrak{a})$ az $\mathfrak{a}$ pontban 0-hoz tart, és az

$$E \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto ((\mathrm{D}h)(\mathfrak{a}))\Big(\frac{x-\mathfrak{a}}{\|x-\mathfrak{a}\|}\Big)$$

függvény korlátos (a $\|(\mathrm{D}h)(\mathfrak{a})\|$ szám által).

Ez azt jelenti, hogy $h.f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és $(\mathrm{D}(h.f))(\mathfrak{a}) = u_{\mathfrak{a}}$. ■

2.3. Függvények kompozíciójának differenciálhatósága

2.3.1. Állítás. (Függvények kompozíciójának differenciálhatósága) *Legyenek E, F és G normált terek, $f : E \rightarrowtail F$, $g : F \rightarrowtail G$ függvények, valamint $\mathfrak{a} \in E$. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és g differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, akkor $g \circ f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és fennáll a*

$$(\mathrm{D}(g \circ f))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A g függvény differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, ezért van olyan $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a})) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ és minden $y \in \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a}))$ pontra

$$\|g(y) - g(f(\mathfrak{a})) - ((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})))(y - f(\mathfrak{a}))\| \leq \varepsilon' \|y - f(\mathfrak{a})\|.$$

Az f függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, és $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, ezért van olyan $\delta'' \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_{\delta''}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és $f\langle \mathrm{B}_{\delta''}(\mathfrak{a})\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a}))$. Ekkor

$$\mathrm{B}_{\delta''}(\mathfrak{a}) \subseteq \overset{-1}{f}\langle \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a}))\rangle \subseteq \overset{-1}{f}\langle \mathrm{Dom}(g)\rangle = \mathrm{Dom}(g \circ f)$$

is teljesül. Az f függvény differenciálható is $\mathfrak{a}$-ban, ezért van olyan $\delta \in]0, \delta''[$ valós szám, amelyre minden $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ esetén

$$\|f(x) - f(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a})\| \leq \varepsilon' \|x - \mathfrak{a}\|.$$

Ekkor $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ esetén $f(x) \in \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a}))$, tehát a

$$\|g(f(x)) - g(f(\mathfrak{a})) - ((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})))(f(x) - f(\mathfrak{a}))\| \leq \varepsilon' \|f(x) - f(\mathfrak{a})\|,$$
$$\|f(x) - f(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a})\| \leq \varepsilon' \|x - \mathfrak{a}\|$$

egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek, és az utóbbiból az is következik, hogy

$$\|f(x) - f(\mathfrak{a})\| \leq (\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| + \varepsilon')\|x - \mathfrak{a}\|.$$

Ebből kapjuk, hogy minden $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \ni x$-re

$$\begin{aligned}
&\|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\circ(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})\| = \\
&= \|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})))(f(x)-f(\mathfrak{a}))+ \\
&+((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})))(f(x)-f(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a}))\| \leq \\
&\leq \|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})))(f(x)-f(\mathfrak{a}))\|+ \\
&+\|((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})))(f(x)-f(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a}))\| \leq \\
&\leq \varepsilon'\|f(x)-f(\mathfrak{a})\|+\|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\|\|f(x)-f(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})\| \leq \\
&\leq \varepsilon'(\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\|+\varepsilon')\|x-\mathfrak{a}\|+\|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\|\varepsilon'\|x-\mathfrak{a}\| = \\
&= \varepsilon'(\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\|+\varepsilon'+\|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\|)\|x-\mathfrak{a}\|.
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, és $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, amelyre

$$\varepsilon'(\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\|+\varepsilon'+\|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\|) < \varepsilon,$$

akkor az ε'-höz imént megválasztott $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számra teljesül az, hogy $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(g\circ f)$ és minden $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \ni x$-re

$$\|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\circ(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})\| \leq \varepsilon\|x-\mathfrak{a}\|.$$

Ezért a $g\circ f : E \rightarrowtail G$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és láthatóan $(\mathrm{D}(g\circ f))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\circ(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ teljesül. ■

2.3.2. Következmény. *Legyenek E, F és G normált terek, $u \in \mathscr{L}(F;G)$, és $f : E \rightarrowtail F$ függvény, valamint $\mathfrak{a} \in E$. Ha az f függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor az $u\circ f : E \rightarrowtail G$ függvény is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és*

$$(\mathrm{D}(u\circ f))(\mathfrak{a}) = u\circ(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}).$$

Bizonyítás. Az u függvény differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban és $(\mathrm{D}u)(f(\mathfrak{a})) = u$, ezért 2.3.1. szerint $u\circ f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(\mathrm{D}(u\circ f))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}u)(f(\mathfrak{a}))\circ(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = u\circ(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}).\ ■$$

2.3.3. Következmény. *Legyenek E, F és G normált terek, $u : F \to G$ lineáris homeomorfizmus, és $f : E \rightarrowtail F$ függvény, valamint $\mathfrak{a} \in E$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha $u\circ f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. Elegendő az 2.3.2. állítást alkalmazni először u-ra és f-re, majd u^{-1}-re és $u\circ f$-re. ■

2.3.4. Állítás. *Legyen E normált tér, $(F_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere, és $\mathfrak{a} \in E$. Az $f : E \rightarrowtail \prod_{i\in I} F_i$ függvény pontosan akkor differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha minden $I \ni i$-re $\mathrm{pr}_i\circ f : E \rightarrowtail F_i$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban; továbbá, ha f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor minden $i \in I$ esetén*

$$\mathrm{pr}_i\circ(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \mathrm{D}(\mathrm{pr}_i\circ f)(\mathfrak{a}),$$

tehát minden $e \in E$ esetén

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(e) = ((\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i\circ f)(\mathfrak{a}))(e))_{i\in I}$$

Bizonyítás. Jelölje F az $(F_i)_{i\in I}$ normált tér rendszer szorzatát. Tegyük fel, hogy f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $i \in I$. A $\mathrm{pr}_i : F \to F_i$ projekció folytonos lineáris operátor, ezért differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban és $(\mathrm{Dpr}_i)(f(\mathfrak{a})) = \mathrm{pr}_i$, így a függvénykompozíció differenciálhatóságának tétele szerint a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{Dpr}_i)(f(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}).$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $I \ni i$-re a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Értelmezzük az

$$u : E \to F; \quad x \mapsto ((\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f)(\mathfrak{a}))(x))_{i\in I}$$

függvényt, ami folytonos lineáris operátor E és F között. Ha $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor

$$\left\| \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - u(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|} \right\| =$$

$$= \max_{i\in I} \left\| \frac{(\mathrm{pr}_i \circ f)(x) - (\mathrm{pr}_i \circ f)(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|} \right\|,$$

és a jobb oldal a feltevés alapján 0-hoz tart $\mathfrak{a}$-ban, következésképpen f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

2.3.5. Következmény. *Legyenek E, G normált terek, valamint $(F_j)_{j\in J}$ normált terek olyan véges rendszere, hogy* $\mathrm{Card}(J) \geq 2$. *Legyen $u \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{j\in J} F_j; G\Big)$, és $(f_j)_{j\in J}$ olyan rendszer, hogy minden $j \in J$ esetén $f_j : E \rightarrowtail F_j$ függvény. Ha $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, hogy minden $j \in J$ esetén f_j differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor a*

$$g : \bigcap_{j\in J} \mathrm{Dom}(f_j) \to G; \quad x \mapsto u\left((f_j(x))_{j\in J}\right)$$

függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és

$$(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) = \sum_{j\in J} \left(u \circ \mathrm{in}_{j,f(\mathfrak{a})}\right) \circ (\mathrm{D}f_j)(\mathfrak{a}).$$

Bizonyítás. Vezessük be az

$$f : \bigcap_{j\in J} \mathrm{Dom}(f_j) \to \prod_{j\in J} F_j; \quad x \mapsto (f_j(x))_{j\in J};$$

ekkor $g = u \circ f$. Az előző állítás szerint f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és minden $x \in E$ esetén

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x) = \left(((\mathrm{D}f_j)(\mathfrak{a}))\,(x)\right)_{j\in J}.$$

A 1.5.1. állítás szerint u differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, és minden $y \in \prod_{j\in J} F_j$ esetén

$$((\mathrm{D}u)(f(\mathfrak{a})))\,(y) = \sum_{j\in J} (u \circ \mathrm{in}_{j,f(\mathfrak{a})})(y_j).$$

Ezekből az 2.3.1. tétel alapján következik, hogy $u \circ f$, vagyis a g függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és minden $x \in E$ esetén

$$(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}u)(f(\mathfrak{a}))\left(((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x)\right) = \sum_{j \in J} (u \circ \mathrm{in}_{j,f(\mathfrak{a})})(((\mathrm{D}f_j)(\mathfrak{a}))(x)),$$

ami éppen azt jelenti, hogy fennáll a

$$(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) = \sum_{j \in J} \left(u \circ \mathrm{in}_{j,f(\mathfrak{a})}\right) \circ (\mathrm{D}f_j)(\mathfrak{a}).$$

egyenlőség. ■

2.4. Normált terek szorzatában értelmezett függvény differenciálhatósága

2.4.1. Állítás. *Legyen $(E_i)_{i \in I}$ normált terek véges rendszere, F normált tér, és $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$. Ha az $f : \prod_{i \in I} E_i \rightarrowtail F$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor minden $I \ni i$-re az $f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \rightarrowtail F$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}_i$-ben és*

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \circ \mathrm{in}_{i,0} = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}))(\mathfrak{a}_i).$$

Bizonyítás. Jelölje E az $(E_i)_{i \in I}$ normált tér rendszer szorzatát. Ha $i \in I$, akkor $\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \to E$ olyan folytonos affin függvény, amelynek érintő-operátora egyenlő $\mathrm{in}_{i,0}$-val. Ezért $i \in I$ esetén $\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}$ differenciálható az $\mathfrak{a}_i$ pontban, és $(\mathrm{D}(\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}))(\mathfrak{a}_i) = \mathrm{in}_{i,0}$. Ugyanakkor, $i \in I$ esetén $\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{a}$, tehát ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor a függvénykompozíció differenciálásának tétele alapján $f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}$ differenciálható $\mathfrak{a}_i$-ben, és

$$(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}))(\mathfrak{a}_i) = (\mathrm{D}f)(\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_i)) \circ (\mathrm{D}(\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}))(\mathfrak{a}_i) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ \mathrm{in}_{i,0}$$

teljesül. ■

Azonban abból, hogy minden $I \ni i$-re az $f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \rightarrowtail F$ parciális függvény differenciálható az $\mathfrak{a}_i$ pontban, egyáltalán nem következik, hogy f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, sőt ebből még az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli folytonosságára sem következtethetünk, és még az is előfordulhat, hogy ekkor $\mathfrak{a}$ nem belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek.

2.4.2. Definíció. *Legyen $(E_i)_{i \in I}$ normált terek véges rendszere, F normált tér, $E := \prod_{i \in I} E_i$, és $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i \in I} \in E$, valamint $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Azt mondjuk, hogy $i \in I$ esetén f-nek* **létezik az i-edik változó szerinti parciális deriváltja az $\mathfrak{a}$ pontban***, ha az $f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \rightarrowtail F$ parciális függvény differenciálható $\mathfrak{a}_i$-ben. Ha $i \in I$ és f-nek létezik az i-edik változó szerinti parciális deriváltja $\mathfrak{a}$-ban, akkor a $(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}))(\mathfrak{a}_i) \in \mathscr{L}(E_i; F)$ operátort az f függvény* **i-edik változó szerinti parciális deriváltjának** *nevezzük az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $(\partial_i f)(\mathfrak{a})$ szimbólummal jelöljük, vagyis*

$$(\partial_i f)(\mathfrak{a}) \ := \ (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}))(\mathfrak{a}_i).$$

Tehát a parciális deriváltak fogalmának alkalmazásával az előző állítás úgy is megfogalmazható, hogy ha $(E_i)_{i \in I}$ normált terek véges rendszere, F normált tér, $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$, és az $f : \prod_{i \in I} E_i \rightarrowtail F$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor minden

$I \ni i$-re f-nek létezik az i-edik változó szerinti parciális deriváltja $\mathfrak{a}$-ban, és minden $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ rendszerre

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))((x_i)_{i\in I}) = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))\Big(\sum_{i\in I} \mathrm{in}_{i,0}(x_i)\Big) = \sum_{i\in I}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathrm{in}_{i,0}(x_i)) =$$
$$= \sum_{i\in I}((\mathrm{D}(f\circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}))(\mathfrak{a}_i))(x_i) = \sum_{i\in I}((\partial_i f)(\mathfrak{a}))(x_i).$$

2.4.3. Következmény. *Legyen E az $(E_i)_{i\in I}$, és F az $(F_j)_{j\in J}$ véges normált tér rendszer szorzata, valamint $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Minden $J \ni j$-re legyen $f_j := \mathrm{pr}_j \circ f$ az f j-edik komponens-függvénye. Ha f differenciálható az $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in E$ pontban, akkor minden $I \times J \ni (i,j)$-re f_j-nek létezik az i-edik változó szerinti parciális deriváltja $\mathfrak{a}$-ban, és minden $(x_i)_{i\in I} \in E$ rendszerre*

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))((x_i)_{i\in I}) = \Big(\sum_{i\in I}((\partial_i f_j)(\mathfrak{a}))(x_i)\Big)_{j\in J}.$$

Bizonyítás. A két előző állítás összeillesztésével következik. ■

2.4.4. Következmény. *Legyen $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{K}^m \rightarrowtail \mathbb{K}^n$ függvény, és minden $j < n$ természetes számra $f_j := \mathrm{pr}_j \circ f$ az f j-edik komponens-függvénye. Ha f differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}^m$ pontban, akkor minden $i < m$ és $j < n$ természetes számra f_j-nek létezik az i-edik változó szerinti parciális deriváltja $\mathfrak{a}$-ban, és a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^m;\mathbb{K}^n)$ lineáris operátor mátrixa az az $n \times m$-es, $\mathbb{K}$-beli együtthatós mátrix, amelyre $i < m$ és $j < n$ esetén*

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))_{j,i} = (\partial_i f_j)(\mathfrak{a}).$$

Bizonyítás. Az előző állítás speciális esetéről van szó. ■

2.5. Az iránymenti és a parciális deriváltak kapcsolata

2.5.1. Állítás. *Legyen F normált tér $\mathbb{K}$ felett, $f : \mathbb{K} \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek és létezik a*

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x - \mathfrak{a}}$$

határérték. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor ez a határérték megegyezik azzal az F-beli vektorral, amellyel a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) : \mathbb{K} \to F$ deriváltoperátor kanonikusan azonosul.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik a szóban forgó határérték, és legyen az értéke z. Ekkor az

$$u : \mathbb{K} \to F; \quad t \mapsto t.z$$

leképezés olyan folytonos lineáris operátor, amelyre $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - u(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|} = \Big(\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|}\Big).\Big(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} - z\Big)$$

teljesül. Ebből látható, hogy

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - u(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|} = 0,$$

hiszen a
$$\mathbb{K} \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|}$$
függvény korlátos, és a z vektor értelmezése alapján
$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \Big(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} - z \Big) = 0.$$
Tehát ha $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor az f függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = u$, vagyis a $((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(1)$ vektor (vagyis a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) : \mathbb{K} \to F$ operátorral kanonikusan azonosuló vektor) egyenlő z-vel.

Megfordítva; legyen f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és legyen
$$\varphi : \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to F; \quad x \mapsto \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|}.$$
Ekkor minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra
$$\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(1) + \Big(\frac{|x-\mathfrak{a}|}{x-\mathfrak{a}}\Big).\varphi(x),$$
amiből látszik, hogy
$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(1),$$
hiszen a
$$\mathbb{K} \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \frac{|x-\mathfrak{a}|}{x-\mathfrak{a}}$$
függvény korlátos, továbbá
$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \varphi(x) = 0,$$
mert az f függvény az $\mathfrak{a}$ pontban differenciálható. ■

A következő állítás megmutatja, hogy véges dimenziós aritmetikai térben értelmezett függvény parciális deriváltjainak létezése szoros kapcsolatban áll bizonyos iránymenti deriváltak létezésével.

2.5.2. Állítás. *Legyen $n \in \mathbb{N}^*$, F normált tér $\mathbb{K}$ felett, és $f : \mathbb{K}^n \to F$ függvény. Jelölje $(\mathbf{e}_i)_{0 \le i < n}$ a kanonikus bázist $\mathbb{K}^n$-ben, vagyis minden $i < n$ természetes számra $\mathbf{e}_i \in \mathbb{K}^n$ az az elem, amelynek $j < n$ esetén a j-edik komponense 1, ha $j = i$, és 0, ha $j \neq i$. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ és $i < n$ természetes szám. Az f-nek pontosan akkor létezik az i-edik változó szerinti parciális deriváltja $\mathfrak{a}$-ban, ha f-nek létezik az $\mathbf{e}_i$ iránymenti deriváltja $\mathfrak{a}$-ban. Továbbá, ha f-nek létezik az i-edik változó szerinti parciális deriváltja $\mathfrak{a}$-ban, akkor*
$$(\partial_i f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}_{\mathbf{e}_i} f)(\mathfrak{a})$$
teljesül.

Bizonyítás. Legyen $i \in n$ rögzített; ekkor minden $\mathbb{K} \ni t$-ra $\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_i + t) = \mathfrak{a} + t.\mathbf{e}_i$ teljesül, ezért $\{t \in \mathbb{K} \setminus \{0\} | \mathfrak{a} + t.\mathbf{e}_i \in \mathrm{Dom}(f)\} = \{t \in \mathbb{K} \setminus \{0\} | \mathfrak{a}_i + t \in \mathrm{Dom}(f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}})\}$. Ebből következik, hogy a
$$\{t \in \mathbb{K} \setminus \{0\} | \mathfrak{a} + t.\mathbf{e}_i \in \mathrm{Dom}(f)\} \to F; \quad t \mapsto \frac{f(\mathfrak{a}+t.\mathbf{e}_i) - f(\mathfrak{a})}{t}$$

függvénynek pontosan akkor létezik határértéke a 0 pontban (vagyis pontosan akkor létezik f-nek $\mathfrak{a}$-ban $\mathbf{e}_i$-irányú deriváltja), ha a

$$\{t \in \mathbb{K} \setminus \{0\} | \mathfrak{a}_i + t \in \mathrm{Dom}(f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}})\} \to F; \quad t \mapsto \frac{(f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}})(\mathfrak{a}_i + t) - (f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}})(\mathfrak{a}_i)}{t}$$

függvénynek létezik határértéke 0-ban. Ez utóbbi kijelentés viszont ekvivalens azzal, hogy az $f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : \mathbb{K} \rightarrowtail F$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}_i$ pontban (vagyis f-nek létezik $\mathfrak{a}$-ban az i-edik változó szerinti parciális deriváltja).

Továbbá, ha f-nek létezik $\mathfrak{a}$-ban az i-edik változó szerinti parciális deriváltja, akkor az előzőek szerint

$$(\partial_i f)(\mathfrak{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{(f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}})(\mathfrak{a}_i + t) - (f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}})(\mathfrak{a}_i)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathfrak{a} + t.\mathbf{e}_i) - f(\mathfrak{a})}{t} = (\mathrm{D}_{\mathbf{e}_i} f)(\mathfrak{a}). \blacksquare$$

2.5.3. Definíció. *Legyen $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{K}^m \rightarrowtail \mathbb{K}^n$ függvény, és minden $j < n$ természetes számra $f_j := \mathrm{pr}_j \circ f$ az f j-edik komponens-függvénye. Azt mondjuk, hogy f-nek létezik a Jacobi-mátrixa az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}^m$ pontban, ha minden $i < m$ és $j < n$ természetes számra f_j-nek létezik az i-edik változó szerinti parciális deriváltja $\mathfrak{a}$-ban. Ha f-nek létezik a Jacobi-mátrixa az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}^m$ pontban, akkor a*

$$((\partial_i f_j)(\mathfrak{a}))_{(j,i) \in n \times m} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

mátrixot nevezzük az f függvény Jacobi-mátrixának az $\mathfrak{a}$ pontban. Ha $m = n$ és f-nek létezik a Jacobi-mátrixa az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}^n$ pontban, akkor a

$$\det\Big(((\partial_i f_j)(\mathfrak{a}))_{(j,i) \in n \times n}\Big) \in \mathbb{K}$$

számot az f Jacobi-determinánsának nevezzük $\mathfrak{a}$-ban.

Tehát, ha az $f : \mathbb{K}^m \rightarrowtail \mathbb{K}^n$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}^m$ pontban, akkor létezik f-nek a Jacobi-mátrixa $\mathfrak{a}$-ban, és a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ derivált-operátor kanonikusan azonosul az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli Jacobi-mátrixával. Azonban lehetséges, hogy a Jacobi-mátrix létezik egy pontban, de ott a függvény nem differenciálható, sőt esetleg nem is folytonos.

2.6. Gyakorlatok

1. Legyenek E, F normált terek $\mathbb{K}$ felett, $f, g : E \rightarrowtail F$ függvények, $\alpha \in \mathbb{K}$, $h : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, és $\mathfrak{a} \in E$. Ha f, g és h szigorúan differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor $f + g$, $\alpha.f$ és $h.f$ is szigorúan differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban.

2. Legyenek E, F és G normált terek, $f : E \rightarrowtail F$, $g : F \rightarrowtail G$ függvények, valamint $\mathfrak{a} \in E$. Ha f szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és g szigorúan differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, akkor $g \circ f$ is szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

(*Útmutatás.* Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A g függvény szigorúan differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_r(f(\mathfrak{a})) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, és minden $y_1, y_2 \in \mathrm{B}_r(f(\mathfrak{a}))$ esetén

$$\|g(y_2) - g(y_1) - ((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})))(y_2 - y_1)\| \leq \varepsilon' \|y_2 - y_1\|.$$

Az f függvény szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért itt folytonos is, így létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})\rangle \subseteq \mathrm{B}_r(f(\mathfrak{a}))$, és minden $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \ni x_1, x_2$-re

$$\|f(x_2) - f(x_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1)\| \leq \varepsilon'\|x_2 - x_1\|.$$

Ebből látszik, hogy $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ esetén

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq (\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| + \varepsilon')\|x_2 - x_1\|.$$

Ha tehát $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$, akkor az előzőek szerint

$$\begin{gathered}\|g(f(x_2)) - g(f(x_1)) - ((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1)\| \leq \\ \leq \|g(f(x_2)) - g(f(x_1)) - ((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})))(f(x_2) - f(x_1))\| + \\ + \|((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})))(f(x_2) - f(x_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1))\| \leq \\ \leq \varepsilon'\|f(x_2) - f(x_1)\| + \|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\|\|f(x_2) - f(x_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1)\| \leq \\ \leq \varepsilon'(\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| + \varepsilon' + \|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\|)\|x_2 - x_1\|.\end{gathered}$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, és $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy

$$\varepsilon'(\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| + \varepsilon' + \|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\|) < \varepsilon,$$

akkor az ε'-höz imént megválasztott $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számra teljesül az, hogy $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(g \circ f)$, és minden $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \ni x_1, x_2$-re

$$\|(g \circ f)(x_2) - (g \circ f)(x_1) - ((\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1)\| \leq \varepsilon\|x_2 - x_1\|$$

teljesül, így a $g \circ f : E \rightarrowtail G$ függvény szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.)

3. Legyen E az $(E_i)_{i\in I}$ és F az $(F_j)_{j\in J}$ véges normált tér rendszer szorzata, továbbá $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Ha $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in E$ és f szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor minden $I \times J \ni (i,j)$-re a $\mathrm{pr}_j \circ f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \rightarrowtail F_j$ függvény szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}_i$ pontban.

(*Útmutatás.* Ez a **2**. gyakorlatból és abból következik, hogy a pr_j és $\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}$ függvények folytonos affin függvények, így szigorúan differenciálhatóak.)

4. Legyenek $m, n \in \mathbb{N}$. Ha léteznek olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ és $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres nyílt halmazok, és olyan $f : \Omega \to \Omega'$ bijekció, hogy az f és f^{-1} függvények differenciálhatóak, akkor $m = n$.

5. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $p \in [1, \to[$ tetszőleges valós szám, vagy $p = \infty$. Adjuk meg azokat a pontokat $\mathbb{R}^n$-ben, amelyekben a $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, ezekben a pontokban adjuk meg a $\|\cdot\|_p$ függvény deriváltját!

3. fejezet

Deriváltfüggvények és magasabb rendű differenciálhatóság

3.1. Magasabb rendű deriváltfüggvények

3.1.1. Definíció. *Legyenek E és F normált terek. Az $f : E \rightarrowtail F$ függvény* **derivált-függvényének** *nevezzük azt a*

$$\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$$

függvényt, amelyre

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) := \{\mathfrak{a} \in E \mid f \textit{ differenciálható } \mathfrak{a}\textit{-ban}\},$$

és minden $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \ni \mathfrak{a}$*-ra* $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ *az f deriváltja az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Tehát *minden* $f : E \rightarrowtail F$ függvénynek értelmezve van a deriváltfüggvénye, továbbá $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$, hiszen a differenciálhatóság értelmezése alapján egy függvény csak a definíciós tartományának belső pontjaiban lehet differenciálható. Már ebből is látható, hogy $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ lehet az üres halmaz, tehát $\mathrm{D}f$ az üres függvény; például akkor, ha $\mathrm{Dom}(f)$-nek nem létezik belső pontja.

Legyenek most E, F normált terek és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Ekkor $\mathrm{D}f$ az E normált térben értelmezett, és az $\mathscr{L}(E;F)$ operátortérbe érkezik, ami az operátornormával ellátva szintén normált tér. Ezért jól értelmezett a

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}f) : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$$

deriváltfüggvény. A definíció szerint

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}f)) := \{\mathfrak{a} \in E \mid \mathrm{D}f \text{ differenciálható } \mathfrak{a}\text{-ban}\},$$

és minden $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}f)) \ni \mathfrak{a}$-ra $(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})$ a $\mathrm{D}f$ deriváltja az $\mathfrak{a}$ pontban. Legyen

$$\pi_{1,1} : \mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F)) \to \mathscr{L}_2(E;F); \quad u \mapsto ((x_0, x_1) \mapsto (u(x_0))(x_1))$$

a kanonikus izometrikus lineáris bijekció (**LIN** 3.7.4.). Ekkor a

$$\mathrm{D}^2 f := \pi_{1,1} \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}f) : E \rightarrowtail \mathscr{L}_2(E;F)$$

függvény definíciós tartománya nyilvánvalóan egyenlő $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))$-fel, és minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))$ esetén $(\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a})$ az az $E^2 \to F$ folytonos bilineáris operátor, amely kanonikusan (vagyis a $\pi_{1,1}$ által) azonosul a $(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}) : E \to \mathscr{L}(E;F)$ folytonos lineáris operátorral, vagyis minden $x_0, x_1 \in E$ esetén

$$((\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a}))(x_0, x_1) = (((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_0))(x_1).$$

Ugyanakkor, az $\mathscr{L}_2(E;F)$ vektortér a bilineáris operátornormával szintén normált tér, ezért jól értelmezett a

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}^2 f) : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_2(E;F))$$

deriváltfüggvény. Legyen

$$\pi_{1,2} : \mathscr{L}(E;\mathscr{L}_2(E;F)) \to \mathscr{L}_3(E;F); \quad u \mapsto ((x_0,x_1,x_2) \mapsto (u(x_0))(x_1,x_2))$$

a kanonikus izometrikus lineáris bijekció (**LIN** 3.7.4.). Ekkor a

$$\mathrm{D}^3 f := \pi_{1,2} \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}^2 f) : E \rightarrowtail \mathscr{L}_3(E;F)$$

függvény definíciós tartománya nyilvánvalóan egyenlő $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}^2 f))$-fel, és minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}^2 f))$ esetén $(\mathrm{D}^3 f)(\mathfrak{a})$ az az $E^3 \to F$ folytonos trilineáris operátor, amely kanonikusan (vagyis a $\pi_{1,2}$ által) azonosul a $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^2 f))(\mathfrak{a}) : E \to \mathscr{L}_2(E;F)$ folytonos lineáris operátorral, vagyis minden $x_0, x_1, x_2 \in E$ esetén

$$((\mathrm{D}^3 f)(\mathfrak{a}))(x_0,x_1,x_2) = (((\mathrm{D}(\mathrm{D}^2 f))(\mathfrak{a}))(x_0))(x_1,x_2).$$

Sejthető, hogy ez az eljárás "minden határon túl" folytatható, és minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra értelmezhetünk egy

$$\mathrm{D}^n f : E \rightarrowtail \mathscr{L}_n(E;F)$$

leképezést úgy, hogy fennáll a

$$\mathrm{D}^{n+1} f = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}^n f)$$

rekurzív összefüggés, ahol

$$\pi_{1,n} : \mathscr{L}(E;\mathscr{L}_n(E;F)) \to \mathscr{L}_{n+1}(E;F); \; u \mapsto ((x_i)_{i \in n+1} \mapsto (u(x_0))((x_{i+1})_{i\in n}))$$

a kanonikus izometrikus lineáris bijekció. A pontos állítás a következő.

3.1.2. Állítás. *Legyenek E, F normált terek és minden $\mathbb{N} \ni n$-re jelölje $\pi_{1,n}$ az $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}_n(E;F)) \to \mathscr{L}_{n+1}(E;F)$ a kanonikus izometrikus lineáris bijekciót. Ekkor minden $f : E \rightarrowtail F$ függvényhez egyértelműen létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre $f_0 = f$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : E \rightarrowtail \mathscr{L}_n(E;F)$ függvény, és $f_{n+1} = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}f_n$.*

Bizonyítás. Megállapodunk abban, hogy minden X és Y halmazra $\mathscr{F}_0(X;Y)$ jelöli az $X \rightarrowtail Y$ függvények halmazát. Vezessük be az

$$\mathscr{E} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{n\} \times \mathscr{F}_0(E;\mathscr{L}_n(E;F)))$$

jelölést, és értelmezzük azt a $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ függvényt, amely minden $(n,h) \in \mathscr{E}$ elemhez az $(n+1, \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}h) \in \mathscr{E}$ párt rendeli. Adott $f : E \rightarrowtail F$ függvényre legyen σ a $(0,f) \in \mathscr{E}$ kezdőpont és a $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ függvény által meghatározott *iterációs* sorozat. Tehát σ az az $\mathscr{E}$-ben haladó sorozat, amelyre $\sigma(0) = (0,f)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+1) = g(\sigma(n))$. Az $\mathscr{E}$ definíciója szerint $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n)$ egy olyan pár, amelynek első komponense egy

$m \in \mathbb{N}$ szám, és a második komponense egy $E \rightarrowtail \mathscr{L}_m(E;F)$ függvény. Megállapodunk abban, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $\sigma(n)$ pár első (illetve második) komponensét $\sigma_1(n)$ (illetve $\sigma_2(n)$) jelöli.

Értelmezzük most az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sigma_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert. Teljes indukcióval igazolni fogjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma_1(n) = n$, $f_n \in \mathscr{F}_0(E;\mathscr{L}_n(E;F))$, és $f_{n+1} = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}f_n$ teljesül.

Valóban, $(\sigma_1(0), \sigma_2(0)) = \sigma(0) := (0, f)$, tehát $\sigma_1(0) = 0$ és $f_0 := \sigma_2(0) = f \in \mathscr{F}_0(E;F) = \mathscr{F}_0(E;\mathscr{L}_0(E;F))$. Továbbá, $(\sigma_1(1), \sigma_2(1)) = \sigma(1) = g(\sigma(0)) = g(0, f) := (1, \pi_{1,0} \circ \mathrm{D}f) = (1, \mathrm{D}f)$, vagyis $f_1 := \sigma_2(1) = \pi_{1,0} \circ \mathrm{D}f = \pi_{1,0} \circ \mathrm{D}f_0$. Tehát az állítás teljesül az $n := 0$ számra. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül az $n \in \mathbb{N}$ számra. Ekkor $\sigma(n+1) = g(\sigma(n))$ alapján $(\sigma_1(n+1), \sigma_2(n+1)) = g(\sigma_1(n), \sigma_2(n)) = g(n, f_n) := (n+1, \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}f_n)$, ahol kihasználtuk a $\sigma_1(n) = n$ indukciós hipotézist. Ezért $\sigma_1(n+1) = n+1$ és $f_{n+1} := \sigma_2(n+1) = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}f_n \in \mathscr{F}_0(E;\mathscr{L}_{n+1}(E;F))$, hiszen az indukciós hipotézis alapján $f_n \in \mathscr{F}_0(E;\mathscr{L}_n(E;F))$. Ezzel a teljes indukciót végrehajtottuk, és látjuk, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek a létezését állítottuk.

Az adott tulajdonságú függvénysorozat egyértelműségének bizonyításához legyenek $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozatok, hogy $f_0 = f = f'_0$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n, f'_n : E \rightarrowtail \mathscr{L}_n(E;F)$ függvények, valamint $f_{n+1} = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}f_n$ és $f'_{n+1} = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}f'_n$. Ekkor a $H := \{n \in \mathbb{N} | f_n = f'_n\}$ halmazra $0 \in H$ teljesül, és ha $n \in H$, akkor $f'_{n+1} = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}f'_n = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}f_n = f_{n+1}$, így $n+1 \in H$. Ezért $H = \mathbb{N}$, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n = f'_n$. ■

3.1.3. Definíció. *Ha E, F normált terek és $f : E \rightarrowtail F$ függvény, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a sorozat, amelyre $f_0 = f$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : E \rightarrowtail \mathscr{L}_n(E;F)$ függvény, és $f_{n+1} = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}f_n$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re az f_n függvényt az f* **n-ed rendű deriváltfüggvényének** *nevezzük, és a $\mathrm{D}^n f$ szimbólummal jelöljük.*

A definíció alapján világos, hogy ha E, F normált terek és $f : E \rightarrowtail F$ függvény, akkor

$$\mathrm{D}^0 f := f,$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathrm{D}^{n+1} f = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}^n f).$$

Speciálisan, az f 0-ad rendű (azaz nulladrendű) deriváltfüggvénye egyenlő f-fel, továbbá az f 1-ed rendű (azaz elsőrendű) deriváltfüggvénye egyenlő $\mathrm{D}f$-fel, vagyis $\mathrm{D}^1 f = \mathrm{D}f$, s.í.t.. Továbbá minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1} f) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f)) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$, és nyilvánvalóan létezhet olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) = \emptyset$, vagyis $\mathrm{D}^n f$ az üres függvény.

3.2. A magasabb rendű differenciálhatóság értelmezése és lokalitása

3.2.1. Definíció. *Legyenek E és F normált terek. Azt mondjuk, hogy az $f : E \rightarrowtail F$ függvény*

– **n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban**, *ha $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$;*

– **n-szer differenciálható a H halmazon**, *ha f a H halmaz minden pontjában n-szer differenciálható, tehát $n \in \mathbb{N}$ és $H \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$;*

– **végtelenszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban**, *ha minden $\mathbb{N} \ni n$-re az f függvény*

n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, vagyis $\mathfrak{a} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$*;*

– **végtelenszer differenciálható a H halmazon**, *ha minden $\mathbb{N} \ni n$-re az f függvény n-szer differenciálható a H halmazon, vagyis* $H \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$*;*

– **n-szer differenciálható** (*illetve* **végtelenszer differenciálható**), *ha n-szer differenciálható (illetve végtelenszer differenciálható) a* $\mathrm{Dom}(f)$ *halmazon, vagyis $n \in \mathbb{N}$ és* $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$ (*illetve minden $n \in \mathbb{N}$ esetén* $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$).

A definíció alapján világos, hogy ha E, F normált terek, valamint $f : E \rightarrowtail F$ függvény, akkor

– az f függvény pontosan akkor 0-szor differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, hiszen $\mathrm{D}^0 f := f$ (tehát az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli 0-szor differenciálhatósága *nem azt jelenti*, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, hanem csak azt, hogy értelmezve van $\mathfrak{a}$-ban);

– az f függvény pontosan akkor 1-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, vagyis f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, hiszen $\mathrm{D}^1 f := \mathrm{D}f$.

– az f függvény $n \in \mathbb{N}^*$ esetén pontosan akkor n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha a $\mathrm{D}^{n-1} f$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ami azt jelenti, hogy $\mathfrak{a}$ *belső pontja* $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n-1} f)$-nek, vagyis az f függvény $n-1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén, és a $\mathrm{D}^{n-1} f$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

3.2.2. Állítás. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in E$. Ekkor minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$m \leq n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^m f).$$

Bizonyítás. Rögzített $m \in \mathbb{N}$ esetén, m-től indított, n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^m f)$. Az állítás $n := m$ esetén triviálisan igaz. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq m$ és n-re igaz az állítás, vagyis $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^m f)$, akkor $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1} f) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f)) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$ miatt $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1} f) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^m f)$, tehát az állítás igaz az $n+1$ számra. ■

3.2.3. Állítás. *Ha E és F normált terek, és $f : E \to F$ olyan folytonos affin függvény, amelynek $u \in \mathscr{L}(E; F)$ az érintő-operátora, akkor f végtelenszer differenciálható, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in E$ esetén*

$$(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) = \begin{cases} f(\mathfrak{a}) & , \textit{ha } n = 0, \\ u & , \textit{ha } n = 1, \\ 0 & , \textit{ha } n > 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. (I) A 1.4.4. állítás szerint minden $\mathfrak{a} \in E$ esetén f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = u$, így a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény egyenlő az u értékű $E \to \mathscr{L}(E; F)$ konstansfüggvénnyel.

(II) 2-től indított teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n \geq 2$, akkor $\mathrm{D}^n f$ egyenlő a 0 értékű $E \to \mathscr{L}_n(E; F)$ konstansfüggvénnyel.

Az (I) állítás szerint a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény egyenlő az u értékű $E \to \mathscr{L}(E; F)$ konstansfüggvénnyel, tehát olyan folytonos affin függvény, amelynek 0 az érintő-operátora, így differenciálható E-n és $\mathrm{D}(\mathrm{D}f)$ egyenlő a 0 érékű $E \to \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(E; F))$ konstansfüggvénnyel, tehát a $\mathrm{D}^2 f = \pi_{1,1} \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}f) : E \to \mathscr{L}_2(E; F)$ függvény azonosan 0.

Ez azt jelenti, hogy az állítás igaz az $n = 2$ számra.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra. Ekkor az indukciós hipotézis szerint $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) = E$ és $\mathrm{D}^n f$ egyenlő a 0 értékű $E \to \mathscr{L}_n(E; F)$ konstansfüggvénnyel, így ismét (I) szerint $\mathrm{D}^n f$ differenciálható függvény és deriváltfüggvénye azonosan 0, vagyis a $\mathrm{D}^{n+1} f = \pi_{1,n} \circ \mathrm{D}^n f : E \to \mathscr{L}_{n+1}(E; F)$ függvény is azonosan 0. ■

Később megmutatjuk, hogy a folytonos multilineáris operátorok is végtelenszer differenciálhatóak (3.5.2.).

A következő állítás megmutatja, hogy a magasabb rendben való differenciálhatóság lokális tulajdonság.

3.2.4. Állítás. (A magasabb rendű differenciálhatóság lokalitása) *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$, $g : E \rightarrowtail F$ függvények, $\mathfrak{a} \in E$ és tegyük fel, hogy létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, amelyre $U \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ az U halmazon. Ha $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$, akkor az f függvény pontosan akkor n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha a g függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és ha $n \in \mathbb{N}$ és az f függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}^n g)(\mathfrak{a})$ teljesül.*

Bizonyítás. (I) Teljes indukcióval bizonyítjuk, hgy az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra. Az $n = 0$ esetben az állítás triviálisan igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra, és legyen az f függvény $n+1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, továbbá legyen U az $\mathfrak{a}$ pontnak olyan környezete, amelyre $U \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ az U halmazon. Ekkor $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1} f) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))$, tehát a $\mathrm{D}^n f$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, így $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$-nek. Ezért vehetjük az $\mathfrak{a}$ pontnak olyan U' *nyílt* környezetét, amelyre $U' \subseteq U \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$. Ha $x \in U'$, akkor f az x pontban n-szer differenciálható, továbbá U' olyan környezete x-nek, hogy $U' \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ az U' halmazon. Tehát minden $x \in U'$ esetén $\mathfrak{a}$ helyett x-re alkalmazva az indukciós hipotézist kapjuk, hogy g az x pontban n-szer differenciálható és $(\mathrm{D}^n f)(x) = (\mathrm{D}^n g)(x)$. Ez azt jelenti, hogy U' olyan környezete az $\mathfrak{a}$ pontnak, amelyre $U' \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g)$, és $\mathrm{D}^n f = \mathrm{D}^n g$ az U' halmazon. Mivel $\mathrm{D}^n f$ az $\mathfrak{a}$ pontban differenciálható, így a differenciálhatóság lokalitása (2.1.1.) szerint $\mathrm{D}^n g$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, vagyis g az $\mathfrak{a}$ pontban $n+1$-szer differenciálható, és $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}(\mathrm{D}^n g))(\mathfrak{a})$, következésképpen

$$(\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a}) = \pi_{1,n}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a})) = \pi_{1,n}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n g))(\mathfrak{a})) = (\mathrm{D}^{n+1} g)(\mathfrak{a}),$$

ami azt jelenti, hogy az állítás az $n+1$ számra is teljesül.

(II) Ha U olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ az U halmazon, és f végtelenszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor (I) szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, így (I) szerint a g függvény is n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, tehát g is végtelenszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban ■

3.2.5. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Ha $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$, és $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan nyílt halmaz, amelyen az f függvény n-szer differenciálható, akkor az $f|_U : U \to F$ függvény n-szer differenciálható és ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathrm{D}^n(f|_U) = (\mathrm{D}^n f)|_U$.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{a} \in U$, akkor U nyíltsága miatt U környezete $\mathfrak{a}$-nak, és a feltevés szerint $U \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(f|_U)$, és természetesen $f = f|_U$ az U halmazon, így alkalmazható 3.2.4. a $g := f|_U$ választással. ■

3.3. Kanonikus azonosítások a magasabb rendű deriváltfüggvények között

3.3.1. Állítás. *Ha E, F normált terek, és $f : E \rightarrowtail F$ függvény, akkor minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\mathrm{D}^{m+n} f = \pi_{m,n} \circ \mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f),$$

ahol $\pi_{m,n}$ jelöli az $\mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F)) \to \mathscr{L}_{m+n}(E; F)$ kanonikus izometrikus lineáris bijekciót.

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{A}(m)$ a következő kijelentést: "$m \in \mathbb{N}$, és minden E, F normált térre, és minden $f : E \rightarrowtail F$ leképezésre, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mathrm{D}^{m+n} f = \pi_{m,n} \circ \mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f)$". Most m szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $(\forall m \in \mathbb{N})\mathscr{A}(m)$ teljesül.

Világos, hogy minden E, F normált térre, és minden $f : E \rightarrowtail F$ leképezésre, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\pi_{0,n} \circ \mathrm{D}^0(\mathrm{D}^n f) = \pi_{0,n} \circ \mathrm{D}^n f = \mathrm{D}^n f = \mathrm{D}^{0+n} f$, hiszen $\mathscr{L}_0(E; \mathscr{L}_n(E; F)) := \mathscr{L}_n(E; F)$, és a definíció szerint $\pi_{0,n}$ az $\mathscr{L}_n(E; F)$ tér identikus függvénye; ezért $\mathscr{A}(0)$ igaz.

Tegyük fel, hogy $\mathscr{A}(m)$ igaz, és legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, valamint $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Az indukciós hipotézis szerint $\mathrm{D}^{m+n} f = \pi_{m,n} \circ \mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f)$ teljesül, ezért a deriváltfüggvények értelmezése alapján

$$\mathrm{D}^{(m+1)+n} f = \mathrm{D}^{(m+n)+1} f = \pi_{1,m+n} \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}^{m+n} f) = \pi_{1,m+n} \circ \mathrm{D}(\pi_{m,n} \circ \mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f)),$$

ugyanakkor

$$\pi_{m+1,n} \circ \mathrm{D}^{m+1}(\mathrm{D}^n f) = \pi_{m+1,n} \circ (\pi'_{1,m} \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f))),$$

ahol $\pi'_{1,m}$ jelöli az

$$\mathscr{L}(E; \mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F))) \to \mathscr{L}_{m+1}(E; \mathscr{L}_n(E; F))$$

kanonikus izometrikus lineáris bijekciót. Ebből látható, hogy a

$$\mathrm{D}^{(m+1)+n} f = \pi_{m+1,n} \circ \mathrm{D}^{m+1}(\mathrm{D}^n f)$$

egyenlőség bizonyításához elég azt igazolni, hogy minden

$$h : E \rightarrowtail \mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F))$$

függvényre fennáll a

$$\pi_{1,m+n} \circ \mathrm{D}(\pi_{m,n} \circ h) = \pi_{m+1,n} \circ (\pi'_{1,m} \circ \mathrm{D}h)$$

egyenlőség, hiszen ha ez igaz, akkor a $h := \mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f)$ választással kapjuk az állítást. Legyen tehát $h : E \rightarrowtail \mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F))$ tetszőleges függvény. A $\pi_{m,n}$ leképezés izometrikus lineáris bijekció, ezért $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\pi_{m,n} \circ h)) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}h)$, és a függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}h)$ pontra

$$(\mathrm{D}(\pi_{m,n} \circ h))(\mathfrak{a}) = \pi_{m,n} \circ (\mathrm{D}h)(\mathfrak{a}).$$

Ezért elég azt igazolni, hogy minden $u \in \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_m(E; \mathscr{L}_n(E; F)))$ operátorra

$$\pi_{1,m+n}(\pi_{m,n} \circ u) = \pi_{m+1,n}(\pi'_{1,m}(u))$$

teljesül, hiszen ha ez igaz, akkor minden $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}h) \ni \mathfrak{a}$-ra az $u := (\mathrm{D}h)(\mathfrak{a})$ választással kapjuk, hogy

$$\pi_{1,m+n}((\mathrm{D}(\pi_{m,n} \circ h))(\mathfrak{a})) = \pi_{1,m+n}(\pi_{m,n} \circ (\mathrm{D}h)(\mathfrak{a})) = \pi_{m+1,n}(\pi'_{1,m}((\mathrm{D}h)(\mathfrak{a}))),$$

tehát $\pi_{1,m+n} \circ \mathrm{D}(\pi_{m,n} \circ h) = \pi_{m+1,n} \circ (\pi'_{1,m} \circ \mathrm{D}h)$ teljesül. Legyen tehát $u \in \mathscr{L}(E;\mathscr{L}_m(E;\mathscr{L}_n(E;F)))$ és $(x_i)_{i\in m+n+1} \in E^{m+n+1}$. Ekkor a kanonikus izometrikus lineáris bijekciók értelmezése alapján

$$\begin{aligned}(\pi_{1,m+n}(\pi_{m,n} \circ u))((x_i)_{i\in m+n+1}) &:= ((\pi_{m,n} \circ u)(x_0))((x_{i+1})_{i\in m+n}) := \\ &:= ((u(x_0))((x_{i+1})_{i\in m}))((x_{i+1+m})_{i\in n}),\end{aligned}$$

ugyanakkor

$$\begin{aligned}(\pi_{m+1,n}(\pi'_{1,m}(u)))((x_i)_{i\in m+n+1}) &:= ((\pi'_{1,m}(u))((x_i)_{i\in m+1}))((x_{i+m+1})_{i\in n}) = \\ &= ((u(x_0))((x_{i+1})_{i\in m}))((x_{i+m+1})_{i\in n}),\end{aligned}$$

tehát $\pi_{1,m+n}(\pi_{m,n} \circ u) = \pi_{m+1,n}(\pi'_{1,m}(u))$. ■

3.3.2. Következmény. *Ha E és F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $\mathfrak{a} \in E$, és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az f függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

(ii) *Minden $m \leq n$ természetes számra az f függvény m-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $\mathrm{D}^m f$ deriváltfüggvény $n-m$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

(iii) *Létezik olyan $m \leq n$ természetes szám, hogy az f függvény m-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $\mathrm{D}^m f$ deriváltfüggvény $n-m$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $m < n$ rögzített természetes szám. Az előző állítás szerint ekkor

$$\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f) = \pi^{-1}_{n-m,m} \circ (\mathrm{D}^n f),$$

ahol $\pi_{n-m,m} : \mathscr{L}_{n-m}(E;\mathscr{L}_m(E;F)) \to \mathscr{L}_n(E;F)$ a kanonikus izometrikus lineáris bijekció. Az (i) kijelentés alapján $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$, tehát a fenti egyenlőségből következik, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f))$, vagyis a $\mathrm{D}^m f$ függvény $n-m$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ekkor $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^m f)$ szükségképpen teljesül, vagyis az f függvény m-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

(ii)⇒(iii) Triviális.

(iii)⇒(i) Ha $m < n$ olyan természetes szám, hogy az f függvény m-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $\mathrm{D}^m f$ deriváltfüggvény $n-m$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f))$, tehát

$$\mathrm{D}^n f = \pi_{n-m,m} \circ (\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f)),$$

miatt $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$, vagyis az f függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Speciálisan: ha E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor az f függvény pontosan akkor n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény $n-1$-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Fontos látni, hogy ez *nem azonos* a n-szer differenciálhatóság definíciójával, hanem az előző állítás alapján egy azzal ekvivalens kijelentés.

3.3.3. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in E$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az f függvény végtelenszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

(ii) *Minden $n \in \mathbb{N}$ estén a $\mathrm{D}^n f : E \rightarrowtail \mathscr{L}_n(E; F)$ függvény végtelenszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

(iii) *Létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy a $\mathrm{D}^m f : E \rightarrowtail \mathscr{L}_m(E; F)$ függvény végtelenszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzítve. Ekkor (i) alapján

$$\mathfrak{a} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^k f) \subseteq \bigcap_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq n}} \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^k f) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{m+n} f) \overset{(1)}{=} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f)),$$

ahol az $\overset{(1)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk a 3.3.1. állítást. Ez azt jelenti, hogy a $\mathrm{D}^n f$ függvény végtelenszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

(ii)⇒(iii) Triviális.

(iii)⇒(i) Legyen $m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy a $\mathrm{D}^m f$ függvény végtelenszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ekkor

$$\mathfrak{a} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^k(\mathrm{D}^m f)) \overset{(2)}{=} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{k+m} f) = \bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq m}} \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \overset{(3)}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f),$$

ahol a $\overset{(2)}{=}$ egyenlőségnél alkalmaztuk a 3.3.1. állítást, és a $\overset{(3)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy a 3.2.2. állítás szerint a $(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat tartalmazás tekintetében monoton fogyó. ■

3.4. Összetett függvények magasabb rendű differenciálhatósága

3.4.1. Állítás. *Legyenek E, F normált terek $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}$, és $f, g : E \rightarrowtail F$ függvények.*

a) *Ha az f és g függvények n-szer differenciálhatóak az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, akkor $f + g$ is n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és*

$$(\mathrm{D}^n(f + g))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) + (\mathrm{D}^n g)(\mathfrak{a}).$$

b) *Ha az f függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, akkor minden $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén az $\alpha.f$ függvény is n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és*

$$(\mathrm{D}^n(\alpha.f))(\mathfrak{a}) = \alpha.(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}).$$

Bizonyítás. Mindkét állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

a) Az állítás triviálisan igaz, ha $n = 0$. Tegyük fel, hogy igaz az $n \in \mathbb{N}$ természetes számra és legyenek az f és g függvények $n+1$-szer differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban. Ekkor $\mathrm{D}^n f$ és $\mathrm{D}^n g$ differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, így vehetjük $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt környezetét, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g)$ és a $\mathrm{D}^n f$ és $\mathrm{D}^n g$ függvények differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban.

Ha $x \in U$, akkor az f és g függvények n-szer differenciálhatóak x-ben, így az indukciós hipotézist alkalmazva $\mathfrak{a}$ helyett az x pontra kapjuk, hogy $f+g$ is n-szer differenciálható x-ben és $(\mathrm{D}^n(f+g))(x) = (\mathrm{D}^n f)(x) + (\mathrm{D}^n g)(x)$, vagyis $\mathrm{D}^n(f+g) = \mathrm{D}^n f + \mathrm{D}^n g$ az U halmazon, amely környezete $\mathfrak{a}$-nak. Az indukciós hipotézis szerint a $\mathrm{D}^n f$ és $\mathrm{D}^n g$ függvények differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, ezért 2.2.1. a) szerint $\mathrm{D}^n f + \mathrm{D}^n g$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és

$$(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f + \mathrm{D}^n g))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}) + (\mathrm{D}(\mathrm{D}^n g))(\mathfrak{a}).$$

A differenciálhatóság lokalitása (2.1.1.) miatt $\mathrm{D}^n(f+g)$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és

$$\Big(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n(f+g))\Big)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f + \mathrm{D}^n g))(\mathfrak{a}),$$

amiből a definíció szerint következik, hogy az $f+g$ függvény $n+1$-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és az iménti egyenlőségek alapján

$$\Big(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n(f+g))\Big)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}) + (\mathrm{D}(\mathrm{D}^n g))(\mathfrak{a}).$$

Erre az egyenlőségre hatva a $\pi_{1,n} : \mathscr{L}(E;\mathscr{L}_n(E;F)) \to \mathscr{L}_{n+1}(E;F)$ kanonikus bijekcióval kapjuk, hogy

$$(\mathrm{D}^{n+1}(f+g))(\mathfrak{a}) = \pi_{1,n}\Big((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n(f+g)))(\mathfrak{a})\Big) = \pi_{1,n}\Big((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}) + (\mathrm{D}(\mathrm{D}^n g))(\mathfrak{a})\Big) =$$
$$= \pi_{1,n}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a})) + \pi_{1,n}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n g))(\mathfrak{a})) = (\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a}) + (\mathrm{D}^{n+1} g)(\mathfrak{a}),$$

ahol csak a $\pi_{1,n}$ operátor additivitását alkalmaztuk. Ez azt jelenti, hogy az állítás az $n+1$ számra is igaz.

b) Az állítás triviálisan igaz, ha $n = 0$. Tegyük fel, hogy igaz az $n \in \mathbb{N}$ természetes számra és legyen az f függvény $n+1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és legyen $\alpha \in \mathbb{K}$. Ekkor $\mathrm{D}^n f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, így vehetjük $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt környezetét, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$ és a $\mathrm{D}^n f$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ha $x \in U$, akkor az f függvény n-szer differenciálható x-ben, így az indukciós hipotézist alkalmazva $\mathfrak{a}$ helyett az x pontra kapjuk, hogy $\alpha.f$ is n-szer differenciálható x-ben és $(\mathrm{D}^n(\alpha.f))(x) = \alpha.(\mathrm{D}^n f)(x)$, vagyis $\mathrm{D}^n(\alpha.f) = \alpha.(\mathrm{D}^n f)$ az U halmazon, amely környezete $\mathfrak{a}$-nak. Az indukciós hipotézis szerint a $\mathrm{D}^n f$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ezért 2.2.1. b) szerint $\alpha.(\mathrm{D}^n f)$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és

$$(\mathrm{D}(\alpha.(\mathrm{D}^n f)))(\mathfrak{a}) = \alpha.(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}).$$

A differenciálhatóság lokalitása (2.1.1.) miatt $\mathrm{D}^n(\alpha.f)$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és

$$\Big(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n(\alpha.f))\Big)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}(\alpha.(\mathrm{D}^n f)))(\mathfrak{a}),$$

amiből a definíció szerint következik, hogy a $\alpha.f$ függvény $n+1$-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és az iménti egyenlőségek alapján

$$\Big(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n(\alpha.f))\Big)(\mathfrak{a}) = \alpha.(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}).$$

Erre az egyenlőségre hatva a $\pi_{1,n} : \mathscr{L}(E;\mathscr{L}_n(E;F)) \to \mathscr{L}_{n+1}(E;F)$ kanonikus bijekcióval kapjuk, hogy

$$(\mathrm{D}^{n+1}(\alpha.f))(\mathfrak{a}) = \pi_{1,n}\Big((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n(\alpha.f)))(\mathfrak{a})\Big) = \pi_{1,n}\Big(\alpha.(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a})\Big) =$$
$$= \alpha.\pi_{1,n}\Big((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a})\Big) = \alpha.(\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a}),$$

ahol csak a $\pi_{1,n}$ operátor $\mathbb{K}$-homogenitását alkalmaztuk. Ez azt jelenti, hogy az állítás az $n+1$ számra is igaz. ■

3.4.2. Lemma. *Legyenek E, F, G normált terek és $u \in \mathscr{L}(F;G)$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és az $f : E \rightarrowtail F$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, akkor az $u \circ f : E \rightarrowtail G$ függvény is n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. Az $u \in \mathscr{L}(F;G)$ leképezés F minden pontjában differenciálható, így a függvénykompozíció differenciálási tétele (2.3.1.) alapján $u \circ f$ a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ halmaz minden pontjában differenciálható, és minden $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \ni x$-re

$$(\mathrm{D}(u \circ f))(x) = (\mathrm{D}u)(f(x)) \circ (\mathrm{D}f)(x) = u \circ ((\mathrm{D}f)(x)).$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{D}(u \circ f) = L_u \circ (\mathrm{D}f)$ a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ halmazon, ahol

$$L_u : \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;G); \quad v \mapsto u \circ v.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy L_u folytonos lineáris operátor az $\mathscr{L}(E;F)$ és $\mathscr{L}(E;G)$ operátorterek között, hiszen $v \in \mathscr{L}(E;F)$ esetén $\|L_u(v)\| = \|u \circ v\| \leq \|u\|\|v\|$.

Ezután n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 0$, akkor az állítás triviálisan igaz, míg $n = 1$ esetén nyilvánvalóan következik a függvénykompozíció differenciálhatósági tételéből (2.3.1.) és abból, hogy az f függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban és az u függvény differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és legyen $f : E \rightarrowtail F$ olyan függvény, amely $n+1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ekkor 3.3.2. szerint a $\mathrm{D}f$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Az indukciós hipotézist alkalmazva a $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ függvényre és az $L_u \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E;F);\mathscr{L}(E;G))$ folytonos lineáris operátorra kapjuk, hogy az $L_u \circ (\mathrm{D}f)$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. De tudjuk, hogy $\mathrm{D}(u \circ f) = L_u \circ (\mathrm{D}f)$ a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ halmazon, ami $n \geq 1$ miatt környezete $\mathfrak{a}$-nak így a magasabb rendű differenciálás lokalitása (3.2.4.) miatt a $\mathrm{D}(u \circ f)$ deriváltfüggvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ebből ismét 3.3.2. alapján következik, hogy az $u \circ f$ függvény $n + 1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, amivel az állítást igazoltuk az $n + 1$ természetes számra. ■

3.4.3. Lemma. *Legyenek E, F, G, és H normált terek, valamint $b : F \times G \to H$ folytonos bilineáris operátor. Ha $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$, és az $f : E \rightarrowtail F$, $g : E \rightarrowtail G$ függvények n-szer differenciálhatóak az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ pontban, akkor a*

$$b(f, g) : \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \to H; \quad x \mapsto b(f(x), g(x))$$

leképezés n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és ha $n \geq 1$, akkor minden $z \in E$ esetén

$$(\mathrm{D}(b(f, g)))(\mathfrak{a})(z) = b((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})(z), g(\mathfrak{a})) + b(f(\mathfrak{a}), (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})(z)).$$

Bizonyítás. (I) Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Az $n = 0$ esetben arról van szó, hogy ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(g)$, akkor $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(b(f, g))$, ami $b(f, g)$ definíciója szerint triviálisan igaz.

Igazoljuk az állítást az $n = 1$ esetben. (Erre szükségünk lesz az indukciós lépés megtételénél.) Tehát azt tesszük fel, hogy az f és g függvények differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban. Vezessük be a

$$\varphi : \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to F; \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|},$$

$$\psi : \mathrm{Dom}(g) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to G; \quad x \mapsto \frac{g(x) - g(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|}$$

függvényeket, amelyekre

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x\to\mathfrak{a}} \psi(x) = 0 \tag{1}$$

teljesül. Vezessük be továbbá az

$$u : E \to H; \quad z \mapsto b((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})(z), g(\mathfrak{a})) + b(f(\mathfrak{a}), (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})(z))$$

leképezést, amely b bilinearitása miatt lineáris, és a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$, $(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})$ lineáris operátorok folytonossága, valamint a b bilineáris operátor folytonossága miatt minden $z \in E$ esetén

$$\|u(z)\| \leq \|b\| \Big(\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| \|g(\mathfrak{a})\| + \|f(\mathfrak{a})\| \|(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})\| \Big) \|z\|,$$

így $u \in \mathscr{L}(E; H)$. Legyen $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ tetszőleges olyan pont, amelyre $x \neq \mathfrak{a}$. Ekkor b bilinearitása miatt

$$\begin{gathered}(b(f,g))(x) - (b(f,g))(\mathfrak{a}) = b(f(x), g(x)) - b(f(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a})) = \\ = b(f(x) - f(\mathfrak{a}), g(x) - g(\mathfrak{a})) + b(f(x) - f(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a})) + b(f(\mathfrak{a}), g(x) - g(\mathfrak{a})) = \\ = b((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a}) + \varphi(x)\|x - \mathfrak{a}\|, (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a}) + \psi(x)\|x - \mathfrak{a}\|) + \\ + b((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a}) + \varphi(x)\|x - \mathfrak{a}\|, g(\mathfrak{a})) + b(f(\mathfrak{a}), (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a}) + \psi(x)\|x - \mathfrak{a}\|) = \\ = u(x - \mathfrak{a}) + r(x),\end{gathered}$$

ahol bevezettük az

$$\begin{gathered}r(x) := b((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a}), (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a})) + b((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a}), \psi(x))\|x - \mathfrak{a}\| + \\ + b(\varphi(x), (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a}))\|x - \mathfrak{a}\| + b(\varphi(x), \psi(x))\|x - \mathfrak{a}\|^2 + \\ + b(\varphi(x), g(\mathfrak{a}))\|x - \mathfrak{a}\| + b(f(\mathfrak{a}), \psi(x))\|x - \mathfrak{a}\|\end{gathered}$$

jelölést. A $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$, $(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})$ lineáris operátorok folytonossága és a b bilineáris operátor folytonossága miatt minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ pontra, $x \neq \mathfrak{a}$ esetén:

$$\begin{gathered}\|r(x)\| \leq \|b\| \|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| \|(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})\| \|x - \mathfrak{a}\|^2 + \|b\| \|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| \|\psi(x)\| \|x - \mathfrak{a}\|^2 + \\ + \|b\| \|\varphi(x)\| \|(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})\| \|x - \mathfrak{a}\|^2 + \|b\| \|\varphi(x)\| \|\psi(x)\| \|x - \mathfrak{a}\|^2 + \\ + \|b\| \|\varphi(x)\| \|g(\mathfrak{a})\| \|x - \mathfrak{a}\| + \|b\| \|f(\mathfrak{a})\| \|\psi(x)\| \|x - \mathfrak{a}\|.\end{gathered}$$

Ebből (1) alapján látszik, hogy

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{r(x)}{\|x - \mathfrak{a}\|} = 0,$$

ami azt jelenti, hogy az $b(f,g)$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és $\mathrm{D}(b(f,g))(\mathfrak{a}) = u$, azaz minden $E \ni z$-re

$$(\mathrm{D}(b(f,g)))(\mathfrak{a})(z) = b((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})(z), g(\mathfrak{a})) + b(f(\mathfrak{a}), (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})(z)).$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és legyenek az $f : E \rightarrowtail F$, valamint $g : E \rightarrowtail G$ függvények $n+1$-szer differenciálhatóak az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ pontban. Ekkor f és g egyszer differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén, és az előzőek szerint minden $x \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g)$ esetén

$$\mathrm{D}(b(f,g))(x) = b(\cdot, g(x)) \circ (\mathrm{D}f)(x) + b(f(x), \cdot) \circ (\mathrm{D}g)(x) \tag{2}$$

teljesül. Most vezessük be az

$$u_G : G \to \mathscr{L}(F;H); \quad z \mapsto b(\cdot, z),$$
$$u_F : F \to \mathscr{L}(G;H); \quad z \mapsto b(z, \cdot)$$

függvényeket; amelyekre könnyen látható, hogy folytonos lineáris operátorok, hiszen a folytonos lineáris és a folytonos bilineáris operátorok normájának tulajdonságai szerint minden $z \in G$ esetén

$$\|u_G(z)\| = \|b(\cdot, z)\| = \sup_{\substack{x \in E, \\ \|x\| \le 1}} \|b(x,z)\| \le \sup_{\substack{x \in E, \\ \|x\| \le 1}} \Big(\|b\|\|x\|\|z\|\Big) \le \|b\|\|z\|,$$

továbbá minden $z \in F$ esetén

$$\|u_F(z)\| = \|b(z, \cdot)\| = \sup_{\substack{y \in E, \\ \|y\| \le 1}} \|b(z,y)\| \le \sup_{\substack{y \in E, \\ \|y\| \le 1}} \Big(\|b\|\|z\|\|y\|\Big) \le \|b\|\|z\|.$$

Vezessük be a

$$b_F : \mathscr{L}(F;H) \times \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;H); \quad (v,w) \mapsto v \circ w,$$
$$b_G : \mathscr{L}(G;H) \times \mathscr{L}(E;G) \to \mathscr{L}(E;H); \quad (v,w) \mapsto v \circ w$$

függvényeket, amelyek folytonos bilineáris operátorok. A (2) formula szerint

$$\mathrm{D}(b(f,g)) = b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f) + b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g)$$

teljesül a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g)$ halmazon, ami környezete az $\mathfrak{a}$ pontnak. Ezért a magasabb rendű differenciálhatóság lokalitása (3.2.4.) és 3.4.1. a) miatt az $b(f,g)$ függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli $n+1$-szeres differenciálhatóságához elég azt igazolni, hogy a $b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f) : E \rightarrowtail H$ és $b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g) : E \rightarrowtail H$ függvények n-szer differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban. Ez viszont az indukciós hipotézisből és az előző lemmából következik.

Valóban, a g függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $u_G \in \mathscr{L}(G;\mathscr{L}(F;H))$, tehát a 3.4.2. lemma alapján az $u_G \circ g : E \rightarrowtail \mathscr{L}(F;H)$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ugyanakkor a $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ deriváltfüggvény szintén n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban (3.3.2.), és $b_F : \mathscr{L}(F;H) \times \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;H)$ folytonos bilineáris operátor. Ezért az indukciós hipotézist alkalmazva b_F-re, $u_G \circ g$-re és $\mathrm{D}f$-re kapjuk, hogy a $b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f) : E \rightarrowtail H$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

Továbbá, az f függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $u_F \in \mathscr{L}(F;\mathscr{L}(G;H))$, tehát a 3.4.2. lemma alapján az $u_F \circ f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(G;H)$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ugyanakkor a $\mathrm{D}g : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;G)$ deriváltfüggvény szintén n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban (3.3.2.), és $b_G : \mathscr{L}(G;H) \times \mathscr{L}(E;G) \to \mathscr{L}(E;H)$ folytonos bilineáris operátor. Ezért az indukciós hipotézist alkalmazva b_G-re, $u_F \circ f$-re és $\mathrm{D}g$-re kapjuk, hogy a $b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g) : E \rightarrowtail H$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

Ezzel megmutattuk, hogy az $b(f,g)$ függvény $n+1$-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

(II) Ha az $f : E \rightarrowtail F$, $g : E \rightarrowtail G$ függvények végtelenszer differenciálhatóak az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ pontban, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén n-szer differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, így (I) alapján a $b(f,g) : E \rightarrowtail H$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, tehát $b(f,g)$ végtelenszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

3.4.4. Állítás. *Legyenek E, F, G normált terek, $f : E \rightarrowtail F$, $g : F \rightarrowtail G$ függvények, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$ tetszőleges pont. Ha $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$, és az f függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a g függvény n-szer differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. (I) Teljes indukcióval bizonyítjuk, hgy az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra. Ha $n = 0$, akkor az állítás triviálisan igaz, és $n = 1$ esetében az állítást már igazoltuk (2.3.1.).

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és legyenek E, F, G normált terek, $f : E \rightarrowtail F$, $g : F \rightarrowtail G$ olyan függvények, hogy az f függvény $n+1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a g függvény $n+1$-szer differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, Ekkor a $\mathrm{D}g : F \rightarrowtail \mathscr{L}(F;G)$ deriváltfüggvény n-szer differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban (3.3.2.), és az f függvény is n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, így az indukciós hipotézis alapján a $(\mathrm{D}g) \circ f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(F;G)$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ugyanakkor a $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ deriváltfüggvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban (3.3.2.), és a

$$b : \mathscr{L}(F;G) \times \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;G); \quad (u,v) \mapsto u \circ v$$

függvény folytonos bilineáris operátor, így a 3.4.3. lemma alapján a

$$b((\mathrm{D}g) \circ f, \mathrm{D}f) : \overset{-1}{f}\langle \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g)\rangle \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f); \quad x \mapsto b(((\mathrm{D}g) \circ f)(x), (\mathrm{D}f)(x))$$

függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. De a függvénykompozíció differenciálási tételéből (2.3.1.) tudjuk, hogy $b((\mathrm{D}g) \circ f, \mathrm{D}f) \subseteq \mathrm{D}(g \circ f)$, és $\mathfrak{a}$ belső pontja a $\mathrm{Dom}(b((\mathrm{D}g) \circ f, \mathrm{D}f)) = \overset{-1}{f}\langle \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g)\rangle \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ halmaznak, mert $n \geq 1$ miatt f legalább kétszer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és g legalább kétszer differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, tehát f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén és g differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pont valamely környezetén. Ezért az n-szeres differenciálhatóság lokalitása (3.2.4.) miatt a $\mathrm{D}(g \circ f)$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ebből következik, hogy a $g \circ f$ függvény $n+1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

(II) Ha f végtelenszer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és g végtelenszer differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és a g függvény n-szer differenciálató $f(\mathfrak{a})$-ban, így (I) szerint a $g \circ f$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, amiből következik, hogy $g \circ f$ végtelenszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. ∎

3.4.5. Állítás. *Legyen E normált tér és F az $(F_i)_{i \in I}$ véges normált tér rendszer szorzata. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in E$, akkor az $f : E \rightarrowtail \prod_{i \in I} F_i$ függvény pontosan akkor n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha minden $i \in I$ indexre a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ahol $\mathrm{pr}_i : F \to F_i$ az i-edik projekció. Ha $\mathfrak{a} \in E$, akkor az $f : E \rightarrowtail \prod_{i \in I} F_i$ függvény pontosan akkor végtelenszer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha minden $i \in I$ indexre a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény végtelenszer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ahol $\mathrm{pr}_i : F \to F_i$ az i-edik projekció.*

Bizonyítás. (I) Ha $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in E$, továbbá az $f : E \rightarrowtail \prod_{i \in I} F_i$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor 3.4.2. alapján minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, hiszen $\mathrm{pr}_i : F \to F_i$ folytonos lineáris operátor. Ez azt jelenti, hogy elegendő azt igazolni, hogy ha minden $i \in I$ indexre a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor az f függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ezt n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $n = 0$, akkor az állítás triviálisan igaz (és érdektelen), továbbá az $n = 1$ esetben 2.3.4. miatt igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és legyen minden $i \in I$ indexre a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény $n+1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a} \in E$ pontban. Jelölje

$$\pi : \mathscr{L}\Big(E; \prod_{i \in I} F_i\Big) \to \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E; F_i); \quad u \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ u)_{i \in I}$$

a kanonikus leképezést **LIN** (1.6.1.), amely lineáris homeomorfizmus. A 2.3.4. állításban szereplő operátoregyenlőségek szerint minden $x \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ esetén

$$\mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(x) = (\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))\,(x),$$

ezért a π leképezés definícióját alkalmazva kapjuk, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ pontra

$$\pi((\mathrm{D}f)(x)) = ((\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))\,(x))_{i \in I}\,.$$

Tehát ha $i \in I$ esetén $\mathrm{p}_i : \prod_{j \in I} \mathscr{L}(E; F_j) \to \mathscr{L}(E; F_i)$ az i-edik projekció, akkor minden $x \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ pontra és $i \in I$ indexre

$$\mathrm{p}_i\,(\pi((\mathrm{D}f)(x))) = (\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))\,(x),$$

ami azt jelenti, hogy minden $i \in I$ esetén fennáll a $\mathrm{p}_i \circ \pi \circ (\mathrm{D}f) = \mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f)$ egyenlőség a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ halmazon.

Megmutatjuk, hogy a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ halmaz környezete az $\mathfrak{a}$ pontnak. Valóban, $n \geq 1$ és a hipotézis szerint minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény $n+1$-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, így ez a függvény (legalább) 2-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ezért minden $i \in I$ indexre $\mathfrak{a}$ belső pontja a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))$ halmaznak, tehát létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U_i környezete E-ben, hogy $U_i \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))$. Legyen U olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy minden $i \in I$ indexre $U \subseteq U_i$. Ha $x \in U$, akkor minden $i \in I$ indexre $x \in U_i$ miatt $\mathrm{pr}_i \circ f$ differenciálható x-ben, így 2.3.4. szerint f differenciálható x-ben, vagyis $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, így $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$-nek.

Tehát minden $i \in I$ esetén $\mathrm{p}_i \circ \pi \circ (\mathrm{D}f) = \mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f)$ teljesül az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén (például a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ halmazon), és a hipotézis szerint minden $i \in I$ indexre a $\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f)$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban (3.3.2.). Ebből a magasabb rendű differenciálhatóság lokalitása (3.2.4.) folytán kapjuk, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{p}_i \circ \pi \circ (\mathrm{D}f)$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Most alkalmazzuk az indukciós hipotézist f helyett a $\pi \circ (\mathrm{D}f) : \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \to \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E; F_i)$ függvényre, ami lehetséges, mert ennek a komponens-függvényei n-szer differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban. Azt kapjuk, hogy $\pi \circ (\mathrm{D}f)$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. A π leképezés lineáris homeomorfizmus, így

$$\pi^{-1} : \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E; F_i) \to \mathscr{L}\Big(E; \prod_{i \in I} F_i\Big)$$

függvény is lineáris homeomorfizmus, tehát ez n-szer differenciálható függvény (3.2.3.). Ebből a függvénykompozíció magasabb rendű differenciálhatóságának tétele (3.4.4.) alapján kapjuk, hogy a $\mathrm{D}f = \pi^{-1} \circ (\pi \circ \mathrm{D}f)$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ezért 3.3.2. szerint az f függvény $n+1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

(II) Ha $\mathfrak{a} \in E$, akkor az $f : E \rightarrowtail \prod_{i \in I} F_i$ függvény pontosan akkor végtelenszer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén minden $i \in I$ indexre a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban (ahol $\mathrm{pr}_i : F \to F_i$ az i-edik projekció), ami (I) alapján azzal ekvivalens, hogy minden $i \in I$ indexre a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény végtelenszer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. ■

3.4.6. Következmény. *Legyen E az $(E_i)_{i\in I}$ és F az $(F_i)_{i\in I}$ (ugyanolyan indexhalmazú) véges normált tér rendszer szorzata, valamint $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : E_i \rightarrowtail F_i$ függvény. Legyen $f := \underset{i\in I}{\times} f_i$ és $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$. Ekkor az $f : E \rightarrowtail F$ függvény pontosan akkor n-szer differenciálható az $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in E$ pontban, ha minden $i \in I$ esetén az $f_i : E_i \rightarrowtail F_i$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}_i$ pontban.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in E$ rögzített pont. Az állítás triviális $n = 0$ esetén, ezért feltehető, hogy $n \geq 1$.

Nyilvánvaló, hogy minden $i \in I$ esetén

$$\mathrm{pr}_i^F \circ f \subseteq f_i \circ \mathrm{pr}_i^E, \tag{1}$$

ahol $\mathrm{pr}_i^F : F \to F_i$ és $\mathrm{pr}_i^E : E \to E_i$ az i-edik projekció. (Ha van olyan $j \in I \setminus \{i\}$, hogy $\mathrm{Dom}(f_j) \neq E_j$, akkor itt szigorú tartalmazás áll.)

Tegyük fel, hogy minden $i \in I$ indexre f_i az $\mathbf{a}_i$ pontban n-szer differenciálható. Ekkor $n \geq 1$ miatt minden $i \in I$ esetén $\mathbf{a}_i$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f_i)$-nek, így $\mathfrak{a}$ belső pontja a $\mathrm{Dom}(f) = \prod_{i\in I} \mathrm{Dom}(f_i)$ halmaznak. Tehát (1) alapján minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i^F \circ f$ és $f_i \circ \mathrm{pr}_i^E$ függvények egyenlők az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén. Ugyanakkor, minden $i \in I$ esetén a pr_i^E projekció folytonos lineáris operátor, így n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és az f_i függvény a hipotézis szerint n-szer differenciálható az $\mathrm{pr}_i^E(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_i$ pontban, ezért a függvénykompozíció magasabb rendű differenciálhatóságának tétele (3.4.4.) szerint az $f_i \circ \mathrm{pr}_i^E$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ebből a magasabb rendű differenciálhatósága lokalitása (3.2.4.) alapján kapjuk, hogy a $\mathrm{pr}_i^F \circ f$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ezért az előző állítás szerint az f függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, azaz minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{a}_i \in \mathrm{Dom}(f_i)$, akkor minden $i \in I$ indexre az (1) függvény-tartalmazást jobbról komponálva az $\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \to E$ kanonikus injekcióval és kihasználva a triviális $\mathrm{pr}_i^E \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_{E_i}$ egyenlőséget kapjuk, hogy

$$\mathrm{pr}_i^F \circ f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} = f_i. \tag{2}$$

(Az (1) tartalmazásból először a $\mathrm{pr}_i^F \circ f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} \subseteq f_i$ tartalmazásra jutunk, azonban az itt álló függvények definíciós tartománya nyilvánvalóan egyenlő, ezért itt valójában egyenlőség áll.)

Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ha $i \in I$, akkor az $\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \to E$ folytonos affin függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}_i$ pontban, és az $f : E \rightarrowtail F$ függvény a hipotézis szerint n-szer differenciálható az $\mathfrak{a} = \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_i)$ pontban, és a $\mathrm{pr}_i^F : F \to F_i$ projekció folytonos lineáris operátor, így n-szer differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, tehát a függvénykompozíció magasabb rendű differenciálhatóságának tétele (3.4.4.) és (2) szerint az f_i függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}_i$-ben. ■

3.4.7. Definíció. *Legyen E az $(E_i)_{i\in I}$ véges normált tér rendszer szorzata, F normált tér és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Ha $i \in I$, akkor az f* **függvény i-edik változó szerinti parciális deriváltfüggvénye** *az a*

$$\partial_i f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E_i; F)$$

függvény, amelyre

$$\mathrm{Dom}(\partial_i f) := \{\mathfrak{a} \in E \mid \mathfrak{a}_i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}))\},$$

(vagyis $\mathrm{Dom}(\partial_i f)$ *azon* $\mathfrak{a} \in E$ *pontok halmaza, amelyekben az* f *függvénynek létezik az* i*-edik változó szerinti parciális deriváltja), és minden* $\mathrm{Dom}(\partial_i f) \ni \mathfrak{a}$*-ra*

$$(\partial_i f)(\mathfrak{a}) := (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}))(\mathfrak{a}_i).$$

3.4.8. Állítás. *Legyen* $(E_i)_{i\in I}$ *normált terek véges rendszere,* F *normált tér, és* $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$*. Ha* $n \in \mathbb{N}$ *és az* $f : \prod_{i\in I} E_i \rightarrowtail F$ *függvény* n*-szer differenciálható az* $\mathfrak{a}$ *pontban, akkor minden* $I \ni i$*-re az* $f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \rightarrowtail F$ *parciális függvény* n*-szer differenciálható* $\mathfrak{a}_i$*-ben.*

Bizonyítás. Jelölje E az $(E_i)_{i\in I}$ normált tér rendszer szorzatát. Ha $i \in I$, akkor $\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}} : E_i \to E$ folytonos affin függvény, ezért 3.2.3. alapján minden $i \in I$ esetén az $\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}_i$ pontban. Ugyanakkor, minden $i \in I$ esetén $\mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{a}$, tehát ha az f függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor minden $I \ni i$-re a 3.4.4. állítás alapján az $f \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{a}}$ függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}_i$-ben. ∎

3.4.9. Állítás. *Legyenek* E*,* F *normált terek* $\mathbb{K}$ *felett,* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $r \in \mathbb{R}_+^*$ *és* $U \subseteq E$ *olyan nem üres nyílt halmaz, hogy* $\mathrm{B}_r(0;\mathbb{K}).U \subseteq U$*. Ha* $f : U \to F$ *olyan* n*-szer differenciálható függvény, hogy minden* $\lambda \in \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$ *és* $x \in U$ *esetén* $f(\lambda.x) = \lambda^n.f(x)$*, akkor minden* $x \in U$ *pontra*

$$f(x) = \frac{1}{n!}(\mathrm{D}^n f)(0)(x^{[n]}).$$

Bizonyítás. Legyen $x \in U$ rögzített pont, és vezessük be a következő g_x és h_x függvényeket:

$$g_x : \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K}) \to F; \quad \lambda \mapsto \lambda^n.f(x);$$
$$h_x : \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K}) \to F; \quad \lambda \mapsto f(\lambda.x).$$

A hipotézis szerint $g_x = h_x$, és világos, hogy a h_x függvény n-szer differenciálható, mert egyenlő a $\mathrm{B}_r(0;\mathbb{K}) \to E;\ \lambda \mapsto \lambda.x$ végtelenszer differenciálható és az $f : U \to F$ n-szer differenciálható függvény kompozíciójával, így 3.4.4. alapján n-szer differenciálható. A magasabb rendű differenciálhatóság lokalitása miatt g_x is n-szer differenciálható függvény (ami egyébként is nyilvánvaló), és minden $0 \leq k \leq n$ természetes számra $\mathrm{D}^k g_x = \mathrm{D}^k h_x$ (ami viszont nem triviális egyenlőség-rendszer).

Könnyen látható, hogy minden $1 \leq k \leq n$ természetes számra és minden $\lambda \in \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$ számra

$$\left(\mathrm{D}^k g_x\right)(\lambda) = \lambda^{n-k}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right).f(x).$$

Speciálisan, a $k = n$ választással kapjuk, hogy minden $\lambda \in \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$ számra $(\mathrm{D}^n g_x)(\lambda) = n!f(x)$.

Megmutatjuk, hogy minden $1 \leq k \leq n$ természetes számra és minden $\lambda \in \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$ számra

$$\left(\mathrm{D}^k h_x\right)(\lambda) = (\mathrm{D}^k f)(\lambda.x)(x^{[k]}). \tag{$*$}$$

A függvénykompozíció differenciálásának szabálya szerint az egyenlőség $k = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz minden $\lambda \in \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$ számra. Tegyük fel, $1 \leq k < n$ olyan természetes szám, amelyre minden $\lambda \in \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$ számra $(*)$ teljesül. Vezessük be a következő leképezéseket:

$$v : \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K}) \to E; \quad \lambda \mapsto \lambda.x,$$
$$w : \mathscr{L}_k(E;F) \to F; \quad u \mapsto u(x^{[k]}).$$

Világos, hogy a hipotézis szerint $\mathrm{D}^k h_x = w \circ (\mathrm{D}^k f) \circ v$, és

– a v függvény végtelenszer differenciálható és minden $\lambda \in \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$ esetén $(\mathrm{D}v)(\lambda) = x$ teljesül;

– a $\mathrm{D}^k f$ függvény differenciálható, mert $k \leq n-1$ és f n-szer differenciálható;

– a w függvény folytonos lineáris operátor, így végtelenszer differenciálható.

Ezért a $\mathrm{D}^k h_x$ függvény differenciálható és a függvénykompozíció differenciálási szabálya, valamint a folytonos lineáris operátorok deriváltjának ismeretében írható, hogy minden $\lambda \in \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$ esetén

$$\left(\mathrm{D}(\mathrm{D}^k h_x)\right)(\lambda) = w\left(\left(\mathrm{D}(\mathrm{D}^k f)(\lambda.x)\right)(x)\right) = \left(\left(\mathrm{D}(\mathrm{D}^k f)(\lambda.x)\right)(x)\right)(x^{[k]}) = \\ = \left(\left(\mathrm{D}^{k+1} f\right)(\lambda.x)\right)(x^{[k+1]}).$$

Ebből következik, hogy minden $1 \leq k \leq n$ természetes számra és minden $\lambda \in \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$ számra $\left(\mathrm{D}^k h_x\right)(\lambda) = (\mathrm{D}^k f)(\lambda.x)(x^{[k]})$. Ezért $k = n$ esetén kapjuk, hogy minden $\lambda \in \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$ számra

$$n!f(x) = (\mathrm{D}^n g_x)(\lambda) = (\mathrm{D}^n h_x)(\lambda) = (\mathrm{D}^n f)(\lambda.x)(x^{[n]}).$$

Ide beírva a λ=0 értéket és osztva az $n!$ számmal a bizonyítandó egyenlőségre jutunk.■

3.5. Folytonos multilineáris operátor végtelenszer differenciálhatósága

3.5.1. Lemma. *Minden folytonos bilineáris operátor végtelenszer differenciálható.*

Bizonyítás. Legyenek E, F és G normált terek, valamint $\mathfrak{b} : E \times F \to G$ folytonos bilineáris operátor. A 1.5.2. állítás szerint $\mathfrak{b}$ differenciálható függvény és minden $(e, f), (e', f') \in E \times F$ esetén

$$((\mathrm{D}\mathfrak{b})(e, f))(e', f') = \mathfrak{b}(e, f') + \mathfrak{b}(e', f).$$

Megmutatjuk, hogy a $\mathrm{D}\mathfrak{b} \in \mathscr{L}(E\times F;\mathscr{L}(E\times F;G))$, vagyis $\mathrm{D}\mathfrak{b}$ folytonos lineáris operátor az $E \times F$ normált szorzattér és az operátornormával ellátott $\mathscr{L}(E \times F;G)$ operátortér között.

Legyenek $(e_1, f_1), (e_2, f_2) \in E\times F$. Ekkor minden $(e', f') \in E\times F$ esetén $\mathfrak{b}$ biadditivitása miatt

$$((\mathrm{D}\mathfrak{b})((e_1, f_1)+(e_2, f_2)))(e', f') = ((\mathrm{D}\mathfrak{b})(e_1 + e_2, f_1 + f_2))(e', f') = \\ = \mathfrak{b}(e_1 + e_2, f') + \mathfrak{b}(e', f_1 + f_2) = \mathfrak{b}(e_1, f') + \mathfrak{b}(e_2, f') + \mathfrak{b}(e', f_1) + \mathfrak{b}(e', f_2) = \\ = (\mathfrak{b}(e_1, f') + \mathfrak{b}(e', f_1)) + (\mathfrak{b}(e_2, f') + \mathfrak{b}(e', f_2)) = \\ = ((\mathrm{D}\mathfrak{b})(e_1, f_1))(e', f') + ((\mathrm{D}\mathfrak{b})(e_2, f_2))(e', f') = ((\mathrm{D}\mathfrak{b})(e_1, f_1) + (\mathrm{D}\mathfrak{b})(e_2, f_2))(e', f'),$$

tehát $(\mathrm{D}\mathfrak{b})((e_1, f_1) + (e_2, f_2)) = (\mathrm{D}\mathfrak{b})(e_1, f_1) + (\mathrm{D}\mathfrak{b})(e_2, f_2)$, vagyis a $\mathrm{D}\mathfrak{b} : E \times F \to \mathscr{L}(E \times F;G)$ leképezés additív.

Legyenek $(e, f) \in E \times F$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor minden $(e', f') \in E \times F$ esetén a $\mathfrak{b}$ leképezés $\mathbb{K}$-bihomogenitása miatt

$$((\mathrm{D}\mathfrak{b})(\lambda.(e, f)))(e', f') = ((\mathrm{D}\mathfrak{b})(\lambda.e, \lambda.f))(e', f') = \mathfrak{b}(\lambda.e, f') + \mathfrak{b}(e', \lambda.f) = \\ = \lambda.\mathfrak{b}(e, f') + \lambda.\mathfrak{b}(e', f) = \lambda.(\mathfrak{b}(e, f') + \mathfrak{b}(e', f)) = \lambda.((\mathrm{D}\mathfrak{b})(e, f))(e', f'),$$

tehát $(\mathrm{D}\mathfrak{b})(\lambda.(e,f)) = \lambda.(\mathrm{D}\mathfrak{b})(e,f)$, vagyis a $\mathrm{D}\mathfrak{b} : E \times F \to \mathscr{L}(E \times F; G)$ leképezés $\mathbb{K}$-homogén.

Ezzel beláttuk, hogy $\mathrm{D}\mathfrak{b}$ lineáris operátor. Ha $(e,f) \in E \times F$, akkor az operátornorma definíciója szerint

$$\|(\mathrm{D}\mathfrak{b})(e,f)\| = \sup_{\substack{(e',f') \in E \times F \\ \|(e',f')\| \leq 1}} \|((\mathrm{D}\mathfrak{b})(e,f))(e',f')\| = \sup_{\substack{(e',f') \in E \times F \\ \|(e',f')\| \leq 1}} \|\mathfrak{b}(e,f') + \mathfrak{b}(e',f)\| \leq$$
$$\leq \sup_{\substack{(e',f') \in E \times F \\ \|(e',f')\| \leq 1}} \|\mathfrak{b}\|(\|e\|\|f'\| + \|e'\|\|f\|) \leq \|\mathfrak{b}\|(\|e\| + \|f\|) \leq 2\|\mathfrak{b}\|\|(e,f)\|,$$

tehát a $\mathrm{D}\mathfrak{b} : E \times F \to \mathscr{L}(E \times F; G)$ lineáris operátor folytonos, ezért 3.2.3. alapján a $\mathrm{D}\mathfrak{b}$ deriváltfüggvény végtelenszer differenciálható, így a $\mathfrak{b}$ leképezés végtelenszer differenciálható (3.3.3.). ■

3.5.2. Állítás. *Ha $(E_i)_{i \in I}$ normált terek véges rendszere és F normált tér, akkor minden $u \in \mathfrak{Mult}\left(\prod_{i \in I} E_i; F\right)$ folytonos multilineáris operátor végtelenszer differenciálható a $\prod_{i \in I} E_i$ normált szorzattér és az F normált tér között.*

Bizonyítás. Az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Jelölje $\mathscr{A}(n)$ a következő kijelentést:

"$n \in \mathbb{N}$, és normált terek minden $(E_i)_{i \in I}$ véges rendszére, és minden F normált térre, és minden $u \in \mathfrak{Mult}\left(\prod_{i \in I} E_i; F\right)$ folytonos multilineáris operátorra, ha $\mathrm{Card}(I) = n$, akkor az $u : \prod_{i \in I} E_i \to F$ függvény végtelenszer differenciálható a $\prod_{i \in I} E_i$ normált szorzattér és az F normált tér között."

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $(\forall n \in \mathbb{N})\mathscr{A}(n)$ igaz.

Az $\mathscr{A}(0)$ kijelentés triviálisan igaz, mert a $\prod_{i \in \emptyset} E_i$ normált szorzattér 0 dimenziós, tehát ekkor u konstansfüggvény.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\mathscr{A}(n)$ igaz, és legyen $(E_i)_{i \in I}$ normált tereknek olyan véges rendszere, hogy $\mathrm{Card}(I) = n + 1$, valamint legyen F normált tér, és legyen $u \in \mathfrak{Mult}\left(\prod_{i \in I} E_i; F\right)$ folytonos multilineáris operátor. Rögzítsünk egy $k \in I$ indexet, és legyen $I_* := I \setminus \{k\}$, és értelmezzük az

$$u_* : \prod_{i \in I_*} E_i \to \mathscr{L}\left(E_k; F\right); \quad (x_i)_{i \in I_*} \mapsto u \circ \mathrm{in}_{k,(x_i)_{i \in I_*}}$$

leképezést. Megjegyezzük, hogy a multilinearitás definíciója szerint minden $(x_i)_{i \in I_*} \in \prod_{i \in I_*} E_i$ esetén az $u \circ \mathrm{in}_{k,(x_i)_{i \in I_*}} : E_k \to F$ függvény *lineáris*, és u folytonossága miatt ez folytonos is, hiszen minden $z \in E_k$ esetén $(z_i)_{i \in I} := \mathrm{in}_{k,(x_i)_{i \in I_*}}(z)$ az a rendszer $\prod_{i \in I} E_i$-ben, amelyre minden $i \in I_*$ indexre

$$z_i := \begin{cases} x_i & , \text{ha } i \neq k, \\ z & , \text{ha } i = k \end{cases},$$

ezért

$$\begin{aligned}\left\|\left(u_*\left((x_i)_{i\in I_*}\right)\right)(z)\right\| &= \left\|u\left(\mathrm{in}_{k,(x_i)_{i\in I_*}}(z)\right)\right\| = \\ = \left\|u\left((z_i)_{i\in I}\right)\right\| &\le \|u\| \prod_{i\in I}\|z_i\| = \|u\|\Big(\prod_{i\in I_*}\|x_i\|\Big)\|z\|,\end{aligned}$$

amiből látható hogy $u_* \in \mathscr{L}(E_k;F)$, és

$$\left\|u_*\left((x_i)_{i\in I_*}\right)\right\| \le \|u\| \prod_{i\in I_*}\|x_i\|.$$

Ez az egyenlőtlenség azt is mutatja, hogy ha az $u_* : \prod\limits_{i\in I_*} E_i \to \mathscr{L}(E_k;F)$ leképezés multilineáris, akkor u_* *folytonos* multilineáris operátor.

Az u_* leképezés multilinearitásának bizonyításához legyenek $j \in I_*$ és $(x_i)_{i\in I_*} \in \prod\limits_{i\in I_*} E_i$ rögzítettek. Azt kell igazolni, hogy az $u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}} : E_j \to \mathscr{L}(E_k;F)$ leképezés lineáris. Ehhez legyen $z \in E_k$, és értelmezzük azt a $(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}} \in \prod\limits_{i\in I\setminus\{j\}} E_i$ rendszert, amelyre minden $i \in I\setminus\{j\}$ esetén

$$z_i := \begin{cases} x_i & \text{, ha } i \ne k, \\ z & \text{, ha } i = k. \end{cases}$$

Lényeges az, hogy adott j index és $(x_i)_{i\in I_*}$ rendszer esetén ez a $(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ rendszer csak z-től függ. Megmutatjuk, hogy minden $y \in E_j$ esetén

$$\left(\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y)\right)(z) = \left(u \circ \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}}\right)(y).$$

Valóban, ha $y \in E_j$ esetén $(y_i)_{i\in I_*} \in \prod\limits_{i\in I_*} E_i$ az a rendszer, amelyre minden $i \in I_*$ indexre

$$y_i := \begin{cases} x_i & \text{, ha } i \ne j, \\ y & \text{, ha } i = j \end{cases},$$

akkor világos, hogy $(y_i)_{i\in I_*} = \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}(y)$, ezért u_* definícióját alkalmazva

$$\left(\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y)\right)(z) = \left(u_*\left((y_i)_{i\in I_*}\right)\right)(z) = \left(u \circ \mathrm{in}_{k,(y_i)_{i\in I_*}}\right)(z) = u\left(\mathrm{in}_{k,(y_i)_{i\in I_*}}(z)\right),$$

így a szóban forgó egyenlőség bizonyításához elég azt igazolni, hogy

$$\mathrm{in}_{k,(y_i)_{i\in I_*}}(z) = \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}}(y).$$

Ez viszont nyilvánvaló, mert az $(y_i)_{i\in I_*}$ és $(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ rendszerek definíciója és $j \ne k$ szerint minden $i \in I$ esetén

$$\left(\mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}}(y)\right)(i) = \begin{cases} x_i & \text{, ha } i \ne j,\ i \ne k \\ y & \text{, ha } i = j, \\ z & \text{, ha } i = k, \end{cases}$$

továbbá

$$\left(\mathrm{in}_{k,(y_i)_{i\in I_*}}(z)\right)(i) = \begin{cases} x_i & \text{, ha } i \ne j,\ i \ne k \\ y & \text{, ha } i = j, \\ z & \text{, ha } i = k, \end{cases},$$

vagyis $\mathrm{in}_{k,(y_i)_{i\in I_*}}(z) = \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}}(y)$, így $\left(\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y)\right)(z) = \left(u \circ \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}}\right)(y)$ is igaz. Ezért $y, y' \in E_j$ esetén, minden $z \in E_k$ vektorra bevezetve a fentiekben értelmezett, y-tól és y'-től független, z-től függő $(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ rendszert, és kihasználva az $u \circ \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}} : E_j \to F$ lineáris operátor additivitását kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y+y')\right)(z) &= \left(u \circ \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}}\right)(y+y') = \\ &= \left(u \circ \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}}\right)(y) + \left(u \circ \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}}\right)(y') = \\ &= \left(\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y)\right)(z) + \left(\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y')\right)(z) = \\ &= \left(\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y) + \left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y')\right)(z),\end{aligned}$$

tehát $\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y+y') = \left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y) + \left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y')$, vagyis az $u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}$ operátor additív. Hasonlóan, $y \in E_j$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, minden $z \in E_k$ vektorra bevezetve a fentiekben értelmezett, y-tól és y'-től független, z-től függő $(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ rendszert, és kihasználva az $u \circ \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}} : E_j \to F$ lineáris operátor $\mathbb{K}$-homogenitását kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(\lambda.y)\right)(z) &= \left(u \circ \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}}\right)(\lambda.y) = \\ = \lambda.\left(u \circ \mathrm{in}_{j,(z_i)_{i\in I\setminus\{j\}}}\right)(y) &= \lambda.\left(\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y)\right)(z) = \left(\lambda.\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y)\right)(z),\end{aligned}$$

tehát $\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(\lambda.y) = \lambda.\left(u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(y)$, vagyis az $u_* \circ \mathrm{in}_{j,(x_i)_{i\in I_*}}$ operátor $\mathbb{K}$-homogén.

Ezzel beláttuk, hogy $u_* \in \mathfrak{Mult}\left(\prod_{i\in I_*} E_i; F\right)$. Mivel $\mathrm{Card}(I_*) = n$, így az indukciós hipotézist, vagyis az $\mathscr{A}(n)$ kijelentést alkalmazhatjuk I helyére I_*-t, F helyére az $\mathscr{L}(E_k; F)$ operátorteret, és u helyére u_*-t helyettesítve. Tehát az $u_* : \prod_{i\in I_*} E_i \to F$ leképezés végtelenszer differenciálható a $\prod_{i\in I_*} E_i$ normált szorzattér és $\mathscr{L}(E_k; F)$ operátortér között. Értelmezzük most a következő leképezéseket:

$$\begin{gathered}\alpha : \prod_{i\in I} E_i \to \left(\prod_{i\in I_*} E_i\right) \times E_k; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \left((x_i)_{i\in I_*}, x_k\right), \\ \beta : \left(\prod_{i\in I_*} E_i\right) \times E_k \to \mathscr{L}(E_k; F) \times E_k; \quad \left((x_i)_{i\in I_*}, x\right) \mapsto \left(u_*\left((x_i)_{i\in I_*}\right), x\right), \\ \gamma : \mathscr{L}(E_k; F) \times E_k \to F; \quad (v, x) \mapsto v(x).\end{gathered}$$

Nyilvánvaló, hogy minden $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ esetén

$$\begin{gathered}(\gamma \circ \beta \circ \alpha)\left((x_i)_{i\in I}\right) = (\gamma \circ \beta)\left((x_i)_{i\in I_*}, x_k\right) = \gamma\left(u_*\left((x_i)_{i\in I_*}\right), x_k\right) = \\ = \left(u_*\left((x_i)_{i\in I_*}\right)\right)(x_k) = \left(u \circ \mathrm{in}_{k,(x_i)_{i\in I_*}}\right)(x_k) = u\left(\mathrm{in}_{k,(x_i)_{i\in I_*}}(x_k)\right) = u\left((x_i)_{i\in I}\right),\end{gathered}$$

mert nyilvánvalóan $\mathrm{in}_{k,(x_i)_{i\in I_*}}(x_k) = (x_i)_{i\in I}$. Tehát $u = \gamma \circ \beta \circ \alpha$, ezért $\mathscr{A}(n+1)$ bizonyításának befejezéséhez elegendő azt megmutatni, hogy az α, β és γ függvények végtelenszer differenciálhatóak a megfelelő normált terek között.

Az α függvény folytonos lineáris operátor (valójában lineáris homeomorfizmus), tehát végtelenszer differenciálható (3.2.3.). A β leképezés első komponens függvénye a

$\Big(\prod_{i\in I_*} E_i\Big) \times E_k \to \prod_{i\in I_*} E_i$ első projekció, és az u_* függvény kompozíciója. A projekciók folytonos lineáris operátorok, tehát végtelenszer differenciálhatóak (3.2.3.), míg az u_* folytonos multilineáris operátor az indukciós hipotézis szerint végtelenszer differenciálható, tehát 3.4.5. szerint a β függvény is végtelenszer differenciálható. Végül, a γ leképezés folytonos bilineáris operátor, tehát végtelenszer differenciálható (3.5.1.). Ebből következik, hogy az u folytonos multilineáris operátor is végtelenszer differenciálható. ∎

3.5.3. Állítás. *Legyen $(E_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere, és F normált tér. Ekkor az*

$$f : \Big(\prod_{i\in I} E_i\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big) \to F; \quad ((x_i)_{i\in I}, u) \mapsto u\left((x_i)_{i\in I}\right)$$

függvény végtelenszer differenciálható, és ha $((x_i)_{i\in I}, u) \in \Big(\prod_{i\in I} E_i\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ és $((\mathbf{x}_i)_{i\in I}, \mathbf{u}) \in \Big(\prod_{i\in I} E_i\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$, akkor

$$((\mathrm{D}f)\left((x_i)_{i\in I}, u\right))\left((\mathbf{x}_i)_{i\in I}, \mathbf{u}\right) = \mathbf{u}\left((x_i)_{i\in I}\right) + \sum_{k\in I}\left(u \circ \mathrm{in}_{k,(x_i)_{i\in I}}\right)(\mathbf{x}_k).$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy f egyenlő egy lineáris homeomorfizmus és egy azt követő folytonos multilineáris operátor kompozíciójával, így 3.5.2. alapján az f függvény végtelenszer differenciálható. Ehhez legyen $E := \prod_{i\in I} E_i$, és i_* olyan halmaz, amelyre $i_* \notin I$. Vezessük be az $I_* := I \cup \{i_*\}$ indexhalmazt, valamint legyen $(V_i)_{k\in I_*}$ az a rendszer, amelyre minden $i \in I_*$ esetén

$$V_i := \begin{cases} E_i & \text{, ha } i \in I, \\ \mathfrak{Mult}(E;F) & \text{, ha } i = i_*. \end{cases}$$

Értelmezzük az

$$\alpha : \prod_{i\in I_*} V_i \to E \times \mathfrak{Mult}(E;F); \quad (z_i)_{i\in I_*} \mapsto ((z_i)_{i\in I}, z_{i_*})$$

leképezést, amely nyilvánvalóan lineáris homeomorfizmus a $\prod_{i\in I_*} V_i$ normálható szorzattér és az $E \times \mathfrak{Mult}(E;F)$ (két tagú!) normálható szorzattér között. Megmutatjuk, hogy $f \circ \alpha \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I_*} V_i; F\Big)$. Legyen $k \in I_*$ és $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I_*} \in \prod_{i\in I_*} V_i$.

Ha $k \in I$, akkor minden $x \in V_k = E_k$ esetén

$$(f \circ \alpha \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}})(x) = f\left(\left((\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(x))_i\right)_{i\in I}, \mathfrak{a}_{i_*}\right) = f\left(\mathrm{in}_{k,(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}}(x), \mathfrak{a}_{i_*}\right) = \mathfrak{a}_{i_*}\left(\mathrm{in}_{k,(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}}(x)\right),$$

következésképpen $f \circ \alpha \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}} \in \mathscr{L}(E_k; F)$, hiszen $\mathfrak{a}_{i_*} \in \mathfrak{Mult}(E;F)$.

Ha $k = i_*$, akkor minden $u \in V_k = V_{i_*} = \mathfrak{Mult}(E;F)$ esetén

$$(f \circ \alpha \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}})(u) = f\left((\mathfrak{a}_i)_{i\in I}, u\right) = u\left((\mathfrak{a}_i)_{i\in I}\right),$$

és nyilvánvaló, hogy az $\mathfrak{Mult}(E;F) \to F;\ u \mapsto u\left((\mathfrak{a}_i)_{i\in I}\right)$ leképezés folytonos lineáris operátor.

Tehát $f \circ \alpha \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I_*} V_i; F\Big)$, így 3.5.2. alapján az $f\circ\alpha$ függvény végtelenszer differenciálható, és az $\alpha^{-1} : E \times \mathfrak{Mult}(E;F) \to \prod\limits_{i\in I_*} V_i$ leképezés lineáris homeomorfizmus, tehát végtelenszer differenciálható függvény, ezért az $f = (f\circ\alpha)\circ\alpha^{-1}$ függvény is végtelenszer differenciálható. Továbbá, explicit formulánk van minden $k \in I_*$ és $\mathfrak{a} \in \prod\limits_{i\in I_*} V_i$ esetén az $f\circ\alpha\circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} \in \mathscr{L}(V_k;F)$ operátorra. Ezért $((x_i)_{i\in I}, u) \in \Big(\prod\limits_{i\in I} E_i\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big)$ és $((\mathbf{x}_i)_{i\in I}, \mathbf{u}) \in \Big(\prod\limits_{i\in I} E_i\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big)$ esetén bevezetve az $(\tilde{x}_i)_{i\in I_*} := \alpha^{-1}\left((x_i)_{i\in I}, u\right)$ és $(\tilde{\mathbf{x}}_i)_{i\in I_*} := \alpha^{-1}\left((\mathbf{x}_i)_{i\in I}, \mathbf{u}\right)$ rendszereket, 1.5.1. alapján kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
((\mathrm{D}f)\left((x_i)_{i\in I}, u\right))\left((\mathbf{x}_i)_{i\in I}, \mathbf{u}\right) &= \left(\mathrm{D}(f\circ\alpha)\left(\alpha^{-1}\left((x_i)_{i\in I}, u\right)\right)\right)\left(\alpha^{-1}\left((\mathbf{x}_i)_{i\in I}, \mathbf{u}\right)\right) = \\
&= \left(\mathrm{D}(f\circ\alpha)\left((\tilde{x}_i)_{i\in I_*}\right)\right)\left((\tilde{\mathbf{x}}_i)_{i\in I_*}\right) = \sum_{k\in I_*}\left(f\circ\alpha\circ \mathrm{in}_{k,(\tilde{x}_i)_{i\in I_*}}\right)(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \\
&= \left(f\circ\alpha\circ \mathrm{in}_{i_*,(\tilde{x}_i)_{i\in I_*}}\right)(\tilde{\mathbf{x}}_{i_*}) + \sum_{k\in I}\left(f\circ\alpha\circ \mathrm{in}_{k,(\tilde{x}_i)_{i\in I_*}}\right)(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \\
&= \tilde{\mathbf{x}}_{i_*}\left((\tilde{x}_i)_{i\in I}\right) + \sum_{k\in I}\left(\tilde{x}_{i_*}\circ \mathrm{in}_{k,(\tilde{x}_i)_{i\in I}}\right)(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{u}\left((x_i)_{i\in I}\right) + \sum_{k\in I}\left(u\circ \mathrm{in}_{k,(x_i)_{i\in I}}\right)(\mathbf{x}_k),
\end{aligned}
$$

hiszen az α operátor és az $(\tilde{x}_i)_{i\in I_*}$, $(\tilde{\mathbf{x}}_i)_{i\in I_*}$ rendszerek definíciója szerint $\tilde{\mathbf{x}}_{i_*} = \mathbf{u}$, $\tilde{x}_{i_*} = u$, valamint minden $i \in I$ esetén $\tilde{x}_i = x_i$ és $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i$. ■

Vigyázzunk arra, hogy a nem triviális esetben az előző lemmában értelmezett f függvény *nem bilineáris operátor* a $\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big)$ (két tagú) szorzattéren, mert rögzített második változója mellet az első változójában nem additív (hanem multiadditív), hiszen a második változójában nem lineáris, hanem multilineáris operátorok állnak. Ezért az f függvény deriváltjának kiszámításához *nem alkalmazhatjuk* a folytonos bilineáris operátorok deriváltjára vonatkozó ismert formulát. Ha az f függvényt folytonos bilineáris operátorként deriválnánk, akkor azt kapnánk, hogy minden $((x_i)_{i\in I}, u) \in \Big(\prod\limits_{i\in I} E_i\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big)$ és $((\mathbf{x}_i)_{i\in I}, \mathbf{u}) \in \Big(\prod\limits_{i\in I} E_i\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; F\Big)$ esetén

$$((\mathrm{D}f)\left((x_i)_{i\in I}, u\right))\left((\mathbf{x}_i)_{i\in I}, \mathbf{u}\right) = \mathbf{u}\left((x_i)_{i\in I}\right) + u\left((\mathbf{x}_i)_{i\in I}\right),$$

és ez (sajnos értelmes, de) *teljesen hibás formula*!

3.5.4. Állítás. *Ha $(E_i)_{i\in I}$ és $(F_i)_{i\in I}$ ugyanolyan indexhalmazú véges normált térrendszerek, és G normált tér, akkor a*

$$\Big(\prod_{i\in I}\mathscr{L}\big(E_i;F_i\big)\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} F_i; G\Big) \to \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; G\Big); \qquad \left((u_i)_{i\in I}, v\right) \mapsto v \circ \bigtimes_{i\in I} u_i$$

leképezés végtelenszer differenciálható a $\Big(\prod\limits_{i\in I}\mathscr{L}\big(E_i;F_i\big)\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} F_i; G\Big)$ normált szorzattér és a $\mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; G\Big)$ multilineáris operátortér között (ahol a $\prod\limits_{i\in I}\mathscr{L}(E_i;F_i)$

lineáris szorzattéren az operátornormák szorzatát vesszük, valamint a $\mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} F_i; G\Big)$ *és a* $\mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; G\Big)$ *multilineáris operátorterek felett a multilineáris operátornormát vesszük normaként).*

Bizonyítás. Legyen i_* olyan halmaz, hogy $i_* \notin I$, és értelmezzük az $I_* := I \cup \{i_*\}$ halmazt, valamint azt a $(V_i)_{i\in I_*}$ rendszert, amelyre minden $k \in I_*$ esetén

$$V_k := \begin{cases} \mathscr{L}(E_k; F_k) & \text{, ha } k \neq i_*, \\ \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} F_i; G\Big) & \text{, ha } k = i_*. \end{cases}$$

Vezessük be az

$$\alpha : \Big(\prod_{i\in I} V_i\Big) \times V_{i_*} \to \prod_{k\in I_*} V_k$$

függvényt úgy, hogy minden $((u_i)_{i\in I}, v) \in \Big(\prod\limits_{i\in I} V_i\Big) \times V_{i_*}$ és $k \in I_*$ esetén

$$(\alpha((u_i)_{i\in I}, v))(k) := \begin{cases} u_k & \text{, ha } k \neq i_*, \\ v & \text{, ha } k = i_*, \end{cases}$$

vagyis adott $((u_i)_{i\in I}, v) \in \Big(\prod\limits_{i\in I} V_i\Big) \times V_{i_*}$ párhoz az α függvény hozzárendeli az $(u_i)_{i\in I}$ rendszernek azt a kiterjesztését I-ről I_*-ra, amely i_*-hoz a v értéket rendeli.

Értelmezzük továbbá a

$$\beta : \prod_{i\in I_*} V_i \to \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; G\Big); \quad (u_i)_{i\in I_*} \mapsto u_{i_*} \circ \bigtimes_{i\in I} u_i$$

leképezést.

Világos, hogy minden $((u_i)_{i\in I}, v) \in \Big(\prod\limits_{i\in I} \mathscr{L}(E_i; F_i)\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; G\Big)$ esetén

$$(\beta \circ \alpha)((u_i)_{i\in I}, v) = v \circ \bigtimes_{i\in I} u_i,$$

tehát azt kell igazolni, hogy a $\beta \circ \alpha$ függvény végtelenszer differenciálható. Ehhez elegendő azt belátni, hogy az α és β függvények végtelenszer differenciálható.

Nyilvánvaló, hogy az α függvény folytonos lineáris operátor (valójában lineáris homeomorfizmus), ezért végtelenszer differenciálható. Igazoljuk, hogy β folytonos multilineáris operátor. Ha így van, akkor a 3.5.2. állítás szerint β is végtelenszer differenciálható, amivel a bizonyítás véget ér.

Először β multilinearitását igazoljuk. Ehhez legyenek $k \in I_*$ és $(u_i)_{i\in I_*} \in \prod\limits_{i\in I_*} V_i$ rögzítve. Azt kell igazolni, hogy a $\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in \bar{I}}} : V_k \to \mathfrak{Mult}\Big(\prod\limits_{i\in I} E_i; G\Big)$ leképezés lineáris operátor.

Tegyük fel, hogy $k \neq i_*$, vagyis $k \in I$. Ha $u \in V_k = \mathscr{L}(E_k; F_k)$ és $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$, akkor

$$\left(\left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(u)\right)((x_i)_{i\in I}) = \left(\beta\left(\mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}(u)\right)\right)((x_i)_{i\in I}) =$$
$$= \left(u_{i_*} \circ \bigtimes_{i\in I} \tilde{u}_i\right)((x_i)_{i\in I}) = u_{i_*}\left((\tilde{u}_i(x_i))_{i\in I}\right),$$

ahol $(\tilde{u}_i)_{i\in I}$ az a rendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén

$$\tilde{u}_i := \begin{cases} u_i & \text{, ha } i \neq k, \\ u & \text{, ha } i = k. \end{cases}$$

Tekintettel arra, hogy $(\tilde{u}_i(x_i))_{i\in I} = \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}(u(x_k))$, így az előző egyenlőség-lánc így folytatható:

$$\left(\left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(u)\right)((x_i)_{i\in I}) = u_{i_*}\left(\mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}(u(x_k))\right) =$$
$$= \left(u_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}\right)(u(x_k)),$$

és itt $u_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}} : F_k \to G$ lineáris operátor, mert $u_{i_*} \in V_{i_*} = \mathfrak{Mult}\left(\prod_{i\in I} F_i; G\right)$.

Tehát ha $u, v \in V_k = \mathscr{L}(E_k; F_k)$, akkor minden $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ esetén, felhasználva az $u_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}$ lineáris operátor additivitását, adódik, hogy

$$\left(\left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(u+v)\right)((x_i)_{i\in I}) = \left(u_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}\right)((u+v)(x_k)) =$$
$$= \left(u_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}\right)(u(x_k) + v(x_k)) =$$
$$= \left(u_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}\right)(u(x_k)) + \left(u_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}\right)(v(x_k)) =$$
$$= \left(\left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(u)\right)((x_i)_{i\in I}) + \left(\left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(v)\right)((x_i)_{i\in I}),$$

vagyis

$$\left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(u+v) = \left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(u) + \left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(v),$$

tehát a $\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}$ leképezés additív. Hasonlóan, ha $u \in V_k = \mathscr{L}(E_k; F_k)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor minden $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ esetén, felhasználva az $u_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}$ lineáris operátor $\mathbb{K}$-homogenitását, adódik, hogy

$$\left(\left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(\lambda.u)\right)((x_i)_{i\in I}) = \left(u_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}\right)((\lambda.u)(x_k)) =$$
$$= \left(u_{i_*} \circ \mathrm{in}_{k,(u_i(x_i))_{i\in I}}\right)(\lambda.(u(x_k))) = \lambda.\left(\left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(u)\right)((x_i)_{i\in I}),$$

vagyis

$$\left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(\lambda.u) = \lambda.\left(\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(u),$$

tehát a $\beta \circ \mathrm{in}_{k,(u_i)_{i\in I_*}}$ leképezés $\mathbb{K}$-homogén.

Hátravan még a $\beta \circ \mathrm{in}_{i_*,(u_i)_{i\in I_*}} : \mathfrak{Mult}\left(\prod_{i\in I} E_i; G\right) \to \mathfrak{Mult}\left(\prod_{i\in I} E_i; G\right)$ leképezés linearitásának bizonyítása, amikor az $(u_i)_{i\in I_*}$ rendszer rögzített. Nyilvánvaló, hogy minden $v \in \mathfrak{Mult}\left(\prod_{i\in I} E_i; G\right)$ esetén

$$\left(\beta \circ \mathrm{in}_{i_*,(u_i)_{i\in I_*}}\right)(v) = \beta\left(\mathrm{in}_{i_*,(u_i)_{i\in I_*}}(v)\right) = v \circ \bigtimes_{i\in I} u_i,$$

és triviális az, hogy a

$$\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; G\Big) \to \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; G\Big); \quad v \mapsto v \circ \mathop{\times}_{i\in I} u_i$$

leképezés lineáris.

Tehát β multilineáris operátor, és minden $(u_i)_{i\in I_*} \in \prod\limits_{i\in I_*} V_i$ és $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$ esetén

$$\|\beta\left((u_i)_{i\in I_*}\right)\left((x_i)_{i\in I}\right)\| = \left\|\Big(u_{i_*} \circ \mathop{\times}_{i\in I} u_i\Big)\left((x_i)_{i\in I}\right)\right\| = \|\, u_{i_*}\left((u_i(x_i))_{i\in I}\right)\| \leq$$

$$\leq \|u_{i_*}\| \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \|u_i(x_i)\| \leq \|u_{i_*}\| \left(\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \|u_i\|\right)\left(\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \|x_i\|\right).$$

Ebből következik, hogy minden $(u_i)_{i\in I_*} \in \prod\limits_{i\in I_*} V_i$ esetén

$$\|\beta\left((u_i)_{i\in I_*}\right)\| \leq \|u_{i_*}\| \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \|u_i\| = \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I_*} \|u_i\|,$$

tehát a β multilineáris operátor folytonos (és $\|\beta\| \leq 1$). ■

Vigyázzunk arra, hogy az előző állítás feltételei mellett a

$$\Big(\prod_{i\in I} \mathscr{L}\Big(E_i; F_i\Big)\Big) \times \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} F_i; G\Big) \to \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in I} E_i; G\Big); \quad \big((u_i)_{i\in I}, v\big) \mapsto v \circ \mathop{\times}_{i\in I} u_i$$

leképezés a nem triviális esetekben *nem bilineáris operátor.* Ezért annak bizonyításához, hogy ez a függvény végtelenszer differenciálható, *nem elegendő* e függvény folytonosságát igazolni.

3.5.5. Definíció. *Ha X és Y normált terek, valamint $u \in \mathscr{L}(X;Y)$ és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor $\overset{n}{\times} u$ jelöli a $\mathop{\times}\limits_{i\in n} u_i$ leképezést, ahol minden $i \in n$ esetén $u_i := u$, tehát $\overset{n}{\times} u : X^n \to Y^n$ az a függvény, amelyre minden $(x_i)_{i\in n} \in X^n$ esetén*

$$\Big(\overset{n}{\times} u\Big)\left((x_i)_{i\in n}\right) := (u(x_i))_{i\in n}.$$

3.5.6. Következmény. *Ha E, F és G normált terek, és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor a*

$$\mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}_n(F;G) \to \mathscr{L}_n(E;G); \quad (u,v) \mapsto v \circ \overset{n}{\times} u$$

leképezés végtelenszer differenciálható a $\mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}_n(F;G)$ normált szorzattér, valamint a $\mathscr{L}_n(E;G)$ multilineáris operátortér között.

Bizonyítás. Vezessük be a következő függvényeket:

$$f : (\mathscr{L}(E;F))^n \times \mathscr{L}_n(F;G) \to \mathscr{L}_n(E;G); \quad \big((u_i)_{i\in n}, v\big) \mapsto v \circ \mathop{\times}_{i\in I} u_i,$$

$$g : \mathscr{L}(E;F) \to (\mathscr{L}(E;F))^n; \quad u \mapsto (u)_{i\in n},$$

tehát minden $i \in n$ esetén a g függvény i-edik komponensfüggvénye az $\mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;F)$ identikus függvény. Ekkor világos, hogy a vizsgált leképezés egyenlő az $f \circ \big(g \times \mathrm{id}_{\mathscr{L}_n(F;G)}\big)$ leképezéssel, amely végtelenszer differenciálható, mert f az előző állítás szerint végtelenszer differenciálható, és a g függvény triviálisan végtelenszer differenciálható. ■

3.6. A vektoranalízis differenciáloperátorai

A deriváltfüggvényekből és a parciális deriváltfüggvényekből bizonyos típusú normált terek között ható függvények esetében speciális alakú, újabb deriváltfüggvények állíthatók elő. Így kapjuk a vektoranalízis nevezetes deriváltfüggvényeit, amelyek értelmezését az alábbi példákban adjuk meg.

Példák (a vektoranalízis nevezetes deriváltjaira).

1) Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett és $f : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ tetszőleges függvény; az ilyen típusú függvényeket *skalármezőknek* nevezzük. Ekkor a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény $E \rightarrowtail E'$ típusú, vagyis $\mathrm{D}f$ a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ minden pontjához egy $E \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionált rendel; az ilyen típusú függvényeket *kovektormezőknek* nevezzük. Tehát egy skalármező deriváltfüggvénye kovektormező lesz. Általában az f skalármező deriváltfüggvényét a $\mathrm{D}f$ jel helyett a $\mathrm{d}f$ szimbólummal jelöljük, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{d}f)$ esetén a $(\mathrm{d}f)(\mathfrak{a}) \in E'$ funkcionált az f *differenciáljának* nevezzük $\mathfrak{a}$-ban.

2) Legyen E véges dimenziós normált tér $\mathbb{K}$ felett és jelölje tr_E a kanonikus nyom-formát $\mathscr{L}(E;E)$ felett, tehát $\mathrm{tr}_E : \mathscr{L}(E;E) \to \mathbb{K}$ egy algebrai szempontból kitüntetett nem triviális lineáris funkcionál (**5**. gyakorlat). Legyen $f : E \rightarrowtail E$ függvény: az ilyen típusú függvényeket *vektormezőknek* nevezzük. Ekkor a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény $E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;E)$ típusú, és a

$$\mathrm{tr}_E \circ \mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathbb{K}$$

skalármezőt az f *divergenciájának* nevezzük, és $\mathrm{div}(f)$-fel, vagy a $\nabla \cdot f$ szimbólummal jelöljük. Ez tehát a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ halmazon értelmezett, és annak minden $\mathfrak{a}$ eleméhez a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E;E)$ operátor nyomát rendeli. Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor minden $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^n$ függvényre $\mathrm{div}(f) \subseteq \sum\limits_{k \in n} \partial_k f_k$ teljesül, ahol $k \in n$ esetén f_k az f függvény k-adik komponense.

3) Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett és $\mathfrak{g} \in \mathscr{L}_2(E;\mathbb{K})$ olyan folytonos bilineáris funkcionál, amelyre a

$$\widehat{\mathfrak{g}} : E \to E'; \quad x \mapsto \mathfrak{g}(x, \cdot)$$

függvény *lineáris homeomorfizmus*. Megjegyezzük, hogy tetszőleges $\mathfrak{g} \in \mathscr{L}_2(E;\mathbb{K})$ leképezésre a $\widehat{\mathfrak{g}} : E \to E'$ függvény folytonos lineáris operátor, vagyis $\mathscr{L}(E;E')$-nek eleme. Ezért $\mathfrak{g}$-re az a követelmény, hogy $\widehat{\mathfrak{g}}$ *bijekció* és a $\widehat{\mathfrak{g}}^{-1} : E' \to E$ lineáris operátor *folytonos* legyen. Ha $f : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, akkor a

$$\widehat{\mathfrak{g}}^{-1} \circ \mathrm{D}f : E \rightarrowtail E$$

vektormezőt az f függvény $\mathfrak{g}$-*gradiensének* nevezzük, és $\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}}(f)$-fel, vagy a $\nabla_{\mathfrak{g}} f$ szimbólummal jelöljük. Ha világos az, hogy melyik $\mathfrak{g}$ szerinti gradiensről van szó, akkor a jelölésben $\mathfrak{g}$-t elhagyjuk, tehát egyszerűen a $\mathrm{grad}(f)$ vagy ∇f jelölést alkalmazzuk. De vigyázzunk arra, hogy a $\mathfrak{g}$-gradiens nagyon lényegesen függ $\mathfrak{g}$-től.

Világos, hogy $\mathrm{Dom}(\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}}(f)) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ teljesül, továbbá e halmaz minden $\mathfrak{a}$ elemére $(\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}}(f))(\mathfrak{a}) \in E$ az a vektor, amely a $\widehat{\mathfrak{g}}$ leképezés által azonosul a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \in E'$ funkcionállal, vagyis $(\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}}(f))(\mathfrak{a})$-nak és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$-nak az a kapcsolata, hogy minden $E \ni x$-re

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x) = \mathfrak{g}((\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}}(f))(\mathfrak{a}), x).$$

A $\mathfrak{g}$-gradiensnek két nevezetes speciális esete van az aritmetrikai terekre.

– Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \sum_{k \in n} x_k y_k;$$

ezt a $\mathfrak{g}$-t nevezzük $\mathbb{R}^n$ feletti *euklidészi skalárszorzásnak*. Könnyen látható, hogy a $\mathfrak{g}$ által meghatározott $\widehat{\mathfrak{g}} : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ leképezés lineáris bijekció. Minden $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényre a $\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}} f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^n$ $\mathfrak{g}$-gradienst az f függvény *euklidészi gradiensének* nevezzük. Az is egyszerűen belátható, hogy minden $n \ni k$-ra a $\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}} f$ vektormező k-adik komponensének a $\partial_k f$ függvény kiterjesztése.

– Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto -x_0 y_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k y_k;$$

ezt a $\mathfrak{g}$-t nevezzük $\mathbb{R}^{n+1}$ feletti *Lorentz-skalárszorzásnak*. Könnyen látható, hogy a $\mathfrak{g}$ által meghatározott $\widehat{\mathfrak{g}} : \mathbb{R}^{n+1} \to (\mathbb{R}^{n+1})^*$ leképezés lineáris bijekció. Minden $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényre a $\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}} f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrowtail \mathbb{R}^{n+1}$ $\mathfrak{g}$-gradienst az f függvény *Lorentz-gradiensének* nevezzük. Az is egyszerűen belátható, hogy minden $1 \le k \le n$ természetes számra a $\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}} f$ vektormező k-adik komponensének a $\partial_k f$ függvény kiterjesztése, és a $\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}} f$ vektormező 0-adik komponensének a $-\partial_0 f$ függvény kiterjesztése.

4) Legyen E véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett és $\mathfrak{g} \in \mathbf{L}_2(E; \mathbb{K})$ olyan bilineáris funkcionál, amelyre a

$$\widehat{\mathfrak{g}} : E \to E^*; \quad x \mapsto \mathfrak{g}(x, \cdot)$$

függvény bijekció. Ha $f : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, akkor jól értelmezett a

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}_{\mathfrak{g}} f) : E \rightarrowtail \mathbb{K}$$

skalármező: ezt az f függvény $\mathfrak{g}$-*Laplace-deriváltjának* nevezzük, és a $\triangle_{\mathfrak{g}} f$ szimbólummal jelöljük. Ha világos az, hogy melyik $\mathfrak{g}$ szerinti Laplace-deriváltról van szó, akkor a jelölésben $\mathfrak{g}$-t elhagyjuk, tehát egyszerűen a $\triangle f$ jelölést alkalmazzuk. De vigyázzunk arra, hogy a $\mathfrak{g}$-Laplace-derivált nagyon lényegesen függ a $\mathfrak{g}$-től.

A $\mathfrak{g}$-Laplace-deriváltnak két nevezetes speciális esete van az aritmetrikai terekre.

– Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $\mathfrak{g}$ az $\mathbb{R}^n$ feletti euklidészi skalárszorzás (3. példa). Ekkor a $\mathfrak{g}$-Laplace-deriváltat egyszerűen *Laplace-deriváltnak* nevezzük, és a $\triangle$ szimbólummal jelöljük. Könnyen látható, hogy ha $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, akkor $\mathrm{Dom}(\triangle f) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^2 f)$ és fennáll a $\triangle f \subseteq \sum_{k \in n} \partial_k^2 f$ összefüggés, ahol $k \in n$ esetén $\partial_k^2 f := \partial_k(\partial_k f)$.

– Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $\mathfrak{g}$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ feletti Lorentz-skalárszorzás (3. példa). Ekkor a $\mathfrak{g}$-Laplace-deriváltat *D'Alembert-deriváltnak* nevezzük, és a $\square$ szimbólummal jelöljük. Könnyen látható, hogy ha $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, akkor $\mathrm{Dom}(\square f) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^2 f)$ és fennáll a $\square f \subseteq -\partial_0^2 f + \sum_{k \in n} \partial_k^2 f$ összefüggés.

5) Legyenek E, F normált terek és $p \in \mathbb{N}$. Az $E \rightarrowtail \mathscr{L}_p^a(E; F)$ típusú függvényeket E feletti, F-be ható *p-formáknak* nevezzük. Ha $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}_p^a(E; F)$ egy p-forma, akkor a $\mathrm{D}\omega$ deriváltfüggvény értékei $\mathscr{L}(E; \mathscr{L}_p^a(E; F))$-ben vannak, és ha $\mathbf{A}_{p+1}$ jelöli az $\mathscr{L}_{p+1}(E; F) \to \mathscr{L}_{p+1}^a(E; F)$ *antiszimmetrizációt* (VI. fejezet, 3. pont, **10**. gyakorlat), akkor az

$$\mathbf{A}_{p+1} \circ \pi_{1,p} \circ \mathrm{D}\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}_{p+1}^a(E; F)$$

$p+1$-formát az ω p-forma *külső deriváltjának* nevezzük, és $\mathrm{d}\omega$-val jelöljük.

6) Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett és $f : E \rightarrowtail E'$ függvény (vagyis E feletti kovektormező). Ekkor az f függvény E feletti, $\mathbb{K}$-ba ható 1-forma, ezért elkészíthető a $\mathrm{d}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}_2^a(E;\mathbb{K})$ külső derivált (5. gyakorlat). Tegyük fel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ és $\dim(E) = 3$. Ekkor $\dim(\mathscr{L}_2^a(E;\mathbb{R})) = 3$ (VI. fejezet, 3. pont, **11**. gyakorlat), ezért létezik lineáris bijekció E és $\mathscr{L}_2^a(E;\mathbb{R})$. Ha $\mathbf{J} : E \to \mathscr{L}_2^a(E;\mathbb{R})$ rögzített lineáris bijekció, akkor a

$$\mathbf{J}^{-1} \circ \mathrm{d}f : E \rightarrowtail E$$

vektormezőt az f függvény $\mathbf{J}$*-rotációjának* nevezzük, és $\mathrm{rot}_{\mathbf{J}} f$-fel jelöljük. Ha $\mathfrak{g} \in \mathbf{L}_2(E;\mathbb{R})$ olyan bilineáris funkcionál, amelyre a $\widehat{\mathfrak{g}} : E \to E^*;\ x \mapsto \mathfrak{g}(x,\cdot)$ függvény bijekció, akkor minden $f : E \rightarrowtail E$ vektormezőhöz vehetjük a $\widehat{g} \circ f : E \rightarrowtail E'$ kovektormezőt, így képezhető ennek a $\mathbf{J}$-rotációja, vagyis a

$$\mathbf{J}^{-1} \circ \mathrm{d}(\widehat{g} \circ f) : E \rightarrowtail E$$

vektormező: ezt nevezzük az f vektormező $(\mathfrak{g}, \mathbf{J})$-rotációjának. Jól látható, hogy ez lényegesen függ a $\mathfrak{g}$ bilineáris funkcionál és a $\mathbf{J}$ lineáris operátor választásától.

3.7. Gyakorlatok

1. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényre, amelyre a $\partial_0(\partial_0 f)$, $\partial_0(\partial_1 f)$, $\partial_1(\partial_0 f)$ és $\partial_1(\partial_1 f)$ parciális deriváltfüggvények mind *különbözők* (például azért, mert a definíciós tartományaik különbözők).

2. (*A magasabb rendű parciális deriváltfüggvények értelmezése.*) Legyen E az $(E_i)_{i\in I}$ véges normált tér rendszer szorzata, F normált tér és $f : E \rightarrowtail F$ függvény.

a) Minden $i \in I$ esetén létezik egyetlen olyan

$$(\partial_i^k f)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_0(E;\mathscr{L}_k(E_i;F))$$

függvényrendszer, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\partial_i^0 f = f,$$
$$\partial_i^{k+1} f = \partial_i(\partial_i^k f)$$

teljesül. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\partial_i^k f : E \rightarrowtail \mathscr{L}_k(E;F)$ függvényt az f függvény *i-edik változó szerinti k-ad rendű parciális deriváltfüggvényének* nevezzük.

(Tehát kevésbé pontosan, de kifejezőbben azt írhatjuk, hogy

$$\partial_i^k f = \overset{k\text{-szor}}{\partial_i \ldots \partial_i} f$$

teljesül.)

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ és $\sigma \in I^{n+1}$ esetén értelmezzük a

$$\pi_\sigma : \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{k\in n} E_{\sigma(k)};\mathscr{L}(E_{\sigma(n)};F)\Big) \to \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{k\in n+1} E_{\sigma(k)};F\Big);$$
$$u \mapsto ((x_k)_{k\in n+1} \mapsto u((x_k)_{k\in n})(x_{\sigma(n)}))$$

leképezést. Ez a függvény olyan lineáris bijekció, amely a multilineáris operátornormák szerint izometria. Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $\sigma \in I^n$ esetén létezik egyetlen olyan

$$\partial_\sigma f : E \rightarrowtail \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{k\in n} E_{\sigma(k)}; F\Big)$$

függvény, amelyre teljesül a következő:

- ha $n = 1$, azaz $\sigma : \{0\} \to I$ függvény, akkor

$$\partial_\sigma f = \partial_{\sigma(0)} f;$$

- ha $m \in \mathbb{N}^*$ és $n = m + 1$, akkor

$$\partial_\sigma f = \pi_\sigma \circ \partial_{\sigma|_m}(\partial_{\sigma(m)} f).$$

Igazoljuk, hogy ha $i \in I$, $k \in \mathbb{N}$ és $\sigma \in I^k$ az i értékű $k \to I$ konstansfüggvény, akkor $\partial_\sigma f = \partial_i^k f$.

(Ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $\sigma \in I^n$, akkor a

$$\partial_\sigma f : E \rightarrowtail \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{k\in n} E_{\sigma(k)}; F\Big)$$

leképezést az f függvény σ *által meghatározott iterált parciális deriváltfüggvényének* nevezzük. A $\partial_\sigma f$ függvényt olykor a kifejezőbb

$$\partial_{\sigma(0)}\partial_{\sigma(1)}...\partial_{\sigma(n-1)} f$$

formában írjuk fel.)

b) Teljes indukcióval igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N};\ m\le n} \left(\bigcap_{\sigma\in I^m} \mathrm{Dom}(\partial_\sigma f)\right).$$

c) Tegyük fel, hogy $I := n \in \mathbb{N}^*$, és minden $\alpha \in \mathbb{N}^n$ esetén legyen

$$E_\alpha := \prod_{j\in|\alpha|} \tilde{E}_j,$$

ahol $|\alpha| := \sum_{k\in n} \alpha(k)$, és minden $j < |\alpha|$ természetes számra a $\tilde{E}_j$ normált teret úgy értelmezzük, hogy

- $0 \le j < \alpha(0)$ esetén $\tilde{E}_j := E_0$;

- $\alpha(0) \le j < |\alpha|$ esetén létezik egyetlen olyan $k \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\sum_{l=0}^{k-1} \alpha(l) \le j < \sum_{l=0}^{k} \alpha(l)$, ekkor $\tilde{E}_j := E_p$, ahol $p := j - \sum_{l=0}^{k-1} \alpha(l)$.

(Tehát kevésbé pontosan, de kifejezőbben azt írhatjuk, hogy

$$E_\alpha = \overbrace{E_0 \times ... \times E_0}^{\alpha(0)\text{-szor}} \times \overbrace{E_1 \times ... \times E_1}^{\alpha(1)\text{-szer}} \times ... \times \overbrace{E_{n-1} \times ... \times E_{n-1}}^{\alpha(n-1)\text{-szer}}$$

teljesül.)

Minden $\alpha \in \mathbb{N}^n$ esetén legyen $\sigma_\alpha : |\alpha| \to n$ az a függvény, amelyre $j \in |\alpha|$ esetén a $\sigma_\alpha(j)$ számot a következőképpen értelmezzük:

- ha $0 \leq j < \alpha(0)$, akkor $\sigma_\alpha(j) := 0$;

- ha $\alpha(0) \leq j < |\alpha|$, akkor létezik egyetlen olyan $k \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\sum_{l=0}^{k-1} \alpha(l) \leq j < \sum_{l=0}^{k} \alpha(l)$, ekkor $\sigma_\alpha(j) := k$.

Ha $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tetszőleges multiindex, akkor a következő definíciót alkalmazzuk:

$$\partial^\alpha f := \partial_{\sigma_\alpha} f,$$

és a $\partial^\alpha f : E \rightarrowtail \mathscr{L}_{|\alpha|}(E;F)$ leképezést az f függvény $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *multiindex által meghatározott parciális deriváltfüggvényének* nevezzük.

(Tehát kevésbé pontosan, de kifejezőbben azt írhatjuk, hogy

$$\partial^\alpha f = \overbrace{\partial_0 ... \partial_0}^{\alpha(0)\text{-szor}} \overbrace{\partial_1 ... \partial_1}^{\alpha(1)\text{-szer}} \; ... \; \overbrace{\partial_{n-1} ... \partial_{n-1}}^{\alpha(n-1)\text{-szer}} f$$

teljesül, és itt, ha $i \in n$ olyan hogy $\alpha(i) = 0$, akkor az ennek megfelelő

$$\overbrace{\partial_i ... \partial_i}^{\alpha(i)\text{-szer}}$$

blokk hiányzik; így például, ha α az $n \to \mathbb{N}$ azonosan nulla függvény, akkor $\partial^0 f = f$.)

3. Legyenek E, F, G normált terek, és tekintsük az

$$f : \mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G) \to \mathscr{L}(E;G); \quad (u,v) \mapsto v \circ u$$

folytonos bilineáris operátort. Mutassuk meg, hogy minden $(u,v) \in \mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G)$ esetén $(\mathrm{D}f)(u,v) \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G); \mathscr{L}(E;G))$ az a folytonos lineáris operátor, amelyre $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G)$ esetén

$$((\mathrm{D}f)(u,v))(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{v} \circ u + v \circ \mathbf{u};$$

továbbá

$$\mathrm{D}^2 f : \mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G) \to \mathscr{L}_2(\mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G); \mathscr{L}(E;G))$$

az a konstansfüggvény, amelynek értéke a

$$(\mathscr{L}(E;F) \times \mathscr{L}(F;G))^2 \to \mathscr{L}(E;G); \quad ((\mathbf{u},\mathbf{v}),(\mathbf{u}',\mathbf{v}')) \mapsto \mathbf{v} \circ \mathbf{u}' + \mathbf{v}' \circ \mathbf{u}$$

folytonos bilineáris operátor.

4. (*A kanonikus nyom-forma értelmezése.*) a) Legyen $n \in \mathbb{N}$ és K test. Tekintsük a

$$\mathrm{tr}_{K^n} : \mathrm{M}_n(K) \to K; \quad (x_{i,j})_{(i,j) \in n \times n} \mapsto \sum_{i \in n} x_{i,i}$$

leképezést. Ez *lineáris funkcionál* az $n \times n$-es, K-beli együtthatós mátrixok vektortere felett, és rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $A \in \mathscr{GL}(n,K)$ és $X \in \mathrm{M}_n(K)$ esetén

$$\mathrm{tr}_{K^n}(A \cdot X \cdot A^{-1}) = \mathrm{tr}_{K^n}(X),$$

ahol $\cdot$ a mátrixszorzást jelöli (IV. fejezet, 3. pont).

b) Legyen E véges dimenziós vektortér a K test felett és $n := \dim(E)$. Az E vektortér minden $(e_i)_{i\in n}$ algebrai bázisára jelölje $(e_i^*)_{i\in n}$ azt az algebrai bázist E^*-ban, amelyre $i, j \in n$ esetén $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. Legyen $\mathscr{B} := (e_i)_{i\in n}$ algebrai bázis E-ben, és tekintsük a

$$\mathrm{tr}_{E,\mathscr{B}} : \mathbf{L}(E;E) \to K; \quad u \mapsto \mathrm{tr}_{K^n}((e_j^*(u(e_i)))_{(i,j)\in n\times n})$$

leképezést. Mutassuk meg, hogy adott $u \in \mathbf{L}(E;E)$ esetén a $\mathrm{tr}_{E,\mathscr{B}}(u) \in K$ elem *független* a $\mathscr{B}$ algebrai bázis választásától, tehát egyértelműen létezik olyan

$$\mathrm{tr}_E : \mathbf{L}(E;E) \to K$$

leképezés, hogy minden $u \in \mathbf{L}(E;E)$ operátorra és az E minden $\mathscr{B}$ algebrai bázisára

$$\mathrm{tr}_E(u) := \mathrm{tr}_{E,\mathscr{B}}(u).$$

Ez a tr leképzés *lineáris funkcionál*, és ezt az $\mathbf{L}(E;E)$ operátortér feletti *kanonikus nyomformának* nevezzük.

5. Vizsgáljuk meg a div rot és a rot grad differenciáloperátorokat!

4. fejezet

A véges növekmények formulája és elemi következményei

4.1. A véges növekmények formulája

4.1.1. Lemma. *Legyen F valós normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, valamint $f : [a, b] \to F$ és $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyek az $]a, b[$ intervallum minden pontjában differenciálhatóak. Ha minden $t \in]a, b[$ esetén $\|(\mathrm{D}f)(t)\| \leq (\mathrm{D}g)(t)$, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Ennek a rendkívül fontos állításnak két egészen különböző bizonyítását adjuk. (*I. bizonyítás*). Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített, és vezessük be a

$$E := \{t \in [a, b] \mid \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon\}$$

halmazt. Ekkor E korlátos halmaz $\mathbb{R}$-ben és természetesen $a \in E$, vagyis E nem üres, ezért jól értelmezett a $c := \sup E$ valós szám. Nyilvánvaló, hogy a

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon - \|f(t) - f(a)\|$$

függvény folytonos, és $h(a) = \varepsilon > 0$, ezért létezik olyan $\delta \in]0, b - a[$ valós szám, hogy minden $t \in [a, a + \delta[$ pontban $h(t) > 0$, vagyis $t \in E$. Ebből következik, hogy $a < c$. Továbbá, $c := \sup E \in \overline{E}$ miatt létezik olyan E-ben haladó $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $h(c_n) \geq 0$, és h folytonos c-ben, így az átviteli elv alapján $h(c) = \lim\limits_{n\to\infty} h(c_n) \geq 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon$$

teljesül, vagyis $c \in E$. Meg fogjuk mutatni, hogy $c = b$. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $c < b$, így $c \in]a, b[$.

Ekkor f is és g is differenciálható c-ben, ezért minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz léteznek olyan $\delta_f, \delta_g \in]0, b - c[$ valós számok, amelyekre minden $t \in]c, c + \delta_f[$ esetén

$$\|f(t) - f(c) - ((\mathrm{D}f)(c))(t - c)\| \leq \varepsilon'|t - c|,$$

és minden $t \in]c, c + \delta_g[$ esetén

$$|g(t) - g(c) - ((\mathrm{D}g)(c))(t - c)| \leq \varepsilon'|t - c|.$$

Tehát ha $\delta := \min(\delta_f, \delta_g)$, akkor minden $t \in]c, c+\delta[$ esetén

$$\begin{aligned}\|f(t) - f(c)\| \leq \|(\mathrm{D}f)(c)\|(t-c) + \varepsilon'(t-c) \leq ((\mathrm{D}g)(c))(t-c) + \varepsilon'(t-c) \leq \\ \leq g(t) - g(c) + 2\varepsilon'(t-c).\end{aligned}$$

Ezért minden $t \in]c, c+\delta[$ pontra

$$\begin{aligned}\|f(t) - f(a)\| &\leq \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \leq \\ &\leq g(t) - g(c) + 2\varepsilon'(t-c) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon = \\ &= g(t) - g(a) + 2\varepsilon'(t-c) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Ebből látható, hogy ha $\varepsilon' \leq \varepsilon/2$, akkor az ε'-höz előzőek szerint megválasztott δ számra teljesül az, hogy minden $t \in]c, c+\delta[$ esetén

$$\begin{aligned}\|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + 2\varepsilon'(t-c) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \leq \\ \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t-c) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon = g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon,\end{aligned}$$

vagyis $t \in E$. Ez viszont ellentmond annak, hogy c felső korlátja E-nek, ami azt jelenti, hogy a $c < b$ indirekt feltevés helytelen.

Tehát $c = b$, következésképpen

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon$$

teljesül, ahol $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tetszőleges* szám. Ebből következik, hogy $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$, amit bizonyítani kellett.

(*II. bizonyítás*). Minden $u \in F'$ esetén $u \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amely az $]a, b[$ intervallum minden pontjában differenciálható, és $t \in]a, b[$, valamint $\|u\| \leq 1$ esetén

$$\|\mathrm{D}(u \circ f)(t)\| = \|u((\mathrm{D}f)(t))\| \leq \|u\| \|(\mathrm{D}f)(t)\| \leq \|(\mathrm{D}f)(t)\| \leq (\mathrm{D}g)(t).$$

Ezért $u \in F'$ és $\|u\| \leq 1$ esetén az $u \circ f$ és g függvényekre alkalmazhatjuk a differenciálszámítás első középértéktételének következményét (**ANA** 3.8.3.), vagyis

$$|u(f(b) - f(a))| = |(u \circ f)(b) - (u \circ f)(a)| \leq g(b) - g(a).$$

Ezért a **LIN** 2.4.7. tétel alkalmazásával

$$\|f(b) - f(a)\| = \sup_{\substack{u \in F' \\ \|u\| \leq 1}} |u(f(b) - f(a))| \leq g(b) - g(a)$$

adódik, amit bizonyítani kellett. ■

A bizonyításból látható, hogy f-re és g-re elegendő azt feltenni, hogy az $]a, b[$ intervallum minden pontjában *jobbról* differenciálhatóak, és minden $t \in]a, b[$ esetén $\|(\mathrm{D}_+ f)(t)\| \leq (\mathrm{D}_+ g)(t)$. Valójában a lemma még ennél gyengébb feltételek mellett is igazolható, de az f és g folytonossága lényeges az $[a, b]$ zárt intervallum minden pontjában (**1**. gyakorlat).

Ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor minden $x_1, x_2 \in E$ pontra már értelmeztük az $[\![x_1, x_2]\!]$ szakaszt E-ben (V. fejezet, 10. pont). Most $x_1, x_2 \in E$ esetén bevezetjük az

$$]\!]x_1, x_2[\![:= \{(1-t).x_1 + t.x_2 \mid t \in]0, 1[\}.$$

definíciót; ezt a halmazt x_1 és x_2 végpontú *nyílt szakasznak* nevezzük. Vigyázzunk arra, hogy ha E legalább kétdimenziós, akkor a nyílt szakaszok nem nyílt halmazok.

4.1.2. Tétel. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $x_1, x_2 \in E$ olyan pontok, hogy $[\![x_1, x_2]\!] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és f az $[\![x_1, x_2]\!]$ szakasz minden pontjában folytonos, továbbá az $]\!]x_1, x_2[\![$ nyílt szakasz minden pontjában differenciálható. Ekkor fennáll az*

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \Big(\sup_{x \in]\!]x_1, x_2[\![} \|(\mathrm{D}f)(x)\| \Big) \|x_2 - x_1\|$$

egyenlőtlenség, amit a **véges növekmények formulájának** *nevezünk.*

Bizonyítás. Ha $\sup_{x \in]\!]x_1, x_2[\![} \|(\mathrm{D}f)(x)\| = +\infty$, akkor $\|x_1 - x_2\| > 0$ miatt az egyenlőtlenség jobb oldalán $+\infty$ áll, tehát az állítás igaz (és persze *érdektelen*). Ezért feltesszük, hogy $C := \sup_{x \in]\!]x_1, x_2[\![} \|(\mathrm{D}f)(x)\| < +\infty$

(I) Először feltesszük, hogy E és F *valós* normált terek. Minden $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ pontra legyen

$$\varphi_{x_0} : \mathrm{Dom}(f) \setminus \{x_0\} \to F; \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0) - ((\mathrm{D}f)(x_0))(x - x_0)}{\|x - x_0\|}.$$

A differenciálhatóság definíciója szerint minden $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \ni x_0$-ra

$$\lim_{x \to x_0} \varphi_{x_0}(x) = 0.$$

Értelmezzük a következő függvényt:

$$\tilde{f} : [0, 1] \to F; \quad t \mapsto f(x_1 + t.(x_2 - x_1)).$$

Ekkor minden $t, t_0 \in]0, 1[$ valós számra, $t \neq t_0$ esetén egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\frac{\tilde{f}(t) - \tilde{f}(t_0)}{t - t_0} = ((\mathrm{D}f)(x_1 + t_0.(x_2 - x_1)))(x_2 - x_1) +$$
$$+ \frac{|t - t_0|}{t - t_0} \varphi_{x_1 + t_0.(x_2 - x_1)}(x_1 + t.(x_2 - x_1)) \|x_2 - x_1\|,$$

amiből következik, hogy minden $t_0 \in]0, 1[$ valós számra

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\tilde{f}(t) - \tilde{f}(t_0)}{t - t_0} = ((\mathrm{D}f)(x_1 + t_0.(x_2 - x_1)))(x_2 - x_1).$$

Ez azt jelenti, hogy az $\tilde{f} : [0, 1] \to F$ függvény a $]0, 1[$ intervallum minden pontjában differenciálható, és $t_0 \in]0, 1[$ esetén

$$(\mathrm{D}\tilde{f})(t_0) = ((\mathrm{D}f)(x_1 + t_0.(x_2 - x_1)))(x_2 - x_1).$$

Ugyanakkor az is látható, hogy ha bevezetjük a

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto C\|x_2 - x_1\|t$$

függvényt, akkor ez minden $t \in]0, 1[$ pontban differenciálható, és

$$\|(\mathrm{D}\tilde{f})(t)\| = \|((\mathrm{D}f)(x_1 + t.(x_2 - x_1)))(x_2 - x_1)\| \leq$$
$$\leq \|(\mathrm{D}f)(x_1 + t_0.(x_2 - x_1))\| \|x_2 - x_1\| \leq C\|x_2 - x_1\| = (\mathrm{D}g)(t).$$

Nyilvánvaló, hogy az $\tilde{f}$ és g függvények folytonosak a $[0,1]$ intervallumon, így az előző lemma alapján fennáll a

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| = \|\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)\| \leq g(1) - g(0) = C\|x_2 - x_1\|$$

egyenlőtlenség, amit bizonyítani kellett.

(II) Ha E és F *komplex* normált terek, akkor az $E_{\mathbb{R}}$ és $F_{\mathbb{R}}$ valós normált terekre, az $f : E_{\mathbb{R}} \rightarrowtail F_{\mathbb{R}}$ függvényre és az $x_1, x_2 \in E$ pontokra alkalmazva (I)-t azonnal kapjuk az egyenlőtlenséget. ■

Megjegyezzük, hogy a tétel feltételei mellett *előfordulhat*, hogy

$$\sup_{x \in]\!]x_1, x_2[\![} \|(\mathrm{D}f)(x)\| = +\infty,$$

vagy ami ugyanaz: az f deriváltfüggvénye *nem korlátos* az $]\!]x_1, x_2[\![$ nyílt szakaszon (**1.** gyakorlat).

4.1.3. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $x_1, x_2 \in E$ olyan pontok, hogy $[\![x_1, x_2]\!] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és f az $[\![x_1, x_2]\!]$ szakasz minden pontjában folytonos, továbbá az $]\!]x_1, x_2[\![$ nyílt szakasz minden pontjában differenciálható. Ekkor minden $u \in \mathscr{L}(E; F)$ operátorra fennáll az*

$$\|f(x_2) - f(x_1) - u(x_2 - x_1)\| \leq \Big(\sup_{x \in]\!]x_1, x_2[\![} \|(\mathrm{D}f)(x) - u\| \Big) \|x_2 - x_1\|$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Elegendő a véges növekmények formuláját alkalmazni f helyett az $f - u$ függvényre, figyelembe véve, hogy az $u : E \to F$ folytonos lineáris operátor mindenütt differenciálható, és minden $x \in]\!]x_1, x_2[\![$ esetén teljesül a $(\mathrm{D}(f - u))(x) = (\mathrm{D}f)(x) - u$ egyenlőség. ■

Nyilvánvaló, hogy a véges növekmények formulája a fenti következménynek az a speciális esete, amikor $u := 0$, tehát a tétel és az imént megfogalmazott következménye egymással *ekvivalens* állítások. Ezért a következményben szereplő (valamivel általánosabb) egyenlőtlenséget is a *véges növekmények formulájának* nevezzük.

4.1.4. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $x_1, x_2 \in E$ olyan pontok, hogy $[\![x_1, x_2]\!] \subseteq \mathrm{Dom}(Df)$, tehát f az $[\![x_1, x_2]\!]$ zárt szakasz minden pontjában differenciálható. Ekkor fennáll az*

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \Big(\sup_{x \in [\![x_1, x_2]\!]} \|(\mathrm{D}f)(x)\| \Big) \|x_2 - x_1\|$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A hipotézis szerint f az $]\!]x_1, x_2[\![$ nyílt szakasz minden pontjában differenciálható, és az $[\![x_1, x_2]\!]$ zárt szakasz minden pontjában folytonos, hiszen ennek minden pontjában differenciálható is. Ezért teljesülnek a 4.1.2. tétel feltételei f-re és az $[\![x_1, x_2]\!]$ szakaszra, tehát

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \Big(\sup_{x \in]\!]x_1, x_2[\![} \|(\mathrm{D}f)(x)\| \Big) \|x_2 - x_1\| \leq \Big(\sup_{x \in [\![x_1, x_2]\!]} \|(\mathrm{D}f)(x)\| \Big) \|x_2 - x_1\|. \blacksquare$$

4.2. Konvex halmazon korlátos deriváltú függvények

4.2.1. Állítás. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan konvex és nyílt halmaz, hogy f az U minden pontjában differenciálható, és $C := \sup_{x\in U} \|(\mathrm{D}f)(x)\| < +\infty$ (vagyis az f deriváltfüggvénye korlátos az U halmazon). Ekkor f az U halmazon C együtthatójú Lipschitz-függvény, tehát minden $U \ni x_1, x_2$-re*

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq C\|x_2 - x_1\|.$$

Bizonyítás. Ha $x_1, x_2 \in U$, akkor az U konvexitása miatt $\llbracket x_1, x_2\rrbracket \subseteq U$, így f az $\llbracket x_1, x_2\rrbracket$ zárt szakasz minden pontjában folytonos, továbbá az $\rrbracket x_1, x_2\llbracket$ nyílt szakasz minden pontjában differenciálható. Ezért a véges növekmények formuláját és a C szám definícióját alkalmazva

$$\begin{aligned}\|f(x_2) - f(x_1)\| &\leq \Big(\sup_{x\in\rrbracket x_1,x_2\llbracket} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\Big)\|x_2 - x_1\| \leq \\ &\leq \Big(\sup_{x\in U} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\Big)\|x_2 - x_1\| =: C\|x_2 - x_1\|\end{aligned}$$

adódik. ■

Vigyázzunk arra, hogy az előző állításban az U halmaz *konvex* volt; ha nem így volna, akkor léteznének olyan $x_1, x_2 \in U$ pontok, amelyekre $\llbracket x_1, x_2\rrbracket \not\subseteq U$, így az $\rrbracket x_1, x_2\llbracket$ nyílt szakaszra a véges növekmények formulája *nem alkalmazható*, hiszen ekkor lehetséges, hogy e nyílt szakasz valamely pontjában f nem is értelmezett, vagy értelmezve van, de ott nem folytonos, vagy nem differenciálható (**2**. gyakorlat). Z

4.3. A megszüntethető szingularitások tétele

4.3.1. Állítás. (A megszüntethető szingularitások tétele) *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $U \subseteq E$ olyan nyílt halmaz, valamint $\mathfrak{a} \in U$ olyan pont, hogy $U \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Tegyük fel, hogy f differenciálható az $U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon, és a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban. Ha*

a) $\lim_{\mathfrak{a}} f$ *létezik, vagy*

b) $\dim(E_{\mathbb{R}}) \geq 2$ *és F teljes,*

akkor f-nek létezik a határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, és az

$$\tilde{f} : \mathrm{Dom}(f) \cup \{\mathfrak{a}\} \to F; \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{, ha } x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}; \\ \lim_{\mathfrak{a}} f & \text{, ha } x = \mathfrak{a} \end{cases}$$

függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, továbbá

$$(\mathrm{D}\tilde{f})(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} (\mathrm{D}f)(x) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} (\mathrm{D}\tilde{f})(x),$$

tehát a $\mathrm{D}\tilde{f}$ defiváltfüggvény az $\mathfrak{a}$ pontban folytonos.

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy ha $\dim(E_{\mathbb{R}}) \geq 2$ és F teljes, akkor $\lim_{\mathfrak{a}} f$ létezik. A határértékekre vonatkozó átviteli elv alapján elegendő azt igazolni, hogy ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathrm{Dom}(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathfrak{a}$, akkor az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$

sorozat konvergens F-ben. Az F teljessége miatt elég azt igazolni, hogy $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat F-ben.

A $\mathrm{D}f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ezért vehetünk olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U$, és $\mathrm{D}f$ *korlátos* a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon; legyen

$$C := \sup_{x\in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{a}\}} \|(\mathrm{D}f)(x)\|.$$

Az r-hez vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $n > N$ természetes számra $x_n \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$. Legyenek $m, n \in \mathbb{N}$ olyan rögzített számok, amelyekre $m, n > N$. A $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömb konvexitása folytán $[\![x_m, x_n]\!] \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$. Két eset lehetséges.

1) $\mathfrak{a} \notin [\![x_m, x_n]\!]$. Ekkor $[\![x_m, x_n]\!] \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq U \setminus \{\mathfrak{a}\}$, tehát f az $[\![x_m, x_n]\!]$ zárt szakasz minden pontjában differenciálható. Ezért a véges növekmények formulája alapján

$$\begin{aligned}\|f(x_m) - f(x_n)\| &\leq \Big(\sup_{x\in]\!]x_m,x_n[\![} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\Big)\|x_m - x_n\| \leq \\ &\leq \Big(\sup_{x\in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{a}\}} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\Big)\|x_m - x_n\| =: C\|x_m - x_n\|.\end{aligned}$$

2) $\mathfrak{a} \in [\![x_m, x_n]\!]$. A $\dim(E_{\mathbb{R}}) \geq 2$ feltétel alapján létezik olyan $e \in E$ vektor, amelyre minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $e \neq t.(x_m - x_n)$. Természetesen az e megválasztható úgy, hogy $\|e\| < r$ legyen. Legyen $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}$-ben haladó zérussorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $0 < t_k < 1$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathfrak{a} \notin [\![x_m, \mathfrak{a} + t_k.e]\!]$ és $\mathfrak{a} \notin [\![\mathfrak{a} + t_k.e, x_n]\!]$, következésképpen $[\![x_m, \mathfrak{a} + t_k.e]\!], [\![\mathfrak{a} + t_k.e, x_n]\!] \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq U \setminus \{\mathfrak{a}\}$, tehát f a $[\![x_m, \mathfrak{a}+t_k.e]\!]$ és $[\![\mathfrak{a}+t_k.e, x_n]\!]$ zárt szakaszok minden pontjában differenciálható. Ezért a véges növekmények formulája alapján minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\begin{aligned}\|f(x_m) - f(\mathfrak{a} + t_k.e)\| &\leq \Big(\sup_{x\in]\!]x_m,\mathfrak{a}+t_k.e[\![} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\Big)\|x_m - \mathfrak{a} - t_k.e\| \leq \\ &\leq \Big(\sup_{x\in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{a}\}} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\Big)\|x_m - \mathfrak{a} - t_k.e\| =: C\|x_m - \mathfrak{a} - t_k.e\|,\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}\|f(\mathfrak{a} + t_k.e) - f(x_n)\| &\leq \Big(\sup_{x\in]\!]\mathfrak{a}+t_k.e,x_n[\![} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\Big)\|\mathfrak{a} + t_k.e - x_n\| \leq \\ &\leq \Big(\sup_{x\in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{a}\}} \|(\mathrm{D}f)(x)\|\Big)\|\mathfrak{a} + t_k.e - x_n\| =: C\|\mathfrak{a} + t_k.e - x_n\|.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\begin{aligned}\|f(x_m) - f(x_n)\| &\leq \|f(x_m) - f(\mathfrak{a} + t_k.e)\| + \|f(\mathfrak{a} + t_k.e) - f(x_n)\| \leq \\ &\leq C(\|x_m - \mathfrak{a} - t_k.e\| + \|\mathfrak{a} + t_k.e - x_n\|).\end{aligned}$$

Ebből kapjuk, hogy fennáll az

$$\begin{aligned}\|f(x_m) - f(x_n)\| &\leq C \lim_{k\to\infty}(\|x_m - \mathfrak{a} - t_k.e\| + \|\mathfrak{a} + t_k.e - x_n\|) = \\ &= C(\|x_m - \mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{a} - x_n\|) = C\|x_m - x_n\|\end{aligned}$$

egyenlőtlenség. Itt az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy $\mathfrak{a} \in [\![x_m, x_n]\!]$ miatt $\|x_m - \mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{a} - x_n\| = \|x_m - x_n\|$.

Tehát minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra, ha $m, n > N$, akkor $\|f(x_m) - f(x_n)\| \leq C\|x_m - x_n\|$, ezért $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat F-ben.

(II) Most megmutatjuk, hogy ha f-nek létezik a határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor az $\tilde{f}$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $(\mathrm{D}\tilde{f})(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f)(x)$.

Legyen $u := \lim_{x\to\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f)(x) \in \mathscr{L}(E; F)$, ami a hipotézis szerint létezik, továbbá rögzítsünk olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U$. Ekkor minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén:

– az $\tilde{f}$ függvény folytonos az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ szakasz minden pontjában, mert az $]\!]\mathfrak{a}, x]\!] \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon egyenlő f-fel, amely itt folytonos, és a *definíció szerint* $\tilde{f}(\mathfrak{a}) := \lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}} \tilde{f}$, hiszen $f = \tilde{f}$ az $U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon, és U környezete $\mathfrak{a}$-nak;

– az $\tilde{f}$ függvény differenciálható az $]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ nyílt szakasz minden pontjában, mert ez részhalmaza $U \setminus \{\mathfrak{a}\}$-nak, és $f = \tilde{f}$ ezen a halmazon (és a differenciálhatóság lokalitását alkalmazzuk).

Ezért a véges növekmények formuláját alkalmazva az $\tilde{f}$ függvényre és minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ szakaszra kapjuk, hogy

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(\mathfrak{a}) - u(x - \mathfrak{a})\| \leq \Big(\sup_{z\in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \|(\mathrm{D}\tilde{f})(z) - u\|\Big)\|x - \mathfrak{a}\|.$$

Legyen most $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített, és $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\delta < r$, és minden $z \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén $\|(\mathrm{D}f)(z) - u\| < \varepsilon$. Ekkor minden $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra $]\!]\mathfrak{a}, x[\![\subseteq \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, tehát

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(\mathfrak{a}) - u(x - \mathfrak{a})\| \leq \varepsilon\|x - \mathfrak{a}\|,$$

vagyis $\tilde{f}$ differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és $(\mathrm{D}\tilde{f})(\mathfrak{a}) = u = \lim_{\mathfrak{a}} \mathrm{D}\tilde{f}$ teljesül. ■

Később látni fogjuk, hogy a fenti feltételek mellett az $\tilde{f}$ függvény *szigorúan differenciálható* az $\mathfrak{a}$ pontban. Megjegyezzük, hogy ha $\dim(E_\mathbb{R}) = 1$ és F teljes, akkor az f-re vonatkozó többi hipotézisből nem következik az f határértékének létezése az $\mathfrak{a}$ pontban (**3**. gyakorlat).

4.3.2. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és az $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan nyílt halmaz, valamint $\mathfrak{a} \in U$ olyan pont, hogy f differenciálható az $U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon, és a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban. Ha f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor itt differenciálható is, és*

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f)(x)$$

teljesül, tehát a $\mathrm{D}f$ defiváltfüggvény az $\mathfrak{a}$ pontban folytonos.

Bizonyítás. A folytonosság és a függvényhatárérték létezésének kapcsolatát ismerve mondhatjuk, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim_{\mathfrak{a}} f = f(\mathfrak{a})$, így az előző tételben bevezetett $\tilde{f}$ függvény egyenlő f-fel. Ezért az állítás nyilvánvalóan következik a megszüntethető szingularitások tételéből. ■

4.4. Összefüggő halmazon nulla deriváltú függvények

4.4.1. Állítás. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan összefüggő és nyílt halmaz, amelyen f differenciálható, és $\mathrm{D}f = 0$ az U halmazon. Ekkor f az U halmazon állandó.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy U nem üres; legyen $c \in U$ egy rögzített pont. Megmutatjuk, hogy minden $U \ni x$-re $f(x) = f(c)$.

Legyen $x \in U$. Az U nyílt halmaz összefüggősége miatt van olyan $n \in \mathbb{N}^*$ és olyan $(x_k)_{0 \le k \le n}$ rendszer E-ben, hogy $x_0 = c$, $x_n = x$ és minden $0 \le k < n$ természetes számra $[\![x_k, x_{k+1}]\!] \subseteq U$. Ekkor minden $0 \le k < n$ természetes szám esetében az $[\![x_k, x_{k+1}]\!]$ zárt szakaszra és az f függvényre alkalmazható a véges növekmények formulája, tehát

$$\|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| \le \Big(\sup_{z \in]\!]x_k, x_{k+1}[\![} \|(\mathrm{D}f)(z)\| \Big) \|x_{k+1} - x_k\| = 0,$$

hiszen $]\!]x_k, x_{k+1}[\![\subseteq U$ és minden $U \ni z$-re $(\mathrm{D}f)(z) = 0$. Ezért minden $0 \le k < n$ természetes számra $f(x_k) = f(x_{k+1})$, így $f(x) = f(x_n) = f(x_0) = f(c)$. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állításban egészen lényeges az U halmaz *összefüggősége* (**2**. gyakorlat).

4.4.2. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $\Omega \subseteq E$ összefüggő nyílt halmaz és $g : \Omega \to \mathscr{L}(E; F)$ függvény. Ha $f, f' : \Omega \to F$ olyan differenciálható függvények, hogy $\mathrm{D}f = g$ és $\mathrm{D}f' = g$, akkor létezik olyan $c \in F$, hogy $f' = f + c$.*

Bizonyítás. Ekkor $f' - f : \Omega \to F$ olyan differenciálható fügvény, hogy $\mathrm{D}(f' - f) = 0$, ezért az előző állítás alapján $f' - f$ konstansfüggvény. ■

4.5. A véges növekmények formulájának általánosítása

4.5.1. Tétel. *Legyen F valós normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, valamint $f : [a, b] \to F$ és $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekhez létezik olyan $A \subseteq [a, b[$ megszámlálható halmaz, hogy f és g az $[a, b[\setminus A$ halmaz minden pontjában jobbról differenciálható. Ha g monoton növő, és minden $[a, b[\setminus A \ni t$-re $\|(\mathrm{D}_+ f)(t)\| \le (\mathrm{D}_+ g)(t)$, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\| \le g(b) - g(a).$$

Bizonyítás. Rögzítsünk olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Minden $N \subseteq \mathbb{N}$ halmazra a

$$\sum_{k \in N} \varepsilon_k := \sup_{H \subseteq N,\ H \text{ véges}} \sum_{k \in H} \varepsilon_k$$

definíciót alkalmazzuk, amiből látható, hogy

$$\sum_{k \in N} \varepsilon_k \le \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty.$$

Nyilvánvaló, hogy ha $N, N' \subseteq \mathbb{N}$ és $N \subseteq N'$, akkor $\sum\limits_{k \in N} \varepsilon_k \le \sum\limits_{k \in N'} \varepsilon_k$. Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to A$ rögzített *szürjekció* és minden $[a, b] \ni t$-re

$$N(t) := \{k \in \mathbb{N} | \sigma(k) < t\}.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, és vezessük be a

$$E := \left\{ t \in [a, b] \;\middle|\; \|f(t) - f(a)\| \le g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon \sum_{k \in N(t)} \varepsilon_k \right\}$$

halmazt. Nyilvánvaló, hogy $a \in E$, tehát E nem üres, korlátos halmaz $\mathbb{R}$-ben; legyen $c := \sup E$.

Először megmutatjuk, hogy $c \in E$. Ehhez legyen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\|f(c_n) - f(a)\| \le g(c_n) - g(a) + \varepsilon(c_n - a) + \varepsilon \sum_{k\in N(c_n)} \varepsilon_k \le$$
$$\le g(c_n) - g(a) + \varepsilon(c_n - a) + \varepsilon \sum_{k\in N(c)} \varepsilon_k,$$

hiszen $c_n \le c$, tehát $N(c_n) \subseteq N(c)$. Ebből az f és g folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\|f(c) - f(a)\| = \lim_{n\to\infty} \|f(c_n) - f(a)\| \le$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \Big(g(c_n) - g(a) + \varepsilon(c_n - a) + \varepsilon \sum_{k\in N(c)} \varepsilon_k\Big) = g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \sum_{k\in N(c)} \varepsilon_k,$$

tehát $c \in E$.

Most megmutatjuk, hogy $c = b$. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $c < b$; ekkor két eset lehetséges.

1) $c \notin A$. Ekkor f és g jobbról differenciálhatóak a c pontban, és fennáll a $\|(\mathrm{D}_+f)(c)\| \le (\mathrm{D}_+g)(c)$ egyenlőtlenség. Ezért vehetünk olyan $z \in F$ vektort, amelyre $\|z\| \le 1$ és $(\mathrm{D}_+f)(c) = (\mathrm{D}_+g)(c).z$. Ekkor az $f - g.z : [a, b] \to F$ függvény a c pontban jobbról differenciálható, és $(\mathrm{D}_+(f - g.z))(c) = (\mathrm{D}_+f)(c) - (\mathrm{D}_+g)(c).z = 0$. Ezért van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $c + \delta < b$ és minden $]c, c + \delta[\ni t$-re

$$\|f(t) - f(c) - (g(t) - g(c)).z\| =$$
$$= \|(f - g.z)(t) - (f - g.z)(c) - ((\mathrm{D}_+(f - g.z))(c))(t - c)\| \le \varepsilon(t - c).$$

Ebből, és a g monoton növéséből következik, hogy $t \in]c, c + \delta[$ esetén

$$\|f(t) - f(c)\| \le (g(t) - g(c))\|z\| + \varepsilon(t - c) \le g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c),$$

ezért $c \in E$ miatt

$$\|f(t) - f(a)\| \le \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \le$$
$$\le g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \sum_{k\in N(c)} \varepsilon_k =$$
$$= g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon \sum_{k\in N(c)} \varepsilon_k \le g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon \sum_{k\in N(t)} \varepsilon_k,$$

vagyis $t \in E$. Ez azt jelenti, hogy a $]c, c+\delta[$ intervallum minden eleme benne van E-ben, ami viszont ellentmond annak, hogy c az E halmaz felső korlátja.

2) $c \in A$. Ekkor rögzíthetünk olyan $m \in \mathbb{N}$ számot, hogy $c = \sigma(m)$. Az f folytonos c-ben, ezért az $\varepsilon\varepsilon_m > 0$ valós számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $c + \delta < b$, és minden $]c, c+\delta[\ni t$-re $\|f(t) - f(c)\| < \varepsilon\varepsilon_m$. Felhasználva azt, hogy $c \in E$, könnyen kapjuk hogy minden $t \in]c, c + \delta[$ esetén

$$\|f(t) - f(a)\| \le \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \le$$
$$\le \varepsilon\varepsilon_m + g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \sum_{k\in N(c)} \varepsilon_k \le g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon\Big(\varepsilon_m + \sum_{k\in N(c)} \varepsilon_k\Big) \le$$
$$\le g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon \sum_{k\in N(t)} \varepsilon_k,$$

hiszen g monoton növő, és

$$\varepsilon_m + \sum_{k\in N(c)} \varepsilon_k = \sum_{k\in N(c)\cup\{m\}} \varepsilon_k,$$

valamint $N(c)\cup\{m\} \subseteq N(t)$ teljesül, mert $\sigma(m) = c < t$. Ez azt jelenti, hogy a $]c, c+\delta[$ intervallum minden eleme benne van E-ben, ami viszont ellentmond annak, hogy c az E halmaz felső korlátja.

Ezzel megmutattuk, hogy $b = c \in E$, tehát

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon \sum_{k\in N(b)} \varepsilon_k$$

teljesül, ahol $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tetszőleges* valós szám. Ebből ε-nal 0-hoz tartva következik, hogy $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$. ■

4.5.2. Következmény. *Legyen F valós normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, valamint $f : [a, b] \to F$ olyan folytonos függvény, amelyhez létezik olyan $A \subseteq [a, b[$ megszámlálható halmaz, hogy f az $[a, b[\setminus A$ halmaz minden pontjában jobbról differenciálható. Ekkor minden $s, t \in [a, b]$ pontra:*

$$\|f(s) - f(t)\| \leq \Big(\sup_{t'\in[a,b[\setminus A} \|(\mathrm{D}_+ f)(t')\|\Big) \cdot |s-t|.$$

Bizonyítás. Ha $\sup_{t'\in[a,b[\setminus A} \|(\mathrm{D}_+ f)(t')\| = +\infty$, akkor

– $s, t \in [a, b]$ és $s \neq t$ esetén a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldalán $+\infty$ áll, mert minden $c \in \mathbb{R}_+^*$ számra (definíció szerint) $(+\infty)\cdot c = +\infty$;

– $s, t \in [a, b]$ és $s = t$ esetén a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán 0 és a jobb oldalán is 0 áll, mert (definíció szerint) $(+\infty)\cdot 0 = 0$;

tehát az egyenlőtlenség helyes (és nyilvánvalóan tartalmatlan). Ezért feltehető, hogy $M := \sup_{t'\in[a,b[\setminus A} \|(\mathrm{D}_+ f)(t')\| < +\infty$ és $t, s \in [a, b]$ olyanok, hogy $t < s$. Vezessük be a $g : [t, s] \to \mathbb{R}$; $t' \mapsto M \cdot t'$ függvényt, amely nyilvánvalóan olyan folytonos, monoton növő függvény, amely az $[t, s]\setminus\{t, s\}$ halmazon differenciálható, tehát jobbról is differenciálható, és minden $t' \in [t, s[\setminus(A\cup\{t, s\})$ esetén $\|(\mathrm{D}_+ f)(t')\| \leq M = (\mathrm{D}g)(t') = (\mathrm{D}_+ f)(t')$. Alkalmazva az előző tételt az $f|_{[t,s]}$ leszűkített függvényre kapjuk, hogy $\|f(s) - f(t)\| \leq g(s) - g(t) = M\cdot(s-t)$, amit bizonyítani kellett. ■

4.6. Gyakorlatok

2. Értelmezzük az $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ függvényt. Ekkor f folytonos és a $]0, 1[$ intervallumon differenciálható, így a véges növekmények formulája szerint

$$|f(1) - f(0)| \leq \sup_{x\in]0,1[} |(\mathrm{D}f)(x)|$$

teljesül. Azonban ez az egyenlőtlenség *tartalmatlan*, mert $\sup_{x\in]0,1[} |(\mathrm{D}f)(x)| = +\infty$, vagyis $\mathrm{D}f$ *nem korlátos* a $]0, 1[$ intervallumon.

3. Értelmezzük az $U := \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*}]1/(k+1), 1/k[$ halmazt, és legyen $f : U \to \mathbb{R}$ az a függvény, amely minden $\mathbb{N}^* \ni k$-ra az $]1/(k+1), 1/k[$ intervallumon az $1/(k+1)$ értéket veszi fel. Ekkor f differenciálható függvény, és $\mathrm{D}f$ az azonosan 0 függvény U-n (ezért $\mathrm{D}f$ *korlátos* is U-n), azonban f *nem egyenletesen folytonos* U-n (és még kevésbé konstansfüggvény). Természetesen U *nem konvex*, vagyis *nem összefüggő* $\mathbb{R}$-ben.

4. Legyen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ az a függvény, amely minden pozitív számhoz 1-t és minden negatív számhoz -1-t rendel. Ekkor f differenciálható, és $\mathrm{D}f$ az azonosan 0 függvény az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n halmazon, tehát $\mathrm{D}f$-nek létezik határértéke a 0-ban, de f-nek *nincs határértéke* a 0 pontban. Ezért a megszüntethető szingularitások tételében fontos a $\dim(E_{\mathbb{R}}) \geq 2$ feltétel.

5. fejezet

Folytonos differenciálhatóság

5.1. A szigorú differenciálhatóság és a deriváltfüggvény folytonosságának kapcsolata

A következő állítás megvilágítja egy normált terek között ható függvény adott pontbeli szigorú differenciálhatóságának és a deriváltfüggvényének ugyanitt való folytonosságának kapcsolatát.

5.1.1. Állítás. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény és $\mathfrak{a} \in E$.*

a) *Ha az f függvény szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor a $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E; F)$ deriváltfüggvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban.*

b) *Ha $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$-nek, vagyis f az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén differenciálható és a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor f szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy f szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és minden $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \ni x_1, x_2$-re

$$\|f(x_2) - f(x_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1)\| \leq \varepsilon \|x_2 - x_1\|.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor minden $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \ni x$-re $\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(x)\| \leq 2\varepsilon$ teljesül, amiből következik, hogy $\mathrm{D}f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Valóban, legyen $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ rögzített pont; ekkor f differenciálható x-ben, így létezik olyan $\delta(x) \in]0, \delta - \|x - \mathfrak{a}\|[$ valós szám, hogy minden $\mathrm{B}_{\delta(x)}(x) \ni x'$-re fennáll az

$$\|f(x') - f(x) - ((\mathrm{D}f)(x))(x' - x)\| \leq \varepsilon \|x' - x\|$$

egyenlőtlenség. A $\delta(x)$ választása miatt $\mathrm{B}_{\delta(x)}(x) \subseteq \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$, így minden $x' \in \mathrm{B}_{\delta(x)}(x)$ pontra

$$\|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(x))(x' - x)\| \leq \|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x' - x) - f(x') + f(x)\| +$$
$$+ \|f(x') - f(x) - ((\mathrm{D}f)(x))(x' - x)\| \leq 2\varepsilon \|x' - x\|$$

teljesül. Ha $e \in E$ tetszőleges vektor, akkor nyilvánvalóan létezik olyan $t \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $x + t.e \in \mathrm{B}_{\delta(x)}(x)$, tehát az előző egyenlőtlenségbe x' helyére az $x + t.e$ vektort téve $\|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(x))(t.e)\| \leq 2\varepsilon\|t.e\|$ adódik, amiből t-vel osztva kapjuk, hogy $\|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(x))(e)\| \leq 2\varepsilon\|e\|$. Az operátornorma definíciója szerint ez azt jelenti, hogy $\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(x)\| \leq 2\varepsilon$.

b) Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$-nek és $\mathrm{D}f$ folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ és minden $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ pontra $\|(\mathrm{D}f)(x) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\| < \varepsilon$. Ha $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ tetszőleges pontok, akkor $[\![x_1, x_2]\!] \subseteq \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, tehát a véges növekmények formulája szerint

$$\begin{aligned}&\|f(x_2) - f(x_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1)\| \leq \\ &\leq \Big(\sup_{x \in]\!]x_1, x_2[\![} \|(\mathrm{D}f)(x) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\|\Big)\|x_2 - x_1\| \leq \varepsilon\|x_2 - x_1\|.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy f szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. ■

Vigyázzunk arra, hogy az előző állítás b) pontjában feltettük, hogy f az $\mathfrak{a}$ pont *valamely környezetén* is differenciálható, nemcsak az $\mathfrak{a}$ pontban. Az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2.\chi_{\mathbb{Q}}$ függvény példája mutatja, hogy lehetséges olyan eset, amikor egy függvény egy pontban *nem szigorúan differenciálható*, különben folytonos lenne a 0 pont valamely környezetén, holott csak 0-ban folytonos, de itt a deriváltfüggvény *folytonos*, mert ez a pont *izolált pontja* a deriváltfüggvény értelmezési tartományának.

5.1.2. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $U \subseteq E$ nyílt halmaz. Az f függvény pontosan akkor szigorúan differenciálható az U halmaz minden pontjában, ha a* $\mathrm{D}f$ *deriváltfüggvény folytonos az U halmaz minden pontjában.*

Bizonyítás. Az U halmaz nyíltsága miatt az ekvivalencia mindkét oldalán álló kijelentésből következik, hogy az U minden pontja belső pontja $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$-nek, így az előző állítás alapján minden $U \ni \mathfrak{a}$-ra az f pontosan akkor szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha $\mathrm{D}f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

5.2. A parciális deriváltfüggvények folytonossága

5.2.1. Tétel. *Legyen $(E_i)_{i \in I}$ normált terek véges rendszere, F normált tér, $f : \prod_{i \in I} E_i \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in \prod_{i \in I} E_i$ olyan pont, amely minden $I \ni i$-re belső pontja a* $\mathrm{Dom}(\partial_i f)$ *halmaznak, és amely belső pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Ha minden $I \ni i$-re a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor f szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. Arra az esetre bizonyítunk, amikor $I = n \in \mathbb{N}^*$; az általános eset könnyen visszavezethető erre. Vezessük be az

$$u : \prod_{i \in n} E_i \to F; \quad (x_i)_{i \in n} \mapsto \sum_{i \in n}((\partial_i f)(\mathfrak{a}))(x_i)$$

leképezést, amely folytonos lineáris operátor. Tudjuk, hogy ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = u$, tehát az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli szigorú differenciálhatóságához azt kell igazolnunk, hogy

$$\lim_{(x, x') \to (\mathfrak{a}, \mathfrak{a})} \frac{f(x') - f(x) - u(x' - x)}{\|x' - x\|} = 0$$

teljesül.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\varepsilon' < \varepsilon/n$. A feltétel alapján rögzíthetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és minden $i \in n$ esetén $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(\partial_i f)$, és $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ esetén $\|(\partial_i f)(x) - (\partial_i f)(\mathfrak{a})\| < \varepsilon'$. Meg fogjuk mutatni, hogy minden $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \ni x, x'$-re

$$\|f(x') - f(x) - u(x'-x)\| \leq \varepsilon \|x' - x\|$$

teljesül, és ezzel a bizonyítás kész lesz.

Legyenek $x, x' \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ rögzítettek, és minden $k \leq n$ természetes számra legyen $(x,x')_k \in \prod_{i\in n} E_i$ az a rendszer, amelyre $i \in n$ esetén

$$(x,x')_k(i) := \begin{cases} x_i & \text{, ha } i < k, \\ x'_i & \text{, ha } i \geq k. \end{cases}$$

Világos, hogy minden $k \leq n$ természetes számra $(x,x')_k \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$, valamint $(x,x')_0 = x'$ és $(x',x)_n = x$. Ezenkívül nyilvánvaló, hogy

$$f(x') - f(x) - u(x'-x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(f((x,x')_k) - f((x,x')_{k+1}) - ((\partial_k f)(\mathfrak{a}))(x'_k - x_k) \Big).$$

Ebből látható, hogy

$$\|f(x') - f(x) - u(x'-x)\| \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|f((x,x')_k) - f((x,x')_{k+1}) - ((\partial_k f)(\mathfrak{a}))(x'_k - x_k)\|,$$

tehát elég lesz azt megmutatni, hogy minden $k \in n$ esetén

$$\|f((x,x')_k) - f((x,x')_{k+1}) - ((\partial_k f)(\mathfrak{a}))(x'_k - x_k)\| \leq \varepsilon' \|x - x'\|$$

teljesül.

Ehhez először igazoljuk, hogy minden $k \in n$ és $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ esetén fennáll a $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}_k) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{k,x}))$ összefüggés. Valóban, ha $z \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}_k)$, akkor a $\tilde{z} := \mathrm{in}_{k,x}(z)$ pont eleme $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$-nak, tehát $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(\partial_k f)$ miatt $z = \tilde{z}_k \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{k,\tilde{z}})) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{k,x}))$, hiszen nyilvánvalóan $\mathrm{in}_{k,\tilde{z}} = \mathrm{in}_{k,x}$.

Legyen most $k \in n$ rögzített. Ekkor $(x,x')_k \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$, tehát az előző bekezdés szerint $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}_k) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{k,(x,x')_k}))$. Ugyanakkor $x_k, x'_k \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}_k)$, így $[\![x_k, x'_k]\!] \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{k,(x,x')_k}))$. Ez azt jelenti, hogy a véges növekmények formulája alkalmazható az $f \circ \mathrm{in}_{k,(x,x')_k} : E_k \rightarrowtail F$ parciális függvényre, az $[\![x_k, x'_k]\!]$ zárt szakaszra, és a $(\partial_k f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E_k; F)$ operátorra:

$$\Big\|(f \circ \mathrm{in}_{k,(x,x')_k})(x'_k) - (f \circ \mathrm{in}_{k,(x,x')_k})(x_k) - ((\partial_k f)(\mathfrak{a}))(x'_k - x_k)\Big\| \leq$$
$$\leq \Big(\sup_{z \in]\!]x'_k, x_k[\![} \Big\|(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{k,(x,x')_k}))(z) - (\partial_k f)(\mathfrak{a})\Big\|\Big) \|x'_k - x_k\|.$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{in}_{k,(x,x')_k}(x'_k) = (x,x')_k$ és $\mathrm{in}_{k,(x,x')_k}(x_k) = (x,x')_{k+1}$. Továbbá, $z \in]\!]x_k, x'_k[\![$ esetén a $\tilde{z} := \mathrm{in}_{k,(x,x')_k}(z)$ pontra

$$(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{k,(x,x')_k}))(z) = (\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{k,\tilde{z}}))(\tilde{z}_k) =: (\partial_k f)(\tilde{z}),$$

hiszen $z = \tilde{z}_k$ és $\mathrm{in}_{k,(x,x')_k} = \mathrm{in}_{k,\tilde{z}}$. Ebből következik, hogy minden $z \in]\!]x_k, x'_k[\![$ esetén

$$\left\|(\mathrm{D}(f \circ \mathrm{in}_{k,(x,x')_k}))(z) - (\partial_k f)(\mathfrak{a})\right\| = \left\|(\partial_k f)(\tilde{z}) - (\partial_k f)(\mathfrak{a})\right\| < \varepsilon',$$

hiszen $\tilde{z} \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$. Ilymódon a kapott egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\|f((x,x')_k) - f((x,x')_{k+1}) - ((\partial_k f)(\mathfrak{a}))(x'_k - x_k)\| \leq \varepsilon' \|x' - x\|,$$

amit bizonyítani kellett. ∎

5.2.2. Következmény. *Ha $(E_i)_{i \in I}$ normált terek véges rendszere, F normált tér, $f : \prod_{i \in I} E_i \rightarrowtail F$ függvény, és $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt halmaz, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Minden $i \in I$ esetén a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény folytonos az U halmaz minden pontjában.*

(ii) *Az f függvény az U halmaz minden pontjában szigorúan differenciálható.*

(iii) *A $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény folytonos az U halmaz minden pontjában.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ha $\mathfrak{a} \in U$, akkor az U nyíltsága és (i) szerint minden $I \ni i$-re $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(\partial_i f)$-nek, és a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, így az előző tétel alapján f szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

(ii)⇒(iii) A 5.1.1. állítás a) pontja szerint nyilvánvaló.

(iii)⇒(i) Jelölje E az $(E_i)_{i \in I}$ normált tér rendszer szorzatát. A (iii) szerint minden minden $x \in U$ pontra $x \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, így minden $I \ni i$-re $x \in \mathrm{Dom}(\partial_i f)$, és $(\partial_i f)(x) = ((\mathrm{D}f)(x)) \circ \mathrm{in}_{i,0}$. Tehát ha $i \in I$ esetén bevezetjük az

$$\alpha_i : \mathscr{L}(E; F) \to \mathscr{L}(E_i; F); \qquad u \mapsto u \circ \mathrm{in}_{i,0}$$

függvényt, akkor $\partial_i f = \alpha_i \circ (\mathrm{D}f)$ az U halmazon. Nyilvánvaló, hogy $i \in I$ esetén α_i folytonos (lineáris operátor), és az a) szerint a $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E; F)$ függvény folytonos az U halmaz minden pontjában, ezért ezek kompozíciója is folytonos az U minden pontjában, következésképpen a $\partial_i f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E_i; F)$ függvény folytonos az U minden pontjában. ∎

5.3. Magasabb rendű folytonos differenciálhatóság

5.3.1. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, valamint $n \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az $f : E \rightarrowtail F$ függvény*

– **n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban**, *ha a $\mathrm{D}^n f : E \rightarrowtail \mathscr{L}_n(E; F)$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban;*

– **n-szer folytonosan differenciálható a H halmazon**, *ha f a H halmaz minden pontjában n-szer folytonosan differenciálható;*

– **n-szer folytonosan differenciálható**, *ha az f függvény n-szer folytonosan differenciálható a $\mathrm{Dom}(f)$ halmazon.*

A definíció alapján világos, hogy ha E és F normált terek, valamint $f : E \rightarrowtail F$ függvény, akkor

– az f függvény pontosan akkor 0-szor folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, hiszen $\mathrm{D}^0 f := f$;

– az f függvény pontosan akkor 1-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, vagyis f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $\mathrm{D}f$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, hiszen $\mathrm{D}^1 f := \mathrm{D}f$;

– az f függvény $n \in \mathbb{N}^*$ esetén pontosan akkor n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ *belső pontja* $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n-1}f)$-nek, vagyis az f függvény $n-1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén, és a $\mathrm{D}^{n-1}f$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $\mathrm{D}^{n-1}f$ deriváltfüggvénye folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, hiszen a magasabb rendű deriváltak definíciója szerint $\mathrm{D}(\mathrm{D}^{n-1}f) = \pi_{1,n}^{-1} \circ \mathrm{D}^n f$, és a $\pi_{1,n} : \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_n(E;F)) \to \mathscr{L}_{n+1}(E;F)$ kanonikus leképezés homeomorfizmus, így a $\mathrm{D}(\mathrm{D}^{n-1}f)$ és $\mathrm{D}^n f$ függvények $\mathfrak{a}$ pontbeli folytonossága ekvivalens egymással.

5.3.2. Jelölés. *Legyenek E, F normált terek, és $U \subseteq E$ halmaz. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor*

$$\mathrm{C}^n(U;F)$$

jelöli azon $U \to F$ függvények halmazát, amelyek n-szer folytonosan differenciálhatóak az U halmazon. Továbbá

$$\mathrm{C}^\infty(U;F) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{C}^n(U;F).$$

A 3.2.3. állítás alapján minden E, F normált térre, minden $f : E \to F$ folytonos affin függvényre $f \in \mathrm{C}^\infty(E;F)$.

A definíció alapján az f függvény pontosan akkor 0-szor folytonosan differenciálható az U halmazon, ha $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és f az U minden pontjában folytonos, tehát $\mathrm{C}^0(U;F)$ egyenlő az $U \to F$ folytonos függvények halmazával, vagyis $\mathrm{C}^0(U;F) = \mathscr{C}(U;F)$.

A következő állítás megmutatja, hogy a magasabb rendben való folytonos differenciálhatóság is lokális tulajdonság.

5.3.3. Állítás. (A magasabb rendű folytonos differenciálhatóság lokalitása) *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$, $g : E \rightarrowtail F$ függvények, $\mathfrak{a} \in E$, és tegyük fel, hogy létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, amelyre $U \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ az U halmazon. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az f függvény pontosan akkor n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha a g függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. Az $n = 0$ esetben az állítás a folytonosság lokalitása (**MET** 7.1.2.) miatt igaz.

Közvetlenül igazolni fogjuk, hogy $n \in \mathbb{N}^*$ esetén abból, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban következik, hogy a g függvény is n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, feltéve, hogy létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, amelyre $U \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ az U halmazon. (Tehát nem teljes indukciót fogunk alkalmazni!)

Vegyük $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezetét, amelyre $U \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ az U halmazon. A hipotézis szerint az f függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, így $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n-1}f)$-nek, tehát létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan W *nyílt* környezete, amelyre $W \subseteq U \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n-1}f)$. Ha $x \in W$, akkor W olyan környezete x-nek, hogy $W \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ az W halmazon, így a magasabb rendű differenciálás lokalitása (3.2.4.) miatt f-fel együtt g is $n-1$-szer differenciálható x-ben, és $(\mathrm{D}^{n-1}f)(x) = (\mathrm{D}^{n-1}g)(x)$. Ebből a differenciálhatóság lokalitása (2.1.1.) miatt kapjuk, hogy minden $x \in W$ esetén $\mathrm{D}^{n-1}f$ pontosan akkor differenciálható az x pontban, ha $\mathrm{D}^{n-1}g$ differenciálható x-ben, vagyis

$$W \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) = W \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{n-1}f)) = W \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{n-1}g)) = W \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g),$$

és ha $x \in W$ esetén $\mathrm{D}^{n-1}f$ differenciálható az x pontban, akkor $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^{n-1}f))(x) = (\mathrm{D}(\mathrm{D}^{n-1}g))(x)$, következésképpen

$$(\mathrm{D}^n f)(x) = \pi_{1,n-1}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^{n-1}f))(x)) = \pi_{1,n-1}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^{n-1}g))(x)) = (\mathrm{D}^n g)(x),$$

vagyis $\mathrm{D}^n f = \mathrm{D}^n g$ a $W \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$ halmazon. Mivel a hipotézis szerint a $\mathrm{D}^n f$ függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, így a folytonosság lokalitását (**MET** 7.1.2.) alkalmazva nyerjük, hogy $\mathrm{D}^n g$ is folytonos $\mathfrak{a}$-ban, vagyis a g függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

5.3.4. Következmény. *Legyenek E és F normált terek, és $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$. Ha $U \subseteq E$ nyílt halmaz és $V \subseteq U$ nyílt halmaz, akkor minden $f \in \mathrm{C}^n(U; F)$ függvényre $f|_V \in \mathrm{C}^n(V; F)$.*

Bizonyítás. (I) Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ha $f \in \mathrm{C}^n(U; F)$ és $\mathfrak{a} \in V$, akkor V olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy $V = V \cap U = \mathrm{Dom}(f|_V) \cap \mathrm{Dom}(f)$ és $f|_V = f$ a V halmazon, így abból, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban következik, hogy az $f|_V$ leszűkített függvény is n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban (5.3.3.). Ezért minden $f \in \mathrm{C}^n(U; F)$ esetén $f|_V \in \mathrm{C}^n(V; F)$.

(II) Ha $f \in \mathrm{C}^\infty(U; F)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $f \in \mathrm{C}^n(U; F)$, tehát (I) alapján minden $n \in \mathbb{N}$ számra $f|_V \in \mathrm{C}^n(V; F)$, ezért $f|_V \in \mathrm{C}^\infty(V; F)$. ■

5.3.5. Következmény. *Legyenek E és F normált terek, és $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$. Az $f : E \rightarrowtail F$ függvény pontosan akkor n-szer folytonosan differenciálható, ha létezik az E nyílt részhalmazainak olyan $(V_i)_{i \in I}$ rendszere, hogy $\mathrm{Dom}(f) = \bigcup_{i \in I} V_i$ és minden $i \in I$ esetén $f|_{V_i} \in \mathrm{C}^n(V_i; F)$.*

Bizonyítás. A feltétel szükséges, mert $n \geq 1$ esetén az n-szer folytonosan differenciálható függvények definíciós tartománya nyílt halmaz.

A feltétel elégséges is, mert ha $(V_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, amely rendelkezik az állításban szereplő tulajdonságokkal, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $\mathfrak{a} \in V_i$, és $f = f|_{V_i}$ a V_i halmazon, amely környezete $\mathfrak{a}$-nak, így $f|_{V_i} \in \mathrm{C}^n(V_i; F)$ és 5.3.3. alapján az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

5.3.6. Állítás. *Ha E és F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $\mathfrak{a} \in E$, és $n \in \mathbb{N}$, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

(ii) *Minden $m \leq n$ természetes számra az f függvény m-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $\mathrm{D}^m f$ deriváltfüggvény $n - m$-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

(iii) *Létezik olyan $m \leq n$ természetes szám, hogy az f függvény m-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $\mathrm{D}^m f$ deriváltfüggvény $n - m$-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $m < n$ rögzített természetes szám. Tudjuk, hogy ekkor

$$\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f) = \pi_{n-m,m}^{-1} \circ (\mathrm{D}^n f),$$

ahol $\pi_{n-m,m}$ a $\mathscr{L}_{n-m}(E; \mathscr{L}_m(E; F)) \to \mathscr{L}_n(E; F)$ kanonikus izometrikus lineáris bijekció. Az (i) feltétel szerint $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$ és a $\mathrm{D}^n f$ függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, tehát a fenti egyenlőség miatt $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f))$, és a $\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f)$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, hiszen $\pi_{n-m,m}$ homeomorfizmus, így $\pi_{n-m,m}^{-1}$ folytonos a $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})$ helyen. Ezért a a $\mathrm{D}^m f$ függvény $n - m$-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Továbbá, ha $n - m \geq 1$, akkor $\mathrm{D}^m f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban (3.3.2.), ezért folytonos $\mathfrak{a}$-ban (1.3.3.), így az f függvény m-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ha $n - m = 0$, akkor (i) miatt az f függvény m-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

(ii)⇒(iii) Triviális.

(iii)⇒(i) Ha $m < n$ olyan természetes szám, hogy az f függvény m-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $\mathrm{D}^m f$ deriváltfüggvény $n - m$-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f))$, tehát

$$\mathrm{D}^n f = \pi_{n-m,m} \circ (\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f)),$$

miatt $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$, vagyis az f függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, továbbá a fenti egyenlőség alapján a $\mathrm{D}^n f$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, hiszen $\pi_{n-m,m}$ folytonos az $(\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f))(\mathfrak{a})$ helyen és a hipotézis alapján a $\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{D}^m f)$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, Ezért az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Az előző állítás szerint $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli n-szer folytonos differenciálhatósága ekvivalens azzal, hogy f az $\mathfrak{a}$ pontban folytonosan differenciálható, és a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény az $\mathfrak{a}$ pontban $n - 1$-szer folytonosan differenciálható. Ez az a nem triviális speciális eset, amit a gyakorlatban legtöbbször alkalmazunk.

5.4. Összetett függvények magasabb rendű folytonos differenciálhatósága

5.4.1. Állítás. *Legyenek E és F normált terek $\mathbb{K}$ felett, $f, g : E \rightarrowtail F$ függvények, és $n \in \mathbb{N}$.*

a) *Ha az f és g függvények n-szer folytonosan differenciálhatóak az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g))$ (vagyis az f és g függvények n-szer differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén), akkor az $f + g$ függvény is n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.*

b) *Ha $\alpha \in \mathbb{K}$ és az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f))$ pontban (vagyis az f függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén), akkor az $\alpha.f$ függvény is n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. a) A $V := \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g))$ halmaz olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy minden $x \in V$ esetén az f és g függvények n-szer differenciálhatóak x-ben, így 3.4.1. a) szerint az $f + g$ függvény n-szer differenciálható x-ben és $(\mathrm{D}^n(f + g))(x) = (\mathrm{D}^n f)(x) + (\mathrm{D}^n g)(x)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{D}^n(f + g)) = \mathrm{D}^n f + \mathrm{D}^n g$ az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén (például a V halmazon), és mivel a $\mathrm{D}^n f$ és $\mathrm{D}^n g$ függvények folytonosak az $\mathfrak{a}$ pontban, így $\mathrm{D}^n f + \mathrm{D}^n g$ is folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, tehát a folytonosság lokalitása miatt

$\mathrm{D}^n(f+g)$ is folytonos $\mathfrak{a}$-ban, vagyis az $f+g$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

b) A $V := \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f))$ halmaz olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy minden $x \in V$ esetén az f függvény n-szer differenciálható x-ben, így 3.4.1. b) szerint $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén az $\alpha.f$ függvény n-szer differenciálható x-ben és $(\mathrm{D}^n(\alpha.f))(x) = \alpha.(\mathrm{D}^n f)(x)$. Ez azt jelenti, hogy minden $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén $\mathrm{D}^n(\alpha.f)) = \alpha.\mathrm{D}^n f$ az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén (például a V halmazon), és mivel a $\mathrm{D}^n f$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, így $\alpha.\mathrm{D}^n f$ is folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, tehát a folytonosság lokalitása miatt $\mathrm{D}^n(\alpha.f)$ is folytonos $\mathfrak{a}$-ban, vagyis az $\alpha.f$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. ■

5.4.2. Következmény. *Legyenek E és F normált terek $\mathbb{K}$ felett, és $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$. Ha $U \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor $f, g \in \mathrm{C}^n(U;F)$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén $f+g \in \mathrm{C}^n(U;F)$ és $\alpha.f \in \mathrm{C}^n(U;F)$ (ezért $\mathrm{C}^n(U;F)$ lineáris altere az $U \to F$ függvények vektorterének).*

Bizonyítás. (I) Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ha $f, g \in \mathrm{C}^n(U;F)$, akkor $U = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$, valamint $U = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g)$, így U nyíltsága miatt $U = \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g))$, tehát minden $\mathfrak{a} \in U$ esetén az előző állítás szerint az $f+g$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, valamint minden $\alpha \in \mathbb{K}$ számra az $\alpha.f$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ezért $f+g \in \mathrm{C}^n(U;F)$ és $\alpha.f \in \mathrm{C}^n(U;F)$.

(II) Ha $f, g \in \mathrm{C}^\infty(U;F)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $f, g \in \mathrm{C}^n(U;F)$, így (I) szerint $f+g \in \mathrm{C}^n(U;F)$ és minden $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén $\alpha.f \in \mathrm{C}^n(U;F)$, tehát $f+g \in \mathrm{C}^\infty(U;F)$ és $\alpha.f \in \mathrm{C}^\infty(U;F)$. ■

5.4.3. Lemma. *Legyenek E, F, G normált terek és $u \in \mathscr{L}(F;G)$. Ha $n \in \mathbb{N}$, és az $f : E \rightarrowtail F$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, valamint $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f))$ (vagyis f az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén n-szer differenciálható), akkor az $u \circ f : E \rightarrowtail G$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Az $n = 0$ eset a folytonos függvények kompozíciójának folytonossága miatt igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra, és legyen $f : E \rightarrowtail F$ olyan függvény, amely $n+1$-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1} f))$. Ekkor 5.3.6. alapján a $\mathrm{D}f$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1} f) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f))$ miatt $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f))$. Ezért az indukciós hipotézis alkalmazható a $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ függvényre, az $\mathrm{L}_u : \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;G)$; $v \mapsto u \circ v$ folytonos lineáris operátorra, és az $\mathfrak{a}$ pontra. Azt kapjuk, hogy az $\mathrm{L}_u \circ (\mathrm{D}f)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. De a függvénykompozíció differenciálási tétele (2.3.1.) szerint $\mathrm{D}(u \circ f) = \mathrm{L}_u \circ (\mathrm{D}f)$ teljesül a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ halmazon, amely környezete $\mathfrak{a}$-nak, hiszen $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1} f)) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f))$. Ezért a magasabb rendű folytonos differenciálás lokalitása (5.3.3.) miatt a $\mathrm{D}(u \circ f)$ deriváltfüggvény is n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ebből ismét 5.3.6. alapján következik, hogy az $u \circ f$ függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, amivel az állítást igazoltuk az $n+1$ természetes számra. ■

5.4.4. Lemma. *Legyenek E, F, G, és H normált terek, valamint $b : F \times G \to H$ folytonos bilineáris operátor. Ha $n \in \mathbb{N}$ és az $f : E \rightarrowtail F$, $g : E \rightarrowtail G$ függvények n-szer folytonosan differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban, valamint $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g))$ (vagyis az f és g függvények n-szer differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén), akkor az*

$$b(f,g) : \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \to H; \quad x \mapsto b(f(x), g(x))$$

leképezés n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hgy az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra. Ha $n = 0$, akkor az állítás azt mondja, hogy ha az $f : E \rightarrowtail F$, $g : E \rightarrowtail G$ függvények folytonosak az $\mathfrak{a}$ pontban, és $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$-nek, akkor a $b(f,g)$ függvény is folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. Ez viszont nyilvánvalóan következik abból, hogy a feltevés alapján a

$$\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \to F \times G; \quad x \mapsto (f(x), g(x))$$

függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, valamint $b : F \times G \to H$ mindenütt folytonos, így ezek kompozíciója, vagyis az $b(f,g)$ függvény is folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban (még akkor is, ha $\mathfrak{a}$ csak eleme $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$-nek, és nem belső pontja).

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra. Legyenek az $f : E \rightarrowtail F$ és $g : E \rightarrowtail G$ függvények $n+1$-szer folytonosan differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban, és tegyük fel, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g))$. Azt fogjuk igazolni, hogy a $\mathrm{D}(u(f,g))$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

A 3.4.3. állítás szerint

$$\mathrm{D}(b(f,g)) = b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f) + b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g)$$

teljesül a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g)$ halmazon, ahol bevezettük a

$$\begin{aligned} u_G &: G \to \mathscr{L}(F;H); \quad z \mapsto b(\cdot, z), \\ u_F &: F \to \mathscr{L}(G;H); \quad z \mapsto b(z, \cdot) \end{aligned}$$

folytonos lineáris operátorokat, és a

$$\begin{aligned} b_F &: \mathscr{L}(F;H) \times \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;H); \quad (v,w) \mapsto v \circ w, \\ b_G &: \mathscr{L}(G;H) \times \mathscr{L}(E;G) \to \mathscr{L}(E;H); \quad (v,w) \mapsto v \circ w \end{aligned}$$

folytonos bilineáris operátorokat. Nyilvánvaló, hogy a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g)$ halmaz környezete az $\mathfrak{a}$ pontnak, hiszen a hipotézis szerint $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g)) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g))$. Ezért a magasabb rendű folytonos differenciálhatóság lokalitása (5.3.3.) és 5.4.1. a) miatt az $u(f,g)$ függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli $n+1$-szeres differenciálhatóságához elég azt igazolni, hogy a $b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f) : E \rightarrowtail H$ és $b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g) : E \rightarrowtail H$ függvények n-szer folytonosan differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban, valamint teljesül az, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}\left(\mathrm{Dom}\left(\mathrm{D}^n(b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f))\right) \cap \mathrm{Dom}\left(\mathrm{D}^n(b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g))\right)\right)$.

Megmutatjuk, hogy a $b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f) : E \rightarrowtail H$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Valóban, a g függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, hiszen $n+1$-szer is folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban (5.3.6.), és $u_G \in \mathscr{L}(G; \mathscr{L}(F;H))$. Továbbá, $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g)) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g))$, tehát a 5.4.3. lemma szerint az $u_G \circ g : E \rightarrowtail \mathscr{L}(F;H)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. A 3.4.2. állítás szerint $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(u_G \circ g))$, ezért $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(u_G \circ g)))$ is teljesül. Ugyanakkor a $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ deriváltfüggvény szintén n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban (5.3.6.), és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f)))$. Tehát $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(u_G \circ g)) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f)))$, így az indukciós hipotézist alkalmazva a $b_F : \mathscr{L}(F;H) \times \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;H)$ folytonos bilineáris operátorra, valamint az $u_G \circ g$ és $\mathrm{D}f$ függvényekre kapjuk, hogy a $b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f) : E \rightarrowtail H$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

Megmutatjuk, hogy a $b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g) : E \rightarrowtail H$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Valóban, az f függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, hiszen $n+1$-szer is folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban (5.3.6.), és $u_F \in \mathscr{L}(F;\mathscr{L}(G;H))$. Továbbá, $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f)) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f))$, tehát a 5.4.3. lemma szerint az $u_F \circ f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(G;H)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. A 3.4.2. állítás szerint $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(u_F \circ f))$, ezért $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(u_F \circ f)))$ is teljesül. Ugyanakkor a $\mathrm{D}g : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;G)$ deriváltfüggvény szintén n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban (5.3.6.), és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}g)))$. Tehát $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(u_F \circ f)) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}g)))$, így az indukciós hipotézist alkalmazva a $b_G : \mathscr{L}(G;H) \times \mathscr{L}(E;G) \to \mathscr{L}(E;H)$ folytonos bilineáris operátorra, valamint az $u_F \circ f$ és $\mathrm{D}f$ függvényekre kapjuk, hogy a $b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g) : E \rightarrowtail H$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

A 3.4.2. állítás szerint $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(u_G \circ g))$, továbbá 3.4.3. alapján fennáll a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(u_G \circ g)) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f)) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f)))$ összefüggés, ezért

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}g)) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f)) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f))).$$

Hasonlóan, a 3.4.2. állítás szerint $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(u_F \circ f))$, továbbá 3.4.3. alapján $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(u_F \circ f)) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}g)) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g)))$, ezért

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f)) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}g)) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g))).$$

Tehát $W := \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f)) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}g)) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g)$ olyan halmaz, hogy

$$W \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f))) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g))).$$

A hipotézis szerint $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g))$, tehát $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(W)$, következésképpen 5.4.1. a) miatt a $b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f) + b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g) : E \rightarrowtail H$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Mivel $\mathrm{D}(u(f,g)) = b_F(u_G \circ g, \mathrm{D}f) + b_G(u_F \circ f, \mathrm{D}g)$ teljesül a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g)$ halmazon, és nyilvánvaló, hogy a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g)$ halmaz környezete az $\mathfrak{a}$ pontnak, hiszen a hipotézis szerint $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g)) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g))$, így a magasabb rendű folytonos differenciálhatóság lokalitása (5.3.3.) folytán a $\mathrm{D}(u(f,g))$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ebből 5.3.6. alkalmazásával adódik, hogy az $u(f,g)$ függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

5.4.5. Állítás. *Legyenek E, F, G normált terek, $f : E \rightarrowtail F$, $g : F \rightarrowtail G$ függvények, $\mathfrak{a} \in E$ és $n \in \mathbb{N}$. Ha az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f))$, valamint a g függvény n-szer folytonosan differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban és $f(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g))$, akkor a $g \circ f$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 0$, akkor az állítás nyilvánvalóan következik abból, hogy a 0-szor folytonos differenciálhatóság a folytonosságot jelenti, és folytonos függvények kompozíciója folytonos.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra, és legyenek E, F, G normált terek, $f : E \rightarrowtail F$, $g : F \rightarrowtail G$ függvények, $\mathfrak{a} \in E$, és tegyük fel, hogy az f függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f))$, valamint a g függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban és $f(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g))$.

Legyen U olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f)$, és legyen V olyan környezete $f(\mathfrak{a})$-nak F-ben, amelyre $V \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g)$. Mivel f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, így folytonos ebben a pontban, tehát $W := U \cap \overset{-1}{f}\langle V \rangle$ környezete az $\mathfrak{a}$ pontnak.

Igazolni fogjuk, hogy a $\mathrm{D}(g\circ f)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ehhez először vezessük be a

$$b : \mathscr{L}(F;G)\times\mathscr{L}(E;F);\quad (u,v)\mapsto u\circ v$$

leképezést, amely folytonos bilineáris operátor. Ha $x\in W$, akkor $x\in U\subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f)\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, tehát f differenciálható x-ben és $f(x)\in V\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g)\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}g)$, így a függvénykompozíció differenciálásának tétele (2.3.1.) szerint $g\circ f$ differenciálható x-ben és

$$(\mathrm{D}(g\circ f))(x)=(\mathrm{D}g)(f(x))\circ(\mathrm{D}f)(x)=b((\mathrm{D}g)(f(x)),(\mathrm{D}f)(x))=b((\mathrm{D}g)\circ f,\mathrm{D}f)(x),$$

ahol bevezettük a

$$b((\mathrm{D}g)\circ f,\mathrm{D}f):\mathrm{Dom}((\mathrm{D}g)\circ f)\cap\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)\to\mathscr{L}(E;G);$$
$$x\mapsto b((\mathrm{D}g)(f(x)),(\mathrm{D}f)(x))$$

leképezést. Tehát W olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $W\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}(g\circ f))\cap\mathrm{Dom}(b((\mathrm{D}g)\circ f,\mathrm{D}f))$, és $\mathrm{D}(g\circ f)=b((\mathrm{D}g)\circ f,\mathrm{D}f)$ a W halmazon. A magasabb rendű folytonos differenciálhatóság lokalitása (5.3.3.) alapján ebből következik, hogy ha a $b((\mathrm{D}g)\circ f,\mathrm{D}f):E\rightarrowtail\mathscr{L}(E;G)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor a $\mathrm{D}(g\circ f)$ függvény is n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, tehát 5.3.6. szerint a $g\circ f$ függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, amit bizonyítani kell.

A $b((\mathrm{D}g)\circ f,\mathrm{D}f)$ függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli n-szer folytonos differenciálhatóságának bizonyításához 5.4.4. alapján elegendő azt igazolni, hogy a $(\mathrm{D}g)\circ f:E\rightarrowtail\mathscr{L}(F;G)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és a $\mathrm{D}f:E\rightarrowtail\mathscr{L}(E;F)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $\mathfrak{a}\in\mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n((\mathrm{D}g)\circ f))\cap\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f)))$.

Ennek bizonyításához először megjegyezzük, hogy $x\in W=U\cap\overset{-1}{f}\langle V\rangle$ esetén $x\in U\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f)\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^nf)$ (vagyis az f függvény n-szer differenciálható x-ben), és $f(x)\in V\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g)=\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}g))$ (vagyis a $\mathrm{D}g$ függvény n-szer differenciálható $f(x)$-ben), ezért 3.4.4. szerint a $(\mathrm{D}g)\circ f$ függvény n-szer differenciálható x-ben. Ez azt jelenti, hogy $W\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n((\mathrm{D}g)\circ f))$, tehát $\mathfrak{a}\in\mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n((\mathrm{D}g)\circ f)))$.

A hipotézis szerint az f függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, így n-szer is folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban (5.3.6.). Szintén a hipotézis szerint a g függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért a $\mathrm{D}g$ függvény n-szer folytonosan differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban (5.3.6.). Továbbá, U olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $U\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f)\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^nf)$, ezért $\mathfrak{a}\in\mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^nf))$. Ugyanakkor, V olyan környezete $f(\mathfrak{a})$-nak F-ben, hogy $V\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}g)=\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}g))$, ezért $f(\mathfrak{a})\in\mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}g)))$. Ezért az indukciós hipotézist alkalmazva az f és $\mathrm{D}g$ függvényre kapjuk, hogy a $(\mathrm{D}g)\circ f$ függvény n-szer is folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és az előző bekezdésben beláttuk, hogy $W\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n((\mathrm{D}g)\circ f))$, következésképpen $\mathfrak{a}\in\mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n((\mathrm{D}g)\circ f)))$.

A hipotézis szerint az f függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, így a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban $\mathfrak{a}$-ban (5.3.6.), valamint $W=U\cap\overset{-1}{f}\langle V\rangle$ halmaz olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy $W\subseteq U\subseteq\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f)=\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f))$, következésképpen $\mathfrak{a}\in\mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f)))$. ∎

5.4.6. Következmény. *Legyenek E, F, G normált terek, és $n\in\mathbb{N}$ vagy $n=\infty$. Ha $f:E\rightarrowtail F$ és $g:F\rightarrowtail G$ függvények C^n-osztályúak, akkor a $g\circ f:E\rightarrowtail G$ függvény is C^n-osztályú.*

Bizonyítás. (I) Az $n = 0$ esetben az állítás abból következik, hogy folytonos függvények kompozíciója folytonos.

(II) Legyen $n \in \mathbb{N}^*$, és rögzítsünk egy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$ pontot. Ekkor az f függvény n-szer folytonsan differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$ pontban, és $n \geq 1$ miatt $\mathrm{Dom}(f)$ nyílt halmaz, így $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$ is nyílt, tehát $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f))$. Továbbá, a g függvény n-szer folytonosan differenciálható az $f(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g)$, pontban és $n \geq 1$ miatt $\mathrm{Dom}(g)$ nyílt halmaz, így $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g)$ is nyílt, tehát $f(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g))$. Ezért 5.4.5. alapján a $g \circ f$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ez azt jelenti, hogy a $g \circ f$ függvény is C^n-osztályú.

(III) Ha az f és g függvények C^∞-osztályúak, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f és g C^n-osztályúak, így (I) és (II) alapján a $g \circ f$ függvény is C^n-osztályú, amiből következik, hogy a $g \circ f$ függvény is C^∞-osztályú. ■

5.4.7. Állítás. *Legyen E normált tér, F az $(F_i)_{i \in I}$ normált terek véges rendszere, $f : E \rightarrowtail \prod_{i \in I} F_i$ függvény, $n \in \mathbb{N}$, és $\mathfrak{a} \in E$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f))$ *és az f függvény n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.*

(ii) *Minden $I \ni i$-re $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{pr}_i \circ f)))$, és a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ahol $\mathrm{pr}_i : F \to F_i$ az i-edik projekció.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Minden $i \in I$ esetén $\mathrm{pr}_i \in \mathscr{L}(F; F_i)$, tehát ha az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f))$, akkor 5.4.3. alapján a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény is n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Továbbá, 3.4.5. szerint nyilvánvaló, hogy minden $i \in I$ esetén $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{pr}_i \circ f)$, ezért $\mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{pr}_i \circ f)))$, így a hipotézis alapján $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{pr}_i \circ f)))$.

(ii)⇒(i) n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 0$, akkor az állítás **MET** 7.9.2. alapján igaz (még akkor is, ha $\mathfrak{a}$ nem belső pontja a $\mathrm{Dom}(\mathrm{pr}_i \circ f)$ alakú halmazoknak, hanem azoknak csak eleme).

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra, és legyen minden $i \in I$ indexre a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, amelyre $\mathfrak{a} \in U_i := \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{pr}_i \circ f)))$ teljesül. Jelölje

$$\pi : \mathscr{L}\Big(E; \prod_{i \in I} F_i\Big) \to \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E; F_i); \quad u \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ u)_{i \in I}$$

a kanonikus leképezést **LIN** (1.6.1.), amely lineáris homeomorfizmus. A 2.3.4. állításban szereplő operátoregyenlőségek szerint minden $x \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ esetén

$$\mathrm{pr}_i \circ (\mathrm{D}f)(x) = (\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))\,(x),$$

ezért a π leképezés definícióját alkalmazva kapjuk, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ pontra

$$\pi((\mathrm{D}f)(x)) = ((\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))\,(x))_{i \in I}\,.$$

Tehát ha $i \in I$ esetén $\mathrm{p}_i : \prod_{j \in I} \mathscr{L}(E; F_j) \to \mathscr{L}(E; F_i)$ az i-edik projekció, akkor minden $x \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ pontra és $i \in I$ indexre

$$\mathrm{p}_i\,(\pi((\mathrm{D}f)(x))) = (\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f))\,(x),$$

ami azt jelenti, hogy minden $i \in I$ esetén fennáll a $\mathrm{p}_i \circ \pi \circ (\mathrm{D}f) = \mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f)$ egyenlőség a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ halmazon.

Legyen U olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy minden $i \in I$ esetén $U \subseteq U_i$. Ha $x \in U$, akkor a hipotézis szerint minden $i \in I$ indexre a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény $n+1$-szer differenciálható x-ben, így 3.4.5. szerint az f függvény $n+1$-szer differenciálható az x pontban. Ezért $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, így minden $i \in I$ esetén $\mathrm{p}_i \circ \pi \circ (\mathrm{D}f) = \mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f)$ teljesül az U halmazon, és a hipotézis alapján minden $i \in I$ indexre a $\mathrm{D}(\mathrm{pr}_i \circ f)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban (5.3.6.). Ebből a magasabb rendű folytonos differenciálhatóság lokalitása (5.3.3.) folytán kapjuk, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{p}_i \circ \pi \circ (\mathrm{D}f)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

Ha $x \in U$, akkor $x \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f))$, vagyis a $\mathrm{D}f$ függvény n-szer differenciálható x-ben, és $i \in I$ esetén $\mathrm{p}_i \circ \pi : \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;F_i)$ folytonos lineáris operátor, így 3.4.2. szerint a $\mathrm{p}_i \circ \pi \circ \mathrm{D}f$ függvény n-szer differenciálható x-ben. Ez azt jelenti, hogy minden $i \in I$ indexre $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{p}_i \circ \pi \circ \mathrm{D}f))$, következésképpen $\mathfrak{a}$ belső pontja a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{p}_i \circ \pi \circ \mathrm{D}f))$ halmaznak.

Ezért alkalmazhatjuk az indukciós hipotézist, az $(F_i)_{i\in I}$ normált tér rendszer helyett a $(\mathscr{L}(E;F_i))_{i\in I}$ operátortér rendszert, és f helyett a $\pi \circ (\mathrm{D}f) : \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \to \prod_{i\in I} \mathscr{L}(E;F_i)$ függvényt véve. Azt kapjuk, hogy $\pi \circ (\mathrm{D}f)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

A π leképezés lineáris homeomorfizmus, így a

$$\pi^{-1} : \prod_{i\in I} \mathscr{L}(E;F_i) \to \mathscr{L}\Big(E; \prod_{i\in I} F_i\Big)$$

függvény folytonos lineáris operátor. Ugyanakkor, láttuk, hogy minden $i \in I$ esetén $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{p}_i \circ \pi \circ \mathrm{D}f))$, ezért 3.4.5. alapján $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\pi \circ \mathrm{D}f))$, következésképpen $\mathfrak{a}$ belső pontja a $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\pi \circ \mathrm{D}f))$ halmaznak. Ebből 5.4.3. alapján kapjuk, hogy a $\mathrm{D}f = \pi^{-1} \circ (\pi \circ \mathrm{D}f)$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ezért 5.3.6. szerint az f függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

5.4.8. Következmény. *Legyen E normált tér, F az $(F_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere, $f : E \rightarrowtail \prod_{i\in I} F_i$ függvény, $U \subseteq E$ nyílt halmaz, és $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$. Az f függvény pontosan akkor C^n-osztályú az U halmazon, ha minden $I \ni i$-re a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény C^n-osztályú az U halmazon, ahol $\mathrm{pr}_i : F \to F_i$ az i-edik projekció.*

Bizonyítás. (I) Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ha az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az U halmazon, akkor $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$, így U nyíltsága miatt U minden pontja belső pontja $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$-nek, tehát a 5.4.7. állítás (i)⇒(ii) következtetése szerint minden $I \ni i$-re a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az U halmazon.

Megfordítva, ha minden $I \ni i$-re a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az U halmazon, akkor minden $i \in I$ esetén $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{pr}_i \circ f))$, így U nyíltsága miatt U minden pontja belső pontja $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n(\mathrm{pr}_i \circ f))$-nek, tehát a 5.4.7. állítás (ii)⇒(i) következtetése szerint az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az U halmazon.

(II) Az $n = \infty$ eset triviális következménye (I)-nek. ■

5.4.9. Következmény. *Legyen E az $(E_i)_{i\in I}$ véges normált-tér rendszer szorzata és F az (ugyanolyan indexhalmazú) $(F_i)_{i\in I}$ normált tér-rendszer szorzata. Legyen $(f_i)_{i\in I}$ olyan* *rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : E_i \rightarrowtail F_i$ függvény. Ha $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$, és minden $i \in I$ esetén az f_i függvény C^n-osztályú, akkor a $\underset{i\in I}{\times} f_i : E \rightarrowtail F$ függvény is C^n-osztályú.*

Bizonyítás. (I) Legyen $n \in \mathbb{N}$. A definíciók szerint nyilvánvaló, hogy minden $k \in I$ esetén

$$\mathrm{pr}_k^F \circ \left(\underset{i\in I}{\times} f_i \right) \subseteq f_k \circ \mathrm{pr}_k^E,$$

ahol $\mathrm{pr}_k^F : F \to F_k$ és $\mathrm{pr}_k^E : E \to E_k$ a k-adik projekció. Ha minden $k \in I$ esetén az $f_k : E_k \rightarrowtail F_k$ függvény n-szer folytonosan differenciálható, akkor a $f_k \circ \mathrm{pr}_k^E : E \rightarrowtail F_k$ függvény is n-szer folytonosan differenciálható, hiszen $\mathrm{pr}_k^E : E \to E_k$ folytonos lineáris operátor, tehát végtelenszer differenciálható, így a $\underset{i\in I}{\times} f_i$ függvényre felírt egyenlőségek és 5.4.8. szerint a $\underset{i\in I}{\times} f_i$ függvény n-szer folytonosan differenciálható.

(II) Az $n = \infty$ eset triviális következménye (I)-nek. ■

5.4.10. Állítás. *Legyenek E, F, G, H normált terek, és $f : E \rightarrowtail F$, $g : E \rightarrowtail G$, $b : E \rightarrowtail \mathfrak{Mult}(F \times G; H)$ függvények.*

a) *Ha az f, g és b függvények differenciálhatóak az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, akkor a*

$$h : \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(b) \to H; \quad x \mapsto b(x)(f(x), g(x))$$

függvény is differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban és minden $\mathbf{e} \in E$ esetén

$$(\mathrm{D}h)(\mathfrak{a})\mathbf{e} = ((\mathrm{D}b)(\mathfrak{a})\mathbf{e})\,(f(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a})) + b(\mathfrak{a})((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\mathbf{e}, g(\mathfrak{a})) + b(\mathfrak{a})(f(\mathfrak{a}), (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})\mathbf{e}).$$

b) *Ha $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$, és az f, g és b függvények n-szer differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, akkor a h függvény is n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.*

c) *Ha $n \in \mathbb{N}$, és az f, g és b függvények n-szer folytonosan differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n b))$, akkor a h függvény is n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. a) Vezessük be a következő függvényeket:

$$\alpha : \mathrm{Dom}(h) \to \mathfrak{Mult}(F \times G; H) \times F \times G; \quad x \mapsto (b(x), f(x), g(x));$$
$$\beta : \mathfrak{Mult}(F \times G; H) \times F \times G \to H; \quad (v_0, v_1, v_2) \mapsto v_0(v_1, v_2).$$

Világos, hogy $h = \beta \circ \alpha$. A hipotézis alapján az α függvény komponensei differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban, így a normálható szorzatterekbe vezető függvények differenciálhatóságának tétele (2.3.4.) alapján α is differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és minden $\mathbf{e} \in E$ esetén

$$(\mathrm{D}\alpha)(\mathfrak{a})\mathbf{e} = ((\mathrm{D}b)(\mathfrak{a})\mathbf{e}, (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\mathbf{e}, (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})\mathbf{e}).$$

A β függvény folytonos trilineáris operátor, tehát differenciálható a $(b(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a}))$ pontban, és a folytonos multilineáris operátorok differenciálhatóságának tétele (1.5.1.) alapján minden $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathfrak{Mult}(F \times G; H) \times F \times G$ esetén

$$(\mathrm{D}\beta)(b(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a}))(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \beta(\mathbf{u}_0, f(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a})) + \beta(b(\mathfrak{a}), \mathbf{u}_1, g(\mathfrak{a})) + \beta(b(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{a}), \mathbf{u}_2) =$$
$$= \mathbf{u}_0(f(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a})) + b(\mathfrak{a})(\mathbf{u}_1, g(\mathfrak{a})) + b(\mathfrak{a})(f(\mathfrak{a}), \mathbf{u}_2).$$

Tehát a függvénykompozíció differenciálhatóságának tétele (2.3.1.) alapján a $\beta \circ \alpha$ függvény (vagyis a h függvény) is differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és $(\mathrm{D}h)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}\beta)(\alpha(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{D}\alpha)(\mathfrak{a})$, azaz minden $\mathbf{e} \in E$ esetén

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}h)(\mathfrak{a})\mathbf{e} &= (\mathrm{D}\beta)(\alpha(\mathfrak{a}))\,((\mathrm{D}\alpha)(\mathfrak{a})\mathbf{e}) = \\ &= (\mathrm{D}\beta)(b(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a}))((\mathrm{D}b)(\mathfrak{a})\mathbf{e}, (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\mathbf{e}, (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})\mathbf{e}) = \\ &= ((\mathrm{D}b)(\mathfrak{a})\mathbf{e})(f(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a})) + b(\mathfrak{a})((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\mathbf{e}, g(\mathfrak{a})) + b(\mathfrak{a})(f(\mathfrak{a}), (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})\mathbf{e}),\end{aligned}$$

amivel az a) állítást igazoltuk.

b) Ha $n \in \mathbb{N}$, és az f, g és b függvények n-szer differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, akkor az α függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, mert a komponens-függvényei is ilyenek (3.4.5.), továbbá a β függvény végtelenszer differenciálható, mert folytonos trilineáris operátor (3.5.2.), ezért ezek kompozíciója n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban (3.4.4.).

Ebből azonnal következik, hogy ha f, g és b végtelenszer differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, akkor h is végtelenszer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

c) Ha $n \in \mathbb{N}$, és az f, g és b függvények n-szer folytonosan differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, akkor az α függvény n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, mert a komponens-függvényei is ilyenek (5.4.7.), továbbá a β függvény végtelenszer differenciálható, mert folytonos trilineáris operátor (3.5.2.), ezért $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n g) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n b))$ esetén ezek kompozíciója n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban (5.4.5.). ■

5.4.11. Következmény. *Legyenek E, F és G normált terek, valamint $f : E \rightarrowtail F$ és $u : E \rightarrowtail \mathscr{L}(F;G)$ függvények.*

a) *Ha f és u differenciálhatóak az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, akkor a*

$$h : \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(u) \to G; \quad x \mapsto u(x)f(x)$$

függvény is differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban és minden $\mathbf{e} \in E$ esetén

$$(\mathrm{D}h)(\mathfrak{a})\mathbf{e} = ((\mathrm{D}u)(\mathfrak{a})\mathbf{e})\, f(\mathfrak{a}) + u(\mathfrak{a})\,((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\mathbf{e})\,.$$

b) *Ha $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$, és az f és u függvények n-szer differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, akkor a h függvény is n-szer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.*

c) *Ha $n \in \mathbb{N}$, és az f és u függvények n-szer folytonosan differenciálhatóak $\mathfrak{a}$-ban, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n u))$, akkor a h függvény is n-szer folytonosan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. Az előző állítás nyilvánvaló következménye, ha abban G helyére az $\mathscr{L}(F;G)$ operátorteret helyettesítjük, H helyére G-t helyettesítjük, $g := u$, valamint $b : E \to \mathfrak{Mult}(F \times \mathscr{L}(F;G); G)$ az a konstansfüggvény, amely E minden pontjához az

$$F \times \mathscr{L}(F;G) \to G; \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{f})$$

folytonos bilineáris operátort rendeli. ■

5.4.12. Következmény. *Legyenek E és F normált terek, és $f : E \rightarrowtail F$ és $\lambda : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények.*

a) *Ha f és λ differenciálhatóak az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, akkor a*

$$h : \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(\lambda) \to G; \quad x \mapsto \lambda(x).f(x)$$

függvény is differenciálható az $\mathfrak{a}$ *pontban és minden* $\mathbf{e} \in E$ *esetén*

$$(\mathrm{D}h)(\mathfrak{a})\mathbf{e} = ((\mathrm{D}\lambda)(\mathfrak{a})\mathbf{e})\,.f(\mathfrak{a}) + \lambda(\mathfrak{a}).\,((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\mathbf{e})\,.$$

b) *Ha* $n \in \mathbb{N}$ *vagy* $n = \infty$, *és az* f *és* λ *függvények* n*-szer differenciálhatóak* $\mathfrak{a}$*-ban, akkor a* h *függvény is* n*-szer differenciálható* $\mathfrak{a}$*-ban.*

c) *Ha* $n \in \mathbb{N}$, *és az* f *és* λ *függvények* n*-szer folytonosan differenciálhatóak* $\mathfrak{a}$*-ban,* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n \lambda))$, *akkor a* h *függvény is* n*-szer folytonosan differenciálható* $\mathfrak{a}$*-ban.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik a 5.4.11. állításból, ha abban $G := F$ és $u : E \rightarrowtail \mathscr{L}(F)$ az a leképezés, amelyre $\mathrm{Dom}(u) := \mathrm{Dom}(\lambda)$, és minden $x \in \mathrm{Dom}(u)$ esetén $u(x) := \lambda(x).\mathrm{id}_F$. ■

Most bebizonyítjuk a 5.2.2. állítás általánosítását magasabb rendben folytonosan differenciálható függvényekre.

5.4.13. Állítás. *Legyen* E *az* $(E_i)_{i\in I}$ *véges normált tér rendszer szorzata,* F *normált tér, és* $f : E \rightarrowtail F$ *függvény.*

a) *Ha* $n \in \mathbb{N}^*$, *akkor az* f *függvény pontosan akkor* n*-szer folytonosan differenciálható az* $U \subseteq E$ *nyílt halmazon, ha minden* $i \in I$ *esetén a* $\partial_i f$ *parciális deriváltfüggvény* $n-1$*-szer folytonosan differenciálható az* U *halmazon.*

b) *Az* f *függvény pontosan akkor végtelenszer differenciálható az* $U \subseteq E$ *nyílt halmazon, ha minden* $i \in I$ *esetén a* $\partial_i f$ *parciális deriváltfüggvény végtelenszer differenciálható az* U *halmazon.*

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $U \subseteq E$ nyílt halmazon. Ekkor 5.3.6. szerint a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény $n-1$-szer folytonosan differenciálható az U halmazon, tehát $(\mathrm{D}f)|_U \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}-1}(U; \mathscr{L}(E;F))$. Továbbá, minden $i \in I$ és $x \in U$ esetén 2.4.1. alapján $x \in \mathrm{Dom}(\partial_i f)$ és $(\partial_i f)(x) = (\mathrm{D}f)(x) \circ \mathrm{in}_{i,0}$, ahol $\mathrm{in}_{i,0} : E_i \to E$ a kanonikus lineáris izometria. Tehát, ha $i \in I$ esetén bevezetjük az

$$\alpha_i : \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E_i;F); \quad u \mapsto u \circ \mathrm{in}_{i,0}$$

leképezést, akkor $(\partial_i f)|_U = \alpha_i \circ (\mathrm{D}f)|_U$. Nyilvánvaló, hogy minden $i \in I$ indexre α_i folytonos lineáris operátor, tehát 3.2.3. szerint végtelenszer differenciálható, így 5.4.6. alapján $\alpha_i \circ (\mathrm{D}f)|_U \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}-1}(U; \mathscr{L}(E_i;F))$, vagyis a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény $n-1$-szer folytonosan differenciálható az $U \subseteq E$ halmazon.

Tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény $n-1$-szer folytonosan differenciálható az $U \subseteq E$ nyílt halmazon. Ekkor $n \geq 1$ miatt minden $i \in I$ indexre $U \subseteq \mathrm{Dom}(\partial_i f)$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az U nyílt halmazon, így 5.2.2. alapján f (egyszer) folytonosan differenciálható az U halmazon. A 2.4.1. állítás szerint minden $x \in U$ esetén

$$(\mathrm{D}f)(x) = \pi\left(((\partial_i f)(x))_{i\in I}\right),$$

ahol $\pi : \prod_{i\in I} \mathscr{L}(E_i;E) \to \mathscr{L}\Big(\prod_{i\in I} E_i; F\Big)$ a kanonikus leképezés. A

$$\beta : U \to \prod_{i\in I} \mathscr{L}(E_i;E); \quad x \mapsto ((\partial_i f)(x))_{i\in I}$$

leképezés az 5.4.8. állítás szerint $n-1$-szer folytonosan differenciálható, mert a komponens függvényei a hipotézis szerint $n-1$-szer folytonosan differenciálhatóak.

Továbbá, π folytonos lineáris operátor, tehát 3.2.3. szerint végtelenszer differenciálható, így 5.4.6. alapján $\pi \circ \beta$ is $n-1$-szer folytonosan differenciálható, vagyis a $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ deriváltfüggvény $n-1$-szer folytonosan differenciálható az U halmazon. Ezért 5.3.6. szerint az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $U \subseteq E$ halmazon.

b) Ha f végtelenszer differenciálható az U halmazon, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható az U halmazon, így a) szerint minden $i \in I$ esetén a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény n-szer folytonosan differenciálható az U halmazon, tehát a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény végtelenszer differenciálható az U halmazon.

Megfordítva, ha minden $i \in I$ esetén a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény végtelenszer differenciálható az U halmazon, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén a $\partial_i f$ függvény $n-1$-szer folytonosan differenciálható az U halmazon, így a) szerint az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az U halmazon, tehát f végtelenszer differenciálható az U halmazon. ∎

Utoljára megfogalmazzuk a normált terek szorzatában értelmezett függvények magasabb rendű folytonos differenciálhatóságának "természetes" szükséges feltételét, amely az általános esetben még a folytonossághoz sem elégséges.

5.4.14. Állítás. *Legyen E az $(E_i)_{i\in I}$ véges normált tér rendszer szorzata, F normált tér, és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Ha $n \in \mathbb{N}^*$ és az f függvény n-szer folytonosan differenciálható, akkor minden $k \in I$ és $\mathfrak{a} \in E$ esetén az $f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : E_k \rightarrowtail F$ parciális függvény is n-szer folytonosan differenciálható. Ha az f függvény végtelenszer differenciálható, akkor minden $k \in I$ és $\mathfrak{a} \in E$ esetén az $f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : E_k \rightarrowtail F$ parciális függvény is végtelenszer differenciálható.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$. Ha $k \in I$ és $\mathfrak{a} \in E$, akkor az $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : E_k \to E$ injekció folytonos affin függvény, tehát végtelenszer differenciálható (3.2.3.), tehát ha az f függvény n-szer folytonosan differenciálható (illetve végtelenszer differenciálható), akkor 5.4.6. szerint az $f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}$ parciális függvény is n-szer folytonosan differenciálható (illetve végtelenszer differenciálható). ∎

5.4.15. Következmény. *Legyenek X, Y, Z normált terek, $U \subseteq X$ és $V \subseteq Y$ nyílt halmazok, és $f \in \mathrm{C}^n(U \times V; Z)$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$, vagy $n = \infty$.*

a) *Minden $y \in V$ esetén az*

$$U \to \mathscr{L}(Y;Z); \quad x \mapsto (\mathrm{D}(f(x,\cdot)))\,(y) \tag{1}$$

függvény $n-1$-szer folytonosan differenciálható.

b) *Ha $n \geq 2$, akkor minden $y \in V$ esetén az*

$$U \to \mathscr{L}_2(Y;Z); \quad x \mapsto \left(\mathrm{D}^2(f(x,\cdot))\right)(y) \tag{2}$$

függvény $n-2$-ször folytonosan differenciálható.

Bizonyítás. a) A parciális deriváltak definíciója (2.4.2.) szerint minden $x \in U$ és $y \in V$ esetén

$$(\mathrm{D}(f(x,\cdot)))\,(y) = (\partial_2 f)(x,y), \tag{3}$$

ami azt jelenti, hogy az

$$U \times V \to \mathscr{L}(Y;Z); \quad (x,y) \mapsto (\mathrm{D}(f(x,\cdot)))\,(y)$$

függvény *egyenlő* a $\partial_2 f$ parciális deriváltfüggvénnyel. Mivel $f \in \mathrm{C}^n(U \times V; Z)$, így 5.4.13. a) szerint a $\partial_2 f : U \times V \to \mathscr{L}(Y; Z)$ függvény $n-1$-szer folytonosan differenciálható, ezért az előző állítás alapján minden $y \in V$ esetén a $(\partial_2 f)(\cdot, y) : U \to \mathscr{L}(Y; Z)$ parciális függvény (vagyis az (1) függvény is) $n-1$-szer folytonosan differenciálható.

b) Mivel $f \in \mathrm{C}^n(U \times V; F)$ és $n \geq 2$, így kétszer egymás után alkalmazva a 5.4.13. a) állítást kapjuk, hogy $\partial_2 f \in \mathrm{C}^{n-1}(U \times V; \mathscr{L}(Y; Z))$ és

$$\partial_2(\partial_2 f) \in \mathrm{C}^{n-2}(U \times V; \mathscr{L}(Y; \mathscr{L}(Y; Z))). \tag{4}$$

A parciális deriváltak definíciója (2.4.2.) szerint minden $x \in U$ és $y \in V$ esetén

$$(\partial_2(\partial_2 f))(x, y) = (\mathrm{D}((\partial_2 f)(x, \cdot)))(y).$$

Ugyanakkor (3)-ból látható, hogy minden $x \in U$ pontra

$$(\partial_2 f)(x, \cdot) = \mathrm{D} f_x,$$

ahol – a félreértés elkerülése céljából – az f_x szimbólum jelöli az $f(x, \cdot) : V \to Z$ parciális függvényt. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in U$ és $y \in V$ esetén

$$(\partial_2(\partial_2 f))(x, y) = (\mathrm{D}(\mathrm{D} f_x))(y) = (\mathrm{D}(\mathrm{D}(f(x, \cdot))))(y),$$

ahol már a félreértés veszélye nélkül helyettesíthettük f_x-et $f(x, \cdot)$-tal. Tehát (4) szerint az

$$U \times V \to \mathscr{L}(Y; \mathscr{L}(Y; Z)); \quad (x, y) \mapsto (\mathrm{D}(\mathrm{D}(f(x, \cdot))))(y)$$

függvény $n-2$-ször folytonosan differenciálható. Ezért, ha $\pi_{1,1} : \mathscr{L}(Y; \mathscr{L}(Y; Z)) \to \mathscr{L}_2(Y; Z)$ a kanonikus lineáris homeomorfizmus, akkor 5.4.3. szerint az

$$g : U \times V \to \mathscr{L}_2(Y; Z); \quad (x, y) \mapsto \pi_{1,1}((\mathrm{D}(\mathrm{D}(f(x, \cdot))))(y)) = \left(\mathrm{D}^2(f(x, \cdot))\right)(y)$$

leképezés is $n-2$-ször folytonosan differenciálható. Ezért az előző állítás alapján minden $y \in V$ esetén a $g(\cdot, y) : U \to \mathscr{L}_2(Y; Z)$ parciális függvény is $n-2$-ször folytonosan differenciálható, és ez a függvény egyenlő a (2) leképezéssel. ■

Jól látható, hogy az előző állítás bizonyításában többet igazoltunk, mint amit állítottunk: ugyanis azt láttuk be, hogy az

$$U \times V \to \mathscr{L}(Y; Z); \quad (x, y) \mapsto (\mathrm{D}(f(x, \cdot)))(y)$$

függvény $n-1$-szer folytonosan differenciálható, és $n \geq 2$ esetén az

$$U \times V \to \mathscr{L}_2(Y; Z); \quad (x, y) \mapsto \left(\mathrm{D}^2(f(x, \cdot))\right)(y)$$

függvény $n-2$-ször folytonosan differenciálható. De a későbbi (sokaságelméleti) alkalmazás céljából az állítást a fenti alakban fogalmazzuk meg.

5.4.16. Állítás. *Legyenek X, Y és Z normált terek, $n \in \mathbb{N}^*$, és $f : X \rightarrowtail \mathscr{L}_n(Y; Z)$ függvény. Ha $r \in \mathbb{N}^*$ vagy $r = \infty$, és Y és Z véges dimenziós, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az $f : X \rightarrowtail \mathscr{L}_n(Y; Z)$ függvény r-szer folytonosan differenciálható.*

(ii) *Minden $(y_i)_{i \in n} \in Y^n$ esetén a*

$$\mathrm{Dom}(f) \to Z; \quad x \mapsto f(x)\left((y_i)_{i \in n}\right)$$

függvény r-szer folytonosan differenciálható.

(iii) *Létezik olyan $(y_j)_{j\in \dim(Y)}$ bázis az Y vektortérben, hogy minden $\sigma : n \to \dim(Y)$ függvényre a*

$$\mathrm{Dom}(f) \to Z; \quad x \mapsto f(x)\left(\left(y_{\sigma(i)}\right)_{i\in n}\right)$$

leképezés r-szer folytonosan differenciálható.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Minden $(y_i)_{i\in n} \in Y^n$ esetén az

$$\mathscr{L}_n(Y;Z) \to Z; \quad u \mapsto u\left((y_i)_{i\in n}\right) \tag{1}$$

leképezés nyilvánvalóan lineáris, és folytonos is, mert ha $u \in \mathscr{L}_n(Y;Z)$, akkor a multilineáris operátornorma definíciója szerint

$$\|u\left((y_i)_{i\in n}\right)\| \leq \|u\| \prod_{i\in n} \|y_i\|.$$

Ezért minden $(y_i)_{i\in n} \in Y^n$ esetén a végtelenszer differenciálható (1) leképezés és az r-szer folytonosan differenciálható f függvény kompozíciója is r-szer folytonosan differenciálható, vagyis (ii) teljesül.

(ii)⇒(iii) Triviális.

(iii)⇒(i) Legyen $(y_j)_{j\in \dim(Y)}$ olyan bázis az Y vektortérben, hogy minden $\sigma : n \to \dim(Y)$ függvényre a

$$\mathrm{Dom}(f) \to Z; \quad x \mapsto f(x)\left(\left(y_{\sigma(i)}\right)_{i\in n}\right)$$

leképezés r-szer folytonosan differenciálható. Legyen $(z_l)_{l\in L}$ bázis a Z vektortérben, és $(z_l^*)_{l\in L}$ a duális bázis Z^*-ban. Jelölje J az $n \to \dim(Y)$ függvények halmazát. Az **ALG** 10.5.1. állítás szerint a

$$\left(\left(\dot{\bigotimes_{i\in n}} y^*_{\sigma(i)}\right) \dot{\otimes}\, z_l\right)_{(l,\sigma)\in L\times J} \tag{2}$$

rendszer (véges) bázis az $\mathscr{L}_n(Y;Z)$ vektortérben, ahol $\left(y_j^*\right)_{j\in\dim(Y)}$ a duális bázis Y^*-ban. Ezért egyértelműen létezik olyan $(f_{l,\sigma})_{(l,\sigma)\in L\times J}$ függvényrendszer, hogy minden $(l,\sigma) \in L\times J$ párra $f_{l,\sigma} : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{K}$ függvény, és minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra

$$f(x) = \sum_{(l,\sigma)\in L\times J} f_{l,\sigma}(x).\left(\left(\dot{\bigotimes_{i\in n}} y^*_{\sigma(i)}\right) \dot{\otimes}\, z_l\right). \tag{3}$$

Ha $(l',\sigma') \in L\times J$, akkor minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$f(x)\left(\left(y_{\sigma'(i)}\right)_{i\in n}\right) = \sum_{(l,\sigma)\in L\times J} f_{l,\sigma}(x).\left(\left(\dot{\bigotimes_{i\in n}} y^*_{\sigma(i)}\right) \dot{\otimes}\, z_l\right)\left(\left(y_{\sigma'(i)}\right)_{i\in n}\right) =$$

$$= \sum_{(l,\sigma)\in L\times J} f_{l,\sigma}(x)\left(\prod_{i\in n} \langle y_{\sigma'(i)}, y^*_{\sigma(i)}\rangle\right).z_l = \sum_{(l,\sigma)\in L\times J} f_{l,\sigma}(x)\delta_{\sigma',\sigma}.z_l = \sum_{l\in L} f_{l,\sigma'}(x).z_l,$$

Ebből következik, hogy ha $l' \in L$, akkor minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra

$$\left\langle f(x)\left(\left(y_{\sigma'(i)}\right)_{i\in n}\right), z^*_{l'}\right\rangle = \left\langle \sum_{l\in L} f_{l,\sigma'}(x).z_l, z^*_{l'}\right\rangle = \sum_{l\in L} f_{l,\sigma'}(x)\langle z_l, z^*_{l'}\rangle =$$

$$= \sum_{l\in L} f_{l,\sigma'}(x)\delta_{l,l'} = f_{l',\sigma'}(x).$$

Tehát minden $(l,\sigma) \in L\times J$ párra (iii) miatt az $f_{l,\sigma} : X \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény r-szer folytonosan differenciálható, amiből (3) és 5.4.12. alapján következik, hogy f is r-szer folytonosan differenciálható. ∎

5.5. Gyakorlatok

1. Legyen $(E_i)_{i\in I}$ normált terek véges rendszere, és jelölje E ennek szorzatát. Tegyük fel, hogy $I \neq \emptyset$ és F normált tér. Ha $f : E \rightarrowtail F$ olyan függvény és

$$\mathfrak{a} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f)) \cap \bigcap_{i\in I} \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\partial_i f))$$

olyan pont, hogy létezik olyan $k \in I$, amelyre minden $i \in I \setminus \{k\}$ esetén a $\partial_i f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E_i; F)$ parciális deriváltfüggvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor f az $\mathfrak{a}$-ban folytonosan differenciálható.

(*Útmutatás.* Elég megfelelően módosítani az ebben a pontban szereplő tétel bizonyítását.)

2. Legyenek E és F normált terek, valamint $U \subseteq E$ nyílt halmaz. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$ esetén $\mathrm{C}_b^n(U; F)$ jelöli azon $f : U \to F$ függvények halmazát, amelyek n-szer folytonosan differenciálhatóak és minden $k \leq n$ természetes számra a $\mathrm{D}^k f : U \to \mathscr{L}_k(E; F)$ deriváltfüggvény *korlátos*; világos, hogy $\mathrm{C}_b^n(U; F)$ lineáris altere az $\mathscr{F}(U; F)$ függvénytérnek.

a) Ha $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, akkor minden $f \in \mathrm{C}_b^n(U; F)$ függvényre és $m \leq n$ természetes számra $\mathrm{D}^m f \in \mathrm{C}_b^{n-m}(U; F)$ (megállapodva abban, hogy $n = \infty$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén $n - m := n$).

b) Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor a

$$\|\cdot\|_n : \mathrm{C}_b^n(U; F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sum_{m=0}^{n} \sup_{x\in U} \|(\mathrm{D}^m f)(x)\|$$

leképzés *norma* a $\mathrm{C}_b^n(U; F)$ függvénytér felett.

c) Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor minden $m \leq n$ természetes számra a

$$\mathrm{C}_b^n(U; F) \to \mathrm{C}_b^{n-m}(U; F); \quad f \mapsto \mathrm{D}^k f$$

leképzés olyan lineáris operátor, amely folytonos (sőt norma-nem-növelő) a $\|\cdot\|_n$ és $\|\cdot\|_{n-m}$ normák szerint.

3. Legyenek E és F normált terek, $U \subseteq E$ nyílt halmaz, és $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$. Ekkor $\mathrm{C}^n(\overline{U}; F)$ jelöli azon $f : \overline{U} \to F$ függvények halmazát, amelyekhez létezik olyan $\overline{f} : E \rightarrowtail F$ függvény, amely n-szer folytonosan differenciálható és $f \subseteq \overline{f}$. Világos, hogy $\mathrm{C}^n(\overline{U}; F)$ lineáris altere az $\mathscr{F}(\overline{U}; F)$ függvénytérnek, továbbá a $\mathrm{C}^n(\overline{U}; F)$ minden eleme *folytonos* $\overline{U} \to F$ függvény, valamint az $f|_U : U \to F$ függvény minden $m \leq n$ természetes számra m-szer folytonosan differenciálható, azaz $f|_U \in \mathrm{C}^m(U; F)$.

a) Minden $f \in \mathrm{C}^n(\overline{U}; F)$ függvényhez és $m \leq n$ természetes számhoz egyértelműen létezik olyan $f_m : \overline{U} \to \mathscr{L}_m(E; F)$ függvény, amelyre teljesül az, hogy az f bármely $\overline{f} : \overline{U} \to F$ n-szer folytonosan differenciálható kiterjesztésére $f_m \subseteq \mathrm{D}^m \overline{f}$; ezt az f_m függvényt a $\overline{\mathrm{D}}^m f$ szimbólummal jelöljük. Ha $f \in \mathrm{C}^n(\overline{U}; F)$ és $m \leq n$ természetes szám, akkor $\mathrm{D}^m(f|_U) = (\overline{\mathrm{D}}^m f)|_U$, tehát a $\mathrm{D}^m(f|_U) : U \to \mathscr{L}_m(E; F)$ folytonos függvény folytonosan kiterjeszthető $\overline{U}$-ra, és az (egyértelmű) folytonos kiterjesztése $\overline{U}$-ra egyenlő $\overline{\mathrm{D}}^m f$-fel.

b) Minden $f \in \mathrm{C}^n(\overline{U}; F)$ függvényre és $m \leq n$ természetes számra $\overline{\mathrm{D}}^m f \in \mathrm{C}^{n-m}(\overline{U}; F)$

(megállapodva abban, hogy $n = \infty$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén $n - m := n$).

c) Tegyük fel, hogy az U nyílt halmaz *relatív kompakt.* Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor a

$$\|\cdot\|_n : \mathrm{C}^n(\overline{U}; F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sum_{m=0}^{n} \sup_{x \in \overline{U}} \|(\overline{\mathrm{D}}^m f)(x)\|.$$

leképezés *norma* a $\mathrm{C}^n(\overline{U}; F)$ függvénytér felett.

d) Ha U relatív kompakt, $n \in \mathbb{N}^*$, és $m \leq n$ természetes szám, akkor a

$$\mathrm{C}^m(\overline{U}; F) \to \mathrm{C}^{n-m}(\overline{U}; F); \quad f \mapsto \overline{\mathrm{D}}^m f$$

leképezés olyan lineáris operátor, amely folytonos (sőt norma-nem-növelő) a $\|\cdot\|_n$ és és $\|\cdot\|_{n-m}$ normák szerint.

(*Útmutatás.* a) Elég azt belátni, hogy ha $f \in \mathrm{C}^n(\overline{U}; F)$, és a $g, h : E \rightarrowtail F$ függvények n-szer folytonosan differenciálható kiterjesztései f-nek, akkor minden $m \leq n$ természetes számra $\mathrm{D}^m g = \mathrm{D}^m h$ az $\overline{U}$ halmazon. Ez valóban következik abból, hogy $g = h$ az U-n, így a differenciálás lokalitása miatt $\mathrm{D}^m g = \mathrm{D}^m h$ az $\overline{U}$ halmazon, ugyanakkor $\overline{U} \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^m g) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^m h)$, továbbá a $\mathrm{D}^m g$ és $\mathrm{D}^m h$ függvények folyonosak, így az egyenlőségek folytatásának elve alapján $\mathrm{D}^m g = \mathrm{D}^m h$ teljesül az $\overline{U}$ halmazon is.

c) A $\|\cdot\|_n$ függvény *véges* értékeket vesz fel, mert $\overline{U}$ kompakt és $f \in \mathrm{C}^n(\overline{U}; F)$ esetén minden $m \leq n$ természetes számra a $\overline{\mathrm{D}}^m f$ függvény $\overline{U}$-n folytonos, így korlátos is.)

XII. **DIFFERENCIÁLELMÉLET**

5. FOLYTONOS DIFFERENCIÁLHATÓSÁG

6. fejezet

Függvénysorozat határtékének differenciálhatósága

6.1. Pontonkénti limeszfüggvény differenciálhatósága

Ebben a pontban azt vizsgáljuk meg, hogy normált terek között ható differenciálható függvények pontonkénti határértéke milyen feltételek mellett lesz differenciálható, és mikor lesz a pontonkénti határérték deriváltfüggvénye egyenlő a deriváltfüggvények pontonkénti határértékével? Ennek a problémának speciális esete az, hogy normált terek között ható differenciálható függvények pontonkénti összegfüggvénye milyen feltételek mellett differenciálható, és a függvénysor-összegzés felcserélhető-e a differenciálással?

A **MET** 11.1. szakasz 1) példában láttuk, hogy a pontonkénti határértékre még a folytonosság sem öröklődik automatikusan. Ott kiderült, hogy elég a függvénysorozat egyenletes konvergenciáját feltenni ahhoz, hogy a folytonosság öröklődjék a pontonkénti határértékre (**MET** 1.4.2.). Azonban a differenciálhatóság öröklődéséhez még az egyenletes konvergencia feltétele sem elegendő.

Egyszerű példa mutatja, hogy differenciálható függvények pontonkénti határértéke még akkor sem szükségképpen differenciálható, ha a függvénysorozat egyenletesen konvergens. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és F valós normált tér, akkor minden $f : [a, b] \to F$ *folytonos* függvényhez létezik olyan végtelenszer differenciálható $\mathbb{R} \to F$ függvényekből álló $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ az $[a, b]$ halmazon, és ezen az intervallumon az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, tehát az $]a, b[$ halmazon is egyenletesen konvergál az f függvény $]a, b[$-re vett leszűkítéséhez. Ezt világosan mutatja a Bernstein-polinomokkal való approximációs tétel (**MET** 8.6.2.). Ilymódon minden olyan $]a, b[\to F$ folytonos függvény, amely kiterjeszthető $[a, b]$-re folytonos függvénnyé (vagyis amelynek létezik határértéke a-ban és b-ben), egyenletesen közelíthető $]a, b[$-n olyan függvénysorozattal, amelynek tagjai végtelenszer differenciálható függvények. Tehát még végtelenszer differenciálható, sőt valós analitikus függvények egyenletesen konvergens sorozatának pontonkénti határértéke sem szükségképpen differenciálható.

Az is előfordul, hogy a pontonkénti limeszfüggvény differenciálható, de a deriváltfüggvénye nem egyenlő a deriváltfüggvények pontonkénti limeszével, vagyis a differenciálás és a pontonkénti limeszképzés sorrendje nem cserélhető fel.

6.1.1. Lemma. *Legyenek E, F normált terek, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $E \rightarrowtail F$ függvényekből álló sorozat, és $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, valamint $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén* $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f_n)$. *Tegyük fel, hogy*

a) *az* $(f_n(\mathfrak{a}))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat Cauchy-sorozat* F*-ben, és*

b) *a* $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deriváltfüggvény-sorozat egyenletesen konvergens a* $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ *halmazon.*

Ekkor minden $\mathbb{R}_+^* \ni \varepsilon$*-hoz létezik olyan* $N \in \mathbb{N}$*, hogy minden* $m, n > N$ *természetes számra és minden* $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ *pontra* $\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$ *teljesül.*

(Ezt a tényt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}})_{x\in\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})}$ *sorozat rendszer az* x *függvényében* **egyenletesen Cauchy-sorozat** *a* $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ *gömbön.)*

Bizonyítás. Legyen $u := \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{D}f_n)$, és $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Vegyünk olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $n > N_1$ természetes számra, és minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ pontra $\|u(x) - (\mathrm{D}f_n)(x)\| < \varepsilon'$. Ekkor $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N_1$ esetén nyilvánvalóan minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ pontra $\|(\mathrm{D}f_m)(x) - (\mathrm{D}f_n)(x)\| < 2\varepsilon'$ teljesül. Ha $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ és $m, n \in \mathbb{N}$, akkor $[\![\mathfrak{a}, x]\!] \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f_m) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f_n) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(f_m - f_n))$, ezért az $f_m - f_n$ függvényre és az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ szakaszra felírva a véges növekmények formuláját, $m, n > N_1$ esetén a következőt kapjuk

$$\|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(\mathfrak{a})\| \leq \Big(\sup_{z\in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \|(\mathrm{D}f_m)(z) - (\mathrm{D}f_n)(z)\|\Big)\|x - \mathfrak{a}\| \leq$$
$$\leq \Big(\sup_{z\in\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})} \|(\mathrm{D}f_m)(z) - (\mathrm{D}f_n)(z)\|\Big)\|x - \mathfrak{a}\| \leq 2\varepsilon'\|x - \mathfrak{a}\|.$$

Ebből következik, hogy minden $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \ni x$-re és minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N_1$ számra

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \|f_m(\mathfrak{a}) - f_n(\mathfrak{a})\| + 2\varepsilon' r.$$

A feltevés szerint $(f_n(\mathfrak{a}))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, így létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$ és $m, n > N_2$ esetén $\|f_m(\mathfrak{a}) - f_n(\mathfrak{a})\| < \varepsilon'$. Tehát a fentiek alapján $N := \max(N_1, N_2)$ olyan, hogy minden $m, n > N$ természetes számra, és minden $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \ni x$-re $\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq (1 + 2r)\varepsilon'$. Ez azt jelenti, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és az $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ szám olyan, amelyre $(1 + 2r)\varepsilon' < \varepsilon$, akkor az ε'-höz fentiek szerint megválasztott $N \in \mathbb{N}$ számra teljesül az, hogy minden $m, n > N$ természetes számra és minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ pontra $\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$ teljesül. ■

6.1.2. Tétel. *Legyenek* E*,* F *normált terek,* $U \subseteq E$ *nyílt halmaz, és* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan* $E \rightarrowtail F$ *függvényekből álló sorozat, amelyre minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f_n)$*. Tegyük fel, hogy:*

a) *az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat pontonként konvergens az* U *halmazon, és*

b) *a* $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deriváltfüggvény-sorozat lokálisan egyenletesen konvergens az* U *halmazon, vagyis minden* $\mathfrak{a} \in U$ *esetén létezik olyan* $r \in \mathbb{R}_+^*$*, hogy* $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U$ *és a* $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat egyenletesen konvergens a* $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ *halmazon.*

Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az* U *halmazon, és a* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *függvény differenciálható az* U *halmaz minden pontjában, és fennáll a*

$$\mathrm{D}(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{D}f_n)$$

egyenlőség az U *halmazon.*

Bizonyítás. A bizonyításban az $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ és $u := \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{D}f_n)$ jelöléseket fogjuk alkalmazni.

Először megmutatjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon. Ehhez legyen $\mathfrak{a} \in U$ és a hipotézis alapján vegyünk olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U$, és a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deriváltfüggvény-sorozat egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömbön. Állítjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens ezen a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömbön. Valóban, az $(f_n(\mathfrak{a}))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, tehát Cauchy-sorozat, így a 6.1.1. lemma szerint $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n > N$ természetes számra és minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ pontra $\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ és $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ esetén

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömbön.

Megmutatjuk, hogy f differenciálható az U halmazon, és $\mathrm{D}f = u$ az U halmazon. Ehhez legyen $\mathfrak{a} \in U$ rögzítve, és $\varphi : U \to F$ az a függvény, amelyre $\varphi(\mathfrak{a}) := 0$ és minden $x \in U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\varphi(x) := \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - u(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|}.$$

Legyen továbbá minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n : U \to F$ az a függvény, amelyre $\varphi_n(\mathfrak{a}) := 0$ és minden $x \in U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\varphi_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f_n)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|}.$$

Minden $\mathbb{N} \ni n$-re az f_n függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért φ_n folytonos $\mathfrak{a}$-ban. Nyilvánvaló, hogy φ pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = u(\mathfrak{a})$, tehát éppen a φ függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli folytonosságát kell bizonyítani. Tekintettel arra, hogy a definíciók szerint $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, a φ függvény $\mathfrak{a}$-beli folytonosságához elegendő volna az, ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergálna az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén (**MET** 11.4.1.).

Ismét legyen $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, amelyre $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U$, és a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derivált-függvény-sorozat egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömbön. Állítjuk, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens ezen a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömbön. Valóban, legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $n > N$ természetes számra, és minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ pontra $\|u(x) - (\mathrm{D}f_n)(x)\| < \varepsilon'$. Ekkor $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N$ esetén nyilvánvalóan minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ pontra $\|(\mathrm{D}f_m)(x) - (\mathrm{D}f_n)(x)\| < 2\varepsilon'$ teljesül. Ha $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ és $m, n \in \mathbb{N}$, akkor $[\![\mathfrak{a}, x]\!] \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f_m) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f_n) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}(f_m - f_n))$, ezért az $f_m - f_n$ függvényre, az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ szakaszra, valmint a $\mathrm{D}(f_m - f_n)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E; F)$ operátorra felírva a véges növekmények formuláját, $m, n > N$ esetén a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}(f_m - f_n)(\mathfrak{a}))(x - a)\| \leq \\
&\leq \Big(\sup_{z\in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \|((\mathrm{D}f_m)(z) - (\mathrm{D}f_n)(z)) - ((\mathrm{D}f_m)(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f_n)(\mathfrak{a}))\|\Big)\|x - \mathfrak{a}\| \leq 4\varepsilon'\|x - \mathfrak{a}\|,
\end{aligned}$$

hiszen minden $z \in]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ esetén $z \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$, így $m, n > N$ miatt

$$\begin{aligned}
&\|((\mathrm{D}f_m)(z) - (\mathrm{D}f_n)(z)) - ((\mathrm{D}f_m)(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f_n)(\mathfrak{a}))\| \leq \\
&\leq \|(\mathrm{D}f_m)(z) - (\mathrm{D}f_n)(z)\| + \|(\mathrm{D}f_m)(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f_n)(\mathfrak{a})\| < 4\varepsilon'.
\end{aligned}$$

Ugyanakkor könnyen látható, hogy $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\varphi_m(x) - \varphi_n(x) = \frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}(f_m - f_n)(\mathfrak{a}))(x - a)}{\|x - \mathfrak{a}\|}.$$

Tehát minden $m, n > N$ természetes számra és $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \ni x$-re $\|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\| \leq 4\varepsilon'$, hiszen ezt igazoltuk $x \neq \mathfrak{a}$ esetén, míg az $x := \mathfrak{a}$ pontra nyilvánvalóan igaz, mert $\varphi_m(\mathfrak{a}) := 0 =: \varphi_n(\mathfrak{a})$. Ebből következik, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ és $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$, akkor

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\| \leq 4\varepsilon'.$$

Tehát ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és az $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot úgy választjuk meg, hogy $4\varepsilon' < \varepsilon$ teljesüljön, akkor az ε'-höz fentiek szerint kijelölt $\mathbb{N} \ni N$-re fennáll, hogy minden $n > N$ természetes számra és $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \ni x$-re $\|\varphi(x)-\varphi_n(x)\| < \varepsilon$. Ezért a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömbön. ■

A 6.1.2. tételben szereplő két feltétel *független egymástól*, vagyis egyikből sem következik a másik, amint azt az alábbi példák mutatják.

– Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}_+^*$-ban, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sqrt{\varepsilon_n} \cdot \sin\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right).$$

Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja *végtelenszer differenciálható* $\mathbb{R}$-en, és ez a függvénysorozat $\mathbb{R}$-en *egyenletesen konvergens*, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} f_n{=}0$, tehát a pontonkénti limeszfüggvény szintén *végtelenszer differenciálható*. Azonban a $((\mathrm{D}f_n)(0))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat egyenlő az $(1/\sqrt{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozattal, így a deriváltfüggvény-sorozat még *pontonként sem konvergens* az $\mathbb{R}$ halmazon. Ez a példa még azt is mutatja, hogy $\mathrm{D}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(0) = 0$, ugyanakkor a $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)(0)$ szimbólum értelmetlen.

– Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n a $(-1)^n$ értékű konstansfüggvény. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja *végtelenszer differenciálható* $\mathbb{R}$-en, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{D}f_n = 0$, tehát a deriváltfüggvények sorozata *egyenletesen konvergens* $\mathbb{R}$-en, valamint $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n) = 0$. Azonban az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *nem pontonként konvergens* az $\mathbb{R}$ egyetlen nem üres részhalmazán sem.

6.1.3. Tétel. *Legyenek E, F normált terek, $U \subseteq E$ nyílt halmaz, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $E \rightarrowtail F$ függvényekből álló sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f_n)$. Tegyük fel, hogy U összefüggő, F teljes, és*

a) *létezik olyan $x \in U$, hogy az $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, és*

b) *a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deriváltfüggvény-sorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon.*

Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, és a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény differenciálható az U minden pontjában, és fennáll a

$$\mathrm{D}(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}f_n)$$

egyenlőség az U halmazon.

Bizonyítás. A 6.1.2. tétel alapján elegendő azt igazolni, hogy az adott feltételek mellett az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *pontonként konvergens* U-n. Ehhez jelölje U' azon $x \in U$ pontok halmazát, amelyekre az $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben; azt kell igazolni, hogy $U' = U$.

Először megmutatjuk, hogy U' nyílt halmaz E-ben. Valóban, ha $\mathfrak{a} \in U'$, és $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U$ és a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deriváltfüggvény-sorozat egyenletesen konvergens a

$\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ halmazon, akkor a 6.1.1. lemma szerint minden $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \ni x$-re $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat F-ben, így az F teljessége miatt konvergens is, vagyis $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U'$.

Most megmutatjuk, hogy $U' = \overline{U'} \cap U$. Az $U' \subseteq \overline{U'} \cap U$ tartalmazás nyilvánvaló. A fordított tartalmazás bizonyításához legyen $\mathfrak{a} \in \overline{U'} \cap U$, és vegyünk olyan U'-ben haladó $(\mathfrak{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre $\mathfrak{a} = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{a}_k$. Ismét legyen $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U$, és a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deriváltfüggvény-sorozat egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ halmazon. Legyen $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\mathfrak{a}_k \in \mathrm{B}_{r/2}(\mathfrak{a})$. Ekkor $\mathfrak{a}_k \in U'$, továbbá $\mathrm{B}_{r/2}(\mathfrak{a}_k) \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ miatt a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deriváltfüggvény-sorozat egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_{r/2}(\mathfrak{a}_k)$ halmazon. A 6.1.1. lemma szerint minden $\mathrm{B}_{r/2}(\mathfrak{a}_k) \ni x$-re $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat F-ben, így az F teljessége miatt konvergens is, vagyis $\mathrm{B}_{r/2}(\mathfrak{a}_k) \subseteq U'$. De nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{B}_{r/2}(\mathfrak{a}_k)$, így $\mathfrak{a} \in U'$.

Végül megmutatjuk, hogy $U' = U$. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $U' \neq U$. A hipotézis szerint $U' \neq \emptyset$, tehát U' és $U \setminus U'$ két olyan nem üres részhalmaza U-nak, amelyre $U = U' \cup (U \setminus U')$. Az előzőek alapján $\overline{U'} \cap (U \setminus U') = (\overline{U'} \cap U) \setminus U' = \emptyset$. Ha $\mathfrak{a} \in U' \cap \overline{U \setminus U'}$, akkor U' nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, így $U' \cap (U \setminus U') \neq \emptyset$, ami lehetetlen; ezért $U' \cap \overline{U \setminus U'} = \emptyset$ is teljesül. Ez lehetetlen, ha az U halmaz összefüggő. ■

6.2. Függvénysor pontonkénti össsszegének differenciálhatósága

Most megfogalmazzuk a függvénysorozatokkal kapcsolatos előző tételek függvénysorokra vonatkozó alakját.

6.2.1. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $U \subseteq E$ nyílt halmaz, és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $E \rightarrowtail F$ függvényekből álló sorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f_k)$. Tegyük fel, hogy*

a) *a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor pontonként konvergens az U halmazon, és*

b) *a $\sum_{k\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_k)$ deriváltfüggvény-sor lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon*

(például a $\sum_{k\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_k)$ deriváltfüggvény-sor normálisan konvergens az U halmazon és F Banach-tér).

Ekkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, és a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ összegfüggvény differenciálható az U minden pontjában, és fennáll a

$$\mathrm{D}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{D}f_k)$$

egyenlőség az U halmazon.

Bizonyítás. A 6.1.2. tétel nyilvánvaló következménye, ha azt a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysorra, vagyis a $\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazzuk, figyelembe véve, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{D}\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}f_k$ teljesül az U halmazon. ■

6.2.2. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $U \subseteq E$ nyílt halmaz, és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $E \rightarrowtail F$ függvényekből álló sorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f_k)$. Tegyük fel, hogy U összefüggő, F teljes, és*

a) *létezik olyan $x \in U$ pont, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ sor konvergens F-ben, és*

b) *a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_k)$ deriváltfüggvény-sor lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon (például a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}f_k)$ deriváltfüggvény-sor normálisan konvergens az U halmazon).*

Ekkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, és a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ összegfüggvény differenciálható az U minden pontjában, és fennáll a

$$\mathrm{D}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{D}f_k)$$

egyenlőség az U halmazon.

Bizonyítás. A 6.1.3. tétel nyilvánvaló következménye, ha azt a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysorra, vagyis a $\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazzuk, figyelembe véve, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{D}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\Big) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{D}f_k$ teljesül az U halmazon. ■

6.3. Függvénysorozat pontonkénti limeszének magasabb rendű differenciálhatósága

A magasabb rendű differenciálás és a pontonkénti limeszképzés kapcsolatára vonatkozik a következő tétel.

6.3.1. Tétel. *Legyenek E, F normált terek, $U \subseteq E$ nyílt halmaz, $m \in \mathbb{N}^*$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $E \rightarrowtail F$ függvényekből álló sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f_n függvény m-szer (folytonosan) differenciálható U-n. Tegyük fel, hogy*

a) *minden $k < m$ természetes számra a $(\mathrm{D}^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az U halmazon, és*

b) *a $(\mathrm{D}^m f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon.*

Ekkor minden $k \leq m$ természetes számra a $(\mathrm{D}^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, és a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény m-szer (folytonosan) differenciálható az U minden pontjában, és minden $k \leq m$ természetes számra fennáll a

$$\mathrm{D}^k\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{D}^k f_n)$$

egyenlőség az U halmazon.

Bizonyítás. Az állítást m szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az $m = 1$ esetben az a feltétel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f_n függvény (folytonosan) differenciálható az U nyílt halmazon, és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens U-n, valamint a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon. Az első tétel szerint ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, és a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény differenciálható U-n, valamint

$$\mathrm{D}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{D}f_n)$$

teljesül az U halmazon, tehát ha minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n folytonosan differenciálható U-n, akkor $\mathrm{D}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ is folytonos U-n, vagyis a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény *folytonosan differenciálható* U-n, mert folytonos függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozatának a pontonkénti limesze folytonos. Ez azt jelenti, hogy $m = 1$ esetén az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $m \geq 1$ természetes számra, és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $E \rightarrowtail F$ függvényekből álló sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f_n függvény $m+1$-szer (folytonosan) differenciálható U-n, továbbá minden $k < m+1$ természetes számra a $(\mathrm{D}^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az U halmazon, valamint a $(\mathrm{D}^{m+1} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon.

Ekkor a $(\mathrm{D}^m f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat tagjai olyan $E \rightarrowtail \mathscr{L}_m(E;F)$ típusú függvények, amelyek az U halmazon differenciálhatóak, és ez a függvénysorozat az U halmazon pontonként konvergens, továbbá a $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^m f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az U halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, hiszen minden $\mathbb{N} \ni n$-re a definíció szerint $\mathrm{D}^{m+1} f_n = \pi_{1,m} \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}^m f_m)$, és a hipotézis alapján a $(\mathrm{D}^{m+1} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, továbbá a $\pi_{1,m} : \mathscr{L}(E;\mathscr{L}_m(E;F)) \to \mathscr{L}_{m+1}(E;F)$ leképezés izometrikus lineáris bijekció. Ezért az első tételt alkalmazva a $(\mathrm{D}^m f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra kapjuk, hogy ez az U halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, továbbá a $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{D}^m f_n)$ függvény differenciálható U-n, valamint

$$\mathrm{D}\Big(\lim_{n\to\infty}(\mathrm{D}^m f_n)\Big) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{D}(\mathrm{D}^m f_n)$$

teljesül az U halmazon.

Ugyanakkor minden $k < m$ természetes számra a $(\mathrm{D}^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens U-n, így az indukciós hipotézis alapján minden $k \leq m$ természetes számra a $(\mathrm{D}^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens U-n, és a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény m-szer differenciálható az U-n, és minden $k \leq m$ természetes számra fennáll a

$$\mathrm{D}^k\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{D}^k f_n)$$

egyenlőség az U halmazon. Speciálisan a $\mathrm{D}^m(\lim\limits_{n\to\infty} f_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{D}^m f_n)$ egyenlőség is teljesül, és az előzőek alapján a $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{D}^m f_n)$ függvény differenciálható U-n. Ezért a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény $m+1$-szer differenciálható U-n, és

$$\mathrm{D}^{m+1}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) := \pi_{1,m} \circ \mathrm{D}\Big(\mathrm{D}^m\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)\Big) = \pi_{1,m} \circ \mathrm{D}\Big(\lim_{n\to\infty}(\mathrm{D}^m f)\Big) =$$
$$= \pi_{1,m} \circ \Big(\lim_{n\to\infty}(\mathrm{D}(\mathrm{D}^m f)\Big) = \lim_{n\to\infty}(\pi_{1,m} \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}^m f)) =: \lim_{n\to\infty}(\mathrm{D}^{m+1} f_n)$$

teljesül az U halmazon. Továbbá, a hipotézis szerint a $(\mathrm{D}^{m+1} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, ezért ha minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n az U

halmazon $m+1$-szer *folytonosan* differenciálható, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{D}^{m+1}f_n)$ limeszfüggvény folytonos az U minden pontjában, így az imént igazolt egyenlőség miatt a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény is $m+1$-szer *folytonosan* differenciálható U-n. ■

6.3.2. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $U \subseteq E$ nyílt halmaz, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $E \rightarrowtail F$ függvényekből álló sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f_n függvény végtelenszer differenciálható U-n. Ha minden $m \in \mathbb{N}$ esetén a $(\mathrm{D}^m f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény végtelenszer differenciálható U-n, és minden $m \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\mathrm{D}^m\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^m f_n$$

teljesül az U halmazon.

Bizonyítás. A hipotézis szerint $m \in \mathbb{N}$ esetén minden $k < m$ természetes számra a $(\mathrm{D}^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként (sőt lokálisan egyenletesen) konvergens az U halmazon, és a $(\mathrm{D}^m f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens U-n, tehát az előző tétel alapján a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény m-szer differenciálható az U halmazon, és fennáll az

$$\mathrm{D}^m\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^m f_n$$

egyenlőség az U halmazon. Ez *minden* $\mathbb{N} \ni m$-re teljesül, ami azt jelenti, hogy az állítás igaz. ■

6.4. Gyakorlatok

1. Legyen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat $\mathbb{R}_+^*$-ban, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n := c_n.\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (végtelenszer) differenciálható függvény, továbbá a függvénysorozat *lokálisan egyenletesen konvergál* $\mathbb{R}$-en a 0 függvényhez, és a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deriváltfüggvény-sorozat *egyenetesen konvergál* $\mathbb{R}$-en a 0 függvényhez. Azonban az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *nem egyenletesen* konvergál $\mathbb{R}$-en a 0 függvényhez, tehát az első tételben az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatnak csak a lokális egyenletes konvergenciája állítható, még akkor is, ha a deriváltfüggvény-sorozat egyenletesen konvergens.

2. Tekintsük azt az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f_n a $(-1)^n$ értékű $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstansfüggvény. Ekkor a $(\mathrm{D}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deriváltfüggvény-sorozat egyenletesen konvergál $\mathbb{R}$-en a 0 függvényhez, de az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat sehol sem konvergál pontonként az $\mathbb{R}$ halmazon.

3. Legyenek E, F normált terek, $U \subseteq E$ nyílt halmaz és $m \in \mathbb{N}^*$. Ha F Banach-tér, akkor a $(\mathrm{C}_b^m(U;F), \|\cdot\|_m)$ pár is Banach-tér, ahol

$$\|\cdot\|_m : \mathrm{C}_b^m(U;F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in U} \|(\mathrm{D}^k f)(x)\|$$

(5. pont, **2**. gyakorlat).

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy az F normált tér teljes, és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\mathrm{C}_b^m(U;F)$ függvénytérben a $\|\cdot\|_m$ norma szerint. A $\|\cdot\|_n$ definíciója alapján nyilvánvaló, hogy minden $k \leq m$ természetes számra a $(\mathrm{D}^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deriváltfüggvény-sorozat a sup-norma szerint Cauchy-sorozat az $U \to \mathscr{L}_k(E;F)$ korlátos és folytonos függvények terében. Az F teljessége miatt minden $k \leq m$ természetes számra $\mathscr{L}_k(E;F)$ is teljes a multilineáris operátornormával, ezért az $U \to \mathscr{L}_k(E;F)$ folytonos és korlátos függvények tere is teljes a sup-normával, így létezik olyan $g_k : U \to \mathscr{L}_k(E;F)$ folytonos és korlátos függvény, amelyre $g_k = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{D}^k f_n)$ és a $(\mathrm{D}^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az U halmazon. Speciálisan: minden $k < m$ természetes számra a $(\mathrm{D}^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként is konvergens az U halmazon, és a $(\mathrm{D}^m f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen (sőt egyenletesen) konvergens az U halmazon. Ezért a $g_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény m-szer folytonosan differenciálható, és minden $k \leq m$ természetes számra

$$\mathrm{D}^k g_0 = \mathrm{D}^k\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{D}^k f_n) = g_k,$$

tehát $\mathrm{D}^k g_0$ korlátos, vagyis $g_0 \in \mathrm{C}_b^m(U;F)$, és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál g_0-hoz a $\|\cdot\|_m$ norma szerint. Ez azt jelenti, hogy a $(\mathrm{C}_b^m(U;F), \|\cdot\|_m)$ pár Banach-tér.)

4. Legyenek E, F normált terek, $U \subseteq E$ *relatív kompakt* nyílt halmaz és $m \in \mathbb{N}^*$. Ha F Banach-tér, akkor a $(\mathrm{C}^m(\overline{U};F), \|\cdot\|_m)$ pár is Banach-tér, ahol

$$\|\cdot\|_m : \mathrm{C}^m(\overline{U};F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in\overline{U}} \|(\overline{\mathrm{D}}^k f)(x)\|$$

(5. pont, **3**. gyakorlat).

(*Útmutatás.* Hasonlóan járunk el, mint a **3**. gyakorlat esetében.)

5. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} \frac{\sin(2k\pi.\mathrm{id}_{\mathbb{R}})}{k\pi}$$

függvénysor pontonként konvergens az $\mathbb{R}$ halmazon, és a pontonkénti összegfüggvény 1 szerint periodikus, és minden $x \in [0,1[$ valós számra

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k\pi} = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x = 0; \\ \frac{1}{2} - x & \text{, ha } x \in]0,1[. \end{cases}$$

Ez a függvény végtelenszer differenciálható (sőt valós analitikus) az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ halmazon, azonban a

$$\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} \mathrm{D}\Big(\frac{\sin(2k\pi.\mathrm{id}_{\mathbb{R}})}{k\pi}\Big)$$

függvénysor az $\mathbb{R}$ halmaz minden pontjában divergens.

(*Útmutatás.* Először tekintsük a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^k}{k}$$

komplex hatványfüggvény-sort, amelynek konvergenciasugara 1, és amelyről a feltételes konvergencia Abel-kritériumát alkalmazva könnyen belátható, hogy az

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^k}{k}$$

összegfüggvényre

$$\mathrm{Dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid (|z| \leq 1) \wedge (z \neq 1)\}$$

teljesül. A III. fejezet, 2. pont eredményei alapján az $f : \mathbb{C} \rightarrowtail C$ függvény differenciálható a $\mathrm{B}_1(0; \mathbb{C})$ nyílt gömbön és

$$\mathrm{D}f = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{D}\Big(\frac{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^k}{k}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^k = \frac{1}{1 - \mathrm{id}_{\mathbb{C}}}$$

teljesül a $\mathrm{B}_1(0; \mathbb{C})$ halmazon. (Ez egyébként következik a Cauchy–Hadamard-tételből, valamint e pont tételeiből is.) A $\mathrm{B}_1(0; \mathbb{C})$ halmaz minden pontjában az $1 - \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ függvény értéke szigorúan pozitív valós részű komplex szám, ezért az $(1 - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})\langle \mathrm{B}_1(0; \mathbb{C})\rangle$ halmaz minden pontjában a Log (komplex logaritmus-) függvény differenciálható és

$$-\mathrm{D}(\mathrm{Log}(1 - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})) = \frac{1}{1 - \mathrm{id}_{\mathbb{C}}} = \mathrm{D}f$$

teljesül $\mathrm{B}_1(0; \mathbb{C})$-n. A $\mathrm{B}_1(0; \mathbb{C})$ gömb összefüggősége folytán ebből következik olyan $c \in \mathbb{C}$ létezése, hogy $f = c - \mathrm{Log}(1 - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ a $\mathrm{B}_1(0; \mathbb{C})$ halmazon. De $f(0) = 0$ miatt világos, hogy $c = 0$, vagyis

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}^k}{k} = -\mathrm{Log}(1 - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$$

a $\mathrm{B}_1(0; \mathbb{C})$ halmazon. A hatványfüggvény-sorok összegfüggvényének radiális folytonosságára vonatkozó Abel-tétel (V. fejezet, 11. pont) alapján kapjuk, hogy minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $|z| = 1$ esetén

$$f(z) = \lim_{z' \to z,\ z' \in [\![0, z[\![} f(z') = \lim_{z' \to z,\ z' \in [\![0, z[\![} (-\mathrm{Log}(1 - z')) = -\mathrm{Log}(1 - z),$$

hiszen a Log függvény folytonos a szigorúan pozitív valós részű komplex számok halmazán. Ez azt jelenti, hogy

$$f \subseteq -\mathrm{Log}(1 - \mathrm{id}_{\mathbb{C}}).$$

Tehát ha $x \in]0, 1[$, akkor

$$\begin{aligned} f(\mathrm{Exp}(2\pi i x)) &= -\mathrm{Log}(1 - \mathrm{Exp}(2\pi i x)) = -\mathrm{Log}(1 - \cos(2\pi x) - i \sin(2\pi x)) = \\ &= -\mathrm{Log}\Big(\sqrt{2(1 - \cos(2\pi x))}\mathrm{Exp}(2\pi i \theta(x))\Big) = -\mathrm{Log}\Big(2 \sin(\pi x) \mathrm{Exp}(2\pi i \theta(x))\Big), \end{aligned}$$

ahol $\theta(x) \in [0, 1[$ az a szám, amelyre

$$\mathrm{tg}(2\pi\theta(x)) = -\frac{\sin(2\pi x)}{1 - \cos(2\pi x)} = -\mathrm{ctg}(\pi x).$$

Ha $x \in]0, 1[$, akkor minden $\mathbb{Z} \ni k$-ra $-\mathrm{ctg}(\pi - x) = \mathrm{tg}(\pi(k + x) + (\pi/2))$, tehát az x-hez van olyan $k \in \mathbb{Z}$, amelyre $2\pi\theta(x) = \pi(x + k) + (\pi/2)$ és $\theta(x) \in [0, 1[$, így $k = -1$, vagyis $2\pi\theta(x) = \pi(x - 1/2)$. Ha $x \in]0, 1[$, akkor $\pi(x - 1/2) \in] - \pi/2, \pi/2[$, ezért

$$f(\mathrm{Exp}(2\pi i x)) = -\log(2 \sin(\pi x)) - i(2\pi\theta(x)) = -\log(2 \sin(\pi x)) + i\pi(1/2 - x).$$

Ebből következik, hogy minden $x \in]0, 1[$ esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k\pi} = \frac{1}{\pi}\Im(f(\mathrm{Exp}(2\pi i x))) = \frac{1}{2} - x,$$

amint azt állítottuk. Egyébként az is látható, hogy minden $x \in]0,1[$ esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k} = \Re(f(\mathrm{Exp}(2\pi i x))) = -\log(2\sin(\pi x)).$$

Minden $x \in [0,1[$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \cos(2k\pi x)$$

számsor divergens (és ha így van, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén is divergens). Valóban, ha $x \in [0,1[$ racionális szám, és $q, p \in \mathbb{N}^*$ olyanok, hogy $x = p/q$, akkor a $(\cos(2nq\pi x))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat olyan részsorozata a $(\cos(2k\pi x))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, amelynek minden tagja 1 értékű, így a $(\cos(2\pi kx))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz. Ha viszont $x \in [0,1[$ irracionális szám, akkor a diofantikus approximáció elemi elméletéből ismeretes, hogy a $\{kx - [kx] | k \in \mathbb{N}\}$ halmaz *sűrű* a $[0,1]$ intervallumban, ezért létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma(n)x - [\sigma(n)x]) = \frac{1}{2},$$

tehát a $(\cos(2\sigma(n)\pi x))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat olyan részsorozata a $(\cos(2\pi kx))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, amely -1-hez konvergál, ezért a $(\cos(2\pi kx))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz.)

7. fejezet

A magasabb rendű deriváltak szimmetrikussága

7.1. A Young–tétel előkészítése

Ha E, F normált terek, és $n \in \mathbb{N}$, akkor egy $f : E \rightarrowtail F$ függvény n-edik deriváltfüggvénye E-ben értelmezett, $\mathscr{L}_n(E;F)$-be érkező függvény. Ebben a pontban azt mutatjuk meg, hogy minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$ pontra $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}_n^s(E;F)$ teljesül, vagyis $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) : E^n \to F$ *szimmetrikus* folytonos multilineáris operátor. Természetesen ez a tulajdonság csak $n \geq 2$ esetén érdekes, mert a szimmetrikusság definíciója alapján világos, hogy $\mathscr{L}_0^s(E;F) = \mathscr{L}_0(E;F)$, és $\mathscr{L}_1^s(E;F) = \mathscr{L}_1(E;F)$, hiszen a $0 := \emptyset$ és $1 := \{\emptyset\}$ halmazoknak az identikus függvény az egyetlen permutációja.

7.1.1. Lemma. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$. Ha $H \subseteq F$ olyan zárt lineáris altér, amelyhez létezik $\mathfrak{a}$-nak U környezete úgy, hogy $f\langle U \rangle \subseteq H$, akkor* $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \subseteq H$.

Bizonyítás. Legyen $e \in E$ tetszőleges. Az f függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ezért létezik f-nek az e-irányú deriváltja az $\mathfrak{a}$ pontban és $((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(e) = (\mathrm{D}_e f)(\mathfrak{a})$. Ugyanakkor

$$(\mathrm{D}_e f)(\mathfrak{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathfrak{a} + t.e) - f(\mathfrak{a})}{t}.$$

Továbbá az $\mathfrak{a}$ pont U környezetére $f\langle U \rangle \subseteq H$, ezért $U_e := \{t \in \mathbb{K} | \mathfrak{a} + t.e \in U \cap \mathrm{Dom}(f)\}$ a 0-nak olyan környezete $\mathbb{K}$-ban, hogy minden $t \in U_e$, $t \neq 0$ esetén

$$\frac{f(\mathfrak{a} + t.e) - f(\mathfrak{a})}{t} \in H,$$

hiszen H lineáris altere F-nek. Ebből következik, hogy

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathfrak{a} + t.e) - f(\mathfrak{a})}{t} \in \overline{H},$$

tehát a H zártsága folytán $((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(e) \in H$. ■

7.1.2. Lemma. *Legyenek E, F normált terek, és $u : E \times E \to F$ bilineáris operátor. Ha a 0-nak létezik E-ben olyan U környezete, és létezik olyan $s : U \times U \to F$ szimmetrikus függvény, hogy az u és s függvények a $(0,0)$ pontban másodrendben érintkeznek, akkor u szimmetrikus bilineáris operátor.*

Bizonyítás. Legyen $(x_1, x_2) \in E \times E$ tetszőleges olyan elem, amelyre $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Létezik olyan $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat $\mathbb{R}_+^*$-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $(t_n.x_1, t_n.x_2) \in U \times U$. Az u és s függvények a $(0, 0)$ pontban másodrendben érintkeznek, ezért az átviteli elv és az u $\mathbb{R}$-homogenitása alapján

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{u(t_n.x_1, t_n.x_2) - s(t_n.x_1, t_n.x_2)}{\|(t_n.x_1, t_n.x_2)\|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{u(x_1, x_2) - t_n^{-2}.s(t_n.x_1, t_n.x_2)}{\|(x_1, x_2)\|^2}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$u(x_1, x_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{s(t_n.x_1, t_n.x_2)}{t_n^2}.$$

Ugyanezzel az érveléssel kapjuk, hogy

$$u(x_2, x_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{s(t_n.x_2, t_n.x_1)}{t_n^2}$$

is teljesül. Azonban az s függvény szimmetrikussága folytán minden $\mathbb{N} \ni n$-re $s(t_n.x_1, t_n.x_2) = s(t_n.x_2, t_n.x_1)$, így $u(x_1, x_2) = u(x_2, x_1)$ ■

7.2. Young–tétel

7.2.1. Tétel. (Young-tétel) *Ha E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $n \in \mathbb{N}$, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$, akkor $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}_n^s(E; F)$.*

Bizonyítás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk, az $n \geq 2$ esetre.

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, tehát $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$-nek, és a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Legyen $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, és értelmezzük a következő szimmetrikus függvényt:

$$s : \mathrm{B}_{r/2}(0) \times \mathrm{B}_{r/2}(0) \to F; \quad (x_1, x_2) \mapsto f(\mathfrak{a} + x_1 + x_2) - f(\mathfrak{a} + x_1) - f(\mathfrak{a} + x_2) + f(\mathfrak{a}).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy $(\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a})$ és s másodrendben érintkeznek a $(0, 0)$ pontban, így az előző lemma alapján $(\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a}) : E \times E \to F$ szimmetrikus bilineáris operátor. Tehát azt kell igazolni, hogy

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{s(x_1, x_2) - ((\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a}))(x_1, x_2)}{\|(x_1, x_2)\|^2} = 0.$$

Ha $(x_1, x_2) \in \mathrm{B}_{r/2}(0) \times \mathrm{B}_{r/2}(0)$, akkor

$$\begin{gathered} \|s(x_1, x_2) - ((\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a}))(x_1, x_2)\| \leq \\ \leq \|s(x_1, x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a} + x_1))(x_2) + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2)\| + \\ + \|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a} + x_1))(x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2) - (((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_1))(x_2)\|, \end{gathered}$$

ahol felhasználtuk a másodrendű deriváltak definícióját. Ebből következik, hogy ha igazak a

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{s(x_1, x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a} + x_1))(x_2) + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2)}{\|(x_1, x_2)\|^2} = 0$$

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a} + x_1))(x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2) - (((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_1))(x_2)}{\|(x_1, x_2)\|^2} = 0$$

egyenlőségek, akkor $(\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a})$ és s másodrendben érintkeznek a $(0,0)$ pontban.

Először megmutatjuk, hogy

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1))(x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2) - (((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_1))(x_2)}{\|(x_1,x_2)\|^2} = 0.$$

A $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\delta < r/2$, és minden $x_1 \in \mathrm{B}_\delta(0)$ vektorra

$$\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_1)\| \leq \varepsilon\|x_1\|,$$

ezért $(x_1,x_2) \in \mathrm{B}_\delta(0) \times E$, $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ esetén

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1))(x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2) - (((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_1))(x_2)}{\|(x_1,x_2)\|^2}\right\| = \\ &= \frac{\|\left((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_1)\right)(x_2)\|}{\|(x_1,x_2)\|^2} \leq \\ &\leq \frac{\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_1)\|\|x_2\|}{\|(x_1,x_2)\|^2} \leq \varepsilon\frac{\|x_1\|\|x_2\|}{\|(x_1,x_2)\|^2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1))(x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2) - (((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_1))(x_2)}{\|(x_1,x_2)\|^2} = 0$$

teljesül.

Most megmutatjuk, hogy

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{s(x_1,x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1))(x_2) + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2)}{\|(x_1,x_2)\|^2} = 0.$$

Minden $x_1 \in \mathrm{B}_{r/2}(0)$ esetén vezessük be a következő függvényt:

$$f_{x_1} : \mathrm{B}_{r/2}(0) \to F; \quad x \mapsto f(\mathfrak{a}+x_1+x) - f(\mathfrak{a}+x) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1))(x) + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x).$$

Könnyen látható, hogy minden $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{r/2}(0)$ vektorra

$$s(x_1,x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1))(x_2) + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2) = f_{x_1}(x_2) - f_{x_1}(0).$$

Minden $x_1 \in \mathrm{B}_{r/2}(0)$ vektorra az f_{x_1} függvény differenciálható a $\mathrm{B}_{r/2}(0)$ halmazon, és $x \in \mathrm{B}_{r/2}(0)$ esetén a függvénykompozíció differenciálási szabályát alkalmazva kapjuk, hogy

$$(\mathrm{D}f_{x_1})(x) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1+x) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1) + (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}).$$

Ezért ha $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{r/2}(0)$, akkor a véges növekmények formuláját felírhatjuk az f_{x_1} függvényre, és a $[\![0,x_2]\!]$ zárt szakaszra:

$$\|f_{x_1}(x_2) - f_{x_1}(0)\| \leq \Big(\sup_{x\in]\!]0,x_2[\![} \|(\mathrm{D}f_{x_1})(x)\|\Big)\|x_2\|.$$

A $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért ha $\varphi : \mathrm{B}_r(0) \to F$ az a függvény, amelyre $x \in \mathrm{B}_r(0)$, $x \neq 0$ esetén

$$\varphi(x) := \frac{(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x)}{\|x\|},$$

és $\varphi(0) := 0$, akkor φ a 0 pontban folytonos. Nyilvánvalóan minden $x \in \mathrm{B}_r(0)$ esetén

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) + ((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x) + \varphi(x)\|x\|$$

teljesül, ezért minden $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{r/2}(0)$ és $x \in]\!]0, x_1[\![$ vektorra

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}f_{x_1})(x) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1+x) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1) + (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \\ = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) + ((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_1+x) + \varphi(x_1+x)\|x_1+x\| - \\ -(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x) - \varphi(x)\|x\| - \\ -(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))(x_1) - \varphi(x_1)\|x_1\| + (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \\ = \varphi(x_1+x)\|x_1+x\| - \varphi(x)\|x\| - \varphi(x_1)\|x_1\|,\end{aligned}$$

tehát írható, hogy

$$\begin{aligned}\sup_{x\in]\!]0,x_2[\![} \|(\mathrm{D}f_{x_1})(x)\| \leq \\ \leq \Big(\sup_{x\in]\!]0,x_2[\![} \|\varphi(x_1+x)\|\Big)(\|x_1\|+\|x_2\|) + \Big(\sup_{x\in]\!]0,x_2[\![} \|\varphi(x)\|\Big)\|x_2\| + \|\varphi(x_1)\|\|x_1\|.\end{aligned}$$

Az előzőek alapján ebből következik, hogy minden $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{r/2}(0)$ vektorra

$$\begin{aligned}\|s(x_1,x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1))(x_2) + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2)\| \leq \\ \leq \Big(\sup_{x\in]\!]0,x_2[\![} \|\varphi(x_1+x)\|\Big)(\|x_1\|+\|x_2\|)\|x_2\| + \Big(\sup_{x\in]\!]0,x_2[\![} \|\varphi(x)\|\Big)\|x_2\|^2 + \|\varphi(x_1)\|\|x_1\|\|x_2\|.\end{aligned}$$

A φ függvény a 0-ban folytonos és $\varphi(0) = 0$, ezért $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy $\delta < r/2$, és minden $x \in \mathrm{B}_\delta(0)$ vektorra $\|\varphi(x)\| < \varepsilon$. Ha tehát $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\delta/2}(0)$, akkor az előző egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\|s(x_1,x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1))(x_2) + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2)\| \leq \\ \leq \varepsilon(\|x_1\|+\|x_2\|)\|x_2\| + \varepsilon\|x_2\|^2 + \varepsilon\|x_1\|\|x_2\|,\end{aligned}$$

tehát ha $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{\|s(x_1,x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1))(x_2) + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2)\|}{\|(x_1,x_2)\|^2} \leq \\ \leq \varepsilon\frac{2\|(x_1,x_2)\|\|x_2\|}{\|(x_1,x_2)\|^2} + \varepsilon\frac{\|x_2\|^2}{\|(x_1,x_2)\|^2} + \varepsilon\frac{\|x_1\|\|x_2\|}{\|(x_1,x_2)\|^2} < 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{s(x_1,x_2) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+x_1))(x_2) + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2)}{\|(x_1,x_2)\|^2} = 0,$$

tehát az állítást igazoltuk az $n = 2$ esetre.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, és az állítás igaz n-re. Legyen $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1}f)$; ekkor vehetjük $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezetét E-ben, amelyre $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$. A hipotézis szerint a $\mathrm{D}^n f : E \rightarrowtail \mathscr{L}_n(E;F)$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a definíció alapján $(\mathrm{D}^{n+1}f)(\mathfrak{a}) := \pi_{1,n}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}))$, ahol $\pi_{1,n} : \mathscr{L}(E;\mathscr{L}_n(E;F)) \to \mathscr{L}_{n+1}(E;F)$ a kanonikus izometrikus lineáris bijekció. Az indukciós hipotézis alapján $(\mathrm{D}^n f)\langle U\rangle \subseteq \mathscr{L}_n^s(E;F)$, továbbá $\mathscr{L}_n^s(E;F)$ zárt lineáris altér az $\mathscr{L}_n(E;F)$ multilineáris operátortérben. Az első lemmát alkalmazva kapjuk, hogy $\mathrm{Im}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a})) \subseteq \mathscr{L}_n^s(E;F)$, vagyis $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E;\mathscr{L}_n^s(E;F))$. Habár az általános esetben *nem igaz* a $\pi_{1,n}\langle\mathscr{L}(E;\mathscr{L}_n^s(E;F))\rangle \subseteq \mathscr{L}_{n+1}^s(E;F)$ tartalmazás; meg fogjuk mutatni, hogy

$$(\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a}) := \pi_{1,n}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a})) \in \mathscr{L}_{n+1}^s(E;F).$$

Ehhez legyen $\mathfrak{S}$ azon $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ permutációk halmaza, amelyekre minden $(x_i)_{i\in n+1} \in E^{n+1}$ esetén

$$((\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a}))((x_{\sigma(i)})_{i\in n+1}) = ((\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a}))((x_i)_{i\in n+1})$$

teljesül. Azt kell igazolni, hogy $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{n+1}$. Ehhez már itt megjegyezzük, hogy $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}$ esetén nyilvánvalóan $\sigma \circ \sigma' \in \mathfrak{S}$; ezt a tényt majd később felhasználjuk. (Valójában arról van szó, hogy $\mathfrak{S}$ *részcsoportja* $\mathfrak{S}_{n+1}$-nek.)

Legyen $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ olyan, hogy $\sigma(0) = 0$. Megmutatjuk, hogy $\sigma \in \mathfrak{S}$. Valóban, ekkor a $\sigma' : n \to n;\ i \mapsto \sigma(i{+}1){-}1$ leképezés permutációja n-nek, és $(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E;\mathscr{L}_n^s(E;F))$ miatt minden $(x_i)_{i\in n+1} \in E^{n+1}$ rendszerre

$$\begin{aligned}((\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a}))((x_{\sigma(i)})_{i\in n+1}) &:= (\pi_{1,n}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a})))((x_{\sigma(i)})_{i\in n+1}) = \\ = (((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}))(x_{\sigma(0)}))((x_{\sigma(i+1)})_{i\in n}) &= (((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}))(x_0))((x_{\sigma'(i)+1})_{i\in n}) = \\ = (((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a}))(x_0))((x_{i+1})_{i\in n}) &= (\pi_{1,n}((\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(\mathfrak{a})))((x_i)_{i\in n+1}) = \\ &= ((\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a}))((x_i)_{i\in n+1}),\end{aligned}$$

vagyis $\sigma \in \mathfrak{S}$.

Legyen most $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ olyan, hogy $\sigma(0) = 1$, $\sigma(1) = 0$ és minden $2 \le i < n+1$ esetén $\sigma(i) = i$. Megmutatjuk, hogy $\sigma \in \mathfrak{S}$. A $\mathrm{D}^{n-1} f : E \rightarrowtail \mathscr{L}_{n-1}(E;F)$ függvény $\mathfrak{a}$-ban kétszer differenciálható, ezért a

$$(\mathrm{D}^2(\mathrm{D}^{n-1} f))(\mathfrak{a}) : E^2 \to F$$

folytonos bilineáris operátor szimmetrikus. Ebből következik, hogy ha $\pi_{2,n-1}$ jelöli az $\mathscr{L}_2(E;\mathscr{L}_{n-1}(E;F)) \to \mathscr{L}_{n+1}(E;F)$ kanonikus izometrikus lineáris bijekciót, akkor minden $(x_i)_{i\in n+1} \in E^{n+1}$ rendszerre

$$\begin{aligned}((\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a}))((x_{\sigma(i)})_{i\in n+1}) &= (\pi_{2,n-1}((\mathrm{D}^2(\mathrm{D}^{n-1} f))(\mathfrak{a})))((x_{\sigma(i)})_{i\in n+1}) = \\ &= (((\mathrm{D}^2(\mathrm{D}^{n-1} f))(\mathfrak{a}))(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}))((x_{\sigma(i+2)})_{i\in n-1}) = \\ &= (((\mathrm{D}^2(\mathrm{D}^{n-1} f))(\mathfrak{a}))(x_1, x_0))((x_{i+2})_{i\in n-1}) = \\ &= (((\mathrm{D}^2(\mathrm{D}^{n-1} f))(\mathfrak{a}))(x_0, x_1))((x_{i+2})_{i\in n-1}) = \\ = (\pi_{2,n-1}((\mathrm{D}^2(\mathrm{D}^{n-1} f))(\mathfrak{a})))((x_i)_{i\in n+1}) &= ((\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a}))((x_i)_{i\in n+1}),\end{aligned}$$

vagyis $\sigma \in \mathfrak{S}$.

Végül, legyen $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ tetszőleges. Ha $\sigma(0) = 0$, akkor az előzőek szerint $\sigma \in \mathfrak{S}$, ezért tegyük fel, hogy $\sigma(0) \neq 0$. Legyen $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{n+1}$ az permutáció, amely a $\sigma(0)$ és 1 elemeket felcseréli, és a többit fixen hagyja (ez lehet az identikus függvény, ha $\sigma(0) = 1$). Világos, hogy $\sigma_1(0) = 0$, így a fentiek szerint $\sigma_1 \in \mathfrak{S}$. Legyen $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n+1}$ az a permutáció, amely a 0 és 1 elemeket felcseréli, és a többit fixen hagyja. Láttuk, hogy $\sigma_2 \in \mathfrak{S}$. Nyilvánvaló, hogy a $\sigma_3 := \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ permutáció olyan, hogy $\sigma_3(0) = 0$, tehát $\sigma_3 \in \mathfrak{S}$. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $\sigma_1^{-1} = \sigma_1$ és $\sigma_2^{-1} = \sigma_2$, ezért $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \in \mathfrak{S}$. ■

7.3. A parciális deriváltak felcserélése

7.3.1. Állítás. *Legyen E az $(E_i)_{i\in I}$ nem üres, véges normált tér-rendszer szorzata, F normált tér és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Ekkor*

$$\operatorname{Dom}\left(\mathrm{D}^2 f\right) \subseteq \bigcap_{(i,j)\in I\times I} \operatorname{Dom}\left(\partial_i\left(\partial_j f\right)\right),$$

továbbá minden $\mathfrak{a} \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}^2 f)$, $(i,j) \in I\times I$, $x_i \in E_i$ és $y_j \in E_j$ esetén

$$\left(\left(\left(\partial_i\left(\partial_j f\right)\right)(\mathfrak{a})\right)(x_i)\right)(y_j) = \left(\left(\left(\partial_j\left(\partial_i f\right)\right)(\mathfrak{a})\right)(y_j)\right)(x_i).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}^2 f)$ rögzítve.

Az f függvény kétszer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, így vehetjük $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezetét az E szorzattérben, amelyre $U \subseteq \operatorname{Dom}(\mathrm{D}f)$. Ekkor a parciális deriváltak definíciója (2.4.2.) és 2.4.1. alapján $U \subseteq \bigcap_{j\in I} \operatorname{Dom}(\partial_j f)$, továbbá minden $x \in U$ és $j \in I$ esetén $(\mathrm{D}f)(x)\circ \mathrm{in}_{j,0} = (\partial_j f)(x)$. Tehát, ha minden $j \in I$ indexre bevezetjük az

$$L_j : \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E_j;F); \quad u \mapsto u\circ \mathrm{in}_{j,0}$$

folytonos lineáris operátort, akkor láthatóan minden $j\in I$ esetén $L_j\circ \mathrm{D}f = \partial_j f$ teljesül az U halmazon. A hipotézis alapján a $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ deriváltfüggvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, így a függvénykompozíció differenciálhatósága szerint minden $j\in I$ indexre az $L_j\circ \mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E_j;F)$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\left(\mathrm{D}(L_j\circ \mathrm{D}f)\right)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}L_j)\left((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\right)\circ(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}) = L_j\circ(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}).$$

Mivel U környezete $\mathfrak{a}$-nak, így a differenciálhatóság lokalitásából következik, hogy minden $j \in I$ esetén a $\partial_j f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E_j;F)$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban és $\left(\mathrm{D}(\partial_j f)\right)(\mathfrak{a}) = \left(\mathrm{D}(L_j\circ \mathrm{D}f)\right)(\mathfrak{a}) = L_j\circ(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})$. Ebből ismét a 2.4.1. állítást alkalmazva kapjuk, hogy minden $j\in I$ esetén $\mathfrak{a} \in \operatorname{Dom}(\mathrm{D}(\partial_j f)) \subseteq \bigcap_{i\in I} \operatorname{Dom}(\partial_i(\partial_j f))$ és minden $x = (x_i)_{i\in I} \in E$ vektorra

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \left((\partial_i(\partial_j f))(\mathfrak{a})\right)(x_i) &= \left(\left(\mathrm{D}(\partial_j f)\right)(\mathfrak{a})\right)(x) = \\ &= \left(L_j\circ(\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})\right)(x) = \left((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})\right)(x)\circ \mathrm{in}_{j,0},\end{aligned}$$

tehát minden $y_j \in E_j$ vektorra

$$\sum_{i\in I}\left(\left((\partial_i(\partial_j f))(\mathfrak{a})\right)(x_i)\right)(y_j) = \left(\left((\mathrm{D}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})\right)(x)\right)(\mathrm{in}_{j,0}(y_j)) = \left((\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a})\right)(x, \mathrm{in}_{j,0}(y_j)).$$

Ezt az egyenlőséget alkalmazva $(i,j) \in I\times I$ és $(x_i,y_j) \in E_i\times E_j$ esetén az $x := \mathrm{in}_{i,0}(x_i) \in E$ és $y_j \in E_j$ vektorokra:

$$\left(\left((\partial_i(\partial_j f))(\mathfrak{a})\right)(x_i)\right)(y_j) = \left((\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a})\right)(\mathrm{in}_{i,0}(x_i), \mathrm{in}_{j,0}(y_j))$$

adódik. A Young-tétel szerint a $(\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a}) : E^2 \to F$ leképezés szimmetrikus bilineáris operátor, tehát $(i,j)\in I\times I$ és $(x_i,y_j) \in E_i\times E_j$ esetén

$$\left((\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a})\right)(\mathrm{in}_{i,0}(x_i), \mathrm{in}_{j,0}(y_j)) = \left((\mathrm{D}^2 f)(\mathfrak{a})\right)(\mathrm{in}_{j,0}(y_j), \mathrm{in}_{i,0}(x_i)),$$

ezért az előző egyenlőségből következik, hogy minden $(i,j) \in I \times I$ és $(x_i, y_j) \in E_i \times E_j$ párra

$$(((\partial_i(\partial_j f))(\mathfrak{a}))(x_i))(y_j) = (((\partial_j(\partial_i f))(\mathfrak{a}))(y_j))(x_i),$$

amit bizonyítani kellett. ■

Megjegyezzük, hogy – az előző állítás feltételei mellett – minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^2 f)$ és $(i,j) \in I \times I$ esetén a

$$(\partial_i(\partial_j f))(\mathfrak{a}) = \sigma_{i,j}((\partial_j(\partial_i f))(\mathfrak{a}))$$

operátor-egyenlőségről van szó, ahol $\sigma_{i,j} : \mathscr{L}(E_j; \mathscr{L}(E_i; F)) \to \mathscr{L}(E_i; \mathscr{L}(E_j; F))$ jelöli azt a leképezést, amelyre minden $u \in \mathscr{L}(E_j; \mathscr{L}(E_i; F))$ és $x_i \in E_i$ és $y_j \in E_j$ esetén

$$((\sigma_{i,j}(u))(x_i))(y_j) = (u(y_j))(x_i)$$

(**LIN** 3.7.3.). A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy itt $(\partial_i(\partial_j f))(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E_i; \mathscr{L}(E_j; F))$ és $(\partial_j(\partial_i f))(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E_j; \mathscr{L}(E_i; F))$, ezért ha $E_i \neq E_j$, akkor $(\partial_i(\partial_j f))(\mathfrak{a}) = (\partial_j(\partial_i f))(\mathfrak{a})$ *lehetetlen.* Az egyenlőség helyett a $\sigma_{i,j}$ lineáris homeomorfizmus általi kanonikus azonosíthatóságuk teljesül. Ugyanakkor, vigyázni kell arra, hogy $E_i = E_j$ esetén az általános esetben $\sigma_{i,j}$ nem az identikus függvény, így ekkor sem a $(\partial_i(\partial_j f))(\mathfrak{a}) = (\partial_j(\partial_i f))(\mathfrak{a})$ egyenlőségről van szó.

7.3.2. Következmény. *Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és F normált tér, valamint $f : \mathbb{K}^n \rightarrowtail F$ függvény. Minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^2 f)$ és $(i,j) \in n \times n$ esetén legyen*

$$(\boldsymbol{\partial}_i(\boldsymbol{\partial}_j f))(\mathfrak{a}) := (((\partial_i(\partial_j f))(\mathfrak{a}))(1))(1).$$

Ekkor minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^2 f)$ és $(i,j) \in n \times n$ esetén

$$(\boldsymbol{\partial}_i(\boldsymbol{\partial}_j f))(\mathfrak{a}) = (\boldsymbol{\partial}_j(\boldsymbol{\partial}_i f))(\mathfrak{a}),$$

és minden $x, y \in \mathbb{K}$ számra

$$(((\partial_i(\partial_j f))(\mathfrak{a}))(x))(y) = xy\,(\boldsymbol{\partial}_i(\boldsymbol{\partial}_j f))(\mathfrak{a}) \in F$$

teljesül. ■

7.4. Gyakorlatok

1. Legyenek E, F normált terek, $n \in \mathbb{N}$ és $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}_n^a(E; F)$ n-forma (3. pont, 5. példa). Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\omega)$ olyan pont, hogy ω kétszer differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $d(d\omega)(\mathfrak{a}) = 0$.

2. Legyen E normált tér és $U \subseteq E$ nyílt halmaz. Legyen $X : U \to E$ tetszőleges függvény (vagyis E feletti *vektormező*). Ekkor minden F normált térre és $f : U \to F$ differenciálható függvényre értelmezzük a következő leképezést

$$\nabla_X f : U \to F; \quad \mathfrak{a} \mapsto ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(X(\mathfrak{a})),$$

és ezt a függvényt az f függvény X *vektormező irányú deriváltjának* nevezzük.

a) Ha $X, Y : U \to E$ vektormezők és $\alpha : U \to \mathbb{K}$ függvény, akkor minden F normált térre és $f : U \to F$ függvényre

$$\nabla_{X+Y} f = \nabla_X f + \nabla_Y f,$$
$$\nabla_{\alpha.X} f = \alpha.\nabla_X f$$

teljesül.

b) Ha $X : U \to E$ vektormező, F normált tér, $f, g : U \to F$ és $\alpha : U \to \mathbb{K}$ differenciálható függvények, akkor

$$\nabla_X(f + g) = \nabla_X f + \nabla_X g,$$
$$\nabla_X(\alpha.f) = (\nabla_X \alpha).f + \alpha.(\nabla_X f)$$

teljesül.

c) Ha $X, Y : U \to E$ differenciálható vektormezők, akkor legyen

$$[X, Y] := \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

tehát $[X, Y] : U \to E$ az a függvény, amely minden $\mathfrak{a} \in U$ ponthoz az

$$[X, Y](\mathfrak{a}) := ((\mathrm{D}Y)(\mathfrak{a}))(X(\mathfrak{a})) - ((\mathrm{D}X)(\mathfrak{a}))(Y(\mathfrak{a}))$$

vektort rendeli; ezt a vektormezőt az X és Y vektormezők *kommutátorának* nevezzük. Ha $\mathbf{V}(U)$ jelöli a differenciálható $U \to E$ függvények halmazát, akkor $\mathbf{V}(U)$ lineáris altere az $\mathscr{F}(U; E)$ függvénytérnek, és a

$$\mathbf{V}(U) \times \mathbf{V}(U) \to \mathscr{F}(U; E); \quad (X, Y) \mapsto [X, Y]$$

leképezés olyan antiszimmetrikus bilineáris operátor, hogy ha $X, Y \in \mathbf{V}(U)$ és $\alpha : U \to \mathbb{K}$ differenciálható függvény, akkor

$$[\alpha.X, Y] = \alpha.[X, Y] - (\nabla_Y \alpha).X,$$
$$[X, \alpha.Y] = \alpha.[X, Y] + (\nabla_X \alpha).Y.$$

d) Ha F normált tér és $f : U \to F$ kétszer differenciálható függvény, akkor

$$\nabla_X(\nabla_Y f) - \nabla_Y(\nabla_X f) - \nabla_{[X,Y]} f = 0.$$

3. (*Az iterált parciális deriváltak szimmetrikussága.*) Legyen E az $(E_i)_{i \in I}$ véges normált tér rendszer szorzata, és legyen F normált tér. Ha $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $n \in \mathbb{N}^*$ és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$, akkor minden $m \leq n$ természetes számra, $\sigma \in I^m$ függvényre és $\pi \in \mathbf{S}_m$ permutációra

$$(\partial_{\sigma \circ \pi} f)(\mathfrak{a}) = (\partial_\sigma f)(\mathfrak{a})$$

teljesül (3. pont, **3**. gyakorlat).

8. fejezet

Taylor-formulák

8.1. Taylor–formula

Emlékeztetünk arra, hogy ha E halmaz, $n \in \mathbb{N}$, és $x \in E$, akkor $x^{[n]}$ jelöli azt az elemet E^n-ben, amelynek minden komponense egyenlő x-szel. Ha E vektortér, és $\mathfrak{a} \in E$, akkor $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}$ jelöli azt az $E \to E^n$ függvényt, amely minden $x \in E$ ponthoz az $(x - \mathfrak{a})^{[n]}$ értéket rendeli.

8.1.1. Definíció. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $n \in \mathbb{N}$, és $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, amelyben az f függvény n-szer differenciálható. Ekkor a*

$$\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f) : E \to F; \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}))((x - \mathfrak{a})^{[k]})$$

függvényt az f leképezés n-edik, $\mathfrak{a}$ pontbeli **Taylor-polinomjának** *nevezzük.*

Tehát a definíció feltételei mellett az is írható, hogy

$$\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}.$$

Nyilvánvaló, hogy a $\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)$ függvény E-n *mindenütt* értelmezve van, és természetesen $f(\mathfrak{a}) = (\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f))(\mathfrak{a})$.

A *Taylor-formulák* olyan összefüggések, amelyek egy függvény és a függvény Taylor-polinomjainak kapcsolatáról szólnak.

8.1.2. Tétel. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $n \in \mathbb{N}$, és $\mathfrak{a}, x \in E$ olyan pontok, hogy az f függvény folytonos és n-szer differenciálható az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ szakaszon, valamint $n+1$-szer differenciálható az $]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ szakaszon. Ekkor*

$$\|f(x) - (\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f))(x)\| \leq \left(\sup_{x' \in]\!]\mathfrak{a}, x[\![} \|(\mathrm{D}^{n+1} f)(x')\| \right) \frac{\|x - \mathfrak{a}\|^{n+1}}{(n+1)!}$$

teljesül **(Taylor-formula)**

Bizonyítás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az $n = 0$ esetben azt tesszük fel, hogy f folytonos az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ zárt szakaszon, és differenciálható az $]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ nyílt szakaszon. A véges növekmények formulája szerint ekkor

$$\|f(x) - f(\mathfrak{a})\| \leq \left(\sup_{x' \in]\!]\mathfrak{a}, x[\![} \|(\mathrm{D} f)(x')\| \right) \|x - \mathfrak{a}\|,$$

és éppen ez a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az n természetes számra, és tegyük fel, hogy az f függvény $n+1$-szer differenciálható az $[\![\mathfrak{a},x]\!]$ szakaszon, és $n+2$-ször differenciálható az $]\!]\mathfrak{a},x[\![$ szakaszon. Természetesen feltehetjük, hogy $x\neq\mathfrak{a}$, valamint $C:=\sup_{x'\in]\!]\mathfrak{a},x[\![}\|(\mathrm{D}^{n+2}f)(x')\|<+\infty$.

Jelölje $F_{\mathbb{R}}$ az F alatt fekvő valós normált teret, és értelmezzük a $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ zárt intervallumon a következő függvényeket:

$$\tilde{f}:[0,1]\to F_{\mathbb{R}};\quad t\mapsto f(\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a}))-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{t^k}{k!}((\mathrm{D}^kf)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]}),$$
$$g:[0,1]\to\mathbb{R};\quad t\mapsto C\|x-\mathfrak{a}\|^{n+2}\frac{t^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0)=f(x)-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}((\mathrm{D}^kf)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]}),$$

valamint

$$g(1)-g(0)=\left(\sup_{x'\in]\!]\mathfrak{a},x[\![}\|(\mathrm{D}^{n+2}f)(x')\|\right)\frac{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+2}}{(n+2)!},$$

tehát éppen azt kell igazolnunk, hogy

$$\|\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0)\|\leq g(1)-g(0)$$

teljesül. A véges növekmények tétele előtt álló lemma alapján ehhez elegendő azt igazolni, hogy az $\tilde{f}$ és g függvények folytonosak a $[0,1]$ zárt intervallumon, differenciálhatók a $]0,1[$ nyílt intervallumon, és minden $]0,1[\ni t$-re $\|(\mathrm{D}\tilde{f})(t)\|\leq(\mathrm{D}g)(t)$ teljesül.

Az $\tilde{f}$ és g függvények folytonossága nyilvánvaló, és az is könnyen látható, hogy g a $]0,1[$ intervallumon differenciálható. A függvénykompozíció differenciálási tétele szerint $\tilde{f}$ is differenciálható a $]0,1[$ intervallumon, és minden $]0,1[\ni t$-re

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}\tilde{f})(t)&=((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a})))(x-\mathfrak{a})-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{kt^{k-1}}{k!}((\mathrm{D}^kf)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]})=\\&=((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a})))(x-\mathfrak{a})-\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}((\mathrm{D}^{j+1}f)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[j+1]})=\\&=((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a})))(x-\mathfrak{a})-\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}(((\mathrm{D}^j(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[j]}))(x-\mathfrak{a})=\\&=\left((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a}))-\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}((\mathrm{D}^j(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[j]})\right)(x-\mathfrak{a}).\end{aligned}$$

Azt kell még igazolni, hogy $t\in]0,1[$ esetén $\|(\mathrm{D}\tilde{f})(t)\|\leq(\mathrm{D}g)(t)$. Ehhez legyen $t\in]0,1[$ rögzített; ekkor $[\![\mathfrak{a},\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a})]\!]\subseteq[\![\mathfrak{a},x]\!]$ miatt a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény n-szer differenciálható és folytonos a $[\![\mathfrak{a},\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a})]\!]$ zárt szakaszon, továbbá $]\!]\mathfrak{a},\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a})[\![\subseteq]\!]\mathfrak{a},x[\![$ miatt a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény $n+1$-szer differenciálható az $]\!]\mathfrak{a},\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a})[\![$ nyílt szakaszon. Az indukciós hipotézist alkalmazva a $\mathrm{D}f$ függvényre és az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a})$ pontokra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\left\|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a}))-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}((\mathrm{D}^k(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]})\right\|\leq\\ &\leq\Big(\sup_{x'\in]\!]\mathfrak{a},\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a})[\![}\|(\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{D}f))(x')\|\Big)\frac{t^{n+1}\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}}{(n+1)!}\leq\\ &\leq\Big(\sup_{x'\in]\!]\mathfrak{a},x[\![}\|(\mathrm{D}^{n+2}f)(x')\|\Big)\frac{t^{n+1}\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}}{(n+1)!}=C\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{D}\tilde{f})(t)\|&\leq\left\|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}+t(x-\mathfrak{a}))-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}((\mathrm{D}^k(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]})\right\|\|x-\mathfrak{a}\|\leq\\ &\leq C\|x-\mathfrak{a}\|^{n+2}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}=(\mathrm{D}g)(t),\end{aligned}$$

amit bizonyítani kellett. ■

8.1.3. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $f:E\rightarrowtail F$ függvény, $n\in\mathbb{N}^*$ és $\mathfrak{a}$ olyan pont, amelynek létezik olyan U környezete E-ben, hogy az f függvény $n+1$-szer differenciálható az U halmazon, és a $\mathrm{D}^{n+1}f$ függvény korlátos az U halmazon. Ekkor minden $0\leq\alpha<1$ valós számra*

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}}\frac{f(x)-(\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f))(x)}{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+\alpha}}=0,$$

vagyis az f függvény és az n-edik, $\mathfrak{a}$ pontbeli Taylor-polinomja $n+\alpha$-ad rendben érintkeznek az $\mathfrak{a}$ pontban.

Bizonyítás. A feltevés alapján vehetünk olyan $r\in\mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre f a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömbön $n+1$-szer differenciálható, és a $\mathrm{D}^{n+1}f$ függvény korlátos a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ halmazon. Ha $x\in\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ tetszőleges, akkor az f függvény az $[\![\mathfrak{a},x]\!]$ szakaszon $n+1$-szer differenciálható, így a Taylor-formulát alkalmazva

$$\begin{aligned}\Big\|f(x)-(\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f))(x)\Big\|&\leq\Big(\sup_{x'\in]\!]\mathfrak{a},x[\![}\|(\mathrm{D}^{n+1}f)(x')\|\Big)\frac{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}}{(n+1)!}\leq\\ &\leq\Big(\sup_{x'\in\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})}\|(\mathrm{D}^{n+1}f)(x')\|\Big)\frac{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

adódik. Ezért bármely $0\leq\alpha<1$ valós számra és $x\in\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ vektorra, ha $x\neq\mathfrak{a}$, akkor

$$\frac{\Big\|f(x)-(\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f))(x)\Big\|}{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+\alpha}}\leq\Big(\sup_{x'\in\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})}\|(\mathrm{D}^{n+1}f)(x')\|\Big)\frac{\|x-\mathfrak{a}\|^{1-\alpha}}{(n+1)!},$$

és itt a jobb oldal 0-hoz tart ha x tart $\mathfrak{a}$-hoz. ■

8.2. Infinitezimális Taylor–formula

8.2.1. Lemma. *Legyenek E, F normált terek, $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathscr{L}_n^s(E;F)$ és $\mathfrak{a} \in E$. Ekkor az*

$$u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]} : E \to F$$

függvény minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k-szor differenciálható az E-n, és

– *ha $k \leq n$, akkor*

$$\mathrm{D}^k(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}) = k!\binom{n}{k}(\pi_{n-k,k}^{-1}(u)) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n-k]},$$

ahol $\pi_{n-k,k}$ jelöli az $\mathscr{L}_{n-k}(E;\mathscr{L}_k(E;F)) \to \mathscr{L}_n(E;F)$ kanonikus bijekciót;

– *ha $k > n$, akkor $\mathrm{D}^k(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]})$ az $E \to \mathscr{L}_k(E;F)$ azonosan 0 függvény.*

Bizonyítás. Az állítást, rögzített $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, k szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

Ha $k = 0$, akkor az állítás azt mondja, hogy az $u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]} : E \to F$ függvény E-n értelmezett, és

$$\mathrm{D}^0(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}) = (\pi_{n,0}^{-1}(u)) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]},$$

ami természetesen igaz, mert $\mathrm{D}^0(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}) = u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}$, továbbá $\pi_{n,0}$ az $\mathscr{L}_n(E;F) \to \mathscr{L}_n(E;F)$ identikus függvény, így $\pi_{n,0}^{-1}(u) = u$.

Szükségünk lesz a $k = 1$ eset ismeretére, tehát megmutatjuk, hogy az $u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}$ függvény differenciálható E-n és

$$\mathrm{D}(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}) = n(\pi_{n-1,1}^{-1}(u)) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n-1]}.$$

A 1.5.1. állítás szerint az $u : E^n \to F$ folytonos multilineáris operátor differenciálható E^n minden pontjában, és $\mathfrak{b} \in E^n$, valamint $(z_i)_{i \in n} \in E^n$ esetén

$$((\mathrm{D}u)(\mathfrak{b}))((z_i)_{i \in n}) = \sum_{i \in n}(u \circ \mathrm{in}_{i,\mathfrak{b}})(z_i)$$

teljesül. Ugyanakkor könnyen látható, hogy az $(\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]} : E \to E^n$ leképezés folytonos affin függvény, amelynek $\mathrm{id}_E^{[n]}$ az érintő-operátora. Ezért ez függvény is differenciálható az E minden pontjában, és $x \in E$ esetén

$$(\mathrm{D}((\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}))(x) = \mathrm{id}_E^{[n]}.$$

Tehát a függvénykompozíció differenciálásának tétele szerint az $u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]} : E \to F$ függvény differenciálható E minden pontjában, és $x, z \in E$ esetén

$$\begin{aligned}((\mathrm{D}(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}))(x))(z) &= ((\mathrm{D}u)((x - \mathfrak{a})^{[n]}))((\mathrm{D}((\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}))(z)) = \\ &= ((\mathrm{D}u)((x - \mathfrak{a})^{[n]}))(z^{[n]}) = \sum_{i \in n} u(\mathrm{in}_{i,(x-a)^{[n]}}(z)).\end{aligned}$$

Az u multilineáris operátor szimmetrikussága miatt minden $n \ni i$-re és $E \ni x, z$-re

$$u(\mathrm{in}_{i,(x-a)^{[n]}}(z)) = u(\mathrm{in}_{n-1,(x-a)^{[n]}}(z)),$$

hiszen az E^n-beli $\mathrm{in}_{i,(x-a)^{[n]}}(z)$ és $\mathrm{in}_{n-1,(x-a)^{[n]}}(z)$ rendszerek egymásból megkaphatók az n egy permutációjának alkalmazásával. Ugyanakkor a

$$\pi_{n-1,1} : \mathscr{L}_{n-1}(E;\mathscr{L}(E;F)) \to \mathscr{L}_n(E;F)$$

kanonikus leképezés definíciója szerint minden $x, z \in E$ esetén

$$u(\mathrm{in}_{n-1,(x-a)^{[n]}}(z)) = ((\pi_{n-1,1}^{-1}(u))((x-\mathfrak{a})^{[n-1]}))(z),$$

ezért

$$((\mathrm{D}(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}))(x))(z) = n((\pi_{n-1,1}^{-1}(u))((x-\mathfrak{a})^{[n-1]}))(z),$$

és ezt kellett bizonyítani a $k = 1$ esetben.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz a $k \geq 1$ természetes számra; ekkor két eset lehetséges.

(I) Ha $k \geq n$, akkor az indukciós hipotézis szerint a $\mathrm{D}^k(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]})$ leképezés konstansfüggvény, hiszen $k > n$ esetén ez az $E \to \mathscr{L}_k(E; F)$ azonosan 0 függvény, míg $k = n$ esetén egyenlő az $n!u$ értékű $E \to \mathscr{L}_n(E; F)$ konstansfüggvénnyel. Ezért $\mathrm{D}^k(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]})$ fifferenciálható E-n, és a deriváltfüggvénye az $E \to \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_k(E; F))$ azonosan 0 függvény. Ebből következik, hogy az $u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}$ függvény $k+1$-szer differenciálható E-n, és a $k+1$-edik deriváltja egyenlő az $E \to \mathscr{L}_{k+1}(E; F)$ azonosan 0 függvénnyel.

(II) Ha $k < n$, akkor az indukciós hipotézis szerint

$$\mathrm{D}^k(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}) = k!\binom{n}{k}(\pi_{n-k,k}^{-1}(u)) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n-k]}.$$

Most alkalmazzuk a $k = 1$ esetre vonatkozó állítást, n helyett az $n - k \in \mathbb{N}^*$ számot, F helyett az $\mathscr{L}_k(E; F)$ normált teret, és u helyett a

$$k!\binom{n}{k}\pi_{n-k,k}^{-1}(u) \in \mathscr{L}_{n-k}^s(E; \mathscr{L}_k(E; F))$$

multilineáris operátort véve. Azt kapjuk, hogy a $\mathrm{D}^k(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]})$ függvény differenciálható E-n, és

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}^k(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]})) = (n-k)k!\binom{n}{k}\left(\tilde{\pi}_{n-k-1,1}^{-1}(\pi_{n-k,k}^{-1}(u))\right) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n-k-1]},$$

ahol $\tilde{\pi}_{n-k-1,1}$ az $\mathscr{L}_{n-k-1}(E; \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_k(E; F))) \to \mathscr{L}_{n-k}(E; \mathscr{L}_k(E; F))$ kanonikus bijekció, és $\pi_{n-k,k}$ az $\mathscr{L}_{n-k}(E; \mathscr{L}_k(E; F)) \to \mathscr{L}_n(E; F)$ kanonikus bijekció.

Tehát az $u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]} : E \to F$ függvény $k+1$-szer differenciálható E-n, és a magasabb rendű deriváltak definícióját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{k+1}(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}) &= \pi_{1,k} \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}^k(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]})) = \\ &= (k+1)!\binom{n}{k+1}\left(\pi_{1,k} \circ \left(\tilde{\pi}_{n-k-1,1}^{-1}(\pi_{n-k,k}^{-1}(u))\right)\right) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n-(k+1)]},\end{aligned}$$

ahol $\pi_{1,k}$ az $\mathscr{L}(E; \mathscr{L}_k(E; F)) \to \mathscr{L}_{k+1}(E; F)$ kanonikus bijekció, és felhasználtuk azt, hogy

$$(n-k)k!\binom{n}{k} = (k+1)!\binom{n}{k+1}.$$

Ezért elegendő azt igazolni, hogy

$$\pi_{1,k} \circ \left(\tilde{\pi}_{n-k-1,1}^{-1}(\pi_{n-k,k}^{-1}(u))\right) = \pi_{n-(k+1),k+1}^{-1}(u),$$

hiszen ha ez teljesülne, akkor fennállna a bizonyítandó

$$\mathrm{D}^{k+1}(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}) = (k+1)!\binom{n}{k+1}\left(\pi^{-1}_{n-(k+1),k+1}(u)\right) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n-(k+1)]}$$

egyenlőség.

Figyelembe véve azt, hogy a $\pi_{1,k}$, $\tilde{\pi}_{n-k-1,1}$, $\pi_{n-k,k}$ és $\pi_{n-(k+1),k+1}$ leképezések mind bijekciók, egyszerű átrendezéssel kapjuk, hogy a

$$(\forall u \in \mathscr{L}_n(E;F)):\ \pi_{1,k} \circ \left(\tilde{\pi}^{-1}_{n-k-1,1}(\pi^{-1}_{n-k,k}(u))\right) = \pi^{-1}_{n-(k+1),k+1}(u)$$

kijelentés *ekvivalens* azzal, hogy

$$(\forall v \in \mathscr{L}_{n-k-1}(E;\mathscr{L}(E;\mathscr{L}_k(E;F))))\ \pi_{n-(k+1),k+1}(\pi_{1,k} \circ v) = \pi_{n-k,k}(\tilde{\pi}_{n-k-1,1}(v)).$$

Legyen $v \in \mathscr{L}_{n-k-1}(E;\mathscr{L}(E;\mathscr{L}_k(E;F)))$ rögzített, és vegyünk tetszőleges $(x_i)_{i\in n}$ rendszert. Ekkor a $\pi_{1,k}$, $\tilde{\pi}_{n-k-1,1}$, $\pi_{n-k,k}$ és $\pi_{n-(k+1),k+1}$ kanonikus bijekciók definícióját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(\pi_{n-(k+1),k+1}(\pi_{1,k} \circ v)\right)((x_i)_{i\in n}) &:= ((\pi_{1,k} \circ v)((x_i)_{i\in n-k-1}))((x_{i+n-k-1})_{i\in k+1}) = \\ &= (\pi_{1,k}(v((x_i)_{i\in n-k-1})))((x_{i+n-k-1})_{i\in k+1}) = \\ &= ((v((x_i)_{i\in n-k-1}))(x_{0+n-k-1}))((x_{i+1+n-k-1})_{i\in k}) = \\ &= ((v((x_i)_{i\in n-k-1}))(x_{n-k-1}))((x_{i+n-k})_{i\in k}).\end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned}(\pi_{n-k,k}(\tilde{\pi}_{n-k-1,1}(v)))((x_i)_{i\in n}) &:= ((\tilde{\pi}_{n-k-1,1}(v))((x_i)_{i\in n-k}))((x_{i+n-k})_{i\in k}) = \\ &= ((v((x_i)_{i\in n-k-1}))(x_{n-k-1}))((x_{i+n-k})_{i\in k}),\end{aligned}$$

amiből látható, hogy

$$\left(\pi_{n-(k+1),k+1}(\pi_{1,k} \circ v)\right)((x_i)_{i\in n}) = (\pi_{n-k,k}(\tilde{\pi}_{n-k-1,1}(v)))((x_i)_{i\in n}).$$

Ezzel az állítást bizonyítottuk $k+1$-re. ■

Megjegyezzük, hogy ebben a pontban az előző lemmának csak a $k = 1$ speciális esetét fogjuk alkalmazni. Azonban a lemmának az általános formájára lesz szükségünk a 13. fejezetben, az analitikus függvények egy nevezetes tulajdonságának bizonyításához.

8.2.2. Lemma. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $n \in \mathbb{N}^*$ és $\mathfrak{a}$ olyan pont, amelyben az f függvény $n+1$-szer differenciálható. Ekkor*

$$\mathrm{D}(\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)) = \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f).$$

Bizonyítás. Természetesen az $n > 0$ eset érdekes. Ekkor az előző lemma alkalmazásával

$$\mathrm{D}(\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\,\mathrm{D}\left(((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\ k\pi^{-1}_{k-1,1}((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k-1]} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!}\ ((\mathrm{D}^{k-1}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k-1]} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ ((\mathrm{D}^k(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]} =: \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f)$$

adódik, hiszen $k \in \mathbb{N}$ esetén $\pi^{-1}_{k-1,1}((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})) = (\mathrm{D}^{k-1}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})$. ■

8.2.3. Tétel. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $n \in \mathbb{N}^*$ és $\mathfrak{a}$ olyan pont, amelyben az f függvény n-szer differenciálható. Ekkor*

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x) - (\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f))(x)}{\|x-\mathfrak{a}\|^n} = 0,$$

(infinitezimális Taylor-formula), *vagyis az f függvény és az n-edik, $\mathfrak{a}$ pontbeli Taylor-polinomja az $\mathfrak{a}$ pontban n-ed rendben érintkeznek.*

Bizonyítás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az $n = 1$ esetben azt tesszük fel, hogy f az $\mathfrak{a}$ pontban differenciálható. Ekkor a derivált értelmezése alapján

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|} = 0,$$

és éppen ez a bizonyítandó egyenlőség.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \geq 1$ természetes számra, és legyen az f függvény $n+1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Legyen $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, amelyre $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$. Ekkor $n \geq 1$ miatt minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ esetén az $f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)$ függvény folytonos az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ szakaszon, és differenciálható az $]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ szakaszon, tehát felírható a véges növekmények formulája:

$$\begin{aligned}\|f(x) - (\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)\| &= \|(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x) - (f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(\mathfrak{a})\| \leq \\ &\leq \left(\sup_{z\in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \|(\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)))(z)\|\right) \|x-\mathfrak{a}\|,\end{aligned}$$

amiből következik, hogy $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{\|f(x) - (\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)\|}{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}} &\leq \sup_{z\in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \left(\frac{\|(\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)))(z)\|}{\|x-\mathfrak{a}\|^n}\right) = \\ &= \sup_{z\in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \left(\left(\frac{\|(\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)))(z)\|}{\|z-\mathfrak{a}\|^n}\right)\left(\frac{\|z-\mathfrak{a}\|}{\|x-\mathfrak{a}\|}\right)^n\right) \leq \\ &\leq \sup_{z\in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \left(\frac{\|(\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)))(z)\|}{\|z-\mathfrak{a}\|^n}\right),\end{aligned}$$

hiszen $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ és $z \in]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ esetén nyilvánvalóan $\|z - \mathfrak{a}\| \leq \|x - \mathfrak{a}\|$.

Ugyanakkor a $\mathrm{D}f$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, így az indukciós hipotézis alapján

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{(\mathrm{D}f)(x) - (\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f))(x)}{\|x-\mathfrak{a}\|^n} = 0.$$

Az előző lemma szerint $\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f) = \mathrm{D}(\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))$, ezért az iménti egyenlőség ekvivalens a következővel

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{\|(\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)))(x)\|}{\|x-\mathfrak{a}\|^n} = 0.$$

Legyen most $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\delta < r$, és minden $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \ni z$-re

$$\frac{\|(\mathrm{D}f)(z) - (\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f))(z)\|}{\|z-\mathfrak{a}\|^n} < \varepsilon.$$

Ekkor minden $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra $]\!]\mathfrak{a}, x[\![\subseteq \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, ezért

$$\frac{\|f(x) - (\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)\|}{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}} \leq \sup_{z \in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \left(\frac{\|(\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)))(z)\|}{\|z-\mathfrak{a}\|^n} \right) \leq \varepsilon$$

teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy fennáll a

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - (\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)}{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}} = 0$$

egyenlőség. ■

8.2.4. Következmény. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a}$ olyan pont, amelyben az f függvény $n+1$-szer differenciálható. Ekkor az $\mathfrak{a}$ pontnak létezik olyan $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ környezete, hogy az*

$$\frac{f - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)}{\|\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}\|^{n+1}}$$

függvény korlátos az $U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon.

Bizonyítás. Minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\frac{f(x) - (\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f))(x)}{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}} = \frac{f(x) - (\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)}{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}} + \frac{(\mathrm{D}^{n+1}f)(\mathfrak{a})}{(n+1)!}\Big(\Big(\frac{x-\mathfrak{a}}{\|x-\mathfrak{a}\|}\Big)^{[n+1]}\Big).$$

Az infintezimális Taylor-formula szerint

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - (\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)}{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}} = 0,$$

ezért az $\mathfrak{a}$ pontnak létezik olyan $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ környezete, amelyre az

$$U \setminus \{\mathfrak{a}\} \to F; \quad x \mapsto \frac{f(x) - (\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)}{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}}$$

korlátos. Ugyanakkor minden $x \in E \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\Big\| \frac{(\mathrm{D}^{n+1}f)(\mathfrak{a})}{(n+1)!}\Big(\Big(\frac{x-\mathfrak{a}}{\|x-\mathfrak{a}\|}\Big)^{[n+1]}\Big) \Big\| \leq \frac{\|(\mathrm{D}^{n+1}f)(\mathfrak{a})\|}{(n+1)!},$$

tehát az

$$\frac{f - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)}{\|\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}\|^{n+1}}$$

függvény korlátos az $U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon. ■

Az 8.2.4. állítás bizonyításából látható, hogy (az ott megfogalmazott feltételek mellett) minden

$$C > \frac{\|(\mathrm{D}^{n+1}f)(\mathfrak{a})\|}{(n+1)!}$$

valós számhoz létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete E-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U$ esetén

$$\|f(x) - (\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f))(x)\| \leq C\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}.$$

8.2.5. Lemma. *Ha F normált tér, $n \in \mathbb{N}$ és $(z_k)_{k\in n+1}$ olyan F-ben haladó rendszer, hogy*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{t^k} = 0,$$

akkor minden $k \le n$ természetes számra $z_k = 0$.

Bizonyítás. n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 0$, akkor az állítás triviálisan igaz. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra és legyen $(z_k)_{k\in n+2}$ olyan F-ben haladó rendszer, hogy

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{z_k}{t^k} = 0.$$

Mivel minden $t > 0$ valós számra

$$t^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{z_k}{t^k} - \sum_{k=0}^{n} t^{n+1-k} z_k = z_{n+1},$$

és nyilvánvalóan

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \left(t^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{z_k}{t^k} \right) = 0, \qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \sum_{k=0}^{n} t^{n+1-k} z_k = 0,$$

így $z_{n+1} = 0$. Ekkor viszont

$$0 = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{z_k}{t^k} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{t^k},$$

tehát az indukciós hipotézis szerint minden $k \le n$ természetes számra $z_k = 0$. Ezért minden $k \le n+1$ természetes számra $z_k = 0$, tehát az állítás az $n+1$ számra is igaz. ∎

A következő állítás lehetőséget ad a magasabb rendű deriváltak értékeinek *meghatározására*, ha már tudjuk azt, hogy ezek a deriváltak léteznek.

8.2.6. Állítás. *Legyenek E, F normált terek, $\mathfrak{a} \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$ és $f : E \rightarrowtail F$ olyan függvény, amely n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ha $(u_k)_{k\in n+1} \in \prod_{k\in n+1} \mathscr{L}_k^s(E;F)$ olyan rendszer, hogy az f függvény és a*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

függvény az $\mathfrak{a}$ pontban n-ed rendben érintkezik, akkor minden $k \le n$ természetes számra

$$u_k = (\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}).$$

Bizonyítás. Az infinitezimális Taylor-formula alapján f és a $\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)$ Taylor-polinom n-ed rendben érintkeznek az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért a hipotézis szerint a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

függvény és $\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)$ is n-ed rendben érintkeznek az $\mathfrak{a}$ pontban, ami azt jelenti, hogy

$$0 = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) - u_k)\Big((x-\mathfrak{a})^{[k]}\Big)}{\|x-\mathfrak{a}\|^n} =$$
$$= \lim_{x\to\mathfrak{a}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\|x-\mathfrak{a}\|^{n-k}}\Big((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) - u_k\Big)\Big(\Big(\frac{x-\mathfrak{a}}{\|x-\mathfrak{a}\|}\Big)^{[k]}\Big).$$

Legyen $e \in E$ olyan vektor, hogy $\|e\| = 1$. Ekkor a határértékek kompozíciójának határértékéről szóló tétel (**MET** 6.4.1.) és az előző formula szerint

$$0 = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\|(\mathfrak{a}+t.e)-\mathfrak{a}\|^{n-k}}\Big((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) - u_k\Big)\Big(\Big(\frac{(\mathfrak{a}+t.e)-\mathfrak{a}}{\|(\mathfrak{a}+t.e)-\mathfrak{a}\|}\Big)^{[k]}\Big) =$$
$$= \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!t^{n-k}}\Big((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) - u_k\Big)(e^{[k]}) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!t^k}\Big((\mathrm{D}^{n-k} f)(\mathfrak{a}) - u_{n-k}\Big)(e^{[n-k]}).$$

Az előző lemmából a $z_k := \dfrac{1}{(n-k)!}\Big((\mathrm{D}^{n-k} f)(\mathfrak{a}) - u_{n-k}\Big)(e^{[n-k]})$ választással kapjuk, hogy minden $k \leq n$ természetes számra $\Big((\mathrm{D}^{n-k} f)(\mathfrak{a}) - u_{n-k}\Big)(e^{[n-k]}) = 0$, következésképpen minden $k \leq n$ természetes számra $\Big((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) - u_k\Big)(e^{[k]}) = 0$. Ez minden $e \in E$, $\|e\| = 1$ vektorra igaz. Ebből kapjuk, hogy minden $k \leq n$ természetes számra és minden $z \in E$ vektorra

$$\Big((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) - u_k\Big)(z^{[k]}) = 0,$$

mert z-hez van olyan $r > 0$ valós szám és $e \in E$, $\|e\| = 1$ vektor, hogy $z = r.e$, ezért a multilineáris operátorok multihomogenitása (**ALG** 10.2.2.) folytán

$$\Big((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) - u_k\Big)(z^{[k]}) = \Big((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) - u_k\Big)((r.e)^{[k]}) = r^k\Big((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) - u_k\Big)(e^{[k]}) = 0.$$

A szimmetrikus multilineáris operátorok meghatározottságának tétele (**ALG** 12.10.2.) alapján ebből következik, hogy minden $k \leq n$ természetes számra $(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) - u_k = 0$, hiszen a Young-tétel szerint $(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})$ szimmetrikus multilineáris operátor és u_k a hipotézis alapján szimmetrikus. ■

8.3. Gyakorlatok

1. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és tekintsük azt az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) := \begin{cases} x^{n+1}\sin(1/x^{n+1}) & \text{, ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } x = 0. \end{cases}$$

Az f függvény végtelenszer differenciálható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, és létezik olyan $(u_k)_{k\in n+1} \in \prod_{k\in n+1} \mathscr{L}_k^s(\mathbb{R};\mathbb{R})$ rendszer, hogy az f és a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

függvények a 0 pontban n-ed rendben érintkeznek. Azonban f a 0 pontban csak *egyszer differenciálható*.

(Tehát a 8.2.6. állítás feltételei között lényeges az, hogy az f függvény az $\mathfrak{a}$ pontban *n-szer differenciálható* legyen.)

(*Útmutatás.* Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $|f(x)-f(0)| \leq |x^{n+1}|$, ezért f differenciálható a 0 pontban, és $(\mathrm{D}f)(0) = 0$, továbbá minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$(\mathrm{D}f)(x) = (n+1)x^n \sin\Big(\frac{1}{x^{n+1}}\Big) - \Big(\frac{n+1}{x}\Big)\cos\Big(\frac{1}{x^{n+1}}\Big).$$

Látható, hogy a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény a 0 semmilyen környezetén *nem korlátos*, ezért $\mathrm{D}f$ a 0 pontban *nem folytonos*, így f a 0-ban nem differenciálható kétszer. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy az f és 0 függvények a 0 pontban n-ed rendben érintkeznek, tehát ha minden $k \leq n$ természetes számra u_k jelöli az $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ azonosan 0 függvényt, akkor $(u_k)_{k\in n+1} \in \prod_{k\in n+1} \mathscr{L}_k^s(\mathbb{R};\mathbb{R})$ olyan rendszer, hogy az f és a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

függvények a 0 pontban n-ed rendben érintkeznek.)

2. Legyenek E, F normált terek, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{a} \in E$ és $u \in \mathscr{L}_n(E;F)$ (tehát u *nem feltétlenül szimmetrikus*). Ekkor az

$$u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]} : E \to F$$

függvény minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k-szor differenciálható az E-n, és

- ha $k \leq n$, akkor

$$\mathrm{D}^k(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}) = k!\binom{n}{k}(\pi_{n-k,k}^{-1}(\mathbf{S}(u))) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n-k]},$$

ahol $\pi_{n-k,k}$ jelöli az $\mathscr{L}_{n-k}(E;\mathscr{L}_k(E;F)) \to \mathscr{L}_n(E;F)$ kanonikus bijekciót, és $\mathbf{S}(u)$ az u szimmetrizáltja;

- ha $k > n$, akkor $\mathrm{D}^k(u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]})$ az $E \to \mathscr{L}_k(E;F)$ azonosan 0 függvény.

(*Útmutatás.* Nyilvánvalóan következik az ebben a pontban igazolt első lemmából, mert

$$u \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]} = \mathbf{S}(u) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[n]}$$

teljesül.)

3. Legyen F normált tér és $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ C^∞-osztályú függvény. Legyen $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, és tegyük fel, hogy $r > 0$ olyan valós szám, amelyre $[\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és léteznek olyan $C, R > 0$ valós számok, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in [\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r]$ esetén

$$\|(\mathrm{D}^{2k}f)(x)\| \leq C\frac{(2k)!}{R^{2k}}.$$

Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in [\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r]$ esetén

$$\|(\mathrm{D}^{2k+1}f)(x)\| \leq 2C\Big(\frac{1}{r}\frac{(2k)!}{R^{2k}} + r\frac{(2k+2)!}{R^{2k+2}}\Big).$$

(*Útmutatás.* Legyen $x \in [\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r]$ rögzített. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathrm{D}^{2k} f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ függvényre és az $[x, \mathfrak{a}+r]$, valamint $[\mathfrak{a}-r, x]$ intervallumokra alkalmazva a Taylor-formulát kapjuk, hogy

$$\|(\mathrm{D}^{2k} f)(\mathfrak{a}+r) - (\mathrm{D}^{2k} f)(x) - (\mathrm{D}^{2k+1} f)(x).(\mathfrak{a}+r-x)\| \leq$$
$$\leq \frac{(\mathfrak{a}+r-x)^2}{2} \sup_{x' \in]x, \mathfrak{a}+r[} \|(\mathrm{D}^{2k+2} f)(x')\| \leq \frac{(\mathfrak{a}+r-x)^2}{2} C \frac{(2k+2)!}{R^{2k+2}},$$

valamint

$$\|(\mathrm{D}^{2k} f)(x) - (\mathrm{D}^{2k} f)(\mathfrak{a}-r) - (\mathrm{D}^{2k+1} f)(x).(x-\mathfrak{a}+r)\| \leq$$
$$\leq \frac{(x-\mathfrak{a}+r)^2}{2} \sup_{x' \in]\mathfrak{a}-r, x[} \|(\mathrm{D}^{2k+2} f)(x')\| \leq \frac{(x-\mathfrak{a}+r)^2}{2} C \frac{(2k+2)!}{R^{2k+2}}.$$

Az első egyenlőtlenségből következik, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|(\mathrm{D}^{2k+1} f)(x)\|(\mathfrak{a}+r-x) \leq$$
$$\leq \|(\mathrm{D}^{2k} f)(\mathfrak{a}+r) - (\mathrm{D}^{2k} f)(x)\| + \frac{(\mathfrak{a}+r-x)^2}{2} C \frac{(2k+2)!}{R^{2k+2}} \leq$$
$$\leq \|(\mathrm{D}^{2k} f)(\mathfrak{a}+r)\| + \|(\mathrm{D}^{2k} f)(x)\| + \frac{(2r)^2}{2} C \frac{(2k+2)!}{R^{2k+2}} \leq 2C \frac{(2k)!}{R^{2k}} + 2r^2 C \frac{(2k+2)!}{R^{2k+2}},$$

míg a második egyenlőtlenségből hasonlóan

$$\|(\mathrm{D}^{2k+1} f)(x)\|(x-\mathfrak{a}+r) \leq 2C \frac{(2k)!}{R^{2k}} + 2r^2 C \frac{(2k+2)!}{R^{2k+2}}$$

adódik. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva, és $2r$-rel osztva kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.)

9. fejezet

Feltétel nélküli szélsőértékek

9.1. Pozitív és pozitív definit multilineáris funkcionálok

Ebben a pontban azt vizsgáljuk meg, hogy a valós normált térben értelmezett, valós értékű függvények lokális szélsőértékei hogyan jellemezhetők a differenciálszámítás segítségével. Először megfogalmazzuk a lokális szélsőértékek definícóját, eléggé általános formában.

9.1.1. Definíció. *Legyen M metrikus tér és $f : M \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény.*

– *Azt mondjuk, hogy f-nek* **lokális maximuma** (*illetve* **lokális minimuma**) *van az $\mathfrak{a}$ pontban, ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete M-ben, hogy minden $x \in U \cap \mathrm{Dom}(f)$ esetén $f(x) \leq f(\mathfrak{a})$ (illetve $f(x) \geq f(\mathfrak{a})$) teljesül.*

– *Azt mondjuk, hogy f-nek* **szigorú lokális maximuma** (*illetve* **szigorú lokális minimuma**) *van az $\mathfrak{a}$ pontban, ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete M-ben, hogy minden $x \in U \cap \mathrm{Dom}(f)$ esetén, ha $x \neq \mathfrak{a}$, akkor $f(x) < f(\mathfrak{a})$ (illetve $f(x) > f(\mathfrak{a})$).*

– *Azt mondjuk, hogy f-nek* **lokális szélsőértéke** (*illetve* **szigorú lokális szélsőértéke**) *van az $\mathfrak{a}$ pontban, ha f-nek lokális maximuma vagy lokális minimuma (illetve szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma) van $\mathfrak{a}$-ban.*

Nyilvánvaló, hogy a lokális szélsőérték és a szigorú lokális szélsőérték fogalma *topologikus fogalom*, tehát csak a metrika által meghatározott topológiától függ, hiszen a definíció csak a környezetek fogalmát használja.

9.1.2. Állítás. *Legyen E valós normált tér, $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és $\mathfrak{a}$ belső pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Ha f-nek lokális szélsőértéke van az $\mathfrak{a}$ pontban, és $\mathbf{e} \in E$ olyan vektor, hogy létezik f-nek $\mathbf{e}$ irányú deriváltja $\mathfrak{a}$-ban, akkor* $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}}f)(\mathfrak{a}) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek lokális maximuma van $\mathfrak{a}$-ban, és legyen U olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és minden $U \ni x$-re $f(x) \leq f(\mathfrak{a})$. Legyen $\mathbf{e} \in E$ olyan vektor, hogy létezik f-nek $\mathbf{e}$ irányú deriváltja $\mathfrak{a}$-ban. Az $\mathbb{R} \to E;\ t \mapsto \mathfrak{a}+t.\mathbf{e}$ leképezés folytonossága miatt vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy minden $t \in]-\delta, \delta[$ esetén $\mathfrak{a}+t.\mathbf{e} \in U$. Ekkor minden $]-\delta, \delta[\ni t$-re $f(\mathfrak{a}+t.\mathbf{e}) \leq f(\mathfrak{a})$. Ebből következik, hogy az $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R};\ t \mapsto f(\mathfrak{a}+t.\mathbf{e})$ függvénynek lokális maximuma van a 0-ban. Továbbá ez a függvény differenciálható is a 0-ban, mert létezik f-nek $\mathbf{e}$ irányú deriváltja $\mathfrak{a}$-ban. Ezért e függvény 0 pontbeli deriváltja egyenlő 0-val, továbbá a definíció szerint ez $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}}f)(\mathfrak{a})$-val is egyenlő. ■

9.1.3. Következmény. *Legyen E valós normált tér, $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és $\mathfrak{a}$ olyan pont, amelyben f differenciálható. Ha f-nek lokális szélsőértéke van $\mathfrak{a}$-ban, akkor $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = 0$.*

Bizonyítás. Az f függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért minden $\mathbf{e} \in E$ esetén létezik f-nek $\mathbf{e}$ irányú eriváltjaz $\mathfrak{a}$-ban, és $((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}) = (\mathrm{D}_{\mathbf{e}}f)(\mathfrak{a})$. Az $\mathfrak{a}$ pont belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és $\mathfrak{a}$-ban az f-nek lokális szélsőértéke van, így az előző állítás szerint minden $E \ni \mathbf{e}$-re $(\mathrm{D}_{\mathbf{e}}f)(\mathfrak{a}) = 0$, ami azt jelenti, hogy $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = 0$. ■

Tehát ugyanúgy, mint a valós változós, valós értékű függvények esetében, a lokális szélsőérték létezésének természetes szükséges feltétele az, hogy a derivált nulla legyen, minden olyan pontban, ahol a függvény differenciálható. Ez a szükséges feltétel nyilvánvalóan nem elégséges, ezért olyan mellékfeltételt keresünk, amely a szükséges feltétellel együtt már elégséges is a lokális szélsőérték létezéséhez. Itt is a magasabb rendű deriváltak tulajdonságai szabályozhatják a lokális szélsőérték létezését. A magasabb rendű deriváltak multilineáris funkcionálok, ezért most általánosan értelmezzük a számunkra fontos tulajdonságokat multilineáris funkcionálok esetében.

9.1.4. Definíció. *Legyen E valós vektortér, $n \in \mathbb{N}^*$, és $u : E^n \to \mathbb{R}$ multilineáris funkcionál.*

– *Azt mondjuk, hogy u* **pozitív** (*illetve* **negatív**)*, ha minden $x \in E$ vektorra $u(x^{[n]}) \geq 0$* (*illetve $u(x^{[n]}) \leq 0$*)*. Azt mondjuk, hogy u* **indefinit**, *ha nem pozitív és nem negatív.*

– *Azt mondjuk, hogy u* **pozitív definit** (*illetve* **negatív definit**)*, ha minden $x \in E$ vektorra, $x \neq 0$ esetén $u(x^{[n]}) > 0$* (*illetve $u(x^{[n]}) < 0$*)*. Azt mondjuk, hogy u* **pozitív szemidefinit** (*illetve* **negatív szemidefinit**)*, ha pozitív* (*illetve negatív*)*, de nem pozitív definit (illetve negatív definit).*

Megjegyezzük, hogy u indefinitivitása azt jelenti, hogy létezik olyan $x \in E$, amelyre $u(x^{[n]}) > 0$, és létezik olyan $x \in E$, hogy $u(x^{[n]}) < 0$. Továbbá, u pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha minden $x \in E$ vektorra $u(x^{[n]}) \geq 0$, és van olyan $x \in E$, hogy $x \neq 0$ és $u(x^{[n]}) = 0$.

Ha u nem nulla, *szimmetrikus*, és pozitív vagy negatív, akkor n szükségképpen páros. Valóban, ha u nem nulla és szimmetrikus, akkor a szimmetrikus multilineáris operátorok meghatározottságának tétele alapján (VI. fejezet, 3. pont) van olyan $x \in E$, hogy $u(x^{[n]}) \neq 0$; ekkor páratlan n esetén $u((-x)^{[n]}) = -u(x^{[n]})$, ezért az $u(x^{[n]})$ és $u((-x)^{[n]})$ számok nem nullák és ellentétes előjelűek, így u indefinit.

9.1.5. Definíció. *Legyen E valós normált tér, $n \in \mathbb{N}^*$, és $u : E^n \to \mathbb{R}$ multilineáris funkcionál. Azt mondjuk, hogy u* **szigorúan pozitív definit** (*illetve* **szigorúan negatív definit**)*, ha létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $x \in E$ esetén $u(x^{[n]}) \geq C\|x\|^n$* (*illetve $u(x^{[n]}) \leq -C\|x\|^n$*)*.*

Nyilvánvaló, hogy szigorúan pozitív (illetve negatív) definit multilineáris funkcionál szükségképpen pozitív (illetve negatív) definit, de ennek a megfordítása végtelen dimenziós tér esetében nem igaz (**3**. gyakorlat). Azonban igaz a következő állítás.

9.1.6. Állítás. *Ha E véges dimenziós valós normált tér és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor minden $E^n \to \mathbb{R}$ pozitív* (*illetve negatív*) *definit multilineáris funkcionál szigorúan pozitív* (*illetve negatív*) *definit.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathbb{S}$ a 0 középpontú, 1 sugarú gömbfelületet E-ben, ami korlátos és zárt halmaz, így az E véges dimenzióssága miatt kompakt. Legyen $u : E^n \to \mathbb{R}$ multilineáris funkcionál. Ekkor u folytonos, mert E véges dimenziós, így az $\mathbb{S} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto u(x^{[n]})$ leképzés is folytonos. Ha u pozitív definit, akkor ez a folytonos függvény mindenütt szigorúan pozitív értéket vesz fel. Ugyanakkor a Weierstrass-féle minimum-elv szerint van olyan pont $\mathbb{S}$-ben, ahol ez a függvény minimális értéket vesz fel. Ezért van olyan $C \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $x \in \mathbb{S}$ esetén $u(x^{[n]}) \geq C$. Ha $x \in E$ és $x \neq 0$, akkor $x/\|x\| \in \mathbb{S}$, ezért a multilineáris funkcionálok multihomogenitása (**ALG** 10.2.2.) folytán

$$C \leq u\Big(\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)^{[n]}\Big) = \frac{1}{\|x\|^n} u(x^{[n]}).$$

Ebből következik, hogy minden $x \in E$ esetén $u(x^{[n]}) \geq C\|x\|^n$, tehát u szigorúan pozitív definit. ■

9.2. A feltétel nélküli szélsőértékek differenciális jellemzése

9.2.1. Tétel. *Legyen E valós normált tér, $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, és $\mathfrak{a}$ olyan pont, amelyben az f függvény n-szer differenciálható, és minden $0 < k < n$ esetén $(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) = 0$, valamint $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) \neq 0$.*

a) *Ha f-nek lokális maximuma (illetve lokális minimuma) van $\mathfrak{a}$-ban, akkor n páros, és a $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})$ multilineáris funkcionál negatív (illetve pozitív).*

b) *Ha a $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})$ multilineáris funkcionál szigorúan negatív definit (illetve szigorúan pozitív definit), akkor f-nek szigorú lokális maximuma (illetve szigorú lokális minimuma) van az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. Vezessük be azt a $\varphi : \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\varphi(x) := \frac{f(x) - (\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f))(x)}{\|x - \mathfrak{a}\|^n}.$$

A definíció és az $\mathfrak{a}$ pontbeli deriváltakra vonatkozó feltételek alapján minden $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra

$$f(x) = (\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f))(x) + \varphi(x)\|x - \mathfrak{a}\|^n = f(\mathfrak{a}) + \frac{1}{n!}((\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}))((x - \mathfrak{a})^{[n]}) + \varphi(x)\|x - \mathfrak{a}\|^n$$

teljesül.

Az a) bizonyításához tegyük fel, hogy f-nek $\mathfrak{a}$-ban lokális maximuma van. Legyen $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és minden $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \ni x$-re $f(x) \leq f(\mathfrak{a})$; ekkor

$$((\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}))((x - \mathfrak{a})^{[n]}) \leq -n!\varphi(x)\|x - \mathfrak{a}\|^n.$$

Legyen most $\mathbf{e} \in E \setminus \{0\}$ rögzített, és vegyünk olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot, amelyre minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $t_k\|\mathbf{e}\| < r$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathfrak{a} + t_k.\mathbf{e} \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$, ezért az előző egyenlőtlenségben x helyére az $\mathfrak{a} + t_k.\mathbf{e}$ vektort helyettesítve kapjuk, hogy

$$t_k^n((\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}^{[n]}) = ((\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}))((t_k.\mathbf{e})^{[n]}) \leq$$
$$\leq -n!\varphi(\mathfrak{a} + t_k.\mathbf{e})\|t_k.\mathbf{e}\|^n = -n!\varphi(\mathfrak{a} + t_k.\mathbf{e})t_k^n\|\mathbf{e}\|^n,$$

amiből t_k^n-nel való osztással

$$((\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}^{[n]}) \leq -n!\varphi(\mathfrak{a} + t_k.\mathbf{e})\|\mathbf{e}\|^n$$

adódik. Az infinitezimális Taylor-formula szerint $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \varphi = 0$, így az átviteli elv alapján $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(\mathfrak{a} + t_k.\mathbf{e}) = 0$, következésképpen $((\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}^{[n]}) \leq 0$. Ez azt jelenti, hogy a $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})$ multilineáris funkcionál negatív. A Young-tétel alapján ez a multilineáris funkcionál szimmetrikus is, és a hipotézis szerint nem 0, így n szükségképpen páros; ezzel a)-t igazoltuk.

A b) állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})$ szigorúan negatív definit, és legyen $C \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy minden $E \ni x$-re $((\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}))(x^{[n]}) \leq -C\|x\|^n$. Ha $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor

$$f(x) - f(\mathfrak{a}) = \frac{1}{n!}((\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[n]}) + \varphi(x)\|x-\mathfrak{a}\|^n \leq \Big(-\frac{C}{n!} + \varphi(x)\Big)\|x-\mathfrak{a}\|^n.$$

Az infinitezimális Taylor-formula szerint $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \varphi = 0$, így a $C/n! > 0$ valós számhoz létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete E-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $U \ni x$-re $\varphi(x) < C/n!$. Ekkor minden $x \in U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén $f(x) < f(\mathfrak{a})$, tehát f-nek $\mathfrak{a}$-ban szigorú lokális maximuma van. ■

9.3. Gyakorlatok

1. a) Legyenek E_1, E_2 halmazok és $f : E_1 \times E_2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény. Tegyük fel, hogy minden $x_1 \in \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle$ esetén az $f(x_1, \cdot) : E_2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvénynek létezik globális maximuma. Ekkor létezik olyan $\varphi : \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle \rightarrowtail E_2$ függvény, amelyre minden $x_1 \in \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle$ esetén az $f(x_1, \cdot) : E_2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ parciális függvénynek a $\varphi(x_1) \in E_2$ pontban globális maximuma van. Ha φ ilyen függvény, akkor f-nek pontosan akkor van globális maximuma a $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha a $\mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle \to \mathbb{R};\ x_1 \mapsto f(x_1, \varphi(x_1))$ függvénynek globális maximuma van a $\mathrm{pr}_1(\mathfrak{a}) \in \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle$ pontban.

b) Legyenek (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus terek, és $f : M_1 \times M_2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény. Tegyük fel, hogy minden $x_1 \in \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle$ esetén az $f(x_1, \cdot) : M_2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvénynek létezik lokális maximuma a d_2 metrika szerint. Ekkor létezik olyan $\varphi : \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle \rightarrowtail M_2$ függvény, amelyre minden $x_1 \in \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle$ esetén az $f(x_1, \cdot) : M_2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ parciális függvénynek a $\varphi(x_1) \in M_2$ pontban lokális maximuma van a d_2 metrika szerint. Konkrét páldákkal igazoljuk, hogy ha φ ilyen függvény, akkor

- lehetséges az, hogy f-nek lokális maximuma van az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban a d_1 és d_2 metrikák szorzata szerint, de a $\mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle \to \mathbb{R};\ x_1 \mapsto f(x_1, \varphi(x_1))$ függvénynek *nincs* lokális maximuma a $\mathrm{pr}_1(\mathfrak{a}) \in \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle$ pontban a d_1 metrika szerint;

- lehetséges az, hogy a $\mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle \to \mathbb{R};\ x_1 \mapsto f(x_1, \varphi(x_1))$ függvénynek lokális maximuma *van* az $\mathfrak{a}_1 \in \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle$ pontban a d_1 metrika szerint, de f-nek *nincs* lokális maximuma a $(\mathfrak{a}_1, \varphi(\mathfrak{a}_1))$ pontban a d_1 és d_2 metrikák szorzata szerint.

2. Diszkrét metrikus térben értelmezett valós értékű függvénynek a definíciós tartományának *minden pontjában* szigorú lokális maximuma és szigorú lokális minimuma van!

3. Legyen $E := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, és tekintsük az

$$u : E \times E \to \mathbb{R}; \quad (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k)$$

függvényt. Ekkor u olyan pozitív definit, szimmetrikus bilineáris funkcionál, amely az E feletti $\|\cdot\|_2$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák szerint szigorúan pozitív definit, azonban a $\|\cdot\|_1$ norma szerint nem az.

(*Útmutatás.* Ha u szigorúan pozitív definit volna az E feletti $\|\cdot\|_1$ norma szerint, akkor létezne olyan $C > 0$ valós szám, amelyre $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$ teljesülne, ugyanakkor könnyen megadható olyan E-ben haladó sorozat, amely a $\|\cdot\|_2$ szerint 0-hoz konvergál, de a $\|\cdot\|_1$ szerint nem, így ilyen C szám nem létezhet.)

4. Legyen E valós normált tér, $U \subseteq E$ nyílt konvex halmaz, és $f : U \to \mathbb{R}$ differenciálható konvex (illetve konkáv) függvény. Ha $\mathfrak{a} \in U$, akkor $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha f-nek globális minimuma (illetve maximuma) van az $\mathfrak{a}$ pontban.

(*Útmutatás.* Ha f konvex függvény és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = 0$, akkor az 1. pont, **7**. gyakorlat szerint minden $U \ni x$-re $f(x) - f(\mathfrak{a}) \geq ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a}) \geq 0$ teljesül, vagyis f-nek az $\mathfrak{a}$ pontban globális minimuma van.)

5. (*Gauss-féle legkisebb négyzetek módszere.*) Legyenek $m, n \in \mathbb{N}^*$, és minden $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris operátorra jelölje A^T az A operátor *transzponáltját*, tehát $A^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ az a lineáris operátor, amelynek mátrixa az A mátrixának a transzponáltja (IV. fejezet, 1. pont). Tegyük fel, hogy $m \leq n$ és $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris *injekció*. Ekkor az $A^T A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ leképezés lineáris bijekció, és minden $y \in \mathbb{R}^n$ esetén $x := (A^T A)^{-1}(A^T y) \in \mathbb{R}^m$ az egyetlen olyan pont $\mathbb{R}^m$-ben, amelyre

$$\|Ax - y\| = \inf_{y' \in \mathrm{Im}(A)} \|y' - y\|$$

teljesül, ahol $\|\cdot\|$ jelöli az $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ feletti *euklidészi normát.* (Tehát $Ax \in \mathrm{Im}(A)$ az y-hoz legközelebbi pont $\mathrm{Im}(A)$-ból.)

(*Útmutatás.* Jelölje $(\cdot|\cdot)$ az $\mathbb{R}^n$ feletti és $(\cdot|\cdot)'$ az $\mathbb{R}^m$ feletti euklidészi skalárszorzást (3. pont, 3. példa). A transzponált definíciója alapján nyilvánvaló, hogy ha $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris operátor, akkor minden $x \in \mathbb{R}^m$ és $y \in \mathbb{R}^n$ esetén $(Ax|y) = (x|A^T y)'$ teljesül. Legyen $y \in \mathbb{R}^n$ rögzített, és értelmezzük az

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \|Ax - y\|^2$$

függvényt. Azt kell megmutatni, hogy f-nek globális maximuma van az $x := (A^T A)^{-1}(A^T y) \in \mathbb{R}^m$ pontban, és ez az egyetlen pont, ahol globális maximuma van f-nek. Ha $x \in \mathbb{R}^m$, akkor

$$\begin{aligned} f(x) &:= \|Ax - y\|^2 = (Ax - y|Ax - y) = (Ax|Ax) - (Ax|y) - (y|Ax) + (y|y) = \\ &= ((A^T A)x|x)' - 2(A^T y|x)' + \|y\|^2 = \sum_{j,k \in m} (A^T A)_{j,k} x_j x_k - 2\sum_{j \in m} (A^T y)_j x_j + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Ebből látszik, hogy f végtelenszer differenciálható, valamint minden $x \in \mathbb{R}^m$ és $\mu \in m$ esetén

$$(\partial_\mu f)(x) = 2\sum_{k \in m} (A^T A)_{\mu,k} x_k - 2(A^T y)_\mu,$$

továbbá, minden $\nu \in m$ indexre

$$(\partial_\nu \partial_\mu f)(x) = 2(A^T A)_{\mu,\nu}.$$

Ezért a $(\mathrm{D}f)(x) = 0$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $A^T y = (A^T A)x$, továbbá $\mathrm{D}^2 f$ nem más, mint az a konstansfüggvény, amelynek értéke az

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}; \quad (x, x') \mapsto 2 \sum_{\mu,\nu \in m} (A^T A)_{\mu,\nu} x_\mu x'_\nu$$

bilineáris funkcionál. Nyilvánvaló, hogy ez a bilineáris funkcionál pozitív definit, mert A injektív. Továbbá, ekkor az $A^T A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ operátor is injektív, tehát lineáris bijekció. Ezért az állítás közvetlen következménye a szélsőértékek differenciális jellemzését adó tételnek.)

10. fejezet

Analitikus függvények

10.1. Taylor-sorok és hatványfüggvény-sorok

Megállapodunk abban, hogy ha E vektortér, $\mathfrak{a} \in E$ és $k \in \mathbb{N}$, akkor az

$$(\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]} : E \to E^k; \quad x \mapsto (x - \mathfrak{a})^{[k]}$$

jelölést alkalmazzuk, ahol minden $E \ni z$-re $z^{[k]} \in E^k$ az a rendszer, amelynek minden komponense egyenlő z-vel, vagyis megegyezik a z értékű $k \to E$ konstansfüggvénnyel.

10.1.1. Definíció. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a}$ olyan pont, amelyben f végtelenszer differenciálható. Ekkor az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli* **Taylor-sorának** *nevezzük és $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$-fel jelöljük a*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}((\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

függvénysort.

Nyilvánvaló, hogy az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli Taylor-sora az a függvénysorozat, amelynek minden $\mathbb{N} \ni n$-re az n-edik tagja egyenlő $\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)$-fel, vagyis az f függvény $\mathfrak{a}$-beli n-edik Taylor-polinomjával (8.1.1.).

A Young-tétel alapján a Taylor-sorok természetes általánosításaként bevezethetjük a vektoriális hatványfüggvény-sorokat a következő módon.

10.1.2. Definíció. *Legyenek E, F normált terek, $\mathfrak{a} \in E$, és*

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k^s(E; F)$$

tetszőleges rendszer. Ekkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

függvénysort $\mathfrak{a}$ centrumú, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ együtthatójú **hatványfüggvény-sornak** *nevezzük. Továbbá az*

$$R := \begin{cases} 1/\limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|^{1/k} & , \text{ ha } 0 < \limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|^{1/k} < +\infty \\ 0 & , \text{ ha } \limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|^{1/k} = +\infty \\ +\infty & , \text{ ha } \limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|^{1/k} = 0 \end{cases}$$

$\overline{\mathbb{R}}_+$*-beli elemet a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ *hatványfüggvény-sor* **Cauchy-féle konvergencia-sugarának** *nevezzük.*

Tehát a Taylor-sorok speciális hatványfüggvény-sorok. Később megmutatjuk, hogy ha F teljes, akkor minden hatványfüggvény-sor Taylor-sor. Legalább két dimenziós E esetében többféle konvergencia-sugár is értelmezhető (**1**. gyakorlat).

A hatványfüggvény-sorok definíciójával kapcsolatban megjegyezzük, hogy ezeket olyan $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ alakú függvénysorokként értelmeztük, amelyeknek az u_k együtthatói *szimmetrikus* multilineáris operátorok. Formálisan általánosabb definíciónak tűnhetne a következő: ha E, F normált terek, $\mathfrak{a} \in E$, és $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k(E;F)$ tetszőleges rendszer, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

függvénysort $\mathfrak{a}$ *centrumú,* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *együtthatójú hatványfüggvény-sornak* nevezzük. Azonban ez a definíció nem általánosabb, mert ha minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\mathbf{S}(u_k)$ jelöli az u_k multilineáris operátor *szimmetrizáltját* (VI. fejezet, 3. pont), akkor nyilvánvalóan

$$u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]} = \mathbf{S}(u_k) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]},$$

ezért

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{S}(u_k) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]},$$

és az itt álló $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{S}(u_k) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sornak az együtthatói szimmetrikus multilineáris operátorok.

10.1.3. Tétel. (Cauchy–Hadamard-tétel) *Legyenek E, F normált terek, $\mathfrak{a} \in E$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k^s(E;F)$, és jelölje R a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugarát.*

a) *A $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ függvénysor pontonként abszolút konvergens, és minden $0 \le r < R$ valós számra a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ halmazon normálisan konvergens.*

b) *Ha F teljes, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ függvénysor minden $0 \le r < R$ valós számra a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ halmazon egyenletesen konvergens, és a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $0 \le r < R$ egy rögzített valós szám. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sup_{x\in\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})} \left\| u_k((x-\mathfrak{a})^{[k]}) \right\| \le \sup_{x\in\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})} \left(\|u_k\| \|x-\mathfrak{a}\|^k \right) \le \|u_k\| r^k < +\infty,$$

továbbá teljesül a

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\|u_k\| r^k \right)^{1/k} = \left(\limsup_{k\to\infty} \|u_k\|^{1/k} \right) r$$

egyenlőség.

Ha $R = +\infty$, akkor $\limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|^{1/k} = 0$, tehát $\limsup\limits_{k\to\infty} \left(\|u_k\| r^k\right)^{1/k} = 0 < 1$. Ha $R < +\infty$, akkor $\limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|^{1/k} = 1/R < 1/r$, tehát $\limsup\limits_{k\to\infty} \left(\|u_k\| r^k\right)^{1/k} < 1$. Ezért a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{x\in\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})} \left\| u_k((x-\mathfrak{a})^{[k]}) \right\| \right)$$

sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, vagyis a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sor normálisan konvergens a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ halmazon, így a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ halmazon pontonként abszolút is konvergens. Mivel pedig $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a}) = \bigcup\limits_{r\in[0,R[} \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$, így a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sor a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon is pontonként abszolút konvergens, amivel az a) állítást igazoltuk.

A b) állítás bizonyításához tegyük fel, hogy F Banach-tér. Ha $0 \leq r < R$ valós szám, akkor az egyenletes konvergencia Weierstrass-kritériuma (V. fejezet, 11. pont) és az a) állítás alapján a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ függvénysor egyenletesen konvergens a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ halmazon. Ha $x \in \mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$, és az ϱ olyan valós szám, hogy $r := \|x - \mathfrak{a}\| + \varrho < R$, akkor $\mathrm{B}_\varrho(x) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$, tehát a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ függvénysor egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_\varrho(x)$ gömbön, ami az x-nek környezete, így ez a hatványfüggvény-sor lokálisan egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon. ■

A Cauchy–Hadamard-tétel indokolja a következő elnevezést.

10.1.4. Definíció. *Legyenek E, F normált terek, $\mathfrak{a} \in E$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k^s(E;F)$, és jelölje R a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugarát. Ekkor a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazt a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sor* **abszolút-konvergencia-tartományának** *nevezzük.*

Vigyázzunk arra, hogy ha E, F normált terek, és $\mathfrak{a} \in E$, de F *nem teljes*, akkor az $\mathfrak{a}$ centrumú, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k^s(E;F)$ együtthatójú hatványfüggvény-sor az Z
abszolútkonvergencia-tartományán nem szükségképpen pontonként konvergens, vagyis ez a halmaz nem feltétlenül részhalmaza a

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

összegfüggvény definíciós tartományának.

10.2. Hatványfüggvény-sor összegfüggvényének deriváltjai

10.2.1. Állítás. (Hatványfüggvény-sor összegfüggvényének simasága) *Legyen E*

normált tér, F Banach-tér, $\mathfrak{a} \in E$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k^s(E;F)$,

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]},$$

és jelölje R a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugarát. Ekkor f végtelenszer differenciálható a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon, és ha $R > 0$, akkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$u_m = \frac{1}{m!}(\mathrm{D}^m f)(\mathfrak{a})$$

teljesül.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}.$$

A 8.2.1. lemma szerint minden $\mathbb{N} \ni k$-ra az $u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]} : E \to F$ függvény végtelenszer differenciálható, és

– minden $m \leq k$ természetes számra

$$\mathrm{D}^m(u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}) = m!\binom{k}{m}\Big(\pi_{k-m,m}^{-1}(u_k)\Big) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k-m]},$$

ahol $\pi_{k-m,m}$ a $\mathscr{L}_{k-m}(E; \mathscr{L}_m(E;F)) \to \mathscr{L}_k(E;F)$ kanonikus bijekció;

– minden $m > k$ természetes számra a $\mathrm{D}^m(u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]})$ deriváltfüggvény egyenlő az $E \to \mathscr{L}_m(E;F)$ azonosan 0 függvénnyel.

Ebből következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re az $f_n : E \to F$ függvény végtelenszer differenciálható, és minden $\mathbb{N} \ni m$-re

$$\mathrm{D}^m f_{n+m} := \mathrm{D}^m\Big(\sum_{k=0}^{n+m} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}\Big) = \sum_{k=0}^{n+m} \mathrm{D}^m\Big(u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}\Big) =$$
$$= \sum_{k=m}^{n+m} m!\binom{k}{m}\Big(\pi_{k-m,m}^{-1}(u_k)\Big) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k-m]} = m!\sum_{j=0}^{n}\binom{j+m}{m}\Big(\pi_{j,m}^{-1}(u_{j+m})\Big) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[j]}.$$

Legyen most $m \in \mathbb{N}$ rögzítve, és tekintsük a

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \binom{j+m}{m}\Big(\pi_{j,m}^{-1}(u_{j+m})\Big) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[j]}$$

hatványfüggvény-sort. Az a kijelentés, hogy ez a hatványfüggvény-sor lokálisan egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon: ekvivalens azzal, hogy a $(\mathrm{D}^m f_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon. Ez utóbbi kijelentés viszont nyilvánvalóan ekvivalens azzal, hogy a $(\mathrm{D}^m f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon. A szóban forgó hatványfüggvény-sor a

Cauchy–Hadamard-tétel alapján lokálisan egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon, ha a Cauchy-féle konvergencia-sugara egyenlő R-rel. Ez viszony így van, mert

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\binom{j+m}{m}\pi_{j,m}^{-1}(u_{j+m})\right\|^{1/j}=\limsup_{j\to\infty}\binom{j+m}{m}^{1/j}\|\pi_{j,m}^{-1}(u_{j+m})\|^{1/j}=$$
$$=\limsup_{j\to\infty}\binom{j+m}{m}^{1/j}\|u_{j+m}\|^{1/j}=\limsup_{j\to\infty}\|u_{j+m}\|^{1/j}=\limsup_{j\to\infty}\|u_j\|^{1/j}=\frac{1}{R},$$

hiszen a **4**. gyakorlat szerint

$$\lim_{j\to\infty}\binom{j+m}{m}^{1/j}=1,$$

és minden $\mathbb{N}\ni j$-re a $\pi_{j,m}:\mathscr{L}_j(E;\mathscr{L}_m(E;F))\to\mathscr{L}_{j+m}(E;F)$ kanonikus bijekció izometria a multilineáris operátornormák szerint.

Ezzel igazoltuk, hogy minden $\mathbb{N}\ni m$-re a $(\mathrm{D}^m f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon. A 6.3.2. állítás alapján ebből kapjuk, hogy az $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ függvény végtelenszer differenciálható a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon, és minden $\mathbb{N}\ni m$-re

$$\mathrm{D}^m f=\lim_{n\to\infty}\mathrm{D}^m f_n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{D}^m f_{n+m}=m!\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{j+m}{m}\Big(\pi_{j,m}^{-1}(u_{j+m})\Big)\circ(\mathrm{id}_E-\mathfrak{a})^{[j]}.$$

Ebből látható, hogy $R>0$ esetén minden $\mathbb{N}\ni m$-re

$$(\mathrm{D}^m f)(\mathfrak{a})=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{D}^m f_{n+m})(\mathfrak{a})=m!\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{j+m}{m}\Big(\pi_{j,m}^{-1}(u_{j+m})\Big)((0)^{[j]})=$$
$$=m!\lim_{n\to\infty}\Big(\pi_{0,m}^{-1}(u_m)\Big)\circ(0)^{[0]}=m!u_m,$$

tehát fennáll az

$$u_m=\frac{1}{m!}(\mathrm{D}^m f)(\mathfrak{a})$$

egyenlőség. ■

10.2.2. Következmény. *Legyen E normált tér, F Banach-tér, $\mathfrak{a}\in E$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{L}_k^s(E;F)$,*

$$f:=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\circ(\mathrm{id}_E-\mathfrak{a})^{[k]},$$

és jelölje R a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}u_k\circ(\mathrm{id}_E-\mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugarát. Ha $R>0$, akkor

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}u_k\circ(\mathrm{id}_E-\mathfrak{a})^{[k]}=\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f).$$

Bizonyítás. Az előző állításból nyilvánvalóan következik, hiszen minden $\mathbb{N}\ni k$-ra

$$u_k=\frac{1}{k!}(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}),$$

ezért

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}u_k\circ(\mathrm{id}_E-\mathfrak{a})^{[k]}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})\circ(\mathrm{id}_E-\mathfrak{a})^{[k]}=\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$$

teljesül. ■

10.2.3. Következmény. (Hatványfüggvény-sor együtthatóinak egyértelműsége) *Legyen E normált tér, F Banach-tér, $\mathfrak{a} \in E$, és $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}, (u'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}^s_k(E;F)$ olyan rendszerek, amelyekhez létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy r kisebb-egyenlő a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ és $\sum_{k\in\mathbb{N}} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sorok Cauchy-féle konvergencia-sugaránál, és*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]} = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

teljesül a $\mathrm{B}_r(a)$ nyílt gömbön. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $u_k = u'_k$.

Bizonyítás. Vezessük be az

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}, \quad f' := \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

függvényeket. A hipotézis szerint $f = f'$ a $\mathrm{B}_r(a)$ nyílt gömbön, ezért a magasabb rendű differenciálhatóság lokalitása és az előző állítás miatt minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$k!u_k = (\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}^k f')(\mathfrak{a}) = k!u'_k$$

teljesül. ■

10.3. Analitikus függvények

10.3.1. Definíció. *Legyen E normált tér, F Banach-tér és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény* **analitikus az $\mathfrak{a} \in E$ pontban**, *ha létezik olyan $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}^s_k(E;F)$ rendszer, és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete E-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és U részhalmaza a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sor abszolútkonvergencia-tartományának, és*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

az U halmazon. Azt mondjuk, hogy az f függvény **analitikus**, *ha f a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz minden pontjában analitikus. Ha $U \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor az $U \to F$ analitikus függvények halmazát $\mathrm{C}^\omega(U;F)$ jelöli.*

Nyilvánvaló, hogy ha E normált tér, F Banach-tér, és $U \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor az $U \to F$ analitikus függvények $\mathrm{C}^\omega(U;F)$ halmaza lineáris altere az $\mathscr{F}(U;F)$ függvénytérnek.

10.3.2. Következmény. *Normált térben értelmezett, Banach-térbe ható analitikus függvény végtelenszer differenciálható, és mindegyik deriváltfüggvénye analitikus.*

Bizonyítás. Legyen E normált tér, F Banach-tér, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, melyben f analitikus. Legyen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}^s_k(E;F)$ olyan rendszer és

U olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és U részhalmaza a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ hatványfüggvény-sor abszolútkonvergencia-tartományának, és

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

az U halmazon. Ekkor van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U$, így a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugara nagyobb 0-nál, tehát a hatványfüggvény-sor összegfüggvényének simaságáról szóló tétel szerint az f függvény végtelenszer differenciálható a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömbön, hiszen ez részhalmaza a szóban forgó hatványfüggvény-sor abszolútkonvergencia-tartományának. Ugyanakkor, a hatványfüggvény-sor összegfüggvényének simaságáról szóló tétel *bizonyítása* szerint minden $\mathbb{N} \ni m$-re

$$\mathrm{D}^m f = m! \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+m}{m} \left(\pi_{j,m}^{-1}(u_{j+m})\right) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[j]},$$

és ott láttuk, hogy a

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \binom{j+m}{m} \left(\pi_{j,m}^{-1}(u_{j+m})\right) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[j]}$$

hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugara megegyezik a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugarával. Ezért minden $m \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathrm{D}^m f$ függvény szintén analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

10.3.3. Állítás. *Legyen E normált tér, F Banach-tér, és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Az f függvény pontosan akkor analitikus az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, ha f az $\mathfrak{a}$-ban végtelenszer differenciálható, és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete E-ben, hogy U részhalmaza a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ Taylor-sor abszolútkonvergencia-tartományának, és*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

teljesül az U halmazon, vagyis f egyenlő a saját $\mathfrak{a}$ pontbeli Taylor-sorának összegfüggvényével az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén.

Bizonyítás. Az előző következmények alapján nyilvánvaló. ■

10.4. Analitikus függvények lokális tulajdonságai

A definícióból és a fentiekből következik, hogy ha egy függvény analitikus valamely pontban, akkor a pontnak van olyan környezete, amelyen a függvény *végtelenszer differenciálható*. Valójában még ennél is többet fogunk igazolni. Megmutatjuk, hogy egy pontban analitikus függvény a pont valamely környezetének minden pontjában analitikus. Ez a tényt úgy lehet értékelni, hogy az analitikusság a legerősebb differenciálhatósági feltétel. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára.

10.4.1. Lemma. (Diszkrét Lebesgue–Fubini-tétel) *Tegyük fel, hogy F Banach-tér és $(z_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ olyan F-ben haladó rendszer (ún. kettős sorozat), amelyre:*

a) *minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum_{j\in\mathbb{N}} z_{j,k}$ sor abszolút konvergens F-ben;*

b) *a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|z_{j,k}\|\Big)$ számsor konvergens $\mathbb{R}$-ben.*

Ekkor minden $j \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum_{k\in\mathbb{N}} z_{j,k}$ sor abszolút konvergens F-ben, továbbá a $\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|z_{j,k}\|\Big)$ számsor konvergens $\mathbb{R}$-ben, valamint a

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k}\Big), \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k}\Big)$$

sorok abszolút konvergensek F-ben, és fennáll a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k}\Big)$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Az F normált tér teljessége és a) alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum_{j\in\mathbb{N}} z_{j,k}$ sor konvergens is F-ben, és fennáll a

$$\Big\|\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k}\Big\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|z_{j,k}\|$$

egyenlőtlenség. Ebből a majoráns kritérium alkalmazásával kapjuk, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k}\Big)$ sor abszolút konvergens (így konvergens is) F-ben, mert b) alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|z_{j,k}\|\Big)$ számsor konvergens, így a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big\|\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k}\Big\|$ számsor is konvergens. Ezért tekinthetjük a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k}\Big)$$

vektort F-ben.

Továbbá, ha $m, n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \|z_{j,k}\|\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sum_{j=0}^{m-1} \|z_{j,k}\|\Big) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|z_{j,k}\|\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|z_{j,k}\|\Big) < +\infty,$$

ezért $j \in \mathbb{N}$ esetén minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|z_{j,k}\| \leq \sum_{i=0}^{(j+1)-1} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \|z_{i,k}\|\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \|z_{i,k}\|\Big) < +\infty,$$

tehát minden $j \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|z_{j,k}\|$ számsor konvergens, vagyis a $\sum_{k\in\mathbb{N}} z_{j,k}$ sor abszolút konvergens F-ben, így konvergens is.

Ha $m \in \mathbb{N}^*$, akkor az előzőek alapján

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} \Big\| \le \sum_{j=0}^{m-1} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|z_{j,k}\| \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{m-1} \|z_{j,k}\| \Big) \le \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|z_{j,k}\| \Big) < +\infty,$$

tehát a $\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} \Big\|$ számsor konvergens, vagyis a $\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} \Big)$ sor abszolút konvergens F-ben, így konvergens is. Ezért tekinthetjük a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} \Big)$$

vektort F-ben, és azt is látjuk, hogy a $\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|z_{j,k}\| \Big)$ számsor konvergens.

Hátra van még annak bizonyítása, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k} \Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} \Big).$$

Ehhez legyen $n \in \mathbb{N}^*$ rögzítve. Ekkor

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k} \Big) - \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} \Big) \Big\| &= \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k} \Big) - \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n-1} z_{j,k} \Big) \Big\| = \\ = \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=n}^{\infty} z_{j,k} \Big) \Big\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=n}^{\infty} \|z_{j,k}\| \Big) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \Big(\sum_{j=n}^{\infty} \|z_{j,k}\| \Big) = \\ = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_{j,k}\| \Big) &\le \sum_{j=n}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|z_{j,k}\| \Big) =: R_n. \end{aligned}$$

Világos, hogy $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, hiszen a $\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|z_{j,k}\| \Big)$ számsor konvergens, és R_n megegyezik e konvergens sor n-edik maradéktagjával. Ezért

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} \Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k} \Big),$$

amit bizonyítani kellett. ■

Az előző lemmát azért nevezzük *diszkrét Lebesgue–Fubini-tételnek*, mert látni fogjuk, hogy ez az integrálelméleti Lebesgue–Fubini-tételnek (**INT** 31.2.1.) és Lebesgue-Fubini–Fatou-tételnek (**INT** 32.4.2) nyilvánvaló következménye, ha azokat speciális *diszkrét mértékek* szerinti integrálokra alkalmazzuk.

A következő állítás a polinomiális függvények (algebrailag triviálisan bizonyítható) átrendezési tételének (**MET** 8.4.2.) általánosítása hatványfüggvény-sorokra.

10.4.2. Tétel. (Hatványfüggvény-sor átrendezési tétele) *Legyen E normált tér, F Banach-tér, $\mathfrak{a} \in E$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k^s(E;F)$, és jelölje R a*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugarát. Tegyük fel, hogy $R > 0$, és legyen $\mathfrak{a}' \in \mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ rögzített pont. Ekkor minden $j \in \mathbb{N}$ és $z \in E^j$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq j} \binom{k}{j} u_k\big((z, (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]})\big)$$

sor abszolút konvergens az F Banach-térben, ahol minden $k \geq j$ természetes számra $\big(z, (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]}\big) \in E^k$ az az elem, amelyre minden $i \in j$ esetén az i-edik komponense z_i, míg a többi komponense egyenlő az $\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}$ vektorral (vagyis

$$u_k\big((z, (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]})\big) = \Big(\Big(\pi_{j,k-j}^{-1}(u_k)\Big)(z)\Big)((\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]}),$$

ahol $\pi_{j,k-j}$ az $\mathscr{L}_j(E;\mathscr{L}_{k-j}(E;F)) \to \mathscr{L}_k(E;F)$ a kanonikus bijekció.) Továbbá, minden $j \in \mathbb{N}$ esetén az

$$u'_j : E^j \to F; \quad z \mapsto \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} u_k\big((z, (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]})\big)$$

leképezés folytonos szimmetrikus multilineáris operátor, és a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}')^{[k]}$$

hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő $R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|$-nál, valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]} = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}')^{[k]}$$

teljesül a $\mathrm{B}_{R-\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|}(\mathfrak{a}')$ halmazon.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden $j \in \mathbb{N}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq j} \binom{k}{j} \|u_k\| \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|^{k-j}$$

számsor konvergens. A Cauchy-féle gyökkritérium alapján ehhez elég azt igazolni, hogy $j \in \mathbb{N}$ esetén

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\binom{k}{j} \|u_k\| \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|^{k-j}\right)^{1/k} < 1.$$

Ez azért igaz, mert $j \in \mathbb{N}$ esetén a **4**. gyakorlat szerint

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k}{j}^{1/k} = 1,$$

valamint **NUM** 3.12.4. szerint

$$\lim_{k\to\infty}\left(\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|^{k-j}\right)^{1/k}=\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|,$$

továbbá

$$\limsup_{k\to\infty}\|u_k\|^{1/k}=\frac{1}{R},$$

(ami egyenlő 0-val, ha $R=+\infty$), következésképpen

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\binom{k}{j}\|u_k\|\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|^{k-j}\right)^{1/k}=\frac{\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|}{R}<1,$$

hiszen a feltevés alapján $\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|<R$ (és persze alkalmaznunk kell a **NUM** 3.12.3. állításban megfogalmazott tényeket a lim sup operációval kapcsolatban).

Megmutatjuk, hogy $j\in\mathbb{N}$ és $z\in E^j$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq j}\binom{k}{j}u_k\big((z,(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]})\big)$$

sor abszolút konvergens az F Banach-térben, ahol minden $k\geq j$ természetes számra $\big(z,(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]}\big)\in E^k$ az az elem, amelyre minden $i\in j$ esetén az i-edik komponense z_i, míg a többi komponense egyenlő az $\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}$ vektorral. (Megjegyezzük, hogy

$$u_k\big((z,(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]})\big):=\Big(\big(\pi_{j,k-j}^{-1}(u_k)\big)(z)\Big)\big((\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]}\big)$$

is írható, ahol $\pi_{j,k-j}$ az $\mathscr{L}_j(E;\mathscr{L}_{k-j}(E;F))\to\mathscr{L}_k(E;F)$ a kanonikus bijekció.) Valóban, legyen $j\in\mathbb{N}$ és $z\in E^j$ rögzített; ekkor minden $k\geq j$ természetes számra

$$\|u_k\big((z,(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]})\big)\|\leq\|u_k\|\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|^{k-j}\prod_{i\in j}\|z_i\|,$$

ezért a bizonyítás első bekezdése és a majoráns kritérium alapján a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq j}\binom{k}{j}u_k\big((z,(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]})\big)$$

sor abszolút konvergens az F Banach-térben, valamint látható, hogy

$$\Big\|\sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}u_k\big((z,(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]})\big)\Big\|\leq\Big(\sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}\|u_k\|\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|^{k-j}\Big)\prod_{i\in j}\|z_i\|$$

is teljesül.

Tehát minden $j\in\mathbb{N}$ esetén jól értelmezett az

$$u_j':E^j\to F;\quad z\mapsto\sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}u_k\big((z,(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]})\big)$$

függvény; amelyről könnyen látható, hogy multilineáris operátor, és az előző egyenlőtlenség alapján folytonos is (vagyis eleme $\mathscr{L}_j(E;F)$-nek), és

$$\|u_j'\|\leq\sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}\|u_k\|\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|^{k-j}.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy az $(u'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ rendszer olyan, amelynek a létezését állítottuk.

Ehhez először megjegyezzük, hogy minden $j \in \mathbb{N}$ esetén az $u'_j : E^j \to F$ függvény *szimmetrikus*, hiszen ha $(z_i)_{i\in j} \in E^j$ és $\sigma \in \mathbf{S}_j$ (vagyis σ a j halmaz permutációja), akkor

$$u'_j((z_{\sigma(i)})_{i\in j}) := \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} u_k\big(\big((z_{\sigma(i)})_{i\in j}, (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]}\big)\big) =$$
$$= \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} u_k\big(\big((z_i)_{i\in j}, (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]}\big)\big) =: u'_j((z_i)_{i\in j})$$

mert minden $k \geq j$ természetes számra az $u_k : E^k \to F$ függvény szimmetrikussága folytán

$$u_k\big(\big((z_{\sigma(i)})_{i\in j}, (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]}\big)\big) = u_k\big(\big((z_i)_{i\in j}, (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]}\big)\big),$$

hiszen a $\big((z_{\sigma(i)})_{i\in j}, (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]}\big) \in E^k$ rendszer a $\big((z_i)_{i\in j}, (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{[k-j]}\big) \in E^k$ rendszerből azzal a $\sigma_k \in \mathbf{S}_k$ permutációval nyerhető, amelyre $i \in j$ esetén $\sigma_k(i) := \sigma(i)$ és $j \leq i < k$ esetén $\sigma_k(i) := i$ (vagyis σ_k a σ függvény identikus kiterjesztése j-ről k-ra).

Megmutatjuk, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}')^{[k]}$$

hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő $R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|$-nál, vagyis

$$\limsup_{j\to\infty} \|u'_j\|^{1/j} \leq \frac{1}{R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|}.$$

Ha $R < +\infty$, akkor ehhez elég azt igazolni, hogy

$$\limsup_{j\to\infty} \Big(\|u'_j\|(R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|)^j\Big)^{1/j} \leq 1$$

A **NUM** 4.3.6. állítást alkalmazva az $r := 1$ számra kapjuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha minden $t \in]0,1[$ valós számra a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \|u'_j\|(R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|)^j t^j$ számsor konvergens.

Legyen tehát $t \in]0,1[$ rögzített valós szám, és minden $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ esetén

$$c_{j,k}(t) := \binom{k}{j} \|u_k\|(R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|)^j t^j \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|^{k-j},$$

ha $j \leq k$; és $c_{j,k}(t) := 0$, ha $j > k$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_{j,k}(t)$ pozitív tagú sor konvergens, és a binomiális tétel alapján nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{j,k}(t) = \sum_{j=0}^{k} c_{j,k}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \|u_k\|(R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|)^j t^j \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|^{k-j} =$$
$$= \|u_k\|\Big(\|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\| + t(R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|)\Big)^k.$$

A $t \in]0,1[$ feltétel miatt $\|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\| + t(R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|) \in]\|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|, R[$, így az R szám definíciója és a valós hatványfüggvény-sorokra vonatkozó Cauchy–Hadamard-tétel szerint a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_{j,k}(t)\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|\Big(\|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\| + t(R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|)\Big)^k$$

pozitív tagú sor konvergens. Most alkalmazzuk a diszkrét Lebesgue-Fubibi-tételt a $(c_{j,k}(t))_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kettős sorozatra. Azt kapjuk, hogy minden $j \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_{j,k}(t)$ számsor konvergens, és a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{j,k}(t)\Big)$ pozitív tagú sor is konvergens. Nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k}(t)\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \|u_k\|(R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|)^j t^j \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|^{k-j}\Big) =$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \|u_k\| \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|^{k-j}\Big)(R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|)^j t^j,$$

és minden $j \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|u'_j\| \leq \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \|u_k\| \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|^{k-j},$$

ezért a majoráns kritérium alapján a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \|u'_j\|(R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|)^j t^j$ számsor konvergens; és ezt akartuk bizonyítani.

Ha $R = +\infty$, akkor a

$$\limsup_{j\to\infty} \|u'_j\|^{1/j} = 0.$$

egyenlőség bizonyításához **NUM** 4.3.6. alapján elég azt megmutatni, hogy *minden* $t > 0$ valós számra a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \|u'_j\| t^j$ számsor konvergens. Ehhez ugyanazt kell tennünk, mint az imént, de most rögzített $t \in \mathbb{R}_+^*$ esetén minden $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ párra:

$$c_{j,k}(t) := \binom{k}{j} \|u_k\| t^j \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|^{k-j},$$

ha $j \leq k$ és $c_{j,k}(t) := 0$, ha $j > k$. Ezután a diszkrét Lebesgue–Fubini-tételt alkalmazhatjuk a $(c_{j,k}(t))_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kettős sorozatra, hiszen $R = +\infty$ miatt $\limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|^{1/k} = 0$, így minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_{j,k}(t)\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| \Big(\|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\| + t\Big)^k$$

számsor konvergens. Arra az eredményre jutunk, hogy minden $j \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_{j,k}(t)$ számsor konvergens, és a

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k}(t)\Big)$$

pozitív tagú sor is konvergens. Ugyanakkor

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k}(t)\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \|u_k\| t^j \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|^{k-j}\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \|u_k\| (\|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|)^{k-j}\Big) t^j,$$

amiből ismét a majoráns kritérium alapján következik, hogy a $\sum_{j\in\mathbb{N}} \|u'_j\| t^j$ számsor konvergens. Ezért $\limsup_{j\to\infty} \|u'_j\|^{1/j} = 0$ teljesül.

Ezzel megmutattuk, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}')^{[k]}$ hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő az $R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|$ számnál. Azt kell még igazolni, hogy a $\mathrm{B}_{R-\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|}(\mathfrak{a}')$ halmazon

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]} = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}')^{[k]}$$

teljesül. Ehhez legyen $x \in \mathrm{B}_{R-\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|}(\mathfrak{a}')$ rögzített pont, és minden $(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ esetén

$$z_{j,k}(x) := \binom{k}{j} u_k\big(((x-\mathfrak{a}')^{[j]}, (\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]})\big),$$

ha $j \le k$, és $z_{j,k}(x) := 0$, ha $j > k$. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum_{j\in\mathbb{N}} z_{j,k}(x)$ sor abszolút konvergens F-ben és

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_k\Big(\big((x-\mathfrak{a}')^{[j]}, (\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]}\big)\Big) \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} u_k\Big(((x-\mathfrak{a}') + (\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}))^{[k]}\Big) = u_k\Big((x-\mathfrak{a})^{[k]}\Big),$$

ahol a $\overset{(*)}{=}$ egyenlőségnél az **ALG** 10.3.4. állítást alkalmaztuk. A definíció alapján világos, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|z_{j,k}(x)\| = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Big\| u_k\Big(\big((x-\mathfrak{a}')^{[j]}, (\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]}\big)\Big)\Big\| \le$$
$$\le \|u_k\| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \|x-\mathfrak{a}'\|^{k-j} \|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|^j = \|u_k\| (\|x-\mathfrak{a}'\| + \|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|)^k,$$

és $\|x-\mathfrak{a}'\| + \|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\| < R$ miatt a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|(\|x-\mathfrak{a}'\| + \|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|)^k$ számsor konvergens, ezért a majoráns kritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|z_{j,k}(x)\|\Big)$ számsor is konvergens. Ezért alkalmazhatjuk a diszkrét Lebesgue–Fubini-tételt a $(z_{j,k}(x))_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kettős sorozatra. Azt kapjuk, hogy minden $j \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum_{k\in\mathbb{N}} z_{j,k}(x)$ sor abszolút konvergens F-ben, és a $\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k}(x)\Big)$ sor is abszolút konvergens F-ben, valamint fennállnak a

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k((x-\mathfrak{a})^{[k]}) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k}(x)\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k}(x)\Big) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} u_k\Big(\big((x-\mathfrak{a}')^{[j]}, (\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]}\big)\Big)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} u'_j((x-\mathfrak{a}')^{[j]})$$

egyenlőségek. ■

10.4.3. Tétel. *Ha E normált tér, F Banach-tér, és $f : E \rightarrowtail F$ függvény, akkor az*

$$\{\ \mathfrak{a} \in E \mid \text{"}f \text{ analitikus az } \mathfrak{a} \text{ pontban"}\ \}$$

halmaz nyílt E-ben.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban, és vegyünk olyan $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k^s(E;F)$ rendszert, valamint $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy r kisebb, mint a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

hatványfüggvény-sor R Cauchy-féle konvergencia-sugara, és $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, valamint

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömbön. A hatványfüggvény-sorok átrendezési tétele szerint $\mathfrak{a}' \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ esetén van olyan $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k^s(E;F)$ rendszer, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}')^{[k]}$$

hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő $R - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|$-nál, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}')^{[k]} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

teljesül a $\mathrm{B}_{R-\|\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\|}(\mathfrak{a}')$ halmazon, tehát minden $0 < \varrho < r - \|\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}\|$ valós számra

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a}')^{[k]}$$

a $\mathrm{B}_\varrho(\mathfrak{a}') \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ halmazon. Ez azt jelenti, hogy f az $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ gömb minden pontjában analitikus. ■

Tehát egy pontban analitikus függvény a pont valamely környezetének minden pontjában analitikus.

Eddig a valós és a komplex normált terek között ható analitikus függvények problémáját egyszerre tárgyaltuk, mert csak olyan jelenségeket vizsgáltunk, amelyek ugyanúgy érvényesek valós analitikus függvényekre, mint komplex analitikusakra. Azonban lényeges különbségek vannak a valós analitikus és a komplex analitikus függvények bizonyos, itt nem érintett tulajdonságai között. Az analízis holomorf függvényekkel foglalkozó részében (**HOL**) látni fogjuk, hogy egy komplex differenciálható függvény szükségképpen analitikus (**HOL** 5.2.1. és 6.1.2.), ugyanakkor még egy végtelenszer differenciálható valós függvény sem szükségképpen analitikus (**3**. gyakorlat). Továbbá, léteznek nem állandó, *korlátos* valós analitikus függvények (például sin és a cos), de ilyen tulajdonságú, $\mathbb{C}$-n értelmezett, komplex Banach-térbe érkező komplex analitikus függvény nem létezik (**HOL** 5.7.2.).

10.5. Példák analitikus függvényekre

1) Ha E és F normált terek, $\mathfrak{a} \in E$, $N \in \mathbb{N}^*$ és $(u_k)_{k\in N} \in \prod\limits_{k\in N} \mathscr{L}_k(E;F)$, akkor az

$$f := \sum_{k=0}^{N} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]} : E \to F$$

polinomiális függvény analitikus, hiszen minden $x, \mathfrak{a}' \in E$ esetén

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} u_k \left((x-\mathfrak{a})^{[k]}\right) = \sum_{k=0}^{N} u_k \left((x-\mathfrak{a}') + (\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}))^{[k]}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} u_k \left((x-\mathfrak{a}')^{[k]} + (\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k]}\right) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{H\subseteq k} u_k(\boldsymbol{(}x-\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\boldsymbol{)}_H) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} \sum_{H\subseteq k;\ \mathrm{Card}(H)=j} u_k(\boldsymbol{(}x-\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'-\mathfrak{a}\boldsymbol{)}_H) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\pi^{-1}_{k-j,j}(u_k)\right) \left((\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]}\right) \left((x-\mathfrak{a}')^{[j]}\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=j}^{N} \binom{k}{j} \left(\pi^{-1}_{k-j,j}(u_k)\right) \left((\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]}\right) \left((x-\mathfrak{a}')^{[j]}\right) = \sum_{j=0}^{N} u'_j \left((x-\mathfrak{a}')^{[j]}\right),$$

ahol minden $j \le N$ természetes számra

$$u'_j := \sum_{k=j}^{N} \binom{k}{j} \left(\pi^{-1}_{k-j,j}(u_k)\right) \left((\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{[k-j]}\right)$$

teljesül. Ez világosan mutatja, hogy az f polinomiális függvény függvény analitikus minden $\mathfrak{a}' \in E$ pontban.

2) Minden hatványfüggvény-sor összegfüggvénye az abszolútkonvergencia-tartományon analitikus. Ez a kijelentés *ekvivalens* a hatványfüggvény-sor átrendezési tételével.

3) A valós és komplex exponenciális, trigonometrikus és hiperbolikus függvények analitikusak. A valós logaritmus-függvény is analitikus (**12**. gyakorlat).

10.6. Az operátorinverzió analitikussága

Emlékeztetünk arra, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathfrak{S}_n$ jelöli a $n \to n$ bijekciók halmazát, amelyet a függvénykompozíció művelettel ellátva csoportként kezelünk.

Továbbá, ha E és F normált terek, akkor $\mathrm{Iso}(E;F)$ jelöli az $E \to F$ lineáris homeomorfizmusok részhalmazát $\mathscr{L}(E;F)$-ben. Speciálisan, ha E normált tér, akkor $\mathscr{GL}(E) := \mathrm{Iso}(E;E)$.

10.6.1. Tétel. *Ha E Banach-tér és F normált tér, akkor az*

$$f : \mathrm{Iso}(E;F) \to \mathscr{L}(F;E); \quad u \mapsto u^{-1}$$

operátorinverzió *analitikus függvény, és minden* $u \in \operatorname{Iso}(E;F)$ *esetén, ha* $n \in \mathbb{N}^*$ *és* $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{L}(E;F))^n$*, akkor*

$$((\mathrm{D}^n f)(u))\,((v_i)_{i\in n}) = (-1)^n \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \Big(\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n-1} \big(u^{-1}\circ v_{\sigma(i)}\big)\Big)\circ u^{-1}.$$

Megjegyzés. *Az operátorinverzió* n*-edik deriváltjára vonatkozó formulában rendezett véges műveletről van szó az* $(\mathscr{L}(E;E),\circ)$ *félcsoportban* (**ENS** 4.3.3. Definíció)*. A jobb oldalon álló kifejezést a könnyebb megjegyezhetőség kedvéért, tehát mnemotechnikai okból a következő formában is felírhatjuk:*

$$(-1)^n \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} u^{-1}\circ v_{\sigma(0)}\circ u^{-1}\circ\ldots\circ u^{-1}\circ v_{\sigma(n-1)}\circ u^{-1}.$$

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy **LIN** 1.8.3. alapján az $E\to F$ lineáris homeomorfizmusok $\operatorname{Iso}(E;F)$ halmaza nyílt $\mathscr{L}(E;F)$-ben az operátornorma szerint. Legyen $u\in\operatorname{Iso}(E;F)$, és $v\in\mathscr{L}(E;F)$ olyan operátor, amelyre $\|u^{-1}\|\|v\|<1$. Ekkor $u+v\in\operatorname{Iso}(E;F)=\operatorname{Dom}(f)$ **LIN** (1.8.2.), és $\|u^{-1}\circ v\|\le\|u^{-1}\|\|v\|<1$ miatt a Carl Neumann-sorok konvergenciájára vonatkozó tétel **LIN** (1.8.1.) szerint $\mathrm{id}_E-(-u^{-1}\circ v))\in\mathscr{GL}(E)$, továbbá

$$f(u+v)=(u+v)^{-1}=\big(u\circ(\mathrm{id}_E-(-u^{-1}\circ v))\big)^{-1}=\big(\mathrm{id}_E-(-u^{-1}\circ v)\big)^{-1}\circ u^{-1}=$$
$$=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-u^{-1}\circ v)^n\Big)\circ u^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\big(u^{-1}\circ v\big)^n\circ u^{-1}.$$

Értelmezzük most minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén az

$$\mathfrak{m}_{u,n}:\mathscr{L}(E;F)^n\to\mathscr{L}(F;E);\quad (v_i)_{i\in n}\mapsto\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n-1}\big(u^{-1}\circ v_{\sigma(i)}\big)\Big)\circ u^{-1}$$

leképezést, és legyen $\mathfrak{m}_{u,0}:=u^{-1}\in\mathscr{L}(F;E)$.

Megmutatjuk, hogy minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén az $\mathfrak{m}_{u,n}:\mathscr{L}(E;F)^n\to\mathscr{L}(F;E)$ leképezés multilineáris operátor. Ehhez legyen $n\in\mathbb{N}$ rögzítve. Először megállapítjuk, hogy az

$$U:\mathscr{L}(E;E)^n\to\mathscr{L}(E;E);\quad (u_i)_{i\in n}\mapsto\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n-1}u_i$$

leképezés **ALG** 12.2.2. alapján multilineáris operátor. Továbbá, a

$$V:\mathscr{L}(E;F)\to\mathscr{L}(E;E);\quad v\mapsto u^{-1}\circ v,$$
$$W:\mathscr{L}(E;E)\to\mathscr{L}(F;E);\quad v\mapsto v\circ u^{-1}$$

leképezések nyilvánvalóan lineáris operátorok, ezért **ALG** 10.1.3. alapján a

$$W\circ U\circ(\overset{n}{\times}V):\mathscr{L}(E;F)^n\to\mathscr{L}(F;E);\quad (v_i)_{i\in I}\mapsto\Big(\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n-1}\big(u^{-1}\circ v_i\big)\Big)\circ u^{-1}$$

leképezés multilineáris operátor. Ebből **ALG** 10.6.2. a) alapján következik, hogy minden $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ esetén az

$$\mathscr{L}(E;F)^n\to\mathscr{L}(F;E);\quad (v_i)_{i\in I}\mapsto\Big(\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n-1}\big(u^{-1}\circ v_{\sigma(i)}\big)\Big)\circ u^{-1}$$

leképezés is multilineáris operátor, ezért az $\mathfrak{m}_{u,n} : \mathscr{L}(E;F)^n \to \mathscr{L}(F;E)$ leképezés multilineáris operátor, hiszen egyenlő multilineáris operátorok lineáris kombinációjával.

Nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\mathfrak{m}_{u,n}$ *szimmetrikus* multilineáris operátor, mert minden $\tau \in \mathfrak{S}_n$ és $(v_i)_{i\in n} \in \mathscr{L}(E;F)^n$ esetén

$$\mathfrak{m}_{u,n}\left((v_{\tau(i)})_{i\in n}\right) = (-1)^n \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n-1}\left(u^{-1}\circ v_{\tau(\sigma(i))}\right)\right)\circ u^{-1} =$$

$$= (-1)^n \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n-1}\left(u^{-1}\circ v_{(\tau\circ\sigma)(i)}\right)\right)\circ u^{-1} = (-1)^n \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n-1}\left(u^{-1}\circ v_{\sigma(i)}\right)\right)\circ u^{-1} =$$

$$= \mathfrak{m}_{u,n}\left((v_i)_{i\in n}\right),$$

ugyanis az $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n;\ \sigma \mapsto \tau\circ\sigma$ leképezés bijekció, így alkalmazható az összeadás általános kommutativitásának tétele (**ENS** 4.6.1.).

Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az $\mathfrak{m}_{u,n} : \mathscr{L}(E;F)^n \to \mathscr{L}(F;E)$ multilineáris operátor folytonos az operátornormák szerint. Ehhez legyen $n \in \mathbb{N}^*$ rögzítve. Ekkor minden $(v_i)_{i\in n} \in \mathscr{L}(E;F)^n$ rendszerre

$$\|\mathfrak{m}_{u,n}((v_i)_{i\in n})\| \le \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left\|\left(\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n-1}\left(u^{-1}\circ v_{\sigma(i)}\right)\right)\circ u^{-1}\right\| \le \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left\|\mathop{\bigcirc}_{i=0}^{n-1}\left(u^{-1}\circ v_{\sigma(i)}\right)\right\|\|u^{-1}\| \overset{(*)}{\le}$$

$$\overset{(*)}{\le} \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\|u^{-1}\circ v_{\sigma(i)}\|\right)\|u^{-1}\| \le \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\|u^{-1}\|\|v_{\sigma(i)}\|\right)\|u^{-1}\| =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\|u^{-1}\|^{n+1}\prod_{i\in n}\|v_{\sigma(i)}\| = \|u^{-1}\|^{n+1}\prod_{i\in n}\|v_i\|,$$

ahol az $\overset{(*)}{\le}$ egyenlőtlenségnél a **LIN** 1.3.6. állítást alkalmaztuk. Ebből az is látszik, hogy $\|\mathfrak{m}_{u,n}\| \le \|u^{-1}\|^{n+1}$, így $\limsup\limits_{n\to\infty}\|\mathfrak{m}_{u,n}\|^{1/n} \le \|u^{-1}\|$. Nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén minden $v \in \mathscr{L}(E;F)$ operátorra

$$\mathfrak{m}_{u,n}(v^{[n]}) = (-1)^n(u^{-1}\circ v)^n\circ u^{-1}.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{m}_{u,n}\circ(\mathrm{id}_E - u)^{[n]}$$

hatványfüggvénysor az u középpontú, $1/\|u^{-1}\|$ sugarú nyílt gömbön konvergens, és az összegfüggvénye egyenlő f-fel ezen a halmazon. Továbbá, a hatványfüggvény-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő $1/\|u^{-1}\|$-nál, ezért f az u pontban analitikus, és

$$\mathbf{T}_u(f) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}_{u,n}\circ(\mathrm{id}_E - u)^{[n]}$$

miatt, a hatványfüggvény-sorok együtthatóinak egyértelműségi tétele (10.2.3.) alapján minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $(\mathrm{D}^n f)(u) = n!\mathfrak{m}_{u,n}$ teljesül. ■

10.7. Gyakorlatok

1. Ha E és F normált terek, valamint $n \in \mathbb{N}$, akkor minden $u \in \mathscr{L}_n(E;F)$ esetén legyen

$$\|u\|_* = \sup_{x\in E;\ \|x\|\le 1}\|u(x^{[n]})\|.$$

Tudjuk, hogy az $\mathscr{L}_n(E;F) \to \mathbb{R}_+;\ u \mapsto \|u\|_*$ leképezés olyan norma $\mathscr{L}_n(E;F)$ felett, hogy minden $u \in \mathscr{L}_n(E;F)$ esetén teljesülnek az

$$\|u\|_* \leq \|u\| \leq \frac{(2n)^n}{n!}\|u\|_*$$

egyenlőtlenségek (VI. fejezet, 2. pont, **14**. gyakorlat). Tegyük fel, hogy $\mathfrak{a} \in E$, és $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k^s(E^k;F)$. A

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

hatványfüggvénysor R Cauchy-féle konvergenciasugara mellett értelmezzük a következő elemet $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban:

$$R_* := \begin{cases} 1/\limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_*^{1/k} & ,\ \text{ha } 0 < \limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_*^{1/k} < +\infty \\ 0 & ,\ \text{ha } \limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_*^{1/k} = +\infty \\ +\infty & ,\ \text{ha } \limsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_*^{1/k} = 0. \end{cases}$$

Ekkor teljesülnek az

$$\frac{1}{2e}R_* \leq R \leq R_*$$

egyenlőtlenségek, továbbá a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$$

hatványfüggvény-sor

- a $\mathrm{B}_{R_*}(\mathfrak{a})$ halmazon pontonként abszolút konvergens;
- minden $r \in [0, R_*[$ valós számra a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ gömbön normálisan konvergens;
- ha F teljes, akkor a $\mathrm{B}_{R_*}(\mathfrak{a})$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.

(Figyeljük meg, hogy $\dim(E) > 1$ esetén ez az állítás határozottan erősebb, mint a Cauchy–Hadamard-tétel. Megjegyezzük, hogy bebizonyítható az itt felírt egyenlőtlenségnél finomabb $(1/e)R_* \leq R$ reláció is.)

2. Igaz-e a hatványsor összegfüggvényének simaságára vonatkozó állítás olyan "hatványfüggvény-sorokra", amelyek együtthatói nem mind szimmetrikusak? Hogyan kell módosítani az állítást ahhoz, hogy igaz maradjon ilyen általánosabb "hatványfüggvény-sorokra"?

(*Útmutatás.* Az állításban lényeges az együtthatók szimmetrikussága. E nélkül a következő kijelentést lehet könnyen igazolni. Legyen E normált tér, F Banach-tér, $\mathfrak{a} \in E$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_k(E;F)$,

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]},$$

és jelölje R a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circ (\mathrm{id}_E - \mathfrak{a})^{[k]}$ "hatványfüggvény-sor" Cauchy-féle konvergencia-sugarát. Ekkor f végtelenszer differenciálható a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ halmazon, és ha $R > 0$, akkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{S}(u_m) = \frac{1}{m!}(\mathrm{D}^m f)(\mathfrak{a})$$

teljesül, ahol $\mathbf{S}(u_m)$ az u_m multilineáris operátor *szimmetrizáltja*.)

3. Értelmezzük a következő függvényt

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} \exp(-1/t) & , \text{ha } t > 0 \\ 0 & , \text{ha } t \leq 0. \end{cases}$$

Az f függvény végtelenszer differenciálható, de a 0 pontban *nem analitikus*.

(*Útmutatás.* Az f leszűkítése az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazra végtelenszer differenciálható, mert ilyen függvények kompozíciója. Ezért elég azt igazolni, hogy f minden $\mathbb{N} \ni n$-re n-szer differenciálható a 0 pontban.

Megmutatjuk, hogy létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényeknek olyan $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy minden $\mathbb{R}_+^* \ni t$-re és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $(\mathrm{D}^n f)(t) = P_n(1/t)\exp(-1/t)$. Ehhez tekintsük a

$$g : \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}); \quad P \mapsto (P - \mathrm{D}P)\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2$$

leképezést, és jelölje $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ azt a $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$-ben haladó iterációs sorozatot, amelyet a g iterációs függvény és a $P_0 := 1$ kezdőpont határoz meg. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezés $2n$-ed fokú polinomiális függvény, és minden $\mathbb{R}_+^* \ni t$-re $(\mathrm{D}^n f)(t) = P_n(1/t)\exp(-1/t)$ teljesül.

Most n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f függvény n-szer differenciálható a 0 pontban és $(\mathrm{D}^n f)(0) = 0$. Ez $n := 0$ esetén triviálisan igaz; tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy n-re igaz az állítás: tehát az f függvény n-szer differenciálható a 0 pontban és $(\mathrm{D}^n f)(0) = 0$. Ekkor a $\mathrm{D}^n f$ függvény folytonos is a 0-ban, mert

$$\lim_{t\to 0+0}(\mathrm{D}^n f)(t) = \lim_{t\to 0+0}\Big(P_n(1/t)\exp(-1/t)\Big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{P_n(x)}{\exp(x)} = 0 = (\mathrm{D}^n f)(0),$$

ugyanakkor nyilvánvalóan

$$\lim_{t\to 0-0}(\mathrm{D}^n f)(t) = 0 = (\mathrm{D}^n f)(0),$$

következésképpen $\mathrm{D}^n f$-nek létezik határértéke 0-ban, és az egyenlő $(\mathrm{D}^n f)(0)$-val. Továbbá, a $\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f) = \mathrm{D}^{n+1} f$ deriváltfüggvény az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezve van, és létezik határértéke a 0-ban, hiszen

$$\lim_{t\to 0+0}(\mathrm{D}^{n+1} f)(t) = \lim_{t\to 0+0}\Big(P_{n+1}(1/t)\exp(-1/t)\Big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{P_{n+1}(x)}{\exp(x)} = 0,$$

és nyilvánvalóan

$$\lim_{t\to 0-0}(\mathrm{D}^{n+1} f)(t) = 0.$$

Ezért a megszüntethető szingularitások tételének következénye alapján a $\mathrm{D}^n f$ függvény differenciálható a 0-ban, és

$$(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(0) = \lim_{t\to 0}(\mathrm{D}(\mathrm{D}^n f))(t) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f a 0-ban $n+1$-szer is differenciálható, és $(\mathrm{D}^{n+1} f)(0) = 0$.)

4. Minden $j \in \mathbb{N}$ esetén fennállnak a

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k}{j}^{1/k} = 1, \qquad \lim_{k\to\infty} \binom{k+j}{j}^{1/k} = 1$$

egyenlőségek.

(*Útmutatás.* Ha $j = 0$, akkor ezek az összefüggések nyilvánvalóan igazak. Legyen $j \in \mathbb{N}^*$ rögzítve. Tekintettel arra, hogy

$$\lim_{k\to\infty} (j!)^{1/k} = 1,$$

és természetesen minden $k > j$ természetes számra

$$\Big(\frac{k!}{(k-j)!}\Big)^{1/k} = \prod_{p=1}^{j} (k-j+p)^{1/k},$$

az első egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{p=1}^{j} (k-j+p)^{1/k} = 1.$$

Ez viszont így van, hiszen minden $m \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\lim_{k\to\infty} (k+m)^{1/k} = 1,$$

következésképpen

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{p=1}^{j} (k-j+p)^{1/k} = \prod_{p=1}^{j} \lim_{k\to\infty} (k-j+p)^{1/k} = 1.$$

A második határérték-egyenlőség következik az elsőből, mert minden $k > j$ természetes számra

$$\binom{k+j}{j}^{1/k} = \Bigg(\binom{k+j}{j}^{1/(k+j)}\Bigg)^{(k+j)/k} = \exp\Bigg(\frac{k+j}{k} \log\Bigg(\binom{k+j}{j}^{1/(k+j)}\Bigg)\Bigg),$$

és az első határérték-egyenlőség alapján

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k+j}{j}^{1/(k+j)} = 1,$$

így a log és exp függvények folytonossága, és $\log(1) = 0$, valamint $\exp(0) = 1$ miatt

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k+j}{j}^{1/k} = 1$$

teljesül.

Megjegyezzük, hogy mindkét határérték-egyenlőség igazolható **NUM** 4.4.2. alkalmazásával is, mert rögzített $j \in \mathbb{N}^*$ esetén minden $k \geq j$ természetes számra

$$\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{j}} = \frac{1}{1 - \dfrac{j}{k+1}}, \qquad \frac{\binom{k+1+j}{j}}{\binom{k+j}{j}} = 1 + \frac{j}{k+1},$$

ezért

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{j}}=1,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\binom{k+1+j}{j}}{\binom{k+j}{j}}=1$$

teljesül.)

5. Az analitikusság *lokális* tulajdonság. Adjunk pontos értelmet ennek a kijelentésnek, és bizonyítsuk be!

6. Legyen E normált tér és F az $(F_i)_{i\in I}$ véges Banach-tér rendszer szorzata. Az $f : E \rightarrowtail F$ függvény pontosan akkor analitikus az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f : E \rightarrowtail F_i$ függvény analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban.

7. Legyen E normált tér, F Banach-tér, és legyenek $f, g : E \rightarrowtail F$ függvények.

a) Ha az f és g függvények analitikusak az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, és $n \in \mathbb{N}$, akkor az f és g függvények pontosan akkor érintkeznek n-ed rendben az $\mathfrak{a}$ pontban, ha minden $k \leq n$ természetes számra $(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}^k g)(\mathfrak{a})$. Ez a kijelentés nem igaz, ha f vagy g nem analitikus $\mathfrak{a}$-ban.

b) Ha az f és g függvények analitikusak az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f és g függvények n-ed rendben érintkeznek az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor az $\mathfrak{a}$-nak létezik olyan U környezete, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ az U halmazon.

c) Legyen $U \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ olyan nyílt halmaz, amelynek minden pontjában az f és g függvények analitikusak. Ekkor az

$$U' := \{\mathfrak{a} \in E \mid \text{"minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén az } f \text{ és } g$$

$$\text{függvények analitikusak az } \mathfrak{a} \text{ pontban"}\}$$

halmaz *nyílt-zárt* az U metrikus altérben (vagyis U' nyílt E-ben, és $U' = U \cap \overline{U'}$).

8. Legyen E normált tér, F Banach-tér, $U \subseteq E$ *összefüggő* nyílt halmaz, és legyenek $f, g : U \to F$ analitikus függvények.

a) Ha létezik olyan $\mathfrak{a} \in U$ pont, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}^k g)(\mathfrak{a})$, akkor $f = g$.

b) Ha létezik olyan $V \subseteq U$ nem üres nyílt halmaz, hogy $f = g$ a V halmazon, akkor $f = g$ (*az analitikus folytatás elve*).

c) Ha $U \neq \emptyset$, akkor egyértelműen létezik olyan tartalmazás tekintetében legnagyobb $\tilde{U} \subseteq E$ összefüggő nyílt halmaz, hogy $U \subseteq \tilde{U}$ és f kiterjeszthető $\tilde{U} \to F$ analitikus függvénnyé; továbbá egyetlen analitikus kiterjesztése van f-nek $\tilde{U}$-ra.

(*Útmutatás.* Legyen $U' := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{x \in U | (\mathrm{D}^k f)(x) = (\mathrm{D}^k g)(x)\}$. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathrm{D}^k f, \mathrm{D}^k g : U \to \mathscr{L}_k(E; F)$ függvények folytonosak, ezért az $\{x \in U | (\mathrm{D}^k f)(x) = (\mathrm{D}^k g)(x)\}$ halmaz zárt az U metrikus altérben, így U' is zárt az U metrikus altérben. Ugyanakkor $\mathfrak{a} \in U'$ esetén minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}^k g)(\mathfrak{a})$, tehát az f és g függvények $\mathfrak{a}$ pontbeli Taylor-sorai megegyeznek, így az f és g függvények $\mathfrak{a}$-beli analitikussága folytán $f = g$ az $\mathfrak{a}$ pont valamely nyílt környezetén, és egy ilyen környezet szükségképpen részhalmaza U'-nek. Ezért U' nyílt halmaz is az U metrikus altérben. Az U összefüggősége miatt $U' = \emptyset$, vagy $U' = U$, és a definíció alapján $f = g$ az U' halmazon.

Az a) állítás hipotézise mellett $U' \neq \emptyset$, ezért $U' = U$. A b) állítás feltételéből triviálisan következik az a) feltétele.

A c) bizonyításához legyen $\mathfrak{G}$ azon $g : E \rightarrowtail F$ analitikus függvények halmaza, amelyekre $U \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ és $f \subseteq g$. Ha $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$, akkor $g_1 = g_2$ az U halmazon, ezért a b) szerint $g_1 = g_2$ teljesül a $\mathrm{Dom}(g_1) \cap \mathrm{Dom}(g_2)$ összefüggő halmazon. Ebből következik, hogy létezik egyetlen olyan $\tilde{f} : \bigcup\limits_{g \in \mathfrak{G}} \mathrm{Dom}(g) \to F$ függvény, amelyre minden $g \in \mathfrak{G}$ esetén $\tilde{f} = g$ a $\mathrm{Dom}(g)$ halmazon. Ekkor $\mathrm{Dom}(f)$ összefüggő nyílt halmaz E-ben és $\tilde{f} : E \rightarrowtail F$ olyan analitikus függvény, amelynek a létezését állítottuk. A $\tilde{f}$ egyértelműsége a b) állításból következik.)

9. Legyen F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $U \subseteq \mathbb{K}$ összefüggő nyílt halmaz, és legyenek $f, g : U \to F$ analitikus függvények. Ha létezik olyan U-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amely konvergál az U valamelyik eleméhez, és az $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz végtelen, továbbá minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f(x_n) = g(x_n)$, akkor $f = g$. Mutassuk meg, hogy ez a kijelentés általában nem igaz többváltozós függvényekre!

(*Útmutatás.* Legyen $h := f - g$ és $\mathfrak{a} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Megmutatjuk, hogy a $h : U \to F$ analitikus függvényre és az $\mathfrak{a} \in U$ pontra teljesül az, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathrm{D}^k h)(\mathfrak{a}) = 0$. Ebből a **8**. gyakorlat a) pontja alapján következik, hogy $h = 0$, azaz $f = g$.

Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy a $\{k \in \mathbb{N} | (\mathrm{D}^k h)(\mathfrak{a}) \neq 0\}$ halmaz *nem üres*, és legyen m a legkisebb eleme. Ekkor $m > 0$, mert $h(\mathfrak{a}) = 0$, hiszen f és g folytonosak $\mathfrak{a}$-ban, $\mathfrak{a} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f(x_n) = g(x_n)$, azaz $h(x_n) = 0$. Az infinitezimális Taylor-formula szerint a h függvény és a $\mathbf{T}_{m,\mathfrak{a}}(h)$ Taylor-polinom az $\mathfrak{a}$ pontban m-ed rendben érintkeznek, vagyis

$$0 = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{\left\| h(x) - \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\Big((\mathrm{D}^k h)(\mathfrak{a})\Big)((x-\mathfrak{a})^{[k]}) \right\|}{|x-\mathfrak{a}|^m} =$$

$$= \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{\left\| h(x) - \frac{1}{m!}\Big((\mathrm{D}^m h)(\mathfrak{a})\Big)((x-\mathfrak{a})^{[m]}) \right\|}{|x-\mathfrak{a}|^m} = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \left\| \frac{h(x)}{(x-\mathfrak{a})^m} - \frac{1}{m!}(\mathrm{D}^m h)(\mathfrak{a}) \right\|.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\frac{h}{(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^m} : U \setminus \{\mathfrak{a}\} \to F$$

függvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, és fennáll a

$$\lim_{\mathfrak{a}} \frac{h}{(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^m} = \frac{1}{m!}(\mathrm{D}^m h)(\mathfrak{a}) \neq 0$$

összefüggés. Ezért létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan V környezete, hogy $V \subseteq U$ és *minden* $x \in V \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén $h(x) \neq 0$. Ez viszont lehetetlen, mert létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $x_n \in V$ és $x_n \neq \mathfrak{a}$, így $x_n \in V \setminus \{\mathfrak{a}\}$ és $h(x_n) = 0$.

A $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ projekciók mind analitikus függvények, és $n > 1$ esetén mindegyik gyökhalmaza kontinuum számosságú, ezért az állítás többváltozós analitikus függvényekre altalában nem igaz.)

10. Legyen E normált tér, F és G Banach-tér, továbbá $f : E \rightarrowtail F$ és $g : F \rightarrowtail G$ függvények. Ha $\mathfrak{a} \in E$ olyan, hogy f analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban, és g analitikus az $f(\mathfrak{a})$ pontban, akkor $g \circ f$ analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban.

(*Útmutatás.* Legyen $R \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy a $\mathbf{T}_{f(\mathfrak{a})}(g)$ Taylor-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő R-nél, és $\mathrm{B}_R(f(\mathfrak{a})) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, valamint g egyenlő a $\mathbf{T}_{f(\mathfrak{a})}(g)$ összegfüggvényével ezen a gömbön. Legyen $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy a $\mathbf{T}_\mathfrak{a}(f)$ Taylor-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő r-nél, és $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, valamint f egyenlő a $\mathbf{T}_\mathfrak{a}(f)$ összegfüggvényével ezen a gömbön, továbbá $f\langle \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})\rangle \subseteq \mathrm{B}_R(f(\mathfrak{a}))$. Ekkor $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ esetén a VI. fejezet, 3. pont, **12**. gyakorlat és a diszkrét Lebesgue–Fubini-tétel alapján

$$(g \circ f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(\mathrm{D}^j g)(f(\mathfrak{a}))\Big(\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})((x-\mathfrak{a})^{[k]})\Big)^{[j]}\Big) =$$

$$= (g \circ f)(\mathfrak{a}) + \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=j}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}(\mathrm{D}^j g)(f(\mathfrak{a}))\Big((\mathrm{D}^\alpha f)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[\alpha]})\Big)\Big) =$$

$$= (g \circ f)(\mathfrak{a}) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}(\mathrm{D}^j g)(f(\mathfrak{a}))\Big((\mathrm{D}^\alpha f)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[\alpha]})\Big)\Big),$$

ahol $j \in \mathbb{N}^*$ és $\alpha \in (\mathbb{N}^*)^j$ esetén $|\alpha| := \sum_{i\in j}\alpha(i)$ és $\alpha! := \prod_{i\in j}\alpha(j)!$ és $(\mathrm{D}^\alpha f)(\mathfrak{a})((x-\mathfrak{a})^{[\alpha]})$ jelöli az F^j-nek azt az elemét, amelynek i-edik komponense a $(\mathrm{D}^{\alpha(j)}f)(\mathfrak{a})((x-\mathfrak{a})^{[\alpha(j)]}) \in F$ vektor. Ebből leolvashatók a $g \circ f$ függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli Taylor-sorának együtthatói.)

11. Legyen E normált tér, F Banach-tér, és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{a} \in E$ pontnak létezik olyan U környezete E-ben, hogy f az U minden pontjában végtelenszer differenciálható, és léteznek olyan $C, R \in \mathbb{R}_+^*$ és $N \in \mathbb{N}$ számok, hogy minden $k > N$ természetes számra és $x \in U$ pontra

$$\|(\mathrm{D}^k f)(x)\| \leq C\frac{k!}{R^k}$$

teljesül. Ekkor f analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $\mathbf{T}_\mathfrak{a}(f)$ Taylor-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő a

$$\varrho := \min(R, \sup\{r \in \mathbb{R}_+^* | \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U\})$$

számnál, továbbá f egyenlő a $\mathbf{T}_\mathfrak{a}(f)$ Taylor-sor összegfüggvényével a $\mathrm{B}_\varrho(\mathfrak{a})$ gömbön.

(*Útmutatás.* Legyen $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U$. Ha $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re az f függvény n-szer differenciálható az $[\![\mathfrak{a}.x]\!]$ szakaszon, és $n+1$-szer differenciálható az $]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ szakaszon, ezért a Taylor-formula alapján kapjuk, hogy minden $n \geq N$ természetes számra és $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \ni x$-re

$$\|f(x) - \Big(\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)\Big)(x)\| \leq \frac{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{z\in]\!]\mathfrak{a},x[\![}\|(\mathrm{D}^{n+1}f)(z)\| \leq$$

$$\leq \frac{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{z\in\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})}\|(\mathrm{D}^{n+1}f)(z)\| \leq C\frac{\|x-\mathfrak{a}\|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(n+1)!}{R^{n+1}} = C\Big(\frac{\|x-\mathfrak{a}\|}{R}\Big)^{n+1}.$$

Ebből látható, hogy a $\mathrm{B}_{\min(R,r)}(\mathfrak{a})$ gömb részhalmaza a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ Taylor-sor konvergencia-tartományának, tehát a Cauchy–Hadamard-tétel tétel alapján a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ Taylor-sor *abszolútkonvergencia-tartományának* is részhalmaza, így a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő a $\min(R,r)$ számnál. Ezért $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő, mint a $\min(R, \sup\{r \in \mathbb{R}_+^* | \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq U\})$ szám. Továbbá a $\mathrm{B}_{\min(R,r)}(\mathfrak{a})$ gömbön a Taylor-sor összegfüggvénye egyenlő f-fel, ezért f analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban.)

12. A $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ függvény analitikus, és minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}_+^*$ esetén a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(\log)$ Taylor-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő az $\mathfrak{a}$ számnál, továbbá log egyenlő a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(\log)$ Taylor-sor összegfüggvényével a $]0, 2\mathfrak{a}[$ intervallumon.

(*Útmutatás.* Minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén $\mathrm{D}^l \log = (-1)^{k+1}(k-1)!\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}^{-k}$. Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}_+^*$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $r < \mathfrak{a}$. Ha $x \in [\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r]$, akkor minden $\mathbb{N}^* \ni k$-ra

$$\frac{|(\mathrm{D}^k \log)(x)|}{k!} = \frac{1}{kx^k} \leq \frac{1}{k(\mathfrak{a}-r)^k} \leq \frac{1}{(\mathfrak{a}-r)^k}.$$

Az $f := \log$, $U :=]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[$, $C := 1$, $R := \mathfrak{a}-r$ és $N := 1$ választással a **11**. gyakorlatból kapjuk, hogy a log függvény analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(\log)$ Taylor-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő, mint az $\mathfrak{a}-r$ szám, valamint log egyenlő a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(\log)$ Taylor-sor összegfüggvényével az $]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[$ intervallumon. Ez minden olyan $\mathbb{R}_+^* \ni r$-re igaz, amelyre $r < \mathfrak{a}$. Ebből következik, hogy log egyenlő a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(\log)$ Taylor-sor összegfüggvényével a $]0, 2\mathfrak{a}[$ intervallumon, és a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(\log)$ konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő $\mathfrak{a}$-nál.)

13. Legyen F Banach-tér és $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ C^∞-osztályú függvény. Legyen $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, és tegyük fel olyan $r, R, C \in \mathbb{R}_+^*$ valós számok létezését, hogy $[\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $k \in \mathbb{N}$, valamint $x \in [\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r]$ esetén

$$\|(\mathrm{D}^{2k} f)(x)\| \leq C\frac{(2k)!}{R^{2k}}$$

Ekkor az f függvény analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ Taylor-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő r-nél, és f egyenlő a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ Taylor-sor összegfüggvényével a $]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[$ intervallumon.

(*Útmutatás.* A VII. fejezet, 8. pont, **4**. gyakorlat szerint minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in [\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r]$ esetén

$$\|(\mathrm{D}^{2k+1} f)(x)\| \leq 2C\Big(\frac{1}{r}\frac{(2k)!}{R^{2k}} + r\frac{(2k+2)!)}{R^{2k+2}}\Big)$$

teljesül. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor minden $x \in [\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r]$ pontra a Taylor-formula szerint

$$\Big\|f(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})(x-\mathfrak{a})^k\Big\| \leq \frac{|x-\mathfrak{a}|^{2n+2}}{(2n+2)!} \sup_{z \in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \|(\mathrm{D}^{2n+2} f)(z)\| \leq C\Big(\frac{|x-\mathfrak{a}|}{R}\Big)^{2n+2},$$

továbbá

$$\Big\|f(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})(x-\mathfrak{a})^k\Big\| \leq$$

$$\leq \frac{|x-\mathfrak{a}|^{2n+1}}{(2n+1)!} \sup_{z \in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \|(\mathrm{D}^{2n+1} f)(z)\| \leq 2C\Big(\frac{R/r}{2n+1} + \frac{r}{R}(2n+2)\Big)\Big(\frac{|x-\mathfrak{a}|}{R}\Big)^{2n+1}.$$

Legyen $\varrho \in]0,1[$ tetszőleges valós szám. Ha $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|x - \mathfrak{a}| < \min(r, \varrho R)$, akkor minden $\mathbb{N} \ni m$-re fennáll az

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})(x-\mathfrak{a})^k \right\| \leq \mathbf{a}(m)\varrho^{m+1}$$

egyenlőtlenség, ahol $\mathbf{a}$ az az $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{a}(2n) := 2C\Big(\frac{R/r}{2n+1} + \frac{r}{R}(2n+2)\Big),$$

és $\mathbf{a}(2n+1) := C$. Ugyanakkor a $\lim\limits_{m\to\infty}\Big(m\varrho^m\Big) = 0$ egyenlőségből következik, hogy $\lim\limits_{m\to\infty}\Big(\mathbf{a}(m)\varrho^m\Big) = 0$, ezért

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\sup_{x\in]\!]\mathfrak{a}-r,\mathfrak{a}+r[\![}\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})(x-\mathfrak{a})^k \right\|\Big) = 0$$

tehát f analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban.)

11. fejezet

Implicitfüggvény-tétel

11.1. Az implicit függvény simasága

11.1.1. Definíció. *Legyenek E, F, G halmazok, $f : E \times F \rightarrowtail G$ függvény, valamint $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$. Az f függvény $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthaladó* **implicit függvényének** *nevezünk minden olyan $\varphi : E \rightarrowtail F$ függvényt, amelyre $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\varphi)$, $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$, és minden $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ esetén $(x, \varphi(x)) \in \mathrm{Dom}(f)$ és $f(x, \varphi(x)) = f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ teljesül.*

Nyilvánvaló, hogy adott $f : E \times F \rightarrowtail G$ függvény és $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén általában nem szükségképpen létezik *nem triviális* implicit függvénye f-nek, amely az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthalad (az egyetlen $\{\mathfrak{a}\} \to \{\mathfrak{b}\}$ függvény a *triviális* implicit függvénye f-nek, amely az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthalad). Az is világos, hogy általában sok nem triviális implicit függvénye létezhet f-nek, amelyek mind áthaladnak ugyanazon az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$ ponton.

11.1.2. Állítás. (Az implicit függvény deriváltja) *Legyenek E, F, G normált terek, $f : E \times F \rightarrowtail G$ függvény, és $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$. Legyen $\varphi : E \rightarrowtail F$ az f-nek $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthaladó implicit függvénye. Ha f differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, és φ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor*

$$(\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + (\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \circ (\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}) = 0$$

teljesül, és ha a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{L}(F; G)$ operátor bijekció, akkor

$$(\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}) = -((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1} \circ (\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő függvényt

$$g : \mathrm{Dom}(\varphi) \to E \times F; \quad x \mapsto (x, \varphi(x)).$$

Ennek komponens-függvényei differenciálhatóak az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért g is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és minden $\mathbf{e} \in E$ esetén

$$((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}, ((\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e})).$$

A feltevés szerint f differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a})$ pontban, ezért a függvénykompozíció differenciálási tétele alapján $f \circ g$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, továbbá $(\mathrm{D}(f \circ g))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \circ (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})$, ami azt jelenti, hogy minden $\mathbf{e} \in E$ esetén

$$((\mathrm{D}(f \circ g))(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}) = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e})) = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e}, ((\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e})) =$$
$$= ((\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e}) + ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(((\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e})),$$

vagyis

$$(\mathrm{D}(f \circ g))(\mathfrak{a}) = (\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + (\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \circ (\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}).$$

Ugyanakkor $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(\varphi)$-nek (mert φ differenciálható ebben a pontban), ezért $f \circ g$ az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén *állandó*, így $(\mathrm{D}(f \circ g))(\mathfrak{a}) = 0$, amiből az előzőek alapján következik az állítás. ■

11.1.3. Állítás. (Az implicit függvény simasága) *Legyenek E, F, G normált terek, $f : E \times F \rightarrowtail G$ függvény, és $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és legyen W az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontnak olyan nyílt környezete $E \times F$-ben, amelyre $W \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és az f függvény n-szer (folytonosan) differenciálható a W halmazon. Ha F vagy G teljes, és $\varphi : E \rightarrowtail F$ olyan (folytonosan) differenciálható függvény, amely az f-nek $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthaladó implicit függvénye, továbbá minden $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ esetén $(x, \varphi(x)) \in W$ és a $(\partial_2 f)(x, \varphi(x)) : F \to G$ lineáris operátor homeomorfizmus, akkor a φ függvény is n-szer (folytonosan) differenciálható.*

Bizonyítás. Ha $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$, akkor φ az f-nek $(x, \varphi(x))$ ponton áthaladó implicit függvénye, és $(x, \varphi(x)) \in W$ miatt f differenciálható az $(x, \varphi(x))$ pontban, valamint a feltevés alapján φ differenciálható x-ben, továbbá a $(\partial_2 f)(x, \varphi(x)) : F \to G$ lineáris operátor homeomorfizmus, ezért az előző állításból következik, hogy

$$(\mathrm{D}\varphi)(x) = -((\partial_2 f)(x, \varphi(x)))^{-1} \circ (\partial_1 f)(x, \varphi(x)).$$

Ebből látható, hogy ha bevezetjük a következő függvényeket:

$$\begin{gathered}
\alpha : \mathrm{Dom}(\varphi) \to E \times F; \quad x \mapsto (x, \varphi(x)) \\
\beta : \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathscr{L}(E; G) \times \mathscr{L}(F; G); \quad (x, y) \mapsto ((\partial_1 f)(x, y), (\partial_2 f)(x, y)) \\
\gamma : \mathscr{L}(E; G) \times \mathscr{H}(F; G) \to \mathscr{L}(E; G) \times \mathscr{L}(G; F); \quad (u, v) \mapsto (u, v^{-1}) \\
\delta : \mathscr{L}(E; G) \times \mathscr{L}(G; F) \to \mathscr{L}(E; F); \quad (u, v) \mapsto -v \circ u,
\end{gathered}$$

akkor $\mathrm{D}\varphi = \delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$ teljesül. A δ függvény folytonos bilineáris operátor, tehát végtelenszer differenciálható (sőt analitikus). Mivel G és F Banach-terek, a γ függvény analitikus. A feltevés szerint f a W halmazon n-szer (folytonosan) differenciálható, ezért a β függvény $n - 1$-szer (folytonosan) differenciálható a W halmazon. Végül, ha a φ függvény m-szer (folytonosan) differenciálható, akkor az α függvény is m-szer (folytonosan) differenciálható. Ezért $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq W$ alapján mondható, hogy ha a φ függvény m-szer (folytonosan) differenciálható, akkor a $\mathrm{D}\varphi$ deriváltfüggvény $\min(n - 1, m)$-szer (folytonosan) differenciálható, tehát a φ függvény $\min(n - 1, m) + 1$-szer (folytonosan) differenciálható. Ez azt mutatja, hogy ha $m \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy $m \leq n - 1$, és a φ függvény m-szer (folytonosan) differenciálható, akkor a φ függvény $m + 1$-szer is (folytonosan) differenciálható.

Most az állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy φ nem n-szer (folytonosan) differenciálható. Legyen m a legkisebb szám $\mathbb{N}^*$-ban, amelyre φ nem m-szer (folytonosan) differenciálható. A hipotézis alapján φ (folytonosan) differenciálható, ezért $m > 1$, továbbá $m \leq n$, így $1 \leq m - 1 \leq n - 1$. Ugyanakkor a φ függvény $m - 1$-szer (folytonosan) differenciálható, így az előzőek alapján a φ függvény $(m - 1) + 1$-szer (folytonosan) differenciálható, holott φ nem m-szer (folytonosan) differenciálható. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy a φ függvény n-szer (folytonosan) differenciálható. ■

11.2. Implicitfüggvény-tétel

11.2.1. Tétel. (Implicitfüggvény-tétel) *Legyenek E, F, G normált terek, továbbá $f : E \times F \rightarrowtail G$ függvény és $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pont, amelyben f szigorúan differenciálható és a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{L}(F; G)$ operátor homeomorfizmus F és G között. Ha F teljes, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt környezete E-ben, és létezik $\mathfrak{b}$-nek olyan V nyílt környezete F-ben, hogy $U \times V \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és teljesülnek a következők:*

– *Az f függvénynek egyértelműen létezik olyan $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthaladó φ implicit függvénye, amelyre $\mathrm{Dom}(\varphi) = U$ és $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq V$ teljesül.*

– *A φ leképezés Lipschitz-függvény* (**MET** 7.3.1.) és szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy olyan $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\varepsilon_0 \|((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1}\| < 1$ teljesül, és vezessük be a $C := \varepsilon_0 \|((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1}\|$ jelölést.

Az f függvény szigorúan differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, ezért az ε_0-hoz van olyan W_0 környezete $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-nek $E \times F$-ben, hogy $W_0 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $W_0 \ni (x, y)$-ra és $W_0 \ni (x', y')$-re

$$\|f(x', y') - f(x, y) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(x' - x, y' - y)\| \leq \varepsilon_0 \|(x' - x, y' - y)\|$$

teljesül, ami a parciális deriváltak és a derivált kapcsolatának ismeretében, valamint a szorzatnorma definíciója alapján éppen azt jelenti, hogy

$$\|f(x', y') - f(x, y) - ((\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(x' - x) - ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(y' - y)\| \leq \varepsilon_0 \max(\|x' - x\|, \|y' - y\|).$$

Rögzítsük az $\mathfrak{a}$-nak olyan U_0 környezetét E-ben, és a $\mathfrak{b}$-nek olyan V_0 környezetét F-ben, hogy $U_0 \times V_0 \subseteq W_0$. Tehát az előző egyenlőtlenség teljesül minden $U_0 \ni x, x'$-re és $V_0 \ni y, y'$-re. Speciálisan, ha $x \in U_0$ és $y, y' \in V_0$, akkor ebből az $x' := x$ választással kapjuk, hogy

$$\|f(x, y') - f(x, y) - ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(y' - y)\| \leq \varepsilon_0 \|y' - y\| \tag{1}$$

teljesül. Hasonlóan, ha $x, x' \in U_0$ és $y \in V_0$, akkor az $y' := y$ választással kapjuk, hogy

$$\|f(x', y) - f(x, y) - ((\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(x' - x)\| \leq \varepsilon_0 \|x' - x\| \tag{2}$$

teljesül.

Minden $x \in U_0$ esetén értelmezzük a

$$\Phi_x : V_0 \to F; \quad y \mapsto y - ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1}(f(x, y) - f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$$

függvényt. Nyilvánvaló, hogy minden $x \in U_0$ és $y \in V_0$ esetén fennáll a

$$\Phi_x(y) = y \;\Leftrightarrow\; f(x, y) = f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

kijelentés, ezért az f függvény U_0-on értelmezett V_0-ba érkező, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-n áthaladó implicit függvényének *létezése* éppen azt jelenti, hogy minden $x \in U_0$ esetén a Φ_x függvénynek létezik fixpontja.

Legyen $x \in U_0$ és $y, y' \in V_0$. Ekkor a definíció alapján:

$$\Phi_x(y') - \Phi_x(y) = y' - y - ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1}(f(x, y') - f(x, y)) =$$
$$= -((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1}\Big(f(x, y') - f(x, y) - ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(y' - y)\Big).$$

Ebből az (1) egyenlőtlenség és a C szám definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|\Phi_x(y') - \Phi_x(y)\| &\leq \|((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1}\|\|f(x,y') - f(x,y) - ((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))(y'-y)\| \leq \\ &\leq \|((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1}\|\varepsilon_0\|y'-y\| = C\|y'-y\|.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in U_0$ esetén a $\Phi_x : V_0 \to F$ függvény C együtthatójú *kontrakció.*

Legyen $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan rögzített szám, hogy $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b}) \subseteq V_0$; ekkor az F teljessége miatt a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})$ halmaz a norma által meghatározott metrika leszűkítésével *teljes metrikus tér.*

Meg fogjuk mutatni, hogy van olyan U nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $U \subseteq U_0$ és minden $x \in U$ esetén $\Phi_x\langle\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})\rangle \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{b})$. Ehhez először megjegyezzük, hogy az

$$U_0 \to F; \quad x \mapsto \Phi_x(\mathfrak{b}) := \mathfrak{b} - ((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1}(f(x,\mathfrak{b}) - f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))$$

függvény $\mathfrak{a}$-hoz nyilvánvalóan a $\mathfrak{b}$ értéket rendeli, és az $\mathfrak{a}$ pontban folytonos, mert f az $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$-ben a szorzatmetrika szerint folytonos (hiszen itt még szigorúan differenciálható is), ezért az $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ pontbeli első parciális függvénye folytonos a $\mathfrak{a}$ pontban. Természetesen azt is kihasználjuk, hogy a $((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1} : G \to F$ lineáris operátor is folytonos, mert a hipotézis alapján $(\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ homeomorfizmus F és G között. Tehát ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges szám, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U_ε környezete E-ben, hogy $U_\varepsilon \subseteq U_0$ és minden $U_\varepsilon \ni x$-re $\Phi_x(\mathfrak{b}) \in \overline{\mathrm{B}}_\varepsilon(\mathfrak{b})$ teljesül, vagyis $\|\Phi_x(\mathfrak{b}) - \mathfrak{b}\| \leq \varepsilon$. Ekkor $x \in U_\varepsilon$ és $y \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})$ esetén:

$$\|\Phi_x(y) - \mathfrak{b}\| \leq \|\Phi_x(y) - \Phi_x(\mathfrak{b})\| + \|\Phi_x(\mathfrak{b}) - \mathfrak{b}\| \leq C\|y - \mathfrak{b}\| + \varepsilon \leq Cr + \varepsilon.$$

Ebből látható, hogy ha $\varepsilon < (1-C)r$, akkor $U := U_\varepsilon$ olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $U \subseteq U_0$, és minden $x \in U$ és $y \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})$ esetén $\|\Phi_x(y) - \mathfrak{b}\| < r$, vagyis minden $U \ni x$-re $\Phi_x\langle\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})\rangle \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{b})$. A továbbiakban rögzítünk egy ilyen tulajdonságú U nyílt környezetet.

Tehát a $\left(\Phi_x|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})}\right)_{x \in U}$ függvényrendszer $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b}) \to \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})$ típusú, C-együtthatójú kontrakcióknak rendszere, és $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})$ az F teljessége miatt az altérmetrikával ellátva teljes metrikus tér. Ezért a Banach-féle fixponttétel (**MET** 9.9.3.) alapján vehetjük azt a $\varphi : U \to \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})$ függvényt, amelyre minden $x \in U$ esetén $\varphi(x)$ a fixpontja a $\Phi_x|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})}$ kontrakciónak. Ugyanakkor, $x \in U$ esetén a $\Phi_x|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})}$ függvény a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{b})$ *nyílt* gömbbe érkezik, ezért $\varphi(x) = \left(\Phi_x|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})}\right)(\varphi(x)) \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{b})$. Tehát U olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, és $V := \mathrm{B}_r(\mathfrak{b})$ olyan nyílt környezete $\mathfrak{b}$-nek F-ben, hogy $U \times V \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és az f-nek létezik egyetlen U-n értelmezett V-be érkező, $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$-n áthaladó implicit függvénye, ami éppen a φ függvény.

(Megjegyezzük, hogy a fixpontok paramétertől való folytonos függését kimondó tétel (**MET** 9.10.1.) feltételei is teljesülnek az adott függvényrendszerre, ezért a φ függvény folytonos is. Azonban a következő bekezdésben a φ-re még ennél is erősebb folytonossági tulajdonságot fogunk bizonyítani úgy, hogy nem hivatkozunk a fixpontok paramétertől való folytonos függésének tételére.)

Megmutatjuk, hogy φ Lipschitz-függvény. Ehhez legyenek $x, x' \in U$ rögzítve. Ekkor

$$\begin{aligned}\|\varphi(x') - \varphi(x)\| &= \|\Phi_{x'}(\varphi(x')) - \Phi_x(\varphi(x))\| \leq \\ &\leq \|\Phi_{x'}(\varphi(x')) - \Phi_x(\varphi(x'))\| + \|\Phi_x(\varphi(x')) - \Phi_x(\varphi(x))\| \leq \\ &\leq \|\Phi_{x'}(\varphi(x')) - \Phi_x(\varphi(x'))\| + C\|\varphi(x') - \varphi(x)\|,\end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$\|\varphi(x') - \varphi(x)\| \leq \frac{\|\Phi_{x'}(\varphi(x')) - \Phi_x(\varphi(x'))\|}{1-C}.$$

Ugyanakkor a definíció alapján

$$\begin{aligned}\|\Phi_{x'}(\varphi(x')) - \Phi_x(\varphi(x'))\| &= \| - ((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1}(f(x',\varphi(x')) - f(x,\varphi(x')))\| \leq \\ &\leq \|((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1}\|\|f(x',\varphi(x')) - f(x,\varphi(x'))\| \leq \\ &\leq \|((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1}\|(\|(\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\| + \varepsilon_0)\|x'-x\|,\end{aligned}$$

hiszen a (2) egyenlőtlenség szerint

$$\|f(x',\varphi(x')) - f(x,\varphi(x')) - ((\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))(x'-x))\| \leq \varepsilon_0\|x'-x\|,$$

ezért

$$\begin{aligned}\|f(x',\varphi(x')) - f(x,\varphi(x'))\| &\leq \|((\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))(x'-x))\| + \varepsilon_0\|x'-x\| \leq \\ &\leq (\|(\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\| + \varepsilon_0)\|x'-x\|.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy fennáll a

$$\|\varphi(x') - \varphi(x)\| \leq M\|x'-x\|$$

egyenlőtlenség, ahol

$$M := \frac{\|((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1}\|(\|(\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\| + \varepsilon_0)}{1-C}.$$

Tehát a $\varphi : U \to \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{b})$ függvény M együtthatójú Lipschitz-függvény.

Végül megmutatjuk, hogy φ szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve, és az f függvény $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ pontbeli szigorú differenciálhatóságát kihasználva vegyünk olyan $U(\varepsilon)$ környezetét $\mathfrak{a}$-nak E-ben, és olyan $V(\varepsilon)$ környezetét $\mathfrak{b}$-nek F-ben, hogy $U(\varepsilon) \subseteq U$, $V(\varepsilon) \subseteq V$, és minden $(x,y),(x',y') \in U(\varepsilon) \times V(\varepsilon)$ esetén

$$\|f(x',y') - f(x,y) - ((\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))(x'-x) - ((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))(y'-y)\| \leq \varepsilon \max(\|x'-x\|, \|y'-y\|).$$

A φ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban és $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$, ezért $\overset{-1}{\varphi}\langle V(\varepsilon)\rangle \cap U(\varepsilon)$ az $\mathfrak{a}$-nak környezete E-ben. Ha $x, x' \in \overset{-1}{\varphi}\langle V(\varepsilon)\rangle \cap U(\varepsilon)$, akkor $(x,\varphi(x)),(x',\varphi(x')) \in U(\varepsilon) \times V(\varepsilon)$, ezért az előző egyenlőtlenség alapján:

$$\begin{aligned}\|f(x',\varphi(x')) - f(x,\varphi(x)) - ((\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))(x'-x) - ((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))(\varphi(x') - \varphi(x))\| \leq \\ \leq \varepsilon \max(\|x'-x\|, \|\varphi(x') - \varphi(x)\|) \leq \varepsilon \max(1,M)\|x'-x\|,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a $\|\varphi(x') - \varphi(x)\| \leq M\|x'-x\|$ összefüggést. Ugyanakkor minden $x, x' \in \overset{-1}{\varphi}\langle V(\varepsilon)\rangle \cap U(\varepsilon)$ esetén

$$f(x,\varphi(x)) = f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = f(x',\varphi(x')),$$

amiből az előző egyenlőtlenség alapján következik, hogy

$$\begin{aligned}&\|((\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))(x'-x) + ((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))(\varphi(x') - \varphi(x))\| = \\ &= \|((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))\Big(\varphi(x') - \varphi(x) + ((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1}((\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))(x'-x)\Big)\| \leq \\ &\leq \varepsilon \max(1,M)\|x'-x\|.\end{aligned}$$

Tehát ha bevezetjük az $u := -((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1} \circ (\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \in \mathscr{L}(E;F)$ operátort, akkor minden $x, x' \in \overset{-1}{\varphi}\langle V(\varepsilon)\rangle \cap U(\varepsilon)$ esetén, ha $x \neq x'$, akkor

$$\left\| ((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))\Big(\frac{\varphi(x') - \varphi(x) - u(x'-x)}{\|x'-x\|}\Big) \right\| \leq \varepsilon \max(1, M),$$

ami azzal ekvivalens, hogy:

$$\frac{\varphi(x') - \varphi(x) - u(x'-x)}{\|x'-x\|} \in \Big((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\Big)^{-1} \langle \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon \max(1,M)}(0)\rangle.$$

Ebből már látható, hogy φ szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Valóban, ha W környezete a 0-nak F-ben, akkor a $((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1} : G \to F$ függvény folytonossága, és $((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1}(0) = 0$ miatt van olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$, hogy

$$\Big((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\Big)^{-1} \langle \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon'}(0)\rangle \subseteq W$$

teljesül, és ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számot úgy választjuk, hogy $\varepsilon \min(1, M) \leq \varepsilon'$ legyen, akkor $\overset{-1}{\varphi}\langle V(\varepsilon)\rangle \cap U(\varepsilon)$ olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy minden $x, x' \in \overset{-1}{\varphi}\langle V(\varepsilon)\rangle \cap U(\varepsilon)$ esetén, ha $x \neq x'$, akkor

$$\frac{\varphi(x') - \varphi(x) - u(x'-x)}{\|x'-x\|} \in W.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $u \in \mathscr{L}(E;F)$ olyan, hogy

$$\lim_{(x,x')\to(\mathfrak{a},\mathfrak{a})} \frac{\varphi(x') - \varphi(x) - u(x'-x)}{\|x'-x\|} = 0$$

teljesül, így φ szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. (És természetesen az is látszik, hogy fennáll a $(\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}) = u = -((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1} \circ (\partial_1 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ egyenlőség, aminek szükségessége azonnal következik a tétel feltételeiből, a φ függvény $\mathfrak{a}$-beli differenciálhatóságából, és az implicit függvény deriváltját leíró tételből.) ■

Megjegyzések. Az implicitfüggvény-tétellel kapcsolatban a következő megjegyzéseket tesszük.

1) Ha két metrikus tér között létezik olyan bijekció, amely egyenletesen folytonos és az inverze is egyenletesen folytonos, akkor a metrikus terek egyszerre teljesek, vagy egyszerre nem teljesek (**1**. gyakorlat). Az implicitfüggvény-tétel feltételében szereplő $(\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ parciális deriváltoperátor F és G között olyan bijekció, amely egyenletesen folytonos és az inverze is egyenletesen folytonos, továbbá F teljes, ezért a tételben előírt feltételek mellett G is Banach-tér. Vagyis a G teljessége implicit formában szintén elő van írva, és ha a G teljességét tesszük fel, akkor F is Banach-tér lesz. Azonban E teljessége egyáltalán *nem szükséges* a tétel érvényességéhez.

2) A funkcionálanalízis elemeiben majd igazoljuk Banach nyíltleképezés-tételét (**FUN** 11.1.3), amelyből következik, hogy Banach-terek között ható folytonos lineáris bijekció inverze szükségképpen folytonos (**FUN** 11.1.4). Ezért az implicitfüggvény-tételben azt is előírhatjuk, hogy F és G mindketten Banach-terek legyenek, és a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ parciális deriváltoperátor bijekció legyen.

3) Ha F vagy G véges dimenziós, és a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ parciális deriváltoperátor bijekció, akkor F és G mindketten véges dimenziósak, $\dim(F) = \dim(G)$, és a $((\partial_2 f)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))^{-1}$

inverzoperátor szükségképpen folytonos (**LIN** 1.2.1.). Ezért véges dimenziós F és G esetén a tétel alkalmazhatóságához elég azt igazolni, hogy $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bijekció (természetesen az f függvény $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontbeli szigorú differenciálhatósága mellett).

4) A tételben az f függvény $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontbeli *szigorú differenciálhatóságát* tettük fel; nem elegendő az, ha csak differenciálható $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-ben (**3**. gyakorlat). Az f függvény $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontbeli szigorú differenciálhatóságának követelménye helyett előírhatjuk azt a feltételt, hogy f differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pont valamely környezetén, és a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény folytonos az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, hiszen 5.1.1. b) alapján *ebből következik* az f függvény $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontbeli szigorú differenciálhatósága.

11.3. Implicitfüggvény-tétel folytonosan differenciálható függvényekre

11.3.1. Tétel. (**Implicitfüggvény-tétel folytonosan differenciálható függvényekre.**) *Legyenek E, F, G normált terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \times F \rightarrowtail G$ olyan függvény, amely n-szer folytonosan differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$ pont valamely környezetén, és a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{L}(F; G)$ operátor homeomorfizmus F és G között. Ha F teljes, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt környezete E-ben, és létezik $\mathfrak{b}$-nek olyan V nyílt környezete F-ben, hogy teljesülnek a következők:*

– *az f függvény az $U \times V$ halmazon n-szer folytonosan differenciálható, és minden $(x, y) \in U \times V$ esetén a $(\partial_2 f)(x, y) \in \mathscr{L}(F; G)$ lineáris operátor homeomorfizmus F és G között;*

– *egyértelműen létezik az f függvénynek olyan $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-n áthaladó φ implicit függvénye, amelyre $\mathrm{Dom}(\varphi) = U$ és $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq V$;*

– *a φ függvény n-szer folytonosan differenciálható, és minden $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ esetén $(\mathrm{D}\varphi)(x) = -((\partial_2 f)(x, \varphi(x))^{-1} \circ (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen W_1 olyan nyílt környezete az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontnak $E \times F$-ben, amelyen az f függvény n-szer folytonosan differenciálható; ilyen a hipotézis alapján létezik.

A $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény folytonos az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, ezért a $\partial_2 f : \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) \to \mathscr{L}(F; G)$ függvény is folytonos az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, és a hipotézis szerint itt $\mathscr{H}(F; G)$-beli értéket vesz fel, ahol $\mathscr{H}(F; G)$ jelöli az $F \to G$ lineáris homeomorfizmusok halmazát. A $\mathscr{H}(F; G)$ halmaz nyílt $\mathscr{L}(F; G)$-ben, ezért létezik az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontnak olyan W_2 nyílt környezete $E \times F$-ben, hogy $W_2 \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, és minden $(x, y) \in W_2$ esetén $(\partial_2 f)(x, y) \in \mathscr{H}(F; G)$.

Az f függvény differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pont valamely környezetén, és $\mathrm{D}f$ folytonos az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, így f szigorúan differenciálható ebben a pontban. Ezért az $f|_{W_1 \cap W_2}$ függvény is szigorúan differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, és $(\partial_2(f|_{W_1 \cap W_2}))(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{H}(F; G)$. Ezért az implicitfüggvény-tétel alkalmazható az $f|_{W_1 \cap W_2}$ függvényre és az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontra.

Tehát létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt környezete E-ben, és létezik $\mathfrak{b}$-nek olyan V nyílt környezete F-ben, hogy $U \times V \subseteq \mathrm{Dom}(f|_{W_1 \cap W_2}) = W_1 \cap W_2$, és egyértelműen létezik $f|_{W_1 \cap W_2}$-nek olyan $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthaladó φ implicit függvénye, amelyre $\mathrm{Dom}(\varphi) = U$ és $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq V$ teljesül, és amely folytonos az U halmazon és szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Természetesen ekkor a $\varphi : U \to V$ az f-nek is az az egyetlen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthaladó implicit függvénye, amely az U-n értelmezett, és V-be érkezik. Azt kellene még igazolni, hogy a φ függvény n-szer folytonosan differenciálható. Az implicit függvény simaságának tétele alapján ehhez elegendő azt bebizonyítani, hogy a φ függvény folytonosan differenciálható. Tehát a folytonos differenciálhatóság és a szigorú differenciálhatóság kapcsolatának ismeretében elég azt megmutatni, hogy φ az U minden pontjában szigorúan differenciálható.

Ehhez legyen $x \in U$ rögzített pont. Az $U \times V \subseteq W_1$ tartalmazás miatt az f függvény differenciálható az $U \times V$ nyílt halmaz minden pontjában, és a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény folytonos ezen a halmazon, ezért f az $U \times V$ halmaz minden pontjában szigorúan differenciálható; ilymódon f az $(x, \varphi(x))$ pontban is szigorúan differenciálható. Ugyanakkor $U \times V \subseteq W_2$ miatt a $(\partial_2 f)(x, \varphi(x))$ operátor homeomorfizmus. A szigorú differenciálhatóság lokalitásából következik, hogy az $f|_{U\times V}$ függvény is szigorúan differenciálható az $(x, \varphi(x))$ pontban, és $(\partial_2 (f|_{U\times V}))(x, \varphi(x)) = (\partial_2 f)(x, \varphi(x))$, így a $(\partial_2 (f|_{U\times V}))(x, \varphi(x))$ operátor is homeomorfizmus. Ezért $f|_{U\times V}$-re és az $(x, \varphi(x))$ pontra alkalmazhatjuk a implicitfüggvény-tételt. Tehát létezik olyan U_x nyílt környezete x-nek, és olyan V_x nyílt környezete $\varphi(x)$-nek, hogy $U_x \times V_x \subseteq U \times V$, és egyértelműen létezik olyan φ_x implicit függvénye $f|_{U\times V}$-nek, amely áthalad az $(x, \varphi(x))$ ponton, $\mathrm{Dom}(\varphi_x) = U_x$, $\mathrm{Im}(\varphi_x) \subseteq V_x$, és φ_x Lipschitz-függvény az U_x halmazon, és szigorúan differenciálható az x pontban. Legyen $x' \in U_x \subseteq U$. Ekkor $\varphi_x(x') \in V_x \subseteq V$ olyan pont, hogy $f(x', \varphi_x(x')) = f(x, \varphi(x)) = f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Ugyanakkor $\varphi(x') \in V$ szintén olyan pont, hogy $f(x', \varphi(x')) = f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Ebből következik, hogy $\varphi_x(x') = \varphi(x')$. Ez azt jelenti, hogy $\varphi = \varphi_x$ az U_x halmazon, amely x-nek környezete. A szigorú differenciálhatóság lokalitását alkalmazva kapjuk, hogy φ a φ_x függvénnyel együtt szigorúan differenciálható az x pontban.

Végül, az implicit függvény deriváltjára vonatkozó állításunk alapján nyilvánvaló, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ esetén $(\mathrm{D}\varphi)(x) = -((\partial_2 f)(x, \varphi(x))^{-1} \circ (\partial_1 f)(x, \varphi(x))$. ■

Nyilvánvaló, hogy az előző állítás az implicitfüggvény-tételnek olyan változata, amelyből látható, hogy az f függvény és adott kezdőpont által meghatározott implicit függvény egy elsőrendű differenciálegyenlettel kapcsolatos kezdetiérték-probléma megoldása.

11.4. Gyakorlatok

1. Legyenek (M, d) és (M', d') olyan metrikus terek, amelyekhez létezik olyan $f : M \to M'$ bijekció, hogy f egyenletesen folytonos a d és d' metrikák szerint, és f^{-1} egyenletesen folytonos a d' és d metrikák szerint. Ekkor az (M, d) metrikus tér teljessége ekvivalens az (M', d') metrikus tér teljességével.

(*Útmutatás.* Legyen $f : M \to M'$ olyan bijekció, amelyre f egyenletesen folytonos a d és d' metrikák szerint, valamint f^{-1} egyenletesen folytonos a d' és d metrikák szerint. Tegyük fel, hogy (M, d) teljes, és legyen $\mathbf{s}'$ Cauchy-sorozat M'-ben a d' metrika szerint. Ekkor az $f^{-1} \circ \mathbf{s}'$ sorozat Cauchy-sorozat M-ben a d metrika szerint, mert f^{-1} egyenletesen folytonos. Az (M, d) teljessége folytán $f^{-1} \circ \mathbf{s}'$ konvergens M-ben a d metrika szerint, és f folytonos, tehát az átviteli elv alapján az $\mathbf{s}' = f \circ (f^{-1} \circ \mathbf{s}')$ sorozat konvergens a d metrika szerint. Ezért (M', d') is teljes metrikus tér.)

2. Értelmezzük az $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ függvényt. Ennek egyetlen olyan implicit függvénye létezik, amely a $(0, 0)$ ponton áthalad, és persze ez az egyetlen $\{0\} \to \{0\}$ függvény. (Itt $(\partial_2 f)(0, 0) = 0$, tehát nem teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei.)

3. Értelmezzük az $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto 2y + y^2\chi_{\mathbb{Q}}(x) - x$ függvényt. Igazoljuk, hogy az f függvény differenciálható $(0, 0)$-ban és $(\partial_2 f)(0, 0) = 2$, továbbá bármely $0 < \delta \leq 1$ valós számra és $E \subseteq (\mathbb{Q} \cap]-\delta, \delta[) \setminus \{0\}$ halmazra a

$$\varphi_E :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} x/2 & , \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \sqrt{1+x} - 1 & , \text{ha } x \in \mathbb{Q} \setminus E, \\ -\sqrt{1+x} - 1 & , \text{ha } x \in E \end{cases}$$

függvény az f-nek $]-\delta, \delta[$-n értelmezett, $(0, 0)$ ponton áthaladó implicit függvénye, és az f-nek minden $]-\delta, \delta[$-n értelmezett, $(0, 0)$ ponton áthaladó implicit függvénye ilyen alakú, valamilyen $E \subseteq (\mathbb{Q} \cap]-\delta, \delta[) \setminus \{0\}$ halmazra. Tehát bármely $0 < \delta \leq 1$ valós számra az f függvény $]-\delta, \delta[$-n értelmezett, $(0, 0)$ ponton áthaladó implicit függvényeinek halmaza *kontinuum számosságú*, és ezek az implicit függvények mind olyanok, hogy a $]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$ halmaz egyetlen pontjában sem folytonosak. (Itt f nem szigorúan differenciálható a $(0, 0)$ pontban, tehát nem teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei.)

4. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, és $(x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pont, amelyre

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

(Ez *erősebb* feltevés annál, hogy $(\mathrm{D}f)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.) Ekkor vehetjük az $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ pontnak olyan U nyílt környezetét, amelyre $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és minden $(x, y, z) \in U$ pontra

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y, z) \neq 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y, z) \neq 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x, y, z) \neq 0.$$

a) Létezik olyan $X : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, hogy $(y_0, z_0) \in \mathrm{Dom}(X)$, $X(y_0, z_0) = x_0$, és minden $(y, z) \in \mathrm{Dom}(X)$ esetén $(X(y, z), y, z) \in U$ és $f(X(y, z), y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Létezik olyan $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, hogy $(x_0, z_0) \in \mathrm{Dom}(Y)$, $Y(x_0, z_0) = y_0$, és minden $(x, z) \in \mathrm{Dom}(Y)$ esetén $(x, Y(x, z), z) \in U$ és $f(x, Y(x, z), z) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Létezik olyan $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, hogy $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom}(Z)$, $Z(x_0, y_0) = z_0$, és minden $(x, y) \in \mathrm{Dom}(Z)$ esetén $(x, y, Z(x, y)) \in U$ és $f(x, y, Z(x, y)) = f(x_0, y_0, z_0)$.

b) Ha X, Y, Z olyan függvények, amelyekre teljesülnek az a)-ban megfogalmazott tulajdonságok, akkor fennállnak a

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)(y_0, z_0) \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)(x_0, z_0) \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = -1,$$
$$\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)(y_0, z_0) \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)(x_0, z_0) \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = -1$$

egyenlőségek (*Barkhausen-relációk*).

c) Ha X, Y, Z olyan függvények, amelyekre teljesülnek az a)-ban megfogalmazott tulajdonságok, akkor létezik-e (x_0, y_0, z_0)-nak olyan U' nyílt környezete, hogy $U' \subseteq U$ és minden $(x, y, z) \in U'$ esetén fennállnak a

$$\Big(\frac{\partial X}{\partial y}\Big)(y,z)\cdot\Big(\frac{\partial Y}{\partial z}\Big)(x,z)\cdot\Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)(x,y) = -1,$$
$$\Big(\frac{\partial X}{\partial z}\Big)(y,z)\cdot\Big(\frac{\partial Z}{\partial y}\Big)(x,z)\cdot\Big(\frac{\partial Y}{\partial x}\Big)(x,y) = -1$$

egyenlőségek?

(*Útmutatás.* a) Az adott tulajdonságú X, Y és Z függvények létezése az implicitfüggvény-tétel folytonosan differenciálható függvényekre vonatkozó alakjából következik. Például, az Y függvény egzisztenciájának bizonyításához elég az

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}; \quad ((x,z),y) \mapsto f(x,y,z)$$

függvény $((x_0, z_0), y_0)$ ponton áthaladó folytonosan differenciálható implicit függvényét venni, ami azért lehetséges, mert

$$(\partial_2\Phi)((x_0,z_0),y_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x_0,y_0,z_0) \neq 0,$$

tehát a $(\partial_2\Phi)((x_0, z_0), y_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ operátor lineáris homeomorfizmus.

b) Ha $(y, z) \in \mathrm{Dom}(X)$, $(x, z) \in \mathrm{Dom}(Y)$ és $(x, y) \in \mathrm{Dom}(Z)$, akkor az implicitfügg-vény-tételben szereplő derivált-formulát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\Big(\frac{\partial X}{\partial y}\Big)(y,z) = -\frac{\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(X(y,z),y,z)}{\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(X(y,z),y,z)}, \quad \Big(\frac{\partial X}{\partial z}\Big)(y,z) = -\frac{\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)(X(y,z),y,z)}{\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(X(y,z),y,z)},$$

$$\Big(\frac{\partial Y}{\partial x}\Big)(x,z) = -\frac{\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x,Y(x,z),z)}{\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x,Y(x,z),z)}, \quad \Big(\frac{\partial Y}{\partial z}\Big)(x,z) = -\frac{\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)(x,Y(x,z),z)}{\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x,Y(x,z),z)},$$

$$\Big(\frac{\partial Z}{\partial x}\Big)(x,y) = -\frac{\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x,y,Z(x,y))}{\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)(x,y,Z(x,y))}, \quad \Big(\frac{\partial Z}{\partial z}\Big)(x,y) = -\frac{\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x,y,Z(x,y))}{\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)(x,y,Z(x,y))}.$$

Ezekből az $X(y_0, z_0) = x_0$, $Y(x_0, z_0) = y_0$ és $Z(x_0, y_0) = z_0$ egyenlőségek alapján, az $(x, y, z) := (x_0, y_0, z_0)$ választással kapjuk a Barkhausen-relációkat.

c) A válasz: nem. Ehhez csak rá kell nézni az imént felírt egyenlőségekre, és elég ezeket behelyettesíteni a c) állításban szereplő egyenletekbe. Ekkor azonnal látható, hogy két olyan nem triviális parciális differenciálegyenletet kapunk az X, Y és Z függvényekre, amelyek egyáltalán nem szükségképpen teljesülnek.)

5. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $X : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ végtelenszer differenciálható függvény, amelyre $2 \in \mathrm{Dom}(X)$, $X(2) = -2$, és minden $p \in \mathrm{Dom}(X)$ esetén az $x := X(p)$ szám megoldása az

$$x^5 - p(x^4 + x^3 - 1) + p^3x^2 - (p^2 + 3)x = 0$$

ötödfokú egyenletnek. Mit mondhatunk az ilyen tulajdonságú X függvények egyértelműségéről?

(*Útmutatás.* Tekintsük az

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad (p, x) \mapsto x^5 - p(x^4 + x^3 - 1) + p^3x^2 - (p^2 + 3)x$$

végtelenszer differenciálható függvényt és igazoljuk, hogy $f(2, -2) = 0$ és

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(2, -2) \neq 0.$$

Ezután alkalmazhatjuk az implicitfüggvény-tételt.)

6. (*Egzakt differenciálegyenletek és Euler-multiplikátorok.*) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz, és legyenek $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvények. Ekkor a

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

differenciálegyenlet

- *baloldali megoldásának* nevezünk minden olyan $X : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre minden $y \in \mathrm{Dom}(X)$ esetén $(X(y), y) \in \Omega$ és

$$P(X(y), y)\Big(\frac{dX}{dy}\Big)(y) + Q(X(y), y) = 0$$

teljesül.

- *jobboldali megoldásának* nevezünk minden olyan $Y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre minden $x \in \mathrm{Dom}(Y)$ esetén $(x, Y(x)) \in \Omega$ és

$$P(x, Y(x)) + Q(x, Y(x))\Big(\frac{dY}{dx}\Big)(x) = 0$$

teljesül.

Továbbá, ha $U \subseteq \Omega$ olyan halmaz, hogy létezik olyan $f : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre minden $(x, y) \in U$ esetén fennállnak a

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x, y) = P(x, y), \quad \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x, y) = Q(x, y)$$

egyenlőségek, akkor azt mondjuk, hogy a $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ differenciálegyenlet az U halmazon *egzakt*, és minden ilyen tulajdonságú $f : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt az adott differenciálegyenlet *első integráljának* nevezünk az U halmazon.

a) Ha az f függvény a $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ differenciálegyenlet *kétszer differenciálható* első integrálja az $U \subseteq \Omega$ halmazon, akkor a P és Q függvények differenciálhatóak az U halmazon, és minden $(x, y) \in U$ esetén

$$\Big(\frac{\partial P}{\partial y}\Big)(x, y) = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\Big)(x, y)$$

teljesül. (Ez a kétszer differenciálható első integrál létezésének természetes szükséges feltétele.)

b) Ha az f függvény a $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ differenciálegyenlet első integrálja az

$U \subseteq \Omega$ halmazon, valamint $X : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ (illetve $Y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$) olyan baloldali (illetve jobboldali) megoldása az adott differenciálegyenletnek, hogy $\mathrm{Dom}(X)$ (illetve $\mathrm{Dom}(Y)$) intervallum $\mathbb{R}$-ben, és minden $y \in \mathrm{Dom}(X)$ (illetve $x \in \mathrm{Dom}(Y)$) esetén $(X(y), y) \in U$ (illetve $(x, Y(x)) \in U$), akkor a

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(X) \to \mathbb{R}; \quad & y \mapsto f(X(y), y), \\ \mathrm{Dom}(Y) \to \mathbb{R}; \quad & x \mapsto f(x, Y(x)) \end{aligned}$$

függvények *állandók*.

c) Megfordítva, ha az f függvény a $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ differenciálegyenlet első integrálja az $U \subseteq \Omega$ halmazon, és $X : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ (illetve $Y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$) olyan differenciálható függvények, hogy minden $y \in \mathrm{Dom}(X)$ (illetve $x \in \mathrm{Dom}(Y)$) esetén $(X(y), y) \in U$ (illetve $(x, Y(x)) \in U$), valamint a

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(X) \to \mathbb{R}; \quad & y \mapsto f(X(y), y), \\ \mathrm{Dom}(Y) \to \mathbb{R}; \quad & x \mapsto f(x, Y(x)) \end{aligned}$$

függvények állandók, akkor X (illetve Y) az adott differenciálegyenletnek baloldali (illetve jobboldali) megoldása.

d) Tegyük fel, hogy $U \subseteq \Omega$ olyan halmaz, amelyhez létezik olyan $\mu : U \to \mathbb{R}$ sehol sem nulla függvény, hogy van olyan $f : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre minden $(x, y) \in U$ esetén

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \mu(x, y)P(x, y), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \mu(x, y)Q(x, y).$$

(Ilyenkor azt mondjuk, hogy a μ függvény a $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ differenciálegyenlet *Euler-multiplikátora* az U halmazon.)

Igazoljuk konkrét példával, hogy létezhet egy $U \subseteq \Omega$ halmazon a differenciálegyenletnek Euler-multiplikátora úgy, hogy az U halmazon a differenciálegyenlet *nem egzakt*. Mutassuk meg, hogy ha az $U \subseteq \Omega$ halmazon létezik a differenciálegyenletenek egy μ Euler-multiplikátora (az $f : U \to \mathbb{R}$ függvénnyel együtt), akkor a b) és c) állítások f-re teljesülnek, holott f nem szükségképpen első integrálja az adott differenciálegyenletnek.)

12. fejezet

Inverzfüggvény-tétel

12.1. Az inverz függvény simasága

12.1.1. Állítás. (Az inverz függvény deriváltja) *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, amelyben f differenciálható, és tegyük fel, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak, amelyre f injektív az U halmazon, és $(f|_U)^{-1}$ differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban. Ekkor $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ lineáris homeomorfizmus E és F között, továbbá*

$$(\mathrm{D}(f|_U)^{-1})(f(\mathfrak{a})) = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}.$$

Bizonyítás. A feltevés szerint f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, valamint $(f|_U)^{-1}$ dif ferenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, így a függvénykompozíció differenciálási tétele szerint $(f|_U)^{-1} \circ f$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $(\mathrm{D}((f|_U)^{-1} \circ f))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}(f|_U)^{-1})(f(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$. Ugyanakkor $(f|_U)^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ az U halmazon, így a differenciálhatóság lokalitása folytán $(\mathrm{D}((f|_U)^{-1} \circ f))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}\mathrm{id}_E)(a) = \mathrm{id}_E$.

Megfordítva, a feltevés szerint $(f|_U)^{-1}$ differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, és f differenciálható az $\mathfrak{a}$ $(= (f|_U)^{-1}(f(\mathfrak{a})))$ pontban, ezért ismét a függvénykompozíció differenciálási tétele szerint $f \circ (f|_U)^{-1}$ differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, és $(\mathrm{D}(f \circ (f|_U)^{-1}))(f(\mathfrak{a})) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ (\mathrm{D}(f|_U)^{-1})(f(\mathfrak{a}))$. Ugyanakkor $f \circ (f|_U)^{-1} = \mathrm{id}_F$ az $f\langle U\rangle$ halmazon, ami az $f(\mathfrak{a})$ pontnak környezete, így a differenciálhatóság lokalitása folytán $(\mathrm{D}(f \circ (f|_U)^{-1}))(f(\mathfrak{a})) = (\mathrm{D}\mathrm{id}_F)(f(\mathfrak{a})) = \mathrm{id}_F$.

Ez azt jelenti, hogy

$$(\mathrm{D}(f|_U)^{-1})(f(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \mathrm{id}_E, \quad (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ (\mathrm{D}(f|_U)^{-1})(f(\mathfrak{a})) = \mathrm{id}_F$$

teljesül, tehát $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ *bijekció* E és F között, továbbá

$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1} = (\mathrm{D}(f|_U)^{-1})(f(\mathfrak{a})) \in \mathscr{L}(F; E),$$

tehát $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ homeomorfizmus is. ∎

12.1.2. Állítás. (Az inverz függvény simasága) *Legyenek E, F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan halmaz, hogy f az U halmazon n-szer (folytonosan) differenciálható, és f injektív az U halmazon. Ha az $(f|_U)^{-1}$ függvény egyszer (folytonosan) differenciálható az $f\langle U\rangle$ halmazon, akkor az $(f|_U)^{-1}$ az $f\langle U\rangle$ halmazon n-szer is (folytonosan) differenciálható.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát az f-re és U-ra vonatkozó feltevések mellett feltesszük, hogy $(f|_U)^{-1}$ az $f\langle U\rangle$ halmazon *nem* n-szer (folytonosan) differenciálható.

Legyen m a legkisebb elem $\mathbb{N}^*$-ban, amelyre $(f|_U)^{-1}$ az $f\langle U\rangle$ halmazon nem m-szer (folytonosan) differenciálható. A hipotézis szerint $m \le n$, továbbá $1 < m$, mert feltettük, hogy $(f|_U)^{-1}$ az $f\langle U\rangle$ halmazon egyszer (folytonosan) differenciálható. Ugyanakkor az m definíciójából következik, hogy $(f|_U)^{-1}$ az $f\langle U\rangle$ halmazon $m-1$-szer (folytonosan) differenciálható.

Minden $x \in U$ esetén f az x pontban differenciálható, és f az $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ halmazon injektív, valamint $(f|_U)^{-1}$ az $f(x)$ pontban differenciálható, így az előző állítás szerint a $(\mathrm{D}f)(x) : E \to F$ operátor lineáris homeomorfizmus, és $(\mathrm{D}(f|_U)^{-1})(f(x)) = ((\mathrm{D}f)(x))^{-1}$. Másként fogalmazva: minden $y \in f\langle U\rangle$ esetén a $(\mathrm{D}f)((f|_U)^{-1}(y)) : E \to F$ operátor lineáris homeomorfizmus, és $(\mathrm{D}(f|_U)^{-1})(y) = ((\mathrm{D}f)((f|_U)^{-1}(y)))^{-1}$. Ez azt jelenti, hogy a $\mathrm{D}(f|_U)^{-1}$ deriváltoperátor az $f\langle U\rangle$ halmazon egyenlő a következő három leképezés kompozíciójával:

$$\begin{aligned} f\langle U\rangle \to E;&\quad y \mapsto (f|_U)^{-1}(y);\\ U \to \mathscr{L}(E;F);&\quad x \mapsto (\mathrm{D}f)(x);\\ \mathscr{H}(E;F) \to \mathscr{L}(F;E);&\quad u \mapsto u^{-1}, \end{aligned}$$

ahol $\mathscr{H}(E;F)$ jelöli az $E \to F$ lineáris homeomorfizmusok halmazát. Az első leképezés $m-1$-szer (folytonosan) differenciálható, a második n-szer (folytonosan) differenciálható (és $m-1 < n$), továbbá a harmadik leképezés analitikus, így végtelenszer differenciálható, mert E és F Banach-terek. Ezért a $\mathrm{D}(f|_U)^{-1}$ deriváltoperátor az $f\langle U\rangle$ halmazon $m-1$-szer (folytonosan) differenciálható, következésképpen az $(f|_U)^{-1}$ függvény az $f\langle U\rangle$ halmazon m-szer (folytonosan) differenciálható, ami ellentmond az m szám definíciójának. ■

12.2. Inverzfüggvény-tétel

12.2.1. Tétel. (Inverzfüggvény-tétel) *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, amelyben f szigorúan differenciálható, továbbá a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ deriváltoperátor homeomorfizmus. Ha E teljes, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt környezete, amelyre $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, f az U halmazon injektív, $f\langle U\rangle$ nyílt halmaz, $f|_U$ és $(f|_U)^{-1}$ Lipschitz-függvények (tehát f homeomorfizmus U és $f\langle U\rangle$ között), és $(f|_U)^{-1}$ szigorúan differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban.*

Bizonyítás. Két független bizonyítást adunk. Az elsőben nem használjuk fel az implicitfüggvény-tételt, míg a másodikban hivatkozunk az implicitfüggvény-tételre.

(*I. bizonyítás.*) Minden $y \in F$ esetén értelmezzük a következő függvényt:

$$\Phi_y : \mathrm{Dom}(f) \to E;\quad x \mapsto x - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(f(x) - y).$$

Nyilvánvaló, hogy minden $F \ni y$-ra és $\mathrm{Dom}(f) \ni x$-re az $\Phi_y(x) = x$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $f(x) = y$.

Ha $y \in F$, akkor $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\begin{aligned} \Phi_y(x_2) - \Phi_y(x_1) &= x_2 - x_1 - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(f(x_2) - f(x_1)) =\\ &= -((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(f(x_2) - f(x_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1)). \end{aligned}$$

Legyen $C \in]0,1[$ rögzített valós szám, és vegyünk olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}\|\varepsilon \le C$. Az f szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ezért választhatunk olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és minden $x_1, x_2 \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ esetén

$$\|f(x_2) - f(x_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1)\| \le \varepsilon\|x_2 - x_1\|.$$

Továbbá, az f függvény az $\mathfrak{a}$ pontbeli szigorú differenciálhatósága miatt az $\mathfrak{a}$ valamely környezetén Lipschitz-függvény, ezért az $r \in \mathbb{R}_+^*$ szám megválasztható úgy, hogy f a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ gömbön Lipschitz-függvény – így folytonos is – legyen. A fentiek szerint ekkor minden $y \in F$ és $x_1, x_2 \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ pontra

$$\|\Phi_y(x_2) - \Phi_y(x_1)\| \leq \|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}\|\|f(x_2) - f(x_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1)\| \leq \\ \leq \|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}\|\varepsilon\|x_2 - x_1\| \leq C\|x_2 - x_1\|$$

Tehát minden $F \ni y$-ra a $\Phi_y|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})} : \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}) \to E$ függvény C együtthatójú Lipschitz-függvény.

Most megmutatjuk, hogy $f(\mathfrak{a})$-hoz elég közeli y értékekre az $\Phi_y|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})}$ leképezés a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ gömböt önmagába képezi le. Ehhez megjegyezzük, hogy az

$$F \to E; \quad y \mapsto \Phi_y(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(f(\mathfrak{a}) - y)$$

leképezés nyilvánvalóan folytonos függvény, mert a $((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1} : F \to E$ inverz-operátor folytonos. Ez a függvény $f(\mathfrak{a})$-hoz az $\mathfrak{a}$-t rendeli, ezért az $(1-C)r \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik $f(\mathfrak{a})$-nak olyan V_r nyílt környezete, amelyre minden $y \in V_r$ esetén $\Phi_y(\mathfrak{a}) \in \mathrm{B}_{(1-C)r}(\mathfrak{a})$. Ekkor $y \in V_r$ és $x \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ esetén $\|\Phi_y(x) - \Phi_y(\mathfrak{a})\| \leq C\|x - \mathfrak{a}\| \leq Cr$, továbbá $\|\Phi_y(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\| \leq (1 - C)r$, következésképpen

$$\|\Phi_y(x) - \mathfrak{a}\| \leq \|\Phi_y(x) - \Phi_y(\mathfrak{a})\| + \|\Phi_y(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\| \leq Cr + (1 - C)r = r.$$

Tehát minden $y \in V_r$ esetén az $\Phi_y|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})}$ függvény a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ gömbön értelmezett, és $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$-be érkezik.

A feltevés szerint E Banach-tér, ezért a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}) \subseteq E$ zárt gömb teljes halmaz, tehát a norma által generált metrika leszűkítésével ellátva *teljes metrikus tér.* Minden $y \in V_r$ esetén a $\Phi_y|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})}$ leképezés ezt a teljes metrikus teret önmagába képezi, és C együtthatójú Lipschitz-függvény, vagyis kontrakció, mert $C \in]0, 1[$. Ugyanakkor minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ pontra a $V_r \to \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$; $y \mapsto (\Phi_y|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})})(x)$ függvény folytonos. Ezért a paraméteres kontrakciók tétele (V. fejezet, 9. pont) alapján egyértelműen létezik az a $\tilde{g} : V_r \to \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ függvény, amely minden $y \in V_r$ ponthoz az $\Phi_y|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})}$ függvény egyetlen fixpontját rendeli, és ez a $\tilde{g}$ leképezés folytonos (természetesen a V_r halmazt az F normája által generált metrika leszűkítésével ellátva). Tehát $\tilde{g} : V_r \to \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ az a folytonos függvény, amelyre minden $V_r \ni y$ esetén $\Phi_y(\tilde{g}(y)) = \tilde{g}(y)$, azaz $f(\tilde{g}(y)) = y$. Ez azt jelenti, hogy $\tilde{g}$ az $f|_{\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})}$ függvénynek *folytonos jobbinverze.* Az is könnyen látható, hogy $\tilde{g}(f(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$, mert nyilvánvalóan $\Phi_{f(\mathfrak{a})}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, tehát $\mathfrak{a}$ fixpontja az $\Phi_{f(\mathfrak{a})}$ függvénynek.

Legyen most

$$U := \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \cap \overset{-1}{f}\langle V_r \rangle, \quad V := V_r \cap \overset{-1}{\tilde{g}}\langle U \rangle,$$

és értelmezzük a $g := \tilde{g}|_V$ függvényt. Meg fogjuk mutatni, hogy U olyan halmaz, amelynek a létezését állítottuk, és $g = (f|_U)^{-1}$.

Ehhez először megjegyezzük, hogy az f függvény folytonos a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ halmazon, és a $V_r \subseteq F$ halmaz nyílt, ezért U nyílt halmaz E-ben, valamint $\mathfrak{a} \in U$. A $\tilde{g}$ függvény folytonos, és az $U \subseteq E$ halmaz nyílt, ezért V nyílt halmaz F-ben, valamint $f(\mathfrak{a}) \in V$, mert $\tilde{g}(f(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a} \in U$. Világos, hogy $g\langle V \rangle \subseteq U$, és $y \in V$ esetén $((f|_U) \circ g)(y) = f(\tilde{g}(y)) = y$, vagyis $(f|_U) \circ g = \mathrm{id}_V$. Megfordítva, világos, hogy $f\langle U \rangle \subseteq V_r$, és $x \in U$ esetén $\Phi_{f(x)}(x) = x$, vagyis x a $\Phi_{f(x)}$ függvénynek $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$-beli fixpontja; de a definíció szerint $\tilde{g}(f(x))$ az egyetlen fixpontja $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$-ban ennek a függvénynek, így $\tilde{g}(f(x)) = x$. Ebből következik, hogy $x \in U$ esetén $f(x) \in V_r \cap \overset{-1}{\tilde{g}}\langle U\rangle =: V$, és $(g \circ (f|_U))(x) = \tilde{g}(f(x)) = x$, vagyis $g \circ (f|_U) = \mathrm{id}_V$.

Ezzel megmutattuk, hogy U nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, f injektív az U halmazon, $f\langle U\rangle = V$ nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak, és $f|_U$ homeomorfizmus U és $f\langle U\rangle$ között, hiszen $f|_U$ folytonos, és az $(f|_U)^{-1} = g$ függvény is folytonos. Azt kell még igazolni, hogy $(f|_U)^{-1}$ szigorúan differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban.

Ehhez először bebizonyítjuk, hogy g Lipschitz-függvény a V halmazon (tehát a definíciós tartományán). Valóban, $y_1, y_2 \in V$ esetén $g(y_1), g(y_2) \in U \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$, így

$$\|g(y_2) - g(y_1)\| = \|\Phi_{y_2}(g(y_2)) - \Phi_{y_1}(g(y_1))\| \leq \|\Phi_{y_2}(g(y_2)) - \Phi_{y_1}(g(y_2))\| + \\ + \|\Phi_{y_1}(g(y_2)) - \Phi_{y_1}(g(y_1))\| \leq \|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}\|\|y_2 - y_1\| + C\|g(y_2) - g(y_1)\|,$$

ahol felhasználtuk azt, hogy

- a g definíciója szerint minden $V \ni y$-ra $g(y) = \Phi_y(g(y))$,
- minden $y \in F$ és $x_1, x_2 \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ esetén:

$$\|\Phi_y(x_2) - \Phi_y(x_1)\| \leq C\|x_2 - x_1\|,$$

- minden $y_1, y_2 \in F$ és $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén:

$$\|\Phi_{y_2}(x) - \Phi_{y_1}(x)\| = \|x - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(f(x) - y_2) - x + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(f(x) - y_1)\| \\ = \|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(y_2 - y_1)\| \leq \|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}\|\|y_2 - y_1\|.$$

Tehát $C \in]0,1[$ alapján kapjuk, hogy ha $y_1, y_2 \in V$, akkor

$$\|g(y_2) - g(y_1)\| \leq \Big(\frac{\|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}\|}{1 - C}\Big)\|y_2 - y_1\|,$$

így g Lipschitz-függvény.

Végül megmutatjuk, hogy a g függvény (vagyis $(f|_U)^{-1}$) szigorúan differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, vagyis

$$\lim_{(y_1,y_2)\to(f(\mathfrak{a}),f(\mathfrak{a}))} \frac{g(y_2) - g(y_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(y_2 - y_1)}{\|y_2 - y_1\|} = 0$$

teljesül. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli szigorú differenciálhatósága alapján vegyük az $\mathfrak{a}$-nak olyan W nyílt környezetét, amelyre $W \subseteq U$, és minden $x_1, x_2 \in W$ esetén

$$\|f(x_2) - f(x_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1)\| \leq \varepsilon\|x_2 - x_1\|.$$

A W halmaz nyílt E-ben, és g folytonos, így $\overset{-1}{g}\langle W\rangle = f\langle W\rangle$ nyílt halmaz F-ben, amelynek $f(\mathfrak{a})$ eleme. Tehát $f\langle W\rangle$ nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak, és ha $y_1, y_2 \in f\langle W\rangle$, akkor az $x_1 := g(y_1)$, $x_2 := g(y_2)$ jelöléseket bevezetve kapjuk, hogy

$$\|g(y_2) - g(y_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(y_2 - y_1)\| = \|x_2 - x_1 - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(f(x_2) - f(x_1))\| = \\ = \|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}(f(x_2) - f(x_1) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_2 - x_1))\| \leq \varepsilon\|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}\|\|x_2 - x_1\| = \\ = \varepsilon\|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}\|\|g(y_2) - g(y_1)\| \leq \varepsilon\Big(\frac{\|((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}\|^2}{1 - C}\Big)\|y_2 - y_1\|.$$

Ez azt jelenti, hogy g szigorúan differenciálható a $f(\mathfrak{a})$ pontban.

(*II. bizonyítás*) Az f függvény szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ezért vehetjük $\mathfrak{a}$-nak olyan U_0 nyílt környezetét E-ben, amelyre $U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és f Lipschitz-függvény az U_0 halmazon.

Vezessük be a következő függvényt:

$$\Psi : F \times U_0 \to F; \quad (y, x) \mapsto f(x) - y.$$

Nyilvánvaló, hogy $x \in U_0$ és $y \in F$ esetén teljesül a

$$\Psi(y, x) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) = y$$

kijelentés. Világos továbbá, hogy $(f(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}) \in \mathrm{Dom}(\Psi)$ és $\Psi(f(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}) = 0$.

A $\Psi(\cdot, \mathfrak{a}) : F \to F$ parciális függvény egyenlő az $F \to F$; $y \mapsto f(\mathfrak{a}) - y$ folytonos affin függvénnyel, ezért ez differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban és $(\partial_1\Psi)(f(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}) = -\mathrm{id}_F$. A $\Psi(f(\mathfrak{a}), \cdot) : U_0 \to F$ parciális függvény egyenlő az $U_0 \to F$; $x \mapsto f(x) - f(\mathfrak{a})$ függvénnyel, ezért ez differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban és $(\partial_2\Psi)(f(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ lineáris homeomorfizmus E és F között. Ebből az is látszik, hogy ha Ψ differenciálható, akkor $(\mathrm{D}\Psi)(f(\mathfrak{a}), \mathfrak{a})$ egyenlő a következő folytonos lineáris operátorral:

$$u : F \times E \to F; \quad (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mapsto -\mathbf{y} + ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))\,(\mathbf{x}).$$

Megmutatjuk, hogy Ψ valójában *szigorúan differenciálható* a $(f(\mathfrak{a}), \mathfrak{a})$ pontban. Valóban, Ψ definíciója szerint minden $(y', x'), (y, x) \in \mathrm{Dom}(\Psi)$ esetén

$$\begin{aligned} &\Psi(y', x') - \Psi(y, x) - u(y' - y, x' - x) = \\ &= (f(x') - y') - (f(x) - y) + (y' - y) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))\,(x' - x) = \\ &= f(x') - f(x) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))\,(x' - x). \end{aligned}$$

Az f függvény szigorúan differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ estén van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}) \subseteq U_0$ és minden $x, x' \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ esetén

$$\|f(x') - f(x) - ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))\,(x' - x)\| \le \varepsilon\|x' - x\|.$$

Ekkor $F \times \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ olyan környezete $(f(\mathfrak{a}), \mathfrak{a})$-nak $F \times E$-ben, amely részhalmaza $\mathrm{Dom}(\Psi)$-nek, és minden $(y', x'), (y, x) \in F \times \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a})$ esetén $\|x' - x\| \le \|(y' - y, x' - x)\| < \delta$, tehát

$$\|\Psi(y', x') - \Psi(y, x) - u(y' - y, x' - x)\| \le \varepsilon\|x' - x\| \le \varepsilon\|(y' - y, x' - x)\|.$$

Ez azt jelenti, hogy Ψ szigorúan differenciálható a $(f(\mathfrak{a}), \mathfrak{a})$ pontban.

Ezért az implicitfüggvény-tétel alapján létezik $f(\mathfrak{a})$-nak olyan V' nyílt környezete F-ben, és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U' nyílt környezete E-ben, hogy $V' \times U' \subseteq \mathrm{Dom}(\Psi)$, vagyis $U' \subseteq U_0$, és létezik Ψ-nek egyetlen olyan $(f(\mathfrak{a}), \mathfrak{a})$ ponton áthaladó φ implicit függvénye, amelyre $\mathrm{Dom}(\varphi) = V'$ és $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq U'$, továbbá φ Lipschitz-függvény és szigorúan differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban.

Ha $y \in V'$, akkor $(y, \varphi(y)) \in V' \times U'$ és $\Psi(y, \varphi(y)) = \Psi(f(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}) = 0$, ezért $f(\varphi(y)) = y$. Ez azt jelenti, hogy $f \circ \varphi = \mathrm{id}_{V'}$.

Értelmezzük most a következő halmazokat:

$$U := (\overset{-1}{f|_{U'}})\langle V' \rangle, \quad V := \overset{-1}{\varphi}\langle U \rangle.$$

Az $f|_{U'} : U' \to F$ függvény folytonos (sőt $U' \subseteq U_0$ miatt Lipschitz-függvény), és U' nyílt halmaz E-ben, és V' nyílt halmaz F-ben, ezért a folytonosság topologikus jellemzése alapján U nyílt halmaz E-ben, és természetesen $\mathfrak{a} \in U \subseteq U' \subseteq U_0$. Ebből –ismét a folytonosság topologikus jellemzését valamint φ folytonosságát alkalmazva– kapjuk, hogy V nyílt halmaz F-ben és természetesen $f(\mathfrak{a}) \in V \subseteq V'$.

Ha $y \in V \subseteq V'$, akkor $f \circ \varphi = \mathrm{id}_{V'}$ miatt $f(\varphi(y)) = y$ teljesül, ugyanakkor $\varphi(y) \in U$ folytán $(f|_U)(\varphi(y)) = y$ is írható. Tehát az $f|_U : U \to F$ és $\varphi|_V : V \to U$ függvényekre fennáll az

$$(f|_U) \circ (\varphi|_V) = \mathrm{id}_V$$

függvény-egyenlőség.

Ha $x \in U \subseteq U'$, akkor az U definíciója szerint $f(x) \in V'$, és a Ψ definíciója alapján triviális az, hogy $\Psi(f(x), x) = 0$. Ugyanakkor, $x \in U$ esetén $\Psi(f(x), \varphi(f(x))) = 0$ is teljesül, ezért a φ implicit függvény egyértelműsége alapján $\varphi(f(x)) = x \in U$, így a V definíciója szerint még $f(x) \in V$ is igaz. Ez azt jelenti, hogy $f\langle U\rangle \subseteq V$ és az $f|_U : U \to V$ és $\varphi|_V : V \to U$ függvényekre fennáll az

$$(\varphi|_V) \circ (f|_U) = \mathrm{id}_U$$

függvény-egyenlőség.

Tehát U nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, továbbá $f\langle U\rangle = V$ nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak F-ben, és $f|_U$ Lipschitz-függvény, és $(f|_U)^{-1} = \varphi|_V$ szintén Lipschitz-függvény. Végül, $(f|_U)^{-1}$ az $f(\mathfrak{a})$ pontban szigorúan differenciálható, mert ez φ-re igaz, és $(f|_U)^{-1}$ egyenlő φ-vel a V halmazon, ami környezete $f(\mathfrak{a})$-nak, így elég a szigorú differenciálhatóság lokalitására hivatkozni. ■

Megjegyzések. Az inverzfüggvény-tétellel kapcsolatban a következő megjegyzéseket tesszük.

1) Ha két metrikus tér között létezik olyan bijekció, amely egyenletesen folytonos és az inverze is egyenletesen folytonos, akkor a metrikus terek egyszerre teljesek, vagy egyszerre nem teljesek (11. pont, **1**. gyakorlat). Az inverzfüggvény-tétel feltételében szereplő $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ deriváltoperátor E és F között olyan bijekció, amely egyenletesen folytonos és az inverze is egyenletesen folytonos, továbbá E teljes, ezért az előírt feltételek mellett F is Banach-tér. Vagyis az F teljessége implicit formában szintén elő van írva.

2) A funkcionálanalízis elemeiben majd igazoljuk Banach nyíltleképezés-tételét (**FUN** 11.1.3.), amelyből következik, hogy Banach-terek között ható folytonos lineáris bijekció inverze szükségképpen folytonos. Ezért az inverzfüggvény-tételben a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) : E \to F$ deriváltoperátorra azt is előírhatjuk, hogy E és F mindketten Banach-terek legyenek, valamint $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ bijekció.

3) Ha E vagy F véges dimenziós, és a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ deriváltoperátor bijekció, akkor E és F mindketten véges dimenziósak, $\dim(E) = \dim(F)$, és a $((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))^{-1}$ inverzoperátor szükségképpen folytonos. Ezért véges dimenziós E és F esetén a tétel alkalmazhatóságához elég azt igazolni, hogy $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ bijekció (természetesen az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli szigorú differenciálhatósága mellett).

4) A tételben az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli *szigorú differenciálhatóságát* tettük fel; nem elegendő az, ha az f függvény csak differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ha például $f := \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$, akkor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a 0-ban nem szigorúan differenciálható, és $(\mathrm{D}f)(0) \neq 0$, de f a 0 pont kivételével sehol sem folytonos, így f-hez nem létezik a 0-nak olyan U

környezete, amelyről a tételben szó van. Ugyanakkor könnyen belátható, hogy minden $r \in]0, 1/2]$ valós számra az $f|_{]-r,r[}$ függvény injekció és $]-r(1-r), r[\subseteq f\langle]-r, r[\rangle$, tehát $f\langle]-r, r[\rangle$ az $f(0) = 0$ pontnak környezete.

12.3. Inverzfüggvény-tétel folytonosan differenciálható függvényekre

12.3.1. Definíció. *Legyenek E, F normált terek és $n \in \mathbb{N}$ vagy $n = \infty$. Azt mondjuk, hogy az $U \subseteq E$ és $V \subseteq F$ nyílt halmazok* C^n**-diffeomorfak**, *ha létezik olyan $f : U \to V$ bijekció, hogy a $f : U \to F$ függvény C^n-osztályú és az $f^{-1} : V \to E$ függvény C^n-osztályú; minden ilyen tulajdonságú f függvényt U és V közötti* C^n-**diffeomorfizmusnak** *nevezünk.*

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha E, F normált terek, akkor az $U \subseteq E$ és $V \subseteq F$ nyílt halmazok pontosan akkor C^0-diffeomorfak, ha létezik közöttük homeomorfizmus, vagyis a "C^0-diffeomorfitás" és a "homeomorfitás" ugyanazt jelenti.

12.3.2. Tétel. *Legyen E Banach-tér, F normált tér, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, amelynek létezik olyan környezete, amelyen az f függvény n-szer folytonosan differenciálható, és a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ deriváltoperátor homeomorfizmus. Ekkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt környezete, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és $f\langle U\rangle$ nyílt halmaz F-ben, továbbá az $f|_U$ függvény C^n-diffeomorfizmus U és $f\langle U\rangle$ között.*

Bizonyítás. Legyen U_1 az $\mathfrak{a}$-nak olyan nyílt környezete, amelyre $U_1 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és f az U_1 halmazon n-szer folytonosan differenciálható.

A hipotézis szerint a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{H}(E; F)$, ahol $\mathscr{H}(E; F)$ jelöli az $E \to F$ lineáris homeomorfizmusok halmazát. Az E teljessége miatt $\mathscr{H}(E; F)$ nyílt halmaz az $\mathscr{L}(E; F)$ operátortérben, ezért létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U_2 nyílt környezete, hogy $U_2 \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ és $(\mathrm{D}f)\langle U_2\rangle \subseteq \mathscr{H}(E; F)$.

A feltételek szerint $U_1 \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, tehát $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$-nek, és a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ezért f az $\mathfrak{a}$-ban szigorúan differenciálható, továbbá a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ deriváltoperátor homeomorfizmus. Ezért az inverzfüggvény-tétel alapján létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U_3 nyílt környezete, hogy $U_3 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, f az U_3 halmazon injektív, $f\langle U_3\rangle$ nyílt halmaz, f homeomorfizmus U_3 és $f\langle U_3\rangle$ között, és $(f|_{U_3})^{-1}$ szigorúan differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban.

Legyen most $U := U_1 \cap U_2 \cap U_3$; megmutatjuk, hogy U olyan halmaz, amelynek a létezését állítottuk. Valóban, az U halmaz olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az U halmazon, mert $U \subseteq U_1$, és az f függvény injektív az U halmazon, mert $U \subseteq U_3$. Továbbá, bevezetve a $g := (f|_U)^{-1}$ jelölést nyilvánvaló, hogy $f\langle U\rangle = \overset{-1}{g}\langle U\rangle$, mert $U \subseteq U_3$, tehát g folytonossága miatt $f\langle U\rangle$ nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak. Azt kell még igazolni, hogy az $(f|_U)^{-1}$ függvény az $f\langle U\rangle$ halmazon n-szer folytonosan differenciálható. Az inverzfüggvény simaságára vonatkozó állítás alapján ehhez elegendő azt megmutatni, hogy az $(f|_U)^{-1}$ függvény folytonosan differenciálható. A folytonos és szigorú differenciálhatóság kapcsolatának tétele és $f\langle U\rangle$ nyíltsága miatt ehhez elég azt bizonyítani, hogy $(f|_U)^{-1}$ az $f\langle U\rangle$ minden pontjában szigorúan differenciálható.

Legyen $y \in f\langle U\rangle$ rögzített, és legyen $x \in U$ az a pont, amelyre $f(x) = y$. Az f függvény az x pontban szigorúan differenciálható, mert $U \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ és $\mathrm{D}f$ az x pontban folytonos. Továbbá, a $(\mathrm{D}f)(x)$ deriváltoperátor homeomorfizmus E és F

között, mert $U \subseteq U_2$. Ezért az inverzfüggvény-tétel alapján van olyan U_x nyílt környezete x-nek, amelyre $U_x \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, f az U_x halmazon injektív, $f\langle U_x\rangle$ nyílt halmaz, f homeomorfizmus U_x és $f\langle U_x\rangle$ között, és $(f|_{U_x})^{-1}$ szigorúan differenciálható az $f(x)$ pontban. Ekkor $f\langle U_x \cap U\rangle$ nyílt környezete $f(x)$-nek, és nyilvánvaló, hogy $(f|_U)^{-1} = (f|_{U_x})^{-1}$ az $f\langle U_x \cap U\rangle$ halmazon. Ezért $(f|_U)^{-1}$ is szigorúan differenciálható az $f(x)$ pontban, vagyis y-ban. ■

12.4. Az implicitfüggvény-tétel és az inverzfüggvény-tétel kapcsolata

12.4.1. Lemma. *Legyenek E, F, G halmazok, $f : E \times F \rightarrowtail G$ függvény, és értelmezzük a következő leképezést*

$$\hat{f} : \mathrm{Dom}(f) \to E \times G; \quad (x, y) \mapsto (x, f(x, y)).$$

a) *Ha $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$, és $\varphi : E \rightarrowtail F$ az f függvénynek $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthaladó implicit függvénye, akkor*

$$\hat{f}\langle \mathrm{gr}(\varphi)\rangle = \mathrm{Dom}(\varphi) \times \{f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\},$$

ahol $\mathrm{gr}(\varphi)$ *jelöli a φ függvény grafikonját, vagyis a* $\{(x, \varphi(x)) | x \in \mathrm{Dom}(\varphi)\}$ *halmazt (ami a mi függvény-értelmezésünk szerint egyenlő φ-vel).*

b) *Legyen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$, és legyenek $U \subseteq E$ és $V \subseteq F$ olyan halmazok, hogy $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in U \times V \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Ha $U \times \{f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\} \subseteq \hat{f}\langle U \times V\rangle$, és $\hat{f}$ injektív az $U \times V$ halmazon, akkor a*

$$\varphi : U \to V; \quad x \mapsto \mathrm{pr}_2((\hat{f}|_{U\times V})^{-1}(x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})))$$

leképezés az f függvénynek $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthaladó egyetlen olyan implicit függvénye, amely U-n értelmezett, és V-be érkezik, ahol $\mathrm{pr}_2 : E \times F \to F$ *a kanonikus projekció.*

Bizonyítás. a) Ha $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$, akkor $(x, \varphi(x)) \in \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(\hat{f})$, továbbá $\hat{f}(x, \varphi(x)) := (x, f(x, \varphi(x))) = (x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$, így $\hat{f}\langle \mathrm{gr}(\varphi)\rangle \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi) \times \{f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\}$. Ebből az is látszik, hogy $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$, akkor $(x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = \hat{f}(x, \varphi(x)) \in \hat{f}\langle \mathrm{gr}(\varphi)\rangle$, tehát $\mathrm{Dom}(\varphi) \times \{f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\} \subseteq \hat{f}\langle \mathrm{gr}(\varphi)\rangle$.

b) Nyilvánvaló, hogy a feltevések mellett a $\varphi : U \to V$ függvény jól értelmezett. Először azt igazoljuk, hogy φ az f függvénynek $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-n áthaladó implicit függvénye. Ehhez legyen $x \in U$ rögzített pont. Legyen $(x', y') := (\hat{f}|_{U\times V})^{-1}(x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$, tehát $(x', y') \in U \times V$ és $(x', f(x', y')) =: \hat{f}(x', y') = (x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$, ezért $x' = x$ és $f(x, y') = f(x', y') = f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. A φ definíciója szerint $\varphi(x) = y'$, ezért $(x, \varphi(x)) = (x, y') \in \mathrm{Dom}(f)$, és $f(x, \varphi(x)) = f(x, y') = f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Ez minden $U \ni x$-re igaz, így az $x := \mathfrak{a}$ pontra is, tehát

$$\hat{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) := (\mathfrak{a}, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = (\mathfrak{a}, f(\mathfrak{a}, \varphi(\mathfrak{a}))) = \hat{f}(\mathfrak{a}, \varphi(\mathfrak{a})),$$

így az $\hat{f}$ függvény $U \times V$ halmazon feltett injektivitása miatt $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \varphi(\mathfrak{a}))$, vagyis $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$. Ez azt jelenti, hogy φ az f függvénynek $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-n áthaladó implicit függvénye. Legyen most $\varphi' : U \to V$ olyan függvény, amely az f függvénynek $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-n áthaladó implicit függvénye; megmutatjuk, hogy $\varphi' = \varphi$. Ha $x \in U$, akkor $(x, \varphi(x)), (x, \varphi'(x)) \in U \times V \subseteq \mathrm{Dom}(f) =: \mathrm{Dom}(\hat{f})$, és

$$\hat{f}(x, \varphi(x)) := (x, f(x, \varphi(x))) = (x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = (x, f(x, \varphi'(x))) =: \hat{f}(x, \varphi'(x)),$$

így az $\hat{f}$ függvény $U \times V$ halmazon való injektivitása folytán $(x, \varphi(x)) = (x, \varphi'(x))$, tehát $\varphi(x) = \varphi'(x)$. ■

12.4.2. Lemma. *Legyenek E, F, G normált terek, $f : E \times F \rightarrowtail G$ függvény, és értelmezzük a következő leképezést:*

$$\hat{f} : \mathrm{Dom}(f) \to E \times G; \quad (x, y) \mapsto (x, f(x, y)).$$

Ha $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor a következő állítások ekvivalensek.

a) *Az $\hat{f} : E \times F \rightarrowtail E \times G$ függvény az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban szigorúan differenciálható, és a $(\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{L}(E \times F; E \times G)$ operátor homeomorfizmus $E \times F$ és $E \times G$ között.*

b) *Az $f : E \times F \rightarrowtail G$ függvény szigorúan differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, valamint a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{L}(F; G)$ operátor homeomorfizmus F és G között.*

Bizonyítás. Az $\hat{f}$ függvény pontosan akkor (szigorúan) differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, ha a $\mathrm{pr}_1 \circ \hat{f} \subseteq \mathrm{pr}_1$ és $\mathrm{pr}_2 \circ \hat{f} = f$ komponens-függvények (szigorúan) differenciálhatóak $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-ban, ahol $\mathrm{pr}_1 : E \times F \to E$ és $\mathrm{pr}_2 : E \times F \to F$ a kanonikus projekciók. A pr_1 függvény folytonos lineáris operátor, tehát mindenütt szigorúan differenciálható. Ezért az $\hat{f}$ függvény $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontbeli (szigorú) differenciálhatósága ekvivalens az f függvény $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontbeli (szigorú) differenciálhatóságával.

Tegyük fel, hogy $\hat{f}$ differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, és legyen $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in E \times F$. Ekkor

$$\begin{gathered}((\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = ((\partial_1 \hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e}) + ((\partial_2 \hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{f}) = \\ = ((\mathrm{D}\hat{f}(\cdot, \mathfrak{b}))(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}) + ((\mathrm{D}\hat{f}(\mathfrak{a}, \cdot))(\mathfrak{b}))(\mathbf{f}) = \\ = (\mathbf{e}, ((\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e})) + (0, ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{f})) = (\mathbf{e}, ((\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e}) + ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{f})).\end{gathered}$$

Ebből látható, hogy $\mathbf{f} \in F$ esetén $((\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{0}, \mathbf{f}) = (\mathbf{0}, ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{f}))$, amiből következik, hogy ha $(\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ injektív, akkor a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{L}(F; G)$ operátor is injektív. Megfordítva, ha az $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{L}(F; G)$ operátor injektív, és $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in E \times F$ olyan, hogy $((\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, akkor a fentiek szerint $\mathbf{e} = 0$, és $((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{f}) = 0$, tehát $\mathbf{f} = 0$, ami azt jelenti, hogy a $(\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ operátor injektív.

Tegyük most fel, hogy a $(\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ operátor szürjektív, és legyen $\mathbf{g} \in G$ tetszőleges. Ekkor a $(0, \mathbf{g}) \in E \times G$ párhoz létezik olyan $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in E \times F$, hogy $((\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = (0, \mathbf{g})$, tehát $\mathbf{e} = 0$ és $((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{f}) = \mathbf{g}$. Ez azt jelenti, hogy a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) : F \to G$ operátor szürjektív. Megfordítva, ha a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) : F \to G$ operátor szürjektív, és $(\mathbf{e}, \mathbf{g}) \in E \times G$ tetszőleges, akkor létezik olyan $\mathbf{f} \in F$, amelyre $((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{f}) = \mathbf{g} - ((\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e})$; ekkor $((\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = (\mathbf{e}, ((\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e}) + ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{f})) = (\mathbf{e}, \mathbf{g})$, ezért az $(\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) : E \times F \to E \times G$ operátor szürjektív.

Ezzel megmutattuk, hogy a $(\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) : E \times F \to E \times G$ lineáris operátor pontosan akkor bijekció, ha a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) : F \to G$ lineáris operátor bijekció. Azt is világos, hogy ha $(\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bijekció, akkor minden $(\mathbf{e}, \mathbf{g}) \in E \times G$ párra

$$((\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1}(\mathbf{e}, \mathbf{g}) = (\mathbf{e}, ((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1}(\mathbf{g} - ((\partial_1 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))(\mathbf{e})))$$

teljesül. Ebből látható, hogy a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1} : G \to F$ inverzoperátor folytonosságából következik a $((\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1} : E \times G \to E \times F$ inverzoperátor folytonossága. De az előző egyenlőségből az is kiolvasható, hogy minden $\mathbf{g} \in G$ esetén

$$((\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1}(\mathbf{g}) = \mathrm{pr}_2(((\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1}(0, \mathbf{g})),$$

ahol $\mathrm{pr}_2 : E \times F \to F$ a kanonikus projekció. Ez azt mutatja, hogy a $((\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1} : E \times G \to E \times F$ inverzoperátor folytonosságából következik a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^{-1} : G \to F$ inverzoperátor folytonossága. ■

Most az inverzfüggvény-tétel, valamint a két előző lemma alkalmazásával bebizonyíthatjuk az implicitfüggvény-tétel következő *korlátozott* formáját.

12.4.3. Tétel. *Legyenek E, F, G normált terek, $f : E \times F \rightarrowtail G$ függvény, valamint $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pont, amelyben f szigorúan differenciálható, és a $(\partial_2 f)(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{L}(F; G)$ operátor homeomorfizmus F és G között. Ha E és F teljes, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt környezete E-ben, és létezik $\mathfrak{b}$-nek olyan V nyílt környezete F-ben, hogy $U \times V \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és teljesülnek a következők:*

– *Az f függvénynek egyértelműen létezik $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthaladó φ implicit függvénye, amelyre $\mathrm{Dom}(\varphi) = U$ és $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq V$ teljesül.*

– *A φ leképezés Lipschitz-függvény és szigorúan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. Tekintsük az

$$\hat{f} : \mathrm{Dom}(f) \to E \times G; \quad (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$$

függvényt. Az f-re vonatkozó feltevések és 12.4.2. szerint $\hat{f}$ szigorúan differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban, és a $(\mathrm{D}\hat{f})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{L}(E \times F; E \times G)$ operátor homeomorfizmus $E \times F$ és $E \times G$ között. Továbbá az $E \times F$ szorzattér teljes, ezért az inverzfüggvény-tételt alkalmazhatjuk az $\hat{f}$ függvényre és az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontra.

Legyen tehát W olyan nyílt környezete $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-nek $E \times F$-ben, hogy $W \subseteq \mathrm{Dom}(\hat{f}) = \mathrm{Dom}(f)$, és $\hat{f}$ injektív a W halmazon, továbbá $\hat{f}\langle W \rangle$ nyílt halmaz $E \times G$-ben, $\hat{f}|_W$ és $(\hat{f}|_W)^{-1}$ Lipschitz-függvények (tehát $\hat{f}|_W$ homeomorfizmus W és $\hat{f}\langle W \rangle$ között), valamint $(\hat{f}|_W)^{-1}$ szigorúan differenciálható az $\hat{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban.

Legyen U' olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, és V' olyan nyílt környezete $\mathfrak{b}$-nek F-ben, hogy $U' \times V' \subseteq W$. Természetesen $\hat{f}$ injektív az $U' \times V'$ halmazon, így ha teljesülne az $U' \times \{f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\} \subseteq \hat{f}\langle U' \times V' \rangle$ összefüggés, akkor 12.4.1. szerint létezne egyetlen olyan $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ponton áthaladó implicit függvénye f-nek, amely U'-n értelmezett, és a V' halmazba érkezik. Azonban ez a tartalmazás általában nem igaz. De az $E \to E \times G$; $x \mapsto (x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$ leképezés folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, és itt az $(\mathfrak{a}, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = \hat{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ értéket veszi fel. Továbbá az $\hat{f}\langle U' \times V' \rangle$ halmaz nyílt, mert ez megegyezik az $(\hat{f}|_W)\langle U' \times V' \rangle$ halmazzal, és $\hat{f}|_W$ homeomorfizmus W és $f\langle W \rangle$ között, valamint $U' \times V'$ nyílt halmaz W-ben. Ezért létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt környezete, amelyre $U \times \{f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\} \subseteq \hat{f}\langle U' \times V' \rangle$. Tehát ha $x \in U$, akkor van olyan $(x', y') \in U' \times V'$, hogy $(x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = \hat{f}(x', y') := (x', f(x', y'))$; ekkor $x = x'$, így $(x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) \in \hat{f}\langle U \times V' \rangle$. Ez azt jelenti, hogy $U \times \{f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\} \subseteq \hat{f}\langle U \times V' \rangle$, következésképpen a $V := V'$ választással kapjuk, hogy a

$$\varphi : U \to V; \quad x \mapsto \mathrm{pr}_2((\hat{f}|_{U \times V})^{-1}(x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})))$$

leképezés az egyetlen olyan $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$-n áthaladó implicit függvénye f-nek, amely U-n értelmezett, és V-be érkezik (ahol $\mathrm{pr}_2 : E \times F \to F$ a kanonikus projekció). Ekkor φ Lipschitz-függvény az U halmazon és az $\mathfrak{a}$ pontban szigorúan differenciálható, ugyanis

– az $E \to E \times G$; $x \mapsto (x, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$ leképezés folytonos affin függvény, így Lipschitz-függvény és $\mathfrak{a}$-ban szigorúan differenciálható, és itt az $(\mathfrak{a}, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$ értéket veszi fel;

– az $(\hat{f}|_{U \times V})^{-1}$ függvény Lipschitz-függvény az $\hat{f}\langle U \times V \rangle$ halmazon, mert itt megegyezik az $(\hat{f}|_W)^{-1}$ Lipschitz-függvénnyel, továbbá szigorúan differenciálható az $\hat{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$ pontban, mert ez igaz a $(\hat{f}|_W)^{-1}$ függvényre és ez a két függvény megegyezik az $\hat{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pont valamely környezetén, ti. az $\hat{f}\langle U \times V \rangle$ halmazon (és a szigorú differenciálhatóság lokális tulajdonság);

– a $\mathrm{pr}_2 : E \times F \to F$ a kanonikus projekció folytonos lineáris operátor, ezért Lipschitz-függvény és szigorúan differenciálható az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pontban;

továbbá Lipschitz-függvény függvények kompozíciója nyilvánvalóan Lipschitz-függvény, és szigorúan differenciálható függvények kompozíciója szigorúan differenciálható. ■

Világos, hogy ez a tétel csakis annyiban *korlátozott* implicitfüggvény-tétel, amennyiben feltesszük, hogy az E normált tér is teljes. Az implicitfüggvény-tétel feltételei között ez a követelmény nem szerepel.

12.5. Gyakorlatok

16. Tekintsük az

$$f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad (\varrho, \varphi) \mapsto (\varrho \cos(\varphi), \varrho \sin(\varphi))$$

leképezést. Ez a függvény C^∞-osztályú (sőt analitikus), és minden $(\varrho, \varphi) \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban a $(\mathrm{D}f)(\varrho, \varphi) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operátor lineáris homeomorfizmus, azonban f nem injektív. Adjunk meg f-nek maximális injektivitás-tartományait!

XII. **DIFFERENCIÁLELMÉLET**

12. INVERZFÜGGVÉNY-TÉTEL

13. fejezet

Feltételes szélsőértékek

13.1. A feltételes szélsőértékek tétele

13.1.1. Definíció. *Legyen M metrikus tér, $f : M \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és $H \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Azt mondjuk, hogy f-nek* **lokális maximuma** *(illetve* **lokális minimuma***) van az $\mathfrak{a}$ pontban a H* **feltétel mellett***, ha az $f|_H : M \rightarrowtail \mathbb{R}$ leszűkített függvénynek lokális maximuma (illetve lokális minimuma) van az $\mathfrak{a}$ pontban; tehát ha $\mathfrak{a} \in H$, és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete M-ben, hogy minden $x \in U \cap H$ pontra $f(x) \leq f(\mathfrak{a})$ (illetve $f(x) \geq f(\mathfrak{a})$).*

13.1.2. Lemma. *Legyen E vektortér a K test felett, $n \in \mathbb{N}^*$, és $(u_k)_{k\in n}$ egy E^*-beli rendszer. Ha $u \in E^*$, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Létezik olyan $(\alpha_k)_{k\in n} \in K^n$, hogy $u = \sum_{k\in n} \alpha_k.u_k$, vagyis u lineárisan függ az $(u_k)_{k\in n}$ rendszertől E^*-ban.*

(ii) $\bigcap_{k\in n} \mathrm{Ker}(u_k) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$ *teljesül.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Triviális.

(ii)⇒(i) Nyilvánvaló, hogy a

$$v : E \to K^n; \quad x \mapsto (u_k(x))_{k\in n}$$

leképezés olyan lineáris operátor, amelyre $\mathrm{Ker}(v) = \bigcap_{k\in n} \mathrm{Ker}(u_k)$, tehát a (ii) szerint $\mathrm{Ker}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$, így létezik olyan $f : \mathrm{Im}(v) \to K$ lineáris funkcionál, hogy $f \circ v = u$. Legyen $\tilde{f} : K^n \to K$ az f funkcionál lineáris kiterjesztése $\mathrm{Im}(v)$-ről K^n-re (VI. fejezet, 2. pont, **1**. gyakorlat). A K^n feletti lineáris funkcionálok általános alakjának ismeretében kapjuk olyan $(\alpha_k)_{k\in n} \in K^n$ létezését, amelyre minden $(\zeta_k)_{k\in n} \in K^n$ esetén

$$\tilde{f}((\zeta_k)_{k\in n}) = \sum_{k\in n} \alpha_k \zeta_k.$$

Ekkor $\tilde{f} \circ v = u$, ezért minden $x \in E$ esetén

$$u(x) = \tilde{f}(v(x)) = \tilde{f}((u_k(x))_{k\in n}) = \sum_{k\in n} \alpha_k u_k(x) = \Big(\sum_{k\in n} \alpha_k.u_k\Big)(x),$$

vagyis $u = \sum_{k\in n} \alpha_k.u_k$ teljesül. ■

13.1.3. Lemma. *Legyen E vektortér a K test felett, $n \in \mathbb{N}^*$, és $(u_k)_{k\in n}$ egy E^*-beli rendszer. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az $(u_k)_{k\in n}$ rendszer lineárisan független E^*-ban.*

(ii) *Az $E \to K^n$; $x \mapsto (u_k(x))_{k\in n}$ leképezés szürjektív lineáris operátor.*

(iii) *Létezik olyan $(x_j)_{j\in n}$ rendszer E-ben, amelyre minden $j,k \in n$ esetén $u_k(x_j) = \delta_{jk}$ teljesül.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor az $(u_k)_{k\in n}$ rendszer lineáris függetlensége azt jelenti, hogy $u_0 \neq 0$; ekkor az $u_0 : E \to K$ leképezés szüjektív, tehát az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és legyen $(u_k)_{k\in n+1}$ egy lineárisan független rendszer E^*-ban. Legyen $(\alpha_k)_{k\in n+1} \in K^{n+1}$ tetszőleges; azt kell megmutatni, hogy létezik olyan $x \in E$, amelyre minden $k \in n+1$ esetén $u_k(x) = \alpha_k$ teljesül.

A feltevés alapján az $(u_k)_{k\in n}$ rendszer is lineárisan független E^*-ban, így az indukciós hipotézis alapján az $E \to K^n$; $x \mapsto (u_k(x))_{k\in n}$ leképezés szürjektív, tehát az $(\alpha_k)_{k\in n} \in K^n$ rendszerhez van olyan $x_0 \in E$, hogy minden $k \in n$ esetén $u_k(x_0) = \alpha_k$. Ugyanakkor u_n nem függ lineárisan az $(u_k)_{k\in n}$ rendszertől, ezért az előző lemma szerint $\bigcap_{k\in n} \mathrm{Ker}(u_k) \subseteq \mathrm{Ker}(u_n)$ *nem teljesül.* Ilymódon létezik olyan $x_n \in E$, hogy minden $k \in n$ esetén $u_k(x_n) = 0$ és $u_n(x_n) = 1$. Ekkor az $x := x_0 + (\alpha_n - u_n(x_0)).x_n \in E$ vektorra minden $k \in n+1$ esetén $u_k(x) = \alpha_k$ tejesül.

(ii)⇒(iii) Ha $(e_j)_{j\in n}$ a kanonikus bázis K^n-ben, akkor a (ii) alapján minden $n \ni j$-hez kiválasztható olyan $x_j \in E$, hogy minden $k \in n$ esetén $u_k(x_j) = e_j$. A kanonikus bázis definíciója alapján ez azt jelenti, hogy minden $j,k \in n$ esetén $u_k(x_j) = \delta_{jk}$ teljesül.

(iii)⇒(i) A (iii) alapján vegyünk olyan $(x_j)_{j\in n}$ rendszert E-ben, amelyre minden $j,k \in n$ esetén $u_k(x_j) = \delta_{jk}$ teljesül. Ha $(\alpha_k)_{k\in n} \in K^n$ olyan rendszer, hogy $\sum_{k\in n} \alpha_k.u_k = 0$, akkor minden $n \ni j$-re

$$0 = \Big(\sum_{k\in n} \alpha_k.u_k\Big)(x_j) = \sum_{k\in n} \alpha_k u_k(x_j) = \sum_{k\in n} \alpha_k \delta_{jk} = \alpha_j,$$

így az $(u_k)_{k\in n}$ rendszer lineárisan független E^*-ban. ■

13.1.4. Lemma. *Legyen E normált tér, és F véges dimenziós normált tér. Ha $v \in \mathscr{L}(E;F)$ szürjektív operátor, akkor létezik olyan $u \in \mathscr{L}(F;E)$, hogy $v \circ u = \mathrm{id}_F$.*

Bizonyítás. Legyen n az F dimenziója, és $(f_j)_{j\in n}$ algebrai bázis F-ben. A feltevés szerint kiválasztható olyan $(e_j)_{j\in n}$ rendszer E-ből, amelyre minden $n \ni j$-re $v(e_j) = f_j$. Ekkor létezik egyetlen olyan $u : F \to E$ lineáris operátor, amelyre minden $j \in n$ esetén $u(f_j) = e_j$. Ekkor minden $n \ni j$-re $(v \circ u)(f_j) = f_j$, ezért $v \circ u = \mathrm{id}_F$, továbbá u automatikusan folytonos, hiszen F véges dimenziós. ■

13.1.5. Tétel. (A feltételes lokális szélsőértékek differenciális jellemzése) *Legyen E valós normált tér, $U \subseteq E$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$, és $(g_k)_{k\in n}$ olyan rendszer, hogy minden $k \in n$ esetén $g_k : U \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Vezessük be a $G := \bigcap_{k\in n} \overset{-1}{g}_k\langle\{0\}\rangle$ jelölést, és legyen $\mathfrak{a} \in G$ olyan pont, amelyre a $((\mathrm{D}g_k)(\mathfrak{a}))_{k\in n}$ funkcionál rendszer* *lineárisan független E'-ben. Ha f-nek lokális szélsőértéke van $\mathfrak{a}$-ban a G feltétel mellett, akkor egyértelműen létezik olyan $(\lambda_k)_{k\in n} \in \mathbb{R}^n$ rendszer, amelyre*

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \sum_{k\in n} \lambda_k.(\mathrm{D}g_k)(\mathfrak{a})$$

teljesül.

Bizonyítás. Értelmezzük a

$$g : U \to \mathbb{R}^n; \quad x \mapsto (g_k(x))_{k\in n}$$

függvényt; ekkor g folytonosan differenciálható, mert a komponens-függvényei is ilyenek, továbbá nyilvánvalóan $G = \overset{-1}{g}\langle\{0\}\rangle$. Az is világos, hogy $x \in E$ esetén $((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(x) = (((\mathrm{D}g_k)(\mathfrak{a}))(x))_{k\in n}$, ezért a $((\mathrm{D}g_k)(\mathfrak{a}))_{k\in n}$ funkcionál rendszer lineárisan függetlensége, és a második lemma szerint a $(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E;\mathbb{R}^n)$ operátor szürjektív. A harmadik lemma alkalmazásával vegyünk olyan $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;E)$ operátort, hogy $(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) \circ u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Vezessük be az $N := \mathrm{Ker}((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))$ jelölést. Megmutatjuk, hogy

$$N \oplus \mathrm{Im}(u) = E.$$

Valóban, ha $x \in N \cap \mathrm{Im}(u)$, akkor van olyan $z \in \mathbb{R}^n$, hogy $x = u(z)$, tehát $0 = ((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(x) = ((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(u(z)) = ((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) \circ u)(z) = z$, ami azt jelenti, hogy $N \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$. Továbbá, ha $x \in E$, akkor nyilvánvalóan $x - u(((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(x)) \in N$, következésképpen $x = (x - u(((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(x))) + u(((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))(x)) \in N + \mathrm{Im}(u)$.

A $N \oplus \mathrm{Im}(u) = E$ egyenlőségből következik, hogy az

$$s : N \times \mathrm{Im}(u) \to E; \quad (x,y) \mapsto x + y$$

leképezés lineáris *bijekció*. Ez a leképezés egyenlő az $E \times E \to E$ összeadás $N \times \mathrm{Im}(u)$-ra vett leszűkítésével, ezért s folytonos. Továbbá, könnyen látható, hogy az $s^{-1} : E \to N \times \mathrm{Im}(u)$ inverzfüggvényre

$$\mathrm{pr}_1 \circ s^{-1} = \mathrm{id}_E - u \circ (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E;N),$$
$$\mathrm{pr}_2 \circ s^{-1} = u \circ (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E;\mathrm{Im}(u))$$

teljesül, tehát s^{-1} is folytonos, vagyis s *homeomorfizmus.*

Tekintsük most a $g \circ s : N \times \mathrm{Im}(u) \rightarrowtail \mathbb{R}^n$ leképezést, amely folytonosan differenciálható, és legyen $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) \in N \times \mathrm{Im}(u)$ az a pár, amelyre $s(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}$, azaz $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}$. A függvénykompozíció differenciálási tétele alapján

$$(\partial_2(g \circ s))(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) = (\mathrm{D}(g \circ (\mathfrak{a}_1 + \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(u)})))(\mathfrak{a}_2) = (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})|_{\mathrm{Im}(u)}.$$

Világos, hogy a $(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})|_{\mathrm{Im}(u)} \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}(u);\mathbb{R}^n)$ operátorra teljesül a $(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})|_{\mathrm{Im}(u)} \circ u = (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) \circ u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ egyenlőség, ezért $(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})|_{\mathrm{Im}(u)}$ *lineáris bijekció* $\mathrm{Im}(u)$ és $\mathbb{R}^n$ között. Ezért a $g \circ s : N \times \mathrm{Im}(u) \rightarrowtail \mathbb{R}^n$ függvényre és az $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) \in \mathrm{Dom}(g \circ s)$ pontra alkalmazhatjuk az implicitfüggvény-tételt. Azt kapjuk, hogy létezik olyan U_1 nyílt környezete $\mathfrak{a}_1$-nek a N normált térben, és létezik olyan U_2 nyílt környezete $\mathfrak{a}_2$-nek az $\mathrm{Im}(u)$ normált térben, hogy $U_1 \times U_2 \subseteq \mathrm{Dom}(g \circ s) = \overset{-1}{s}\langle U\rangle$, és egyértelműen létezik olyan $\varphi : U_1 \to U_2$ függvény, amely $g \circ s$-nek $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)$ ponton áthaladó implicit függvénye, és φ folytonosan differenciálható. Ekkor $x_1 \in U_1$ esetén

$$0 = g(\mathfrak{a}) = (g \circ s)(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) = (g \circ s)(x_1,\varphi(x_1)) = g(x_1 + \varphi(x_1)),$$

vagyis $x_1 + \varphi(x_1) \in G \subseteq U$.

Megmutatjuk, hogy ha f-nek az $\mathfrak{a}$ pontban lokális maximuma (illetve lokális minimuma) van a G feltétel mellett, akkor az

$$f_1 : U_1 \to \mathbb{R}; \quad x_1 \mapsto f(x_1 + \varphi(x_1))$$

függvénynek az $\mathfrak{a}_1$ pontban feltétel nélküli lokális maximuma (illetve lokális minimuma) van. Legyen ugyanis V olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, amelyre minden $x \in V \cap G$ esetén $f(x) \leq f(\mathfrak{a})$ (illetve $f(x) \geq f(\mathfrak{a})$). Az $U_1 \to E$; $x_1 \mapsto x_1 + \varphi(x_1)$ leképezés folytonos $\mathfrak{a}_1$-ben, és a $\mathfrak{a}_1$ ponthoz az $\mathfrak{a}$ pontot rendeli, ezért létezik $\mathfrak{a}_1$-nek olyan V_1 környezete N-ben, hogy $V_1 \subseteq U_1$, és minden $V_1 \ni x_1$-re $x_1 + \varphi(x_1) \in V$. Ekkor $x_1 \in V_1$ esetén $x_1 + \varphi(x_1) \in V \cap G$, tehát $f_1(x_1) := f(x_1 + \varphi(x_1)) \leq f(\mathfrak{a}) = f_1(\mathfrak{a}_1)$ (illetve $f_1(x_1) := f(x_1 + \varphi(x_1)) \geq f(\mathfrak{a}) = f_1(\mathfrak{a}_1)$). Ez azt jelenti, hogy f_1-nek $\mathfrak{a}_1$-ben lokális maximuma (illetve lokális minimuma) van.

Most tegyük fel, hogy f-nek az $\mathfrak{a}$ pontban lokális szélsőértéke van a G feltétel mellett. Az előző bekezdés alapján az $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke van az $\mathfrak{a}_1$ pontban, és persze f_1 differenciálható $\mathfrak{a}_1$-ben, így szükségképpen $(\mathrm{D}f_1)(\mathfrak{a}_1) = 0$. A függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint

$$0 = (\mathrm{D}f_1)(\mathfrak{a}_1) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ (\mathrm{id}_N + (\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}_1)) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_N + (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ (\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}_1),$$

vagyis

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_N = -(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ (\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}_1).$$

Ugyanakkor az implicit függvény deriváltjának ismeretében írható, hogy

$$(\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}_1) = -((\partial_2(g \circ s))(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))^{-1} \circ (\partial_1(g \circ s))(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2).$$

Ismét a függvénykompozíció differenciálási szabályát alkalmazva kapjuk, hogy

$$(\partial_1(g \circ s))(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = (\mathrm{D}(g \circ (\mathrm{id}_N + \mathfrak{a}_2)))(\mathfrak{a}_1) = (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})|_N = 0,$$

hiszen $N := \mathrm{Ker}((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}))$. Ebből kapjuk, hogy $(D\varphi)(\mathfrak{a}_1) = 0$, következésképpen $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_N = 0$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy

$$\bigcap_{k \in n} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}g_k)(\mathfrak{a})) = \mathrm{Ker}((\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})) =: N \subseteq \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})).$$

Az első lemma alapján ebből következik olyan $(\lambda_k)_{k \in n} \in \mathbb{R}^n$ rendszer létezése, amelyre

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \sum_{k \in n} \lambda_k.(\mathrm{D}g_k)(\mathfrak{a}).$$

A $((\mathrm{D}g_k)(\mathfrak{a}))_{k \in n}$ funkcionál rendszer lineárisan függetlenségéből adódik a $(\lambda_k)_{k \in n}$ szám n-es egyértelműsége. ■

13.1.6. Definíció. *Az előző tétel feltételei mellett egyértelműen értelmezett* $(\lambda_k)_{k \in n} \in \mathbb{R}^n$ *rendszert az* f *függvény,* $\mathfrak{a}$ *pontbeli,* G *feltételű lokális szélsőértékéhez tartozó* **Lagrange-multiplikátornak** *nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy a tétel érvényességéhez szükség van a $((\mathrm{D}g_k)(\mathfrak{a}))_{k \in n}$ funkcionál rendszer lineáris függetlenségére, amit néha *a skaláris kényszerek* $\mathfrak{a}$ *pontbeli függetlenségének* neveznek. E nélkül az állítás nem feltétlenül igaz (**2.** gyakorlat).

13.2. Gyakorlatok

1. Legyenek E és F vektorterek, valamint $v : E \to F$ lineáris szürjekció. Ekkor létezik olyan $u : F \to E$ lineáris injekció, amelyre $v \circ u = \mathrm{id}_F$ teljesül.

2. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq 2$, és értelmezzük az

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad (x_k)_{k\in n} \mapsto \sum_{k=0}^{n-2} x_k^2$$

függvényt. Ekkor létezik olyan $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, és olyan $\mathfrak{a} \in \overset{-1}{g}\langle\{0\}\rangle =: G$ pont, hogy f-nek lokális szélsőértéke van $\mathfrak{a}$-ban a G feltétel mellett, de *nem létezik* olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ Lagrange-multiplikátor, hogy $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \lambda(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})$ teljesülne. Mi ennek az oka?

(*Útmutatás.* Nyilvánvaló, hogy $G = \{(x_k)_{k\in n} \in \mathbb{R}^n | x_0 = ... = x_{n-2} = 0\}$, és minden $(x_k)_{k\in n} \in G$ pontra $(\mathrm{D}g)((x_k)_{k\in n}) = 0$, vagyis a $((\mathrm{D}g)((x_k)_{k\in n}))$ *egy tagú* funkcionál rendszer nem lineárisan független $(\mathbb{R}^n)'$-ben. Ha $\mathfrak{a} \in G$ rözített pont, és $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ és f állandó a G halmazon, akkor $f|_G$-nek nyilvánvalóan lokális szélsőértéke van $\mathfrak{a}$-ban, de ettől még $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \neq 0$ *lehetséges*, holott egy $\lambda \in \mathbb{R}$ Lagrange-multiplikátor létezéséből nemcsak $(\partial_{n-1}f)(\mathfrak{a}) = 0$ következne, hanem az is, hogy *minden* $k \in n$ esetén $(\partial_k f)(\mathfrak{a}) = 0$. Ez a példa azt mutatja, hogy a feltételes lokális szélsőértékek tételében lényeges a $((\mathrm{D}g_k)(\mathfrak{a}))_{k\in n}$ funkcionál rendszer lineáris függetlensége $(\mathbb{R}^n)'$-ben.)

3. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített, és tekintsük a következő függvényt:

$$S : (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}; \quad (n_k)_{k\in n} \mapsto -\sum_{k\in n} n_k \log(n_k).$$

Legyen $(\varepsilon_k)_{k\in n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tetszőleges rendszer, és legyenek $E, N \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Tegyük fel, hogy léteznek olyan $j, k \in n$ indexek, amelyekre $\varepsilon_j \neq \varepsilon_k$. Ekkor két eset lehetséges.

– a1) Ha

$$\min_{k\in n} \varepsilon_k < \frac{E}{N} < \max_{k\in n} \varepsilon_k,$$

akkor az S függvénynek *egyértelműen létezik szigorú globális maximuma* a

$$\sum_{k\in n} n_k = N, \quad \sum_{k\in n} \varepsilon_k n_k = E$$

feltételek mellett. Pontosabban; ekkor létezik egyetlen olyan $\beta \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{E}{N} = \frac{\displaystyle\sum_{k\in n} \varepsilon_k e^{-\beta\varepsilon_k}}{\displaystyle\sum_{k\in n} e^{-\beta\varepsilon_k}}$$

teljesül, és ha minden $k \in n$ esetén

$$\overline{n}_k := N \frac{e^{-\beta\varepsilon_k}}{\sum_{j\in n} e^{-\beta\varepsilon_j}},$$

akkor $(\overline{n}_k)_{k\in n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ az egyetlen olyan pont, ahol S-nek globális maximuma van a

$$\sum_{k\in n} n_k = N, \quad \sum_{k\in n} \varepsilon_k n_k = E$$

feltételek mellett. Továbbá, a β szám pontosan akkor

– *szigorúan pozitív*, ha
$$\frac{1}{n}\sum_{k\in n}\varepsilon_k < \frac{E}{N} < \max_{k\in n}\varepsilon_k,$$

– *nulla*, ha
$$\frac{E}{N} = \frac{1}{n}\sum_{k\in n}\varepsilon_k,$$

– *szigorúan negatív*, ha
$$\min_{k\in n}\varepsilon_k < \frac{E}{N} < \frac{1}{n}\sum_{k\in n}\varepsilon_k.$$

– a2) Ha
$$\frac{E}{N} \notin \left]\min_{k\in n}\varepsilon_k, \max_{k\in n}\varepsilon_k\right[,$$
akkor az S függvénynek *nem létezik lokális szélsőértéke* a

$$\sum_{k\in n} n_k = N, \quad \sum_{k\in n} \varepsilon_k n_k = E$$

feltételek mellett.

b) Tegyük fel, hogy minden $j, k \in n$ esetén $\varepsilon_j = \varepsilon_k$, és jelölje ε ezt a közös értéket. Ekkor szintén két eset lehetséges.

– b1) Ha $E/N = \varepsilon$, akkor az S függvénynek *egyértelműen létezik szigorú globális maximuma* a
$$\sum_{k\in n} n_k = N, \quad \sum_{k\in n} \varepsilon_k n_k = E$$
feltételek mellett. Pontosabban; ha minden $k \in n$ esetén

$$\overline{n}_k := \frac{N}{n},$$

akkor $(\overline{n}_k)_{k\in n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ az egyetlen olyan pont, ahol S-nek szigorú globális maximuma van, az adott feltételek mellett.

– b2) Ha $E/N \neq \varepsilon$, akkor az S függvénynek *nem létezik lokális szélsőértéke* a

$$\sum_{k\in n} n_k = N, \quad \sum_{k\in n} \varepsilon_k n_k = E$$

feltételek mellett.

(*Útmutatás.* Az a) esetben alkalmazva a lokális feltételes szélsőértékekre vonatkozó tételt kapjuk, hogy *ha S-nek lokális szélsőértéke van* egy $\overline{n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ pontban a

$$\sum_{k\in n} n_k = N, \quad \sum_{k\in n} \varepsilon_k n_k = E$$

feltételek mellett, akkor létezik olyan $\beta \in \mathbb{R}$ Lagrange-multiplikátor, amely megoldása az

$$\frac{E}{N} = \frac{\sum_{k\in n} \varepsilon_k e^{-\beta\varepsilon_k}}{\sum_{k\in n} e^{-\beta\varepsilon_k}}$$

egyenletnek, és minden $k \in n$ esetén

$$\overline{n}_k = N \frac{e^{-\beta\varepsilon_k}}{\sum_{j\in n} e^{-\beta\varepsilon_j}}$$

szükségképpen teljesül. Ezért az a1) pontban megfogalmazott, E/N-re vonatkozó feltétel *szükséges* ahhoz, hogy S-nek lokális szélsőértéke legyen az adott feltételek mellett, és az E/N-re vonatkozó egyenlőségből következik az a2) állítás is. Továbbá, az

$$\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \beta \mapsto \frac{\sum_{k\in n} \varepsilon_k e^{-\beta\varepsilon_k}}{\sum_{k\in n} e^{-\beta\varepsilon_k}}$$

függvényre könnyen igazolható, hogy az a1) feltétele mellett szigorúan monoton fogyó, és

$$\lim_{\beta\to+\infty} \varepsilon(\beta) = \max_{k\in n} \varepsilon_k, \quad \lim_{\beta\to-\infty} \varepsilon(\beta) = \min_{k\in n} \varepsilon_k.$$

Ebből látható, hogy az a1) feltétele mellett *legfeljebb egy* lokális szélsőértéke lehet S-nek az adott feltételek mellett.

Ha most teljesül az a1) feltétele, akkor a Bolzano-tétel és az ε függvény injektivitása miatt egyértelműen létezik olyan $\beta \in \mathbb{R}$, amelyre $\varepsilon(\beta) = E/N$. Legyen ekkor definíció szerint minden $k \in n$ esetén

$$\overline{n}_k := N \frac{e^{-\beta\varepsilon_k}}{\sum_{j\in n} e^{-\beta\varepsilon_j}}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\overline{n} := (\overline{n}_k)_{k\in n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ pontban az S függvénynek szigorú globális maximuma van. Ehhez legyen $(n_k)_{k\in n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ olyan pont, amelyre fennállnak a

$$\sum_{k\in n} n_k = N, \quad \sum_{k\in n} \varepsilon_k n_k = E$$

egyenlőségek. Minden $k \in n$ esetén legyen $r_k := n_k/\overline{n}_k$; ekkor a

$$\log(\overline{n}_k) = \log(N) - \beta\varepsilon_k - \log\Big(\sum_{j\in n} e^{-\beta\varepsilon_j}\Big)$$

egyenlőség alapján egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$S((\overline{n}_k)_{k\in n}) - S((n_k)_{k\in n}) = \sum_{k\in n} \overline{n}_k (r_k \log(r_k) - r_k + 1).$$

Tekintettel arra, hogy az

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x\log(x) - x + 1$$

függvény az 1 ponoton kívül szigorúan pozitív; fennáll az

$$S((\overline{n}_k)_{k\in n}) \geq S((n_k)_{k\in n}),$$

egyenlőtlenség, és $(\overline{n}_k)_{k\in n} \neq (n_k)_{k\in n}$ esetén itt szigorú egyenlőtlenség áll. Ez azt jelenti, hogy az S függvénynek szigorú globális maximuma van az $(\overline{n}_k)_{k\in n}$ pontban.

Tegyük fel, hogy a b) feltétele teljesül és ezúttal ε a közös ε_k $(k \in n)$ értéket jelöli. Ha $(n_k)_{k\in n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ olyan pont, amelyre teljesül a

$$\sum_{k\in n} n_k = N, \quad \sum_{k\in n} \varepsilon_k n_k = E$$

kényszerfeltétel, akkor $E/N = \varepsilon$, ezért b2) máris bizonyítva van, hiszen ha $E/N \neq \varepsilon$, akkor a kényszert kifejező halmaz *üres*, így szó sem lehet lokális feltételes szélsőérték *létezéséről*. Ha viszont $E/N = \varepsilon$, akkor minden $(n_k)_{k\in n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ pontra, a $\sum\limits_{k\in n} n_k = N$ egyenlőségből már következik a $\sum\limits_{k\in n} \varepsilon_k n_k = E$ egyenlőség. Legyen ekkor minden $k \in n$ esetén $\overline{n}_k := N/n$. Az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy ha $(n_k)_{k\in n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ olyan pont, amelyre $\sum\limits_{k\in n} n_k = N$, és minden $k \in n$ esetén $r_k := n_k/\overline{n}_k$, akkor

$$S((\overline{n}_k)_{k\in n}) - S((n_k)_{k\in n}) = \frac{N}{n} \sum_{k\in n} (r_k \log(r_k) - r_k + 1),$$

tehát S-nek az $(\overline{n}_k)_{k\in n}$ pontban szigorú globális maximuma van az

$$\sum_{k\in n} n_k = N, \quad \sum_{k\in n} \varepsilon_k n_k = E$$

feltételek mellett.

(Vigyázzunk arra, hogy a b) esetben nem teljesülnek a feltételes szélsőértékekre vonatkozó tétel feltételei, hiszen ekkor a kényszerek *nem függetlenek*, ezért ebben az esetben nem hivatkozhatunk a tételre!)

14. fejezet

Szubimmerziók*

Ebben a fejezetben többször hivatkozunk Banach nyíltleképezés tételére (**FUN** 4.1.3.), *amely azt állítja, hogy Banach-terek között ható folytonos lineáris szürjekció szükségképpen nyílt leképezés, amiből azonnal következik, hogy Banach-terek között ható folytonos lineáris bijekció szükségképpen homeomorfizmus. Ezt a tételt majd a funkcionálanalízis elemeit tárgyaló részben később bizonyítjuk. Természetesen abban a bizonyításban nem hivatkozunk ennek a fejezetnek egyetlen eredményére sem.*

14.1. Topologikus algebrai komplementerek

Legyen E normált tér és $M \subseteq E$ lineáris altér. Legyen az $N \subseteq E$ lineáris altér algebrai komplementere M-nek, vagyis $M + N = E$ és $M \cap N = \{0\}$, amit az $M \bigoplus N = E$ szimbólummal fejezünk ki. Ekkor az

$$M \times N \to E; \quad (x, y) \mapsto x + y$$

leképezés lineáris bijekció az $M \times N$ lineáris szorzattér és az E vektortér között, és nyilvánvalóan folytonos is az $M \times N$ normált szorzattér és az E normált tér között, hiszen egyenlő az $E \times E \to E$ folytonos összeadás-függvény $M \times N$-re vett leszűkítésével. Azonban ennek a leképezésnek az inverze nem szükségképpen folytonos, ezért nem triviális a következő definíció.

14.1.1. Definíció. *Legyen E normált tér és $M \subseteq E$ lineáris altér. Egy $N \subseteq E$ lineáris alteret az M* **topologikus algebrai komplementerének** *nevezünk, ha N algebrai komplementere M-nek, és az*

$$\mathrm{s}_{M,N} : M \times N \to E; \quad (x, y) \mapsto x + y$$

leképezés lineáris homeomorfizmus (vagyis ennek a leképezésnek az inverze folytonos). Azt a tényt, hogy N topologikus algebrai komplementere a M lineáris altérnek az

$$M \bigoplus_{(t)} N = E$$

szimbólummal jelöljük.

Ha E normált tér és $M, N \subseteq E$ lineáris alterek, akkor az

$$N \times M \to M \times N; \quad (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezés homeomorfizmus, ezért N pontosan akkor topologikus algebrai komplementere M-nek, ha M topologikus algebrai komplementere N-nek.

Vegyük észre, hogy ha E normált tér, és $M, N \subseteq E$ olyan lineáris alterek, hogy $M \bigoplus N = E$, akkor

$$\mathrm{pr}_1 \circ \mathrm{s}_{M,N}^{-1} + \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{s}_{M,N}^{-1} = \mathrm{id}_E,$$

ahol $\mathrm{pr}_1 : M \times N \to M$ az első projekciófüggvény, és $\mathrm{pr}_2 : M \times N \to N$ a második projekciófüggvény, ezért a következő állítások ekvivalensek:

(i) a $\mathrm{pr}_1 \circ \mathrm{s}_{M,N}^{-1} : E \to M$ lineáris operátor folytonos;

(ii) a $\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{s}_{M,N}^{-1} : E \to N$ lineáris operátor folytonos;

(iii) az $\mathrm{s}_{M,N}^{-1} : E \to M \times N$ lineáris operátor folytonos, vagyis a $\mathrm{pr}_1 \circ \mathrm{s}_{M,N}^{-1} : E \to M$ és $\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{s}_{M,N}^{-1} : E \to N$ lineáris operátorok mindketten folytonosak;

(iv) $M \underset{(t)}{\bigoplus} N = E$.

14.1.2. Állítás. *Legyen E normált tér és $M \subseteq E$ lineáris altér. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Létezik M-nek topologikus algebrai komplementere E-ben.*

(ii) *Létezik olyan $p \in \mathscr{L}(E; E)$ operátor, amelyre $p \circ p = p$ és $\mathrm{Im}(p) = M$.*

(ii)′ *Létezik olyan $p \in \mathscr{L}(E; E)$ operátor, amelyre $p \circ p = p$ és $\mathrm{Ker}(p) = M$.*

(iii) *Létezik olyan $v \in \mathscr{L}(E; M)$ operátor, hogy $v \circ \mathrm{in}_{M,E} = \mathrm{id}_M$.*

(iv) *Az $M \to M$ identikus operátor kiterjeszthető $E \to M$ folytonos lineáris operátorrá.*

Továbbá, ha M-nek létezik topologikus algebrai komplementere, akkor M szükségképpen zárt.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen N topologikus algebrai komplementere M-nek, tehát az

$$s : M \times N \to E; \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

leképezés a hipotézis szerint lineáris homeomorfizmus. Ekkor a $p := \mathrm{pr}_1 \circ s^{-1} : E \to E$ leképezés folytonos lineáris operátor. Ha $x \in M$, akkor $s(x, 0) = x + 0 = x$, vagyis $s^{-1}(x) = (x, 0)$. Ebből következik, hogy $x \in M$ esetén $p(x) = \mathrm{pr}_1(s^{-1}(x)) = x$, ezért $M \subseteq \mathrm{Im}(p)$, és a definíció alapján világos, hogy $\mathrm{Im}(p) \subseteq M$. Tehát $\mathrm{Im}(p) = M$, továbbá minden $x \in E$ esetén $p(x) \in M$, így $p(p(x)) = p(x)$, ami azt jelenti, hogy $p \circ p = p$.

(ii)⇒(ii)′ Ha $q \in \mathscr{L}(E; E)$ olyan operátor, amelyre $q \circ q = q$ és $\mathrm{Im}(q) = M$, akkor a $p := \mathrm{id}_E - q \in \mathscr{L}(E; E)$ operátorra $p \circ p = p$ és $\mathrm{Ker}(p) = M$ teljesül.

(ii)′ ⇒(iii) Ha $p \in \mathscr{L}(E; E)$ olyan operátor, amelyre $p \circ p = p$ és $\mathrm{Ker}(p) = M$, akkor $\mathrm{id}_E - p \in \mathscr{L}(E; M)$ és $(\mathrm{id}_E - p) \circ \mathrm{in}_{M,E} = \mathrm{id}_M$, ugyanis minden $x \in M$ esetén nyilvánvalóan $p(x) = 0$.

(iii)⇒(iv) Ha $v \in \mathscr{L}(E; M)$ olyan operátor, hogy $v \circ \mathrm{in}_{M,E} = \mathrm{id}_M$, akkor v az $M \to M$ identikus operátor kiterjesztése $E \to M$ folytonos lineáris operátorrá.

(iv)⇒(i) Ha $u \in \mathscr{L}(E; M)$ olyan operátor, amelyre $u|_M = \mathrm{id}_M$, akkor $M = \mathrm{Im}(u)$ és $u \circ u = u$ triviálisan teljesül. Ezért az $N := \mathrm{Ker}(u) \subseteq E$ lineáris altér algebrai komplementere M-nek, hiszen $x \in M \cap N$ esetén $x = u(x) = 0$, azaz $M \cap N = \{0\}$, továbbá $x \in E$ esetén $x = u(x) + (x - u(x)) \in M + N$, ugyanis $u(x - u(x)) = u(x) - u(u(x)) = 0$, azaz $x - u(x) \in N$. Ebből az is látható, hogy minden $x \in E$ esetén $s^{-1}(x) = (u(x), x - u(x))$, tehát az

$$s : M \times N \to E; \quad (x, y) \mapsto x + y$$

leképezés inverzére $\mathrm{pr}_1 \circ s^{-1} = u \in \mathscr{L}(E; M)$ és $\mathrm{pr}_2 \circ s^{-1} = \mathrm{id}_E - u \in \mathscr{L}(E; N)$ teljesül, így $s^{-1} \in \mathscr{L}(E; M \times N)$, vagyis N topologikus algebrai komplementere M-nek.

Ha létezik M-nek topologikus algebrai komplementere, akkor (ii) alapján van olyan $p \in \mathscr{L}(E; E)$ operátor, amelyre $p \circ p = p$ és $\mathrm{Im}(p) = M$, így

$$M = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) = \overset{-1}{(\mathrm{id}_E - p)}\langle\{0\}\rangle$$

miatt M zárt E-ben. ■

14.1.3. Állítás. *Ha E Banach-tér, valamint M és N olyan zárt lineáris alterek E-ben, amelyekre $M \bigoplus N = E$, akkor $M \underset{(t)}{\bigoplus} N = E$, tehát M és N topologikus algebrai komplementerei egymásnak.*

Bizonyítás. Az M és N lineáris alterek zártsága miatt az $M \times N$ normált szorzattér is Banach-tér, és a feltevés szerint az $M \times N \to E;\ (x, y) \mapsto x + y$ leképezés folytonos lineáris bijekció az $M \times N$ és E Banach-terek között, ezért Banach nyíltleképezés tételéből következik, hogy ez a függvény lineáris homeomorfizmus. ■

Megjegyezzük, hogy van olyan végtelen dimenziós Banach-tér, amelyben van olyan zárt lineáris altér, amelynek nincs topologikus algebrai komplementere, bár algebrai komplementere mindenképpen létezik. (Például az $\mathbf{l}^{\infty}_{\mathbb{K}}$ sorozattérben a zérussorozatok altere zárt, de nincs topologikus algebrai komplementere.) Az előző állítás szerint ez azt jelenti, hogy létezik olyan Banach-tér, amelyben van olyan *zárt* lineáris altér, amelynek egyetlen algebrai komplementere *sem zárt*. Ugyanakkor majd látjuk, hogy a Hilbert-terek olyan speciális Banach-terek, amelyekben minden zárt lineáris altérnek még kitüntetett topologikus algebrai komplementere is létezik.

14.1.4. Állítás. *Ha E véges dimenziós normált tér, akkor minden $M \subseteq E$ lineáris altérnek létezik topologikus algebrai komplementere, sőt ekkor az M minden algebrai komplementere az M-nek topologikus algebrai komplementere is.*

Bizonyítás. Véges dimenziós normált terek között ható lineáris bijekció szükségképpen homeomorfizmus. ■

14.1.5. Állítás. *Legyen E normált tér és $M \subseteq E$ lineáris altér.*

a) *Ha M zárt és létezik M-nek véges dimenziós algebrai komplementere (ilyenkor azt mondjuk, hogy M* **véges kodimenziós** *altér), akkor létezik M-nek topologikus algebrai komplementere, sőt az M minden véges dimenziós algebrai komplementere az M-nek topologikus algebrai komplementere is.*

b) *Ha M véges dimenziós, akkor létezik M-nek topologikus algebrai komplementere.*

Bizonyítás. a) Az M altér zárt, ezért képezhető az E/M normált faktortér **LIN** (1.7.1.), és ekkor a $\pi : E \to E/M$ kanonikus szürjekció folytonos lineáris operátor. Legyen N algebrai komplementere M-nek, és értelmezzük az $s : M \times N \to E;\ (x, y) \mapsto x + y$ leképezést. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\pi|_N : N \to E/M$ leképezés folytonos lineáris bijekció, azonban ennek az inverze az általános esetben nem szükségképpen folytonos. De ha N véges dimenziós, akkor a $\pi|_N$ operátor lineáris homeomorfizmus, és egyszerűen belátható, hogy

$$\mathrm{pr}_2 \circ s^{-1} = (\pi|_N)^{-1} \circ \pi,$$

tehát a $\mathrm{pr}_2 \circ s^{-1} : E \to N$ operátor folytonos, ugyanakkor nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{pr}_1 \circ s^{-1} = \mathrm{id}_E - \mathrm{pr}_2 \circ s^{-1},$$

tehát a $\mathrm{pr}_1 \circ s^{-1} : E \to M$ operátor is folytonos, így az $s^{-1} : E \to M \times N$ operátor folytonos. Ez azt jelenti, hogy ha N véges dimenziós algebrai komplementere M-nek, akkor N topologikus algebrai komplementere is M-nek.

b) A **LIN** 2.4.4. állítás alapján az $\mathrm{id}_M : M \to M$ leképezés kiterjeszthető $E \to M$ folytonos lineáris operátorrá, így 14.1.2. (iii) szerint M-nek létezik topologikus algebrai komplementere. ■

14.1.6. Állítás. *Legyen E normált tér.*

a) *Ha $M, N \subseteq E$ olyan lineáris alterek, hogy*

$$M \underset{(\mathrm{t})}{\oplus} N \;=\; E,$$

akkor létezik egyetlen olyan $p \in \mathscr{L}(E;E)$ operátor, amelyre

$$p \circ p = p, \quad \mathrm{Im}(p) = M, \quad \mathrm{Ker}(p) = N.$$

b) *Ha $p \in \mathscr{L}(E;E)$ olyan operátor, amelyre $p \circ p = p$, akkor* $\mathrm{Im}(p)$ *és* $\mathrm{Ker}(p)$ *olyan lineáris alterek E-ben, hogy*

$$\mathrm{Im}(p) \underset{(\mathrm{t})}{\oplus} \mathrm{Ker}(p) \;=\; E,$$

Bizonyítás. a) A hipotézis szerint az

$$s : M \times N \to E; \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

leképezés lineáris homeomorfizmus. A 14.1.2. állítás bizonyításában láttuk, hogy a $p := \mathrm{pr}_1 \circ s^{-1} : E \to E$ leképezés olyan folytonos lineáris operátor, hogy $p \circ p = p$ és $\mathrm{Im}(p) = M$.

Erre az operátorra $\mathrm{Ker}(p) = N$ is teljesül. Valóban, ha $x \in N$, akkor $s(0, x) = x$, vagyis $s^{-1}(x) = (0, x)$, amiből következik, hogy $p(x) = \mathrm{pr}_1(s^{-1}(x)) = 0$, azaz $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Megfordítva, ha $x \in \mathrm{Ker}(p)$, akkor $0 = \mathrm{pr}_1(s^{-1}(x))$, következésképpen létezik olyan $y \in N$, hogy $s^{-1}(x) = (0, y)$, azaz $x = s(0, y) = y$, tehát $x \in N$.

Végül, a p operátor az előírt tulajdonságokkal egyértelműen van meghatározva. Valóban, legyen $p' \in \mathscr{L}(E;E)$ olyan operátor, hogy $p' \circ p' = p'$, $\mathrm{Im}(p') = M$ és $\mathrm{Ker}(p') = N$. Legyen $x \in E$ tetszőleges, és $(y, z) := s^{-1}(x)$. Ekkor a p operátor definíciója szerint $p(x) = \mathrm{pr}_1(s^{-1}(x)) = \mathrm{pr}_1(y, z) = y$. Ugyanakkor $p'(x) = p'(s(y, z)) = p'(y + z) = p'(y) + p'(z) = p'(y)$, mert p' additív és $z \in N = \mathrm{Ker}(p')$. Továbbá, $y \in M = \mathrm{Im}(p')$, tehát vehetünk olyan $y' \in E$ elemet, hogy $y = p'(y')$. Ekkor $p' \circ p' = p'$ miatt $y = p'(y') = p'(p'(y')) = p'(y)$, vagyis $p(x) = y = p'(y) = p'(x)$, ami azt jelenti, hogy $p = p'$.

b) Ha $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p)$, akkor létezik olyan $y \in E$, hogy $x = p(y)$, amiből $p \circ p = p$ miatt következik, hogy $0 = p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0\}$.

Ha $x \in E$, akkor nyilvánvalóan $x = p(x) + (x - p(x))$, és $p \circ p = p$ miatt $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p) = E$, így az előző bekezdés alapján $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$. Ugyanakkor az is látható, hogy az

$$s : \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p) \to E; \quad (x, y) \mapsto x + y$$

leképezés inverzére teljesül az, hogy minden $x \in E$ esetén $s^{-1}(x) = (p(x), x - p(x))$, tehát $\mathrm{pr}_1 \circ s^{-1} = p$ és $\mathrm{pr}_2 \circ s^{-1} = \mathrm{id}_E - p$ folytonos függvények, így s^{-1} is folytonos, vagyis E egyenlő az $\mathrm{Im}(p)$ és $\mathrm{Ker}(p)$ alterek topologikus direkt összegével. ■

Tehát ha E normált tér, akkor az előző állítás alapján mondható, hogy a $p \mapsto (\mathrm{Im}(p), \mathrm{Ker}(p))$ hozzárendelés *bijektív* függvény a $\{p \in \mathscr{L}(E;E) | p \circ p = p\}$ operátor-halmaz, és azon (M, N) párok halmaza között, amelyekre M és N olyan lineáris alterei E-nek, hogy $M \underset{(t)}{\bigoplus} N = E$.

14.1.7. Állítás. *Ha E normált tér, és $M, N \subseteq E$ olyan lineáris alterek, hogy $M \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} N = E$, akkor a $\pi_{E/M}|_N : N \to E/M$ leképezés lineáris homeomorfizmus az N normált altér és az E/M normált faktortér között, és $v := \left(\pi_{E/M}|_N\right)^{-1} : E/M \to E$ olyan folytonos lineáris operátor, amely jobbinverze a $\pi_{E/M} : E \to E/M$ kanonikus szürjekciónak (vagyis $\pi_{E/M} \circ v = \mathrm{id}_{E/M}$), és amelyre $\mathrm{Im}(v) = N$ teljesül.*

Bizonyítás. Az **ALG** 8.4.6. állítás szerint az $M \bigoplus N = E$, $M = \mathrm{Ker}\left(\pi_{E/M}\right)$ és $E/M = \mathrm{Im}\left(\pi_{E/M}\right)$ egyenlőségekből következik, hogy a $\pi_{E/M}|_N : N \to E/M$ leképezés lineáris bijekció, és a $v := \left(\pi_{E/M}|_N\right)^{-1} : E/M \to E$ lineáris operátorra $\pi_{E/M} \circ v = \mathrm{id}_{E/M}$ és $\mathrm{Im}(v) = N$ teljesül. Továbbá, **LIN** 1.7.3. szerint a $\pi_{E/M} : E \to E/M$ kanonikus szürjekció folytonos leképezés az E normált tér és az E/M normált faktortér között. Ezért a $\pi_{E/M}|_N : N \to E/M$ leszűkített leképezés is folytonos lineáris operátor az N normált lineáris altér és az E/M normált faktortér között. Tehát csak azt kell igazolni, hogy $v : E/M \to E$ operátor folytonos, vagyis hogy a $v \circ \pi_{E/M} : E \to E$ leképezés folytonos (**LIN** 1.7.5.). Ez abból következik, hogy $\mathrm{Ker}\left(\pi_{E/M}\right) = M$, ezért nyilvánvaló, hogy $\left(\pi_{E/M}|_N\right) \circ \mathrm{pr}_2 \circ s_{M,N}^{-1} = \pi_{E/M}$, ahol $\mathrm{pr}_2 : M \times N \to N$ a második projekció és $s_{M,N}$ az $E \times E \to E$ összeadás-függvény leszűkítése $M \times N$-re; és ebből az egyenlőségből látszik, hogy $v \circ \pi_{E/M} = \mathrm{pr}_2 \circ s_{M,N}^{-1}$, és itt az $s_{M,N}^{-1} : E \to M \times N$ leképezés folytonos, hiszen $M \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} N = E$, és a $\mathrm{pr}_2 : M \times N \to N$ a második projekció folytonos, tehát $v \circ \pi_{E/M}$ folytonos. ■

Később, a 14.3.3. definíció előtt álló megjegyzésben majd megfogalmazzuk az imént igazolt állítás természetes általánosítását.

14.2. Immerziók

14.2.1. Állítás. *Ha E és F normált terek, akkor minden $u \in \mathscr{L}(E;F)$ operátorra a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Létezik olyan $v \in \mathscr{L}(F;E)$, hogy $v \circ u = \mathrm{id}_E$ (vagyis u-nak létezik folytonos lineáris balinverze).*

(ii) *Az u operátor lineáris homeomorfizmus E és az $\mathrm{Im}(u) \subseteq F$ normált altér között, valamint létezik olyan $p \in \mathscr{L}(F;F)$ operátor, amelyre $p \circ p = p$ és $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(u)$.*

(iii) *Az u operátor lineáris homeomorfizmus E és az $\mathrm{Im}(u) \subseteq F$ normált altér között, valamint létezik $\mathrm{Im}(u)$-nak topologikus algebrai komplementere.*

Ha E és F Banach-terek, akkor ezek a kijelentések ekvivalensek a következővel:

(iii′) *Az u operátor injektív és* $\mathrm{Im}(u)$ *lineáris altérnek létezik topologikus algebrai komplementere.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $v \in \mathscr{L}(F;E)$ olyan, hogy $v \circ u = \mathrm{id}_E$. Ekkor u injektív és $u^{-1} = v|_{\mathrm{Im}(u)}$, tehát az $u^{-1} : \mathrm{Im}(u) \to E$ lineáris operátor folytonos, így u lineáris homeomorfizmus E és az $\mathrm{Im}(u) \subseteq F$ normált altér között. Ugyanakkor a $p := u \circ v \in \mathscr{L}(F;F)$ operátor, olyan, hogy $p = p \circ p$ és $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(u)$.

(ii)⇒(iii) A 14.1.2. állítás (ii) pontja alapján nyilvánvaló.

(iii)⇒(i) Legyen $N \subseteq F$ olyan lineáris altér, amely topologikus algebrai komplementere $\mathrm{Im}(u)$-nak, és értelmezzük az $s : \mathrm{Im}(u) \times N \to F;\ (x,y) \mapsto x+y$ leképezést. Ekkor a $v := u^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ s^{-1} : F \to E$ leképezés lineáris operátor, és nyilvánvaló, hogy $v \circ u = \mathrm{id}_E$. Továbbá, ez az operátor folytonos is, mert $s^{-1} : F \to \mathrm{Im}(u) \times N$ folytonos (hiszen N topologikus algebrai komplementere $\mathrm{Im}(u)$-nak), valamint $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{Im}(u) \times N \to \mathrm{Im}(u)$ folytonos, és $u^{-1} : \mathrm{Im}(u) \to E$ folytonos, hiszen a hipotézis szerint u lineáris homeomorfizmus E és az $\mathrm{Im}(u)$ normált altér között.

Tegyük fel, hogy E és F Banach-terek. A (iii)⇒ (iii′) következtetés nyilvánvalóan helyes. Megfordítva, ha (iii′) teljesül, akkor az $\mathrm{Im}(u) \subseteq F$ lineáris altér zárt F-ben (14.1.2.), tehát az F teljessége miatt az $\mathrm{Im}(u)$ normált altér Banach-tér, így a feltevés alapján u folytonos lineáris bijekció az E és $\mathrm{Im}(u)$ Banach-terek között. Ebből Banach *nyíltleképezés tétele* alapján következik, hogy u lineáris homeomorfizmus E és az $\mathrm{Im}(u)$ normált altér között, tehát (iii) teljesül. ■

14.2.2. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, valamint $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Azt mondjuk, hogy f* **immerzió** *az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) : E \to F$ deriváltoperátornak létezik folytonos lineáris balinverze.*

Példa. Ha E és F normált terek, valamint $u \in \mathscr{L}(E;F)$ olyan lineáris homeomorfizmus az E normált tér és az $\mathrm{Im}(u) \subseteq F$ normált altér között, hogy $\mathrm{Im}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere, akkor u minden $\mathfrak{a} \in E$ pontban immerzió, hiszen u differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és $(\mathrm{D}u)(\mathfrak{a}) = u$, így elegendő a 14.2.1. állításra hivatkozni. Ha E és F Banach-terek, akkor elegendő azt feltenni az $u \in \mathscr{L}(E;F)$ operátorra, hogy injektív legyen és $\mathrm{Im}(u)$-nak létezzen topologikus algebrai komplementere.

14.2.3. Lemma. *Ha E Banach-tér és F normált tér, akkor az*

$$\{u \in \mathscr{L}(E;F) \mid (\exists v \in \mathscr{L}(F;E)) : v \circ u = \mathrm{id}_E\}$$

halmaz nyílt $\mathscr{L}(E;F)$-ben az operátornorma szerint.

Bizonyítás. Legyen $u_0 \in \{u \in \mathscr{L}(E;F) | (\exists v \in \mathscr{L}(F;E)) : v \circ u = \mathrm{id}_E\}$, és $v_0 \in \mathscr{L}(F;E)$ olyan, hogy $v_0 \circ u_0 = \mathrm{id}_E$. Az

$$f : \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;E); \quad u \mapsto v_0 \circ u$$

leképezés az operátornormák szerint folytonos lineáris operátor, valamint $\mathscr{GL}(E)$ nyílt $\mathscr{L}(E;E)$-ben, mert E teljes, valamint $f(u_0) = \mathrm{id}_E \in \mathscr{GL}(E)$. Ebből következik, hogy $\overset{-1}{f}\langle \mathscr{GL}(E) \rangle$ nyílt halmaz $\mathscr{L}(E;F)$-ben, és u_0 eleme ennek a nyílt halmaznak. Ha u eleme ennek a halmaznak, akkor $v_0 \circ u \in \mathscr{GL}(E)$, és $((v_0 \circ u)^{-1} \circ v_0) \circ u = \mathrm{id}_E$, így

$$\overset{-1}{f}\langle \mathscr{GL}(F) \rangle \subseteq \{u \in \mathscr{L}(E;F) | (\exists v \in \mathscr{L}(F;E)) : v \circ u = \mathrm{id}_E\}.$$

Ezért u_0 belső pontja az $\{u \in \mathscr{L}(E;F) | (\exists v \in \mathscr{L}(F;E)) : v \circ u = \mathrm{id}_E\}$ halmaznak. ■

14.2.4. Állítás. *Ha E Banach-tér, F normált tér, és $f : E \rightarrowtail F$ folytonosan differenciálható függvény, akkor az*

$$\{\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f) \mid \text{"}f \textit{ immerzió az } \mathfrak{a} \textit{ pontban"}\}$$

halmaz nyílt.

Bizonyítás. A $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ függvény folytonos, és az előző lemma szerint az

$$\Omega := \{u \in \mathscr{L}(E;F) \mid (\exists v \in \mathscr{L}(F;E)) : \ v \circ u = \mathrm{id}_E\}$$

halmaz nyílt $\mathscr{L}(E;F)$-ben, ezért a $\overset{-1}{(\mathrm{D}f)}\langle\Omega\rangle \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ halmaz nyílt E-ben. A definíció szerint ez a halmaz egyenlő azon pontok halmazával, amelyekben f immerzió. ■

14.2.5. Tétel. (**Az immerziók jellemzése**) *Legyenek E és F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény. Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *A $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ operátor injektív, és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$-nak létezik topologikus algebrai komplementere (vagyis f immerzió az $\mathfrak{a}$ pontban).*

(ii) *Létezik olyan (M, U, V, φ, ψ) ötös, amelyre a következők teljesülnek:*

– *$M \subseteq F$ olyan lineáris altér, amelynek létezik topologikus algebrai komplementere;*

– *$U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, $V \subseteq F$ nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak F-ben, és $f\langle U\rangle \subseteq V$;*

– *$\varphi : U \to M$ olyan függvény, hogy $\varphi\langle U\rangle$ nyílt halmaz az M normált altérben és φ C^n-diffeomorfizmus az U és $\varphi\langle U\rangle$ halmazok között;*

– *$\psi : V \to F$ olyan függvény, hogy $\psi\langle V\rangle$ nyílt halmaz F-ben, és ψ C^n-diffeomorfizmus V és $\psi\langle V\rangle$ között;*

– *teljesül a $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi\langle U\rangle}$ egyenlőség.*

(iii) *Létezik olyan (N, Z, U', V', h) ötös, amelyre teljesülnek a következők:*

– *$N \subseteq F$ olyan lineáris altér, amelynek létezik topologikus algebrai komplementere;*

– *$U' \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, $V' \subseteq F$ nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak F-ben, és $f\langle U'\rangle \subseteq V'$;*

– *$Z \subseteq N$ nyílt halmaz az N normált altérben;*

– *$h : U' \times Z \to V'$ olyan C^n-diffeomorfizmus, hogy van olyan $z \in Z$, amelyre $h(\cdot, z) = f|_{U'}$.*

(iv) *Létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt környezete és $f(\mathfrak{a})$-nak olyan $V \subseteq F$ nyílt környezete, valamint létezik olyan $g : V \to E$ függvény, amely C^n-osztályú, $f\langle U\rangle \subseteq V$ és $g \circ f = \mathrm{id}_E$ az U halmazon (vagyis $f|_U$-nak létezik C^n-osztályú balinverze).*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Az (i) hipotézis és a 14.1.2. állítás alapján vehetünk olyan $p \in \mathscr{L}(F;F)$ operátort, amelyre $p = p \circ p$ és $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$. Szintén a 14.1.2. állítás szerint $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ *zárt* lineáris altér F-ben, ezért az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ normált altér teljes, és a hipotézis alapján a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) : E \to \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ leképezés lineáris homeomorfizmus. A $p \circ f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ leképezés C^n-osztályú és $(\mathrm{D}(p \circ f))(\mathfrak{a}) = p \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$. Ezért az inverzfüggvény-tétel alapján létezik olyan $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt halmaz és $W \subseteq \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ nyílt halmaz az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ normált altérben, hogy $\mathfrak{a} \in U$,

$p(f(\mathfrak{a})) \in W$, $p\langle f\langle U\rangle\rangle \subseteq W$, és a $\varphi := (p \circ f)|_U : U \to W$ függvény C^n-diffeomorfizmus. (Vigyázzunk arra, hogy W az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ normált altérben nyílt, de nem nyílt F-ben, ha $F \neq \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$.) A $\overset{-1}{p}\langle W\rangle \subseteq F$ halmaz nyílt, mert $p \in \mathscr{L}(F; \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})))$ és W Z nyílt halmaz $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$-ban. Legyen $V := \overset{-1}{p}\langle W\rangle$ és $\psi : V \to F$ a következő leképezés

$$\psi := \big(\mathrm{id}_F - (\mathrm{id}_F - p) \circ f \circ \varphi^{-1} \circ p\big)\,|_V.$$

Világos, hogy $p\langle \overset{-1}{p}\langle W\rangle\rangle \subseteq W = \mathrm{Dom}(\varphi^{-1})$ és $\mathrm{Dom}(\varphi) = U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, ezért ψ jól értelmezett a $V = \overset{-1}{p}\langle W\rangle$ halmazon. Könnyen látható, hogy $p \circ \psi = p|_V$, hiszen $p \circ (\mathrm{id}_F - p) = 0$, ezért $\psi\langle V\rangle \subseteq V$. Ugyanakkor a ψ függvény C^n-osztályú függvények kompozíciója, így maga is C^n-osztályú. Megmutatjuk, hogy a $\psi : V \to V$ függvény C^n-diffeomorfizmus. Ehhez tekintsük a

$$\psi' := \big(\mathrm{id}_F + (\mathrm{id}_F - p) \circ f \circ \varphi^{-1} \circ p\big)\,|_V : V \to F$$

leképezést. Erre szintén teljesül az, hogy $p \circ \psi' = p|_V$, így $\psi'\langle V\rangle \subseteq V$, továbbá egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\psi \circ \psi' = \psi' \circ \psi = \mathrm{id}_V$. Ez azt jelenti, hogy a $\psi : V \to V$ függvény bijekció és $\psi^{-1} = \psi'$. Ugyanakkor a ψ' függvény C^n-osztályú függvények kompozíciója, így maga is C^n-osztályú, tehát a $\psi : V \to V$ leképezés C^n-diffeomorfizmus.

A W értelmezése alapján $p(f(\mathfrak{a})) \in W$, vagyis $f(\mathfrak{a}) \in \overset{-1}{p}\langle W\rangle$, ugyanakkor $p\langle f\langle U\rangle\rangle = \varphi\langle U\rangle = W$, tehát $f\langle U\rangle \subseteq \overset{-1}{p}\langle W\rangle = V$. Szintén a definíciók szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\psi \circ f)|_U = \psi \circ (f|_U) = (f|_U) - (\mathrm{id}_F - p) \circ f \circ \varphi^{-1} \circ p \circ (f|_U) = \\ = (f|_U) - (\mathrm{id}_F - p) \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = (f|_U) - (\mathrm{id}_F - p) \circ (f|_U) = p \circ (f|_U) = \varphi,\end{aligned}$$

amiből következik, hogy $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi\langle U\rangle}$. Tehát ha $M := \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$, akkor az (M, U, V, φ, ψ) ötös rendelkezik a (ii)-ben megfogalmazott tulajdonságokkal.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Legyen (M, U, V, φ, ψ) olyan ötös, amely rendelkezik a (ii)-ben megfogalmazott tulajdonságokkal; ekkor $(\psi \circ f)|_U = \varphi$ is szükségképpen teljesül. Legyen N topologikus algebrai komplementere M-nek, tehát N olyan lineáris altere F-nek, amelyre $M \oplus N = F$ és az $s : M \times N \to F$; $(x, y) \mapsto x + y$ leképezés lineáris homeomorfizmus. Nyilvánvaló, hogy $s(\varphi(\mathfrak{a}), 0) = \varphi(\mathfrak{a}) = \psi(f(\mathfrak{a})) \in \psi\langle V\rangle$, hiszen $f(\mathfrak{a}) \in V$, ezért $(\varphi(\mathfrak{a}), 0) \in \overset{-1}{s}\langle\psi\langle V\rangle\rangle$. Továbbá, $\psi\langle V\rangle$ nyílt halmaz F-ben és s folytonos függvény, így az $\overset{-1}{s}\langle\psi\langle V\rangle\rangle \subseteq M \times N$ halmaz nyílt környezete $(\varphi(\mathfrak{a}), 0)$-nak az $M \times N$ normált szorzattérben. Ezért vehetünk olyan $W \subseteq E$ nyílt halmazt és az M normált altérben olyan Z nyílt halmazt az N normált altérben, hogy $\varphi(\mathfrak{a}) \in W$, $0 \in Z$, és $W \times Z \subseteq \overset{-1}{s}\langle\psi\langle V\rangle\rangle$.

Legyen most $U' := \overset{-1}{\varphi}\langle W\rangle \subseteq U$, ami az $\mathfrak{a}$-nak olyan nyílt környezete E-ben, hogy $\varphi\langle U'\rangle \subseteq W$, következésképpen $\varphi\langle U'\rangle \times Z \subseteq \overset{-1}{s}\langle\psi\langle V\rangle\rangle$ is teljesül. Értelmezzük a $V' := \overset{-1}{\psi}\langle s\langle\varphi\langle U'\rangle \times Z\rangle\rangle \subseteq F$ halmazt. A $\varphi\langle U'\rangle$ halmaz nyílt az M normált altérben, mert φ homeomorfizmus U és a $\varphi\langle U\rangle \subseteq M$ halmaz között és $U' \subseteq U$ nyílt halmaz. Ezért a $\varphi\langle U'\rangle \times Z$ halmaz nyílt az $M \times N$ normált szorzattérben. Továbbá, s homeomorfizmus az $M \times N$ és F terek között, ezért az $s\langle\varphi\langle U'\rangle \times Z\rangle$ halmaz nyílt F-ben. A $\psi : V \to F$ függvény folytonos, így a definíció alapján V' nyílt halmaz F-ben. Ezenkívül, $f(\mathfrak{a}) \in V'$, ugyanis $\psi(f(\mathfrak{a})) = \varphi(\mathfrak{a}) = s(\varphi(\mathfrak{a}), 0) \in s\langle\varphi\langle U'\rangle \times Z\rangle$. Ez azt jelenti, hogy V' nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak F-ben. A definíciók alapján világos, hogy $f\langle U'\rangle \subseteq V'$ teljesül.

Értelmezzük most a következő leképezést:

$$h : U' \times Z \to V'; \quad (x, z) \mapsto \psi^{-1}(s(\varphi(x), z)).$$

Ez a függvény a következő három leképezés kompozíciója:

$$U' \times Z \to \varphi\langle U'\rangle \times Z; \quad (x,z) \mapsto (\varphi(x), z),$$
$$\varphi\langle U'\rangle \times Z \to \psi\langle V\rangle; \quad (y,z) \mapsto s(y,z),$$
$$\psi\langle V\rangle \to F; \quad y \mapsto \psi^{-1}(y).$$

Az első függvény első komponense az $U' \times Z \to U'$ első projekció-függvény és a C^n-osztályú $\varphi|_{U'} : U' \to F$ függvény kompozíciója, ezért az első függvény C^n-osztályú. A második függvény az $s : M \times N \to F$ folytonos lineáris operátor leszűkítése a $\varphi\langle U'\rangle \times Z$ nyílt halmazra, tehát ez analitikus függvény. A harmadik függvény éppen ψ^{-1}, ami a feltevés alapján C^n-osztályú. Ezért maga a h függvény is C^n-osztályú.

Megmutatjuk, hogy a $h : U' \times Z \to V'$ függvény C^n-diffeomorfizmus. Ehhez képezzük a

$$h' : V' \to U' \times Z; \quad y \mapsto \big(\varphi^{-1}(\mathrm{pr}_1(s^{-1}(\psi(y)))),\ \mathrm{pr}_2(s^{-1}(\psi(y)))\big)$$

függvényt. Ez a függvény valóban értelmezve van a V' halmazon, mert ha $y \in V'$, akkor a V' értelmezése alapján $\psi(y) \in s\langle\varphi\langle U'\rangle \times Z\rangle$, így $s^{-1}(\psi(y)) \in \varphi\langle U'\rangle \times Z$, következésképpen $\mathrm{pr}_1(s^{-1}(\psi(y))) \in \varphi\langle U'\rangle \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi^{-1})$ és $\mathrm{pr}_2(s^{-1}(\psi(y))) \in Z$. A h' függvény második komponense a $\psi|_{V'} : V' \to F$ C^n-osztályú leképezés, az $s^{-1} : F \to M \times N$ folytonos lineáris operátor, és az $M \times N \to N$ második projekció-függvény kompozíciója, így ez a komponens-függvény C^n-osztályú. A h' függvény első komponense a második komponens kompozíciója a $\varphi^{-1}|_{\varphi\langle U'\rangle} : \varphi\langle U'\rangle \to U'$ függvénnyel, ami C^n-osztályú, ezért ez a komponens-függvény is C^n-osztályú. Ez azt jelenti, hogy a h' függvény C^n-osztályú, továbbá könnyen ellenőrizhető, hogy $h' \circ h = \mathrm{id}_{U' \times Z}$ és $h \circ h' = \mathrm{id}_{V'}$, tehát a $h : U' \times Z \to V'$ függvény C^n-diffeomorfizmus.

Végül, ha $x \in U'$, akkor $U' \subseteq U$ és $(\psi \circ f)|_U = \varphi$ miatt

$$h(x,0) = \psi^{-1}(s(\varphi(x),0)) = \psi^{-1}(\varphi(x)) = f(x),$$

vagyis $0 \in Z$ olyan, amelyre $h(\cdot,0) = f|_{U'}$. Ez azt jelenti, hogy az (N, Z, U', V', h) ötös rendelkezik a (iii)-ban megfogalmazott tulajdonságokkal.

(iii)⇒(iv) Legyen (N, Z, U', V', h) olyan ötös, amelyre teljesülnek a (iii)-ban megfogalmazott tulajdonságok, és legyen $z \in Z$ olyan pont, amelyre $h(\cdot, z) = f|_{U'}$. Ekkor a $g := \mathrm{pr}_1 \circ h^{-1} : V' \to U'$ függvény C^n-osztályú. Legyen $x \in U'$; ekkor $f(x) \in f\langle U'\rangle \subseteq V' = \mathrm{Im}(h)$, tehát vehetjük azokat az $x' \in U'$ és $z' \in Z$ pontokat, amelyekre $h^{-1}(f(x)) = (x', z')$. Ekkor $h(x', z') = f(x) = h(x, z)$, tehát a h injektivitása folytán $(x', z') = (x, z)$, így $x = x' = \mathrm{pr}_1(x', z') = \mathrm{pr}_1(h^{-1}(f(x))) = g(f(x))$. Ez azt jelenti, hogy $g \circ (f|_{U'}) = \mathrm{id}_{U'}$, következésképpen $U := U'$, $V := V'$ és g olyan objektumok, amelyekre a (iv)-ben megfogalmazott tulajdonságok teljesülnek.

(iv)⇒(i) Ha $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, és $V \subseteq F$ olyan nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak, valamint $g : V \to E$ olyan C^n-osztályú függvény, hogy $f\langle U\rangle \subseteq V$ és $g \circ (f|_U) = \mathrm{id}_U$, akkor a függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint $(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \mathrm{id}_E$, tehát $(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})) \in \mathscr{L}(F; E)$ olyan operátor, amely $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$-nak folytonos lineáris balinverze, így a definíció szerint (i) teljesül. ■

14.2.6. Tétel. (**Az immerziók jellemzése véges dimenziós esetben**) *Legyenek E és F véges dimenziós normált terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény. Az f függvény pontosan akkor immerzió az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha $\dim(E) \leq \dim(F)$ és van olyan (U, V, Ψ) hármas, hogy:*

– *$U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, $V \subseteq F$ nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak F-ben,* *és* $f\langle U\rangle \subseteq V$*;*

– $\Psi : V \to \mathbb{K}^{\dim(F)}$ *olyan függvény, hogy* $\Psi\langle V\rangle$ *nyílt halmaz* $\mathbb{K}^{\dim(F)}$*-ben és* Ψ C^n*-diffeomorfizmus* V *és* $\Psi\langle V\rangle$ *között;*

– *a* $\Phi : U \to \mathbb{K}^{\dim(E)}$; $x \mapsto (\Psi_k(f(x)))_{0\le k<\dim(E)}$ *leképezés olyan, hogy* $\Phi\langle U\rangle$ *nyílt halmaz* $\mathbb{K}^{\dim(E)}$*-ben, és* Φ C^n*-diffeomorfizmus az* U *és* $\Phi\langle U\rangle$ *halmazok között;*

– *minden* $\dim(E) \le k < \dim(F)$ *természetes számra* $(\Psi_k \circ f)\,|_U = 0$.

Bizonyítás. Legyen (U, V, Ψ) olyan hármas, amelynek rendelkezik az állításban megfogalmazott tulajdonságokkal. Legyen $\beta : \mathbb{K}^{\dim(F)} \to F$ tetszőleges lineáris bijekció, és H azon $(y_k)_{0\le k<\dim(F)} \in \mathbb{K}^{\dim(F)}$ pontok halmaza, amelyekre minden $\dim(E) \le k < \dim(F)$ természetes számra $y_k = 0$. Ekkor H lineáris altér $\mathbb{K}^{\dim(F)}$-ben, és az $M := \beta\langle H\rangle$ halmaz $\dim(E)$ dimenziós lineáris altere F-nek. Legyen $j : \mathbb{K}^{\dim(E)} \to \mathbb{K}^{\dim(F)}$ az a lineáris injekció, amelyre minden $(x_k)_{0\le k<\dim(E)} \in \mathbb{K}^{\dim(E)}$ esetén a $j((x_k)_{0\le k<\dim(E)}) \in \mathbb{K}^{\dim(F)}$ vektor k-adik komponense egyenlő x_k-val, ha $0 \le k < \dim(E)$, és egyenlő 0-val, ha $\dim(E) \le k < \dim(F)$. Ekkor $\mathrm{Im}(j) = H$, így a $\beta \circ j : \mathbb{K}^{\dim(E)} \to M$ leképezés lineáris bijekció. Értelmezzük a következő függvényeket:

$$\psi := \beta \circ \Psi : V \to F;$$
$$\varphi := \beta \circ \Psi \circ (f|_U) : U \to F$$

A hipotézis szerint $\Psi\langle V\rangle$ nyílt halmaz $\mathbb{K}^{\dim(F)}$-ben, és a $\Psi : V \to \mathbb{K}^{\dim(F)}$ függvény C^n-diffeomorfizmus V és $\Psi\langle V\rangle$ között, továbbá $\beta : \mathbb{K}^{\dim(F)} \to F$ lineáris bijekció, ezért a $\psi\langle V\rangle$ halmaz nyílt F-ben és a $\psi : V \to F$ függvény C^n-diffeomorfizmus V és $\psi\langle V\rangle$ között. Továbbá, könnyen látható, hogy $j \circ \Phi = \Psi \circ (f|_U)$, következésképpen $\varphi = (\beta \circ j) \circ \Phi$, így $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Im}(\beta \circ j) = M$. Ugyanakkor $\beta \circ j$ lineáris bijekció $\mathbb{K}^{\dim(E)}$ és M között, így a Φ-re vonatkozó hipotézis alapján $\varphi\langle U\rangle$ nyílt halmaz az M normált altérben és a $\varphi : U \to M$ függvény C^n-diffeomorfizmus U és $\varphi\langle U\rangle$ között. A definíciók szerint $\psi \circ (f|_U) = \varphi$, tehát $\psi \circ (f|_U) \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi\langle U\rangle}$, így az (M, U, V, φ, ψ) ötösre teljesülnek a 14.2.5. tétel (ii) pontjában megfogalmazott tulajdonságok, vagyis f immerzió az $\mathfrak{a}$ pontban.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f immerzió az $\mathfrak{a}$ pontban, és legyen (M, U, V, φ, ψ) olyan ötös, amely rendelkezik a 14.2.5. tétel (ii) pontjában megfogalmazott tulajdonságokkal. Legyen $(y_k)_{0\le k<\dim(F)}$ olyan algebrai bázis F-ben, amelyre $(y_k)_{0\le k<\dim(M)}$ algebrai bázis az M lineáris altérben (IV. fejezet, 1. pont, **2.** gyakorlat). Legyen $(u_k)_{0\le k<\dim(F)}$ olyan rendszer F^*-ban, hogy minden $j, k < \dim(F)$ természetes számra $u_j(y_k) = \delta_{j,k}$. Értelmezzük a

$$\beta : F \to \mathbb{K}^{\dim(F)}; \quad y \mapsto (u_k(y))_{0\le k<\dim(F)},$$
$$\alpha : M \to \mathbb{K}^{\dim(M)}; \quad y \mapsto (u_k(y))_{0\le k<\dim(M)}$$

lineáris bijekciókat, és legyen $\Psi := \beta \circ \psi : V \to \mathbb{K}^{\dim(F)}$. A hipotézis szerint a $\psi\langle V\rangle$ halmaz nyílt F-ben és a $\psi : V \to F$ függvény C^n-diffeomorfizmus V és $\psi\langle V\rangle$ között. Ezért a $\Psi\langle V\rangle$ halmaz nyílt $\mathbb{K}^{\dim(F)}$-ben, és a $\Psi : V \to \mathbb{K}^{\dim(F)}$ függvény C^n-diffeomorfizmus V és $\Psi\langle V\rangle$ között. A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy minden $k < \dim(F)$ természetes számra $\Psi_k \circ (f|_U) = u_k \circ \psi \circ (f|_U) = u_k \circ \varphi$. Ha $\dim(E) \le k < \dim(F)$, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq M \subseteq \mathrm{Ker}(u_k)$, tehát $(\Psi_k \circ f)|_U = \Psi_k \circ (f|_U) = 0$. Továbbá, $\dim(E) = \dim(M)$, és a

$$\Phi : U \to \mathbb{K}^{\dim(E)}; \; x \mapsto (\Psi_k(f(x)))_{k\in\dim(E)}$$

leképezésre teljesül az, hogy $\Phi = \alpha \circ \varphi$. A hipotézis szerint $\varphi\langle U\rangle$ nyílt halmaz az M normált altérben és a $\varphi : U \to M$ függvény C^n-diffeomorfizmus U és $\varphi\langle U\rangle$ között. Ezért

$\varphi\langle U\rangle$ nyílt halmaz az M normált altérben és a $\varphi : U \to M$ függvény C^n-diffeomorfizmus U és $\varphi\langle U\rangle$ között. Ez azt jelenti, hogy az (U, V, Ψ) hármas rendelkezik az állításban megfogalmazott tulajdonságokkal. ■

14.3. Szubmerziók

14.3.1. Lemma. *Legyenek X, Y és Z topologikus terek, és $f : Y \to Z$, $g : X \to Y$ függvények, amit a következő diagram szemléltet:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] & Z \\ X \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f\circ g"'] & \end{tikzcd}$$

Ha g nyílt szürjekció és $f \circ g$ folytonos függvény, akkor f folytonos.

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq Z$ nyílt halmaz. Az $f \circ g : X \to Z$ függvény folytonossága miatt $\overset{-1}{(f \circ g)}\langle\Omega\rangle \subseteq X$ nyílt halmaz, így a $g : X \to Y$ függvény nyíltságából következik, hogy $g\langle \overset{-1}{(f \circ g)}\langle\Omega\rangle\rangle \subseteq Y$ nyílt halmaz. Azonban g szürjektivitása miatt

$$g\langle \overset{-1}{(f \circ g)}\langle\Omega\rangle\rangle = g\langle \overset{-1}{g}\langle \overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle\rangle\rangle = \overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle,$$

tehát $\overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle \subseteq Y$ nyílt halmaz, vagyis f folytonos. ■

14.3.2. Állítás. *Ha E és F normált terek, akkor minden $u \in \mathscr{L}(E; F)$ operátorra a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Létezik olyan $v \in \mathscr{L}(F; E)$, hogy $u \circ v = \mathrm{id}_F$ (vagyis u-nak létezik folytonos lineáris jobbinverze).*

(ii) *Az u operátor szürjektív és nyílt leképezés (tehát minden $\Omega \subseteq E$ nyílt halmazra $u\langle\Omega\rangle \subseteq F$ nyílt halmaz), valamint létezik olyan $p \in \mathscr{L}(E; E)$, amelyre $p \circ p = p$ és $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(u)$.*

(iii) *Az u operátor szürjektív és nyílt leképezés, valamint $\mathrm{Ker}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere.*

Ha E és F Banach-terek, akkor ezek a kijelentések ekvivalensek a következővel.

(iii′) *Az u operátor szürjektív és $\mathrm{Ker}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ha $v \in \mathscr{L}(F; E)$ olyan, hogy $u \circ v = \mathrm{id}_F$, akkor a $p := \mathrm{id}_E - v \circ u \in \mathscr{L}(E)$ operátorra $p \circ p = p$ és $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(u)$ teljesül. Az u leképezés nyíltságának bizonyításához tekintsük az $E/\mathrm{Ker}(u)$ normált faktorteret (**LIN** 1.7.1.), és jelölje π az $E \to E/\mathrm{Ker}(u)$ kanonikus szürjekciót, valamint legyen $\dot{u} : E/\mathrm{Ker}(u) \to F$ az u kanonikus faktorizáltja, vagyis az a lineáris operátor, amelyre $u = \dot{u} \circ \pi$ teljesül. Az u folytonossága és szürjektivitása miatt a $\dot{u}$ operátor folytonos lineáris bijekció $E/\mathrm{Ker}(u)$ és F között. Továbbá: $\dot{u} \circ (\pi \circ v) = u \circ v = \mathrm{id}_F$, tehát $\dot{u}^{-1} = \pi \circ v : F \to E$ folytonos lineáris operátor, hiszen π folytonos (1.7.3.). Ez azt jelenti, hogy $\dot{u}$ *lineáris homeomorfizmus* az $E/\mathrm{Ker}(u)$ normált faktortér és az F normált tér között. Ebből, és az $u = \dot{u} \circ \pi$ egyenlőségből következik, hogy az u és π leképezések nyíltsága ekvivalens tulajdonságok. Másfelől a $\pi : E \to E/\mathrm{Ker}(u)$ kanonikus szürjekció nyílt leképezés (**LIN** 1.7.3.), így $u : E \to F$

nyílt szürjekció.

(ii)⇒(iii) A $\mathrm{Ker}(u) \subseteq E$ lineáris altérnek pontosan akkor létezik topologikus algebrai komplementere, ha létezik olyan $p \in \mathscr{L}(E; E)$, amelyre $p \circ p = p$ és $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(u)$ (14.1.2.).

(iii)⇒(i) Legyen $N \subseteq E$ topologikus algebrai komplementere $\mathrm{Ker}(u)$-nak, és tegyük fel, hogy u nyílt szürjekció. Ekkor $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus N$ miatt az $u|_N : N \to F$ leképezés folytonos lineáris bijekció. Valóban, $\mathrm{Ker}\,(u|_N) = \mathrm{Ker}(u) \cap N = \{0\}$, ezért $u|_N$ injektív, és ha $y \in F$, akkor u szürjektivitása miatt van olyan $x \in E$, hogy $u(x) = y$, továbbá $E = \mathrm{Ker}(u) + N$ miatt léteznek olyan $x_0 \in \mathrm{Ker}(u)$ és $x_N \in N$ vektorok, hogy $x = x_0 + x_N$, következésképpen $y = u(x) = u(x_0) + u\,(x_N) = u\,(x_N) \in \mathrm{Im}\,(u|_N)$, tehát $u|_N : N \to F$ szürjektív.

Legyen $v := (u|_N)^{-1}$. Nyilvánvaló, hogy $v : F \to E$ olyan lineáris operátor, amelyre $u \circ v = \mathrm{id}_F$ és $\mathrm{Im}(v) = N$. Megmutatjuk, hogy v folytonos is, tehát v folytonos lineáris jobbinverze u-nak.

Ehhez vezessük be a

$$p : \mathrm{Ker}(u) \times N \to E; \quad (x, x') \mapsto x',$$
$$s : \mathrm{Ker}(u) \times N \to E; \quad (x, x') \mapsto x + x'$$

függvényeket. Könnyen látható, hogy $(u|_N) \circ p = u \circ s$, mert $(x, x') \in \mathrm{Ker}(u) \times N$ esetén

$$((u|_N) \circ p)\,(x, x') = u(p(x, x')) = u(x') = u(x + x') = u(s(x, x')) = (u \circ s)(x, x').$$

Tehát a v operátor definíciója szerint azt is írhatjuk, hogy $p = v \circ (u \circ s)$. A viszonyokat szemlélteti a következő kommutatív diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[r, "v"] & E \\
E \arrow[ur, "u"] & \mathrm{Ker}(u) \times N \arrow[l, "s"] \arrow[u, "u \circ s"'] \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

A p függvény folytonos a $\mathrm{Ker}(u) \times N$ szorzattér és E között, mert egyenlő a $\mathrm{Ker}(u) \times E \to E$ második projekciófüggvény leszűkítésével $\mathrm{Ker}(u) \times N$-re. Továbbá $u \circ s : \mathrm{Ker}(u) \times N \to F$ nyílt szürjekció, mert a hipotézis szerint u nyílt szürjekció és s homeomorfizmus, hiszen N topologikus algebrai komplementere $\mathrm{Ker}(u)$-nak. Alkalmazva az előző lemmát az $X := \mathrm{Ker}(u) \times N$, $Y := F$, $Z := E$, $f := v$, $g := u \circ s$ szereposztással kapjuk, hogy a $v : F \to E$ leképezés folytonos, vagyis v folytonos lineáris jobbinverze u-nak.

Ha E és F Banach-terek, akkor Banach nyíltleképezés-tétele szerint minden $E \to F$ folytonos lineáris szürjekció nyílt leképezés, ezért ekkor (iii) és (iii′) ekvivalensek. ■

Megjegyzés. Az előző állítás (iii)⇒(i) implikációjának bizonyításában láttuk, hogy ha E és F normált terek és $u : E \to F$ folytonos, nyílt, lineáris szürjekció, és $N \subseteq E$ olyan lineáris altér, hogy $\mathrm{Ker}(u) \underset{(\mathrm{t})}{\oplus} N = E$, akkor az $u|_N : N \to F$ leképezés lineáris homeomorfizmus, és $(u|_N)^{-1} : F \to E$ olyan folytonos lineáris jobbinverze u-nak, hogy $\mathrm{Im}\left((u|_N)^{-1}\right) = N$. Ezt a tényt majd önmagában is alkalmazni fogjuk.

14.3.3. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, valamint $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Azt mondjuk, hogy f* **szubmerzió** *az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) : E \to F$ deriváltoperátornak létezik folytonos lineáris jobbinverze.*

Példa. Ha E és F normált terek, valamint $u \in \mathscr{L}(E;F)$ olyan nyílt szürjekció, hogy $\mathrm{Ker}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere, akkor u minden $\mathfrak{a} \in E$ pontban szubmerzió, hiszen u differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és $(\mathrm{D}u)(\mathfrak{a}) = u$, így elegendő a 14.3.2. állításra hivatkozni. Ha E és F Banach-terek, akkor felesleges feltenni az u operátor nyíltságát, tehát akkor elég az, hogy $u \in \mathscr{L}(E;F)$ szürjekció és $\mathrm{Ker}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere.

14.3.4. Lemma. *Ha E normált tér és F Banach-tér, akkor az*

$$\{u \in \mathscr{L}(E;F) \mid (\exists v \in \mathscr{L}(F;E)) : u \circ v = \mathrm{id}_F\}$$

halmaz nyílt $\mathscr{L}(E;F)$-ben az operátornorma szerint.

Bizonyítás. Legyen $u_0 \in \{u \in \mathscr{L}(E;F) | (\exists v \in \mathscr{L}(F;E)) : u \circ v = \mathrm{id}_F\}$, és $v_0 \in \mathscr{L}(F;E)$ olyan, hogy $u_0 \circ v_0 = \mathrm{id}_F$. Az

$$f : \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(F;F); \quad u \mapsto u \circ v_0$$

leképezés az operátornormák szerint folytonos lineáris operátor, és $\mathscr{GL}(F)$ nyílt $\mathscr{L}(F;F)$-ben, mert F teljes, valamint $f(u_0) = \mathrm{id}_F \in \mathscr{GL}(F)$. Ebből következik, hogy $\overset{-1}{f}\langle \mathscr{GL}(F) \rangle$ nyílt halmaz $\mathscr{L}(E;F)$-ben, és u_0 eleme ennek a nyílt halmaznak. Ha u eleme ennek a halmaznak, akkor $u \circ v_0 \in \mathscr{GL}(F)$, és $u \circ (v_0 \circ (u \circ v_0)^{-1}) = \mathrm{id}_F$, így

$$\overset{-1}{f}\langle \mathscr{GL}(F) \rangle \subseteq \{u \in \mathscr{L}(E;F) | (\exists v \in \mathscr{L}(F;E)) : v \circ u = \mathrm{id}_E\}.$$

Ezért u_0 belső pontja az $\{u \in \mathscr{L}(E;F) | (\exists v \in \mathscr{L}(F;E)) : u \circ v = \mathrm{id}_F\}$ halmaznak. ■

14.3.5. Állítás. *Ha E normált tér, F Banach-tér, és $f : E \rightarrowtail F$ folytonosan differenciálható függvény, akkor az*

$$\{\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f) \mid \text{"}f \text{ szubmerzió az } \mathfrak{a} \text{ pontban"}\}$$

halmaz nyílt.

Bizonyítás. A $\mathrm{D}f : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ függvény folytonos, és az előző lemma szerint az

$$\Omega := \{u \in \mathscr{L}(E;F) \mid (\exists v \in \mathscr{L}(F;E)) : \ u \circ v = \mathrm{id}_F\}$$

halmaz nyílt $\mathscr{L}(E;F)$-ben, ezért a $(\overset{-1}{\mathrm{D}f})\langle \Omega \rangle \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ halmaz nyílt E-ben. A definíció szerint ez a halmaz egyenlő azon pontok halmazával, amelyekben f szubmerzió. ■

14.3.6. Állítás. *Legyen E normált tér és $p \in \mathscr{L}(E;E)$ olyan operátor, amelyre $p \circ p = p$. Ekkor*

$$\mathrm{Ker}(p) \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}(p) = E,$$

tehát a $\mathrm{Ker}(p)$ és $\mathrm{Im}(p)$ lineáris altereknek létezik topologikus algebrai komplementere E-ben, és minden $\Omega \subseteq E$ nyílt halmazra a $p\langle \Omega \rangle \subseteq \mathrm{Im}(p)$ halmaz nyílt az $\mathrm{Im}(p)$ normált altérben.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az

$$s : \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p) \to E; \quad (x, y) \mapsto x + y$$

leképezés folytonos lineáris bijekció a $\mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$ normált szorzattér és az E normált tér között. Ez szükségképpen *homeomorfizmus* is, mert könnyen látható, hogy $\mathrm{pr}_1 \circ s^{-1} = \mathrm{id}_E - p \in \mathscr{L}(E; \mathrm{Ker}(p))$ és $\mathrm{pr}_2 \circ s^{-1} = p \in \mathscr{L}(E; \mathrm{Im}(p))$, következésképpen $s^{-1} : E \to \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$ is folytonos lineáris operátor. Ebből azonnal következik, hogy $\mathrm{Im}(p)$ (illetve $\mathrm{Ker}(p)$) a $\mathrm{Ker}(p)$ (illetve $\mathrm{Im}(p)$) topologikus algebrai komplementere. Továbbá, a $\mathrm{pr}_2 : \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p) \to \mathrm{Im}(p)$ kanonikus projekcióról tudjuk, hogy a szorzattér minden nyílt részhalmazát az $\mathrm{Im}(p)$ nyílt részhalmazára képezi le. Ezért a $p = \mathrm{pr}_2 \circ s^{-1}$ függvény az E minden nyílt részhalmazát az $\mathrm{Im}(p)$ nyílt részhalmazára képezi le. ■

14.3.7. Állítás. *Legyenek E és F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, valamint $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény. Legyen $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pont, amelyre az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \subseteq F$ és $\mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \subseteq E$ lineáris altereknek létezik topologikus algebrai komplementere. Legyen $p \in \mathscr{L}(F; F)$ olyan operátor, amelyre $p \circ p = p$ és $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ (14.1.2.). Ekkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt környezete és olyan $\varphi : U \to E$ függvény, hogy*

- *$\varphi\langle U\rangle \subseteq E$ nyílt halmaz, és a φ függvény C^n-diffeomorfizmus U és $\varphi\langle U\rangle$ között;*
- *$(\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}) = \mathrm{id}_E$;*
- *fennáll a $p \circ f \circ \varphi^{-1} = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{\varphi\langle U\rangle}$ egyenlőség;*

továbbá ekkor a $(p \circ f)|_U : U \to \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ függvény nyílt leképezés, vagyis minden $\Omega \subseteq U$ nyílt halmazra a $(p \circ f)\langle\Omega\rangle$ halmaz nyílt az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ normált altérben.

Bizonyítás. Legyen $q \in \mathscr{L}(E; E)$ olyan operátor, amelyre $q \circ q = q$ és $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$, továbbá legyen $E_0 := \mathrm{Ker}(q)$; ekkor az előző állítás szerint E_0 topologikus algebrai komplementre $\mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$-nak. A $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0} : E_0 \to \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ operátor injektív, mert $x \in E_0$ és $((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x) = 0$ esetén $x \in \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \cap E_0 = \{0\}$. Továbbá, $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$, mert $y \in \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ esetén van olyan $x \in E = \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \oplus E_0$, hogy $y = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x)$, tehát léteznek olyan $x_0 \in E_0$ és $z \in \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$, amelyekre $x = z + x_0$ és $y = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(z + x_0) = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(x_0) \in \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0})$. Ez azt jelenti, hogy a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0} : E_0 \to \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ leképezés folytonos lineáris bijekció. Továbbá, E_0 zárt lineáris altér E-ben és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ zárt lineáris altér F-ben (14.1.2.), valamint E és F Banach-terek, ezért az $E_0 \subseteq E$ és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \subseteq F$ normált alterek teljesek. Ezért Banach nyíltleképezés tétele alapján a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}$ leképezés *lineáris homeomorfizmus* az E_0 és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ Banach-terek között. Ezenkívül nyilvánvaló, hogy

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0})^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))},$$
$$((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0})^{-1} \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \mathrm{id}_E - q.$$

Értelmezzük most a

$$\Phi := ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0})^{-1} \circ p \circ f + q : \mathrm{Dom}(f) \to E$$

leképezést. Ez a függvény C^n-osztályú, mert a hipotézis alapján f is C^n-osztályú, továbbá világos, hogy

$$(\mathrm{D}\Phi)(\mathfrak{a}) = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0})^{-1} \circ p \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) + q = (\mathrm{id}_E - q) + q = \mathrm{id}_E.$$

Most az inverzfüggvény-tételt alkalmazzuk a $\Phi : E \rightarrowtail E$ függvényre és az $\mathfrak{a}$ pontra. Vehetjük tehát $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt környezetét E-ben, amelyre $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és $\Phi\langle U\rangle$ nyílt halmaz E-ben, valamint az $\varphi := \Phi|_U$ függvény C^n-diffeomorfizmus U és $\Phi\langle U\rangle$ között. A differenciálás lokalitása folytán $(\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}\Phi)(\mathfrak{a}) = \mathrm{id}_E$, és a definíciók alapján könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ \varphi = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ (\Phi|_U) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0})^{-1} \circ p \circ (f|_U) + (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ q = \\ = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))} \circ p \circ (f|_U) = (p \circ f)|_U$$

hiszen $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$, és $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$, így $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ q = 0$. Ebből következik, hogy $p \circ f \circ \varphi^{-1} = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{\varphi\langle U\rangle}$ is teljesül.

Legyen $\Omega \subseteq U$ nyílt halmaz. A φ függvény homeomorfizmus U és $\varphi\langle U\rangle$ között, ezért $\varphi\langle\Omega\rangle \subseteq E$ nyílt halmaz. Az előző állítás szerint az $\mathrm{id}_E - q : E \to \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - q) = \mathrm{Ker}(q) = E_0$ függvény nyílt leképezés, hiszen $\mathrm{id}_E - q \in \mathscr{L}(E;E)$ olyan operátor, hogy $(\mathrm{id}_E - q) \circ (\mathrm{id}_E - q) = \mathrm{id}_E - q$; ezért $(\mathrm{id}_E - q)\langle\varphi\langle\Omega\rangle\rangle \subseteq E_0$ nyílt halmaz az E_0 normált altérben. Továbbá, a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}$ leképezés lineáris homeomorfizmus az E_0 és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ Banach-terek között, ezért a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}\langle(\mathrm{id}_E - q)\langle\varphi\langle\Omega\rangle\rangle\rangle$ halmaz nyílt az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \subseteq F$ normált altérben. Ugyanakkor

$$(p \circ f)|_U = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ \varphi = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ (\varphi - q \circ \varphi) = \\ = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ (\mathrm{id}_E - q) \circ \varphi = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0} \circ (\mathrm{id}_E - q) \circ \varphi,$$

amiből következik, hogy a

$$(p \circ f)\langle\Omega\rangle = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}\langle(\mathrm{id}_E - q)\langle\varphi\langle\Omega\rangle\rangle\rangle$$

halmaz nyílt $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \subseteq F$ normált altérben. ■

14.3.8. Tétel. (**A szubmerziók jellemzése**) *Legyenek E és F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény. Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *A $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ operátor szürjektív és $\mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$-nak létezik topologikus algebrai komplementere (vagyis f szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban).*

(ii) *Létezik olyan (U, φ, u) hármas, amelyre teljesülnek a következők:*

– *$U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak;*

– *$\varphi : U \to E$ olyan függvény, hogy $\varphi\langle U\rangle$ nyílt halmaz E-ben, és φ C^n-diffeomorfizmus U és $\varphi\langle U\rangle$ között;*

– *$u \in \mathscr{L}(E;F)$ olyan szürjektív operátor, hogy $\mathrm{Ker}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere;*

– *$f \circ \varphi^{-1} = u|_{\varphi\langle U\rangle}$, vagyis $f|_U = u \circ \varphi$ (következésképpen az $f|_U : U \to F$ függvény nyílt leképezés).*

(iii) *Létezik olyan (U, V, G, Z, g) ötös, amelyre teljesülnek a következők:*

– *$U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, és $V \subseteq F$ olyan nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak, hogy $f\langle U\rangle \subseteq V$;*

– *G Banach-tér és $Z \subseteq G$ nyílt halmaz;*

– *$g : U \to G$ olyan olyan, hogy $\mathrm{Im}(g) \subseteq Z$, és az $U \to V \times G; x \mapsto (f(x), g(x))$ leképezés C^n-diffeomorfizmus U és $V \times Z$ között.*

(iv) *Létezik* $\mathfrak{a}$*-nak olyan* $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ *nyílt környezete és* $f(\mathfrak{a})$*-nak olyan* $V \subseteq F$ *nyílt környezete, valamint létezik olyan* $s : V \to E$ *függvény, amely* C^n*-osztályú,* $f\langle U\rangle \subseteq V$*,* $s\langle V\rangle \subseteq U$*,* $s(f(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ *és* $f \circ s = \mathrm{id}_V$ *(vagyis* $f|_U$*-nak létezik* C^n*-osztályú jobbinverze).*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Az előző állításból a $p := \mathrm{id}_F$ választással. Látható hogy, hogy φ még a $(\mathrm{D}\varphi)(\mathfrak{a}) = \mathrm{id}_E$ feltételnek is eleget tehet, és $u := (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ választható. Sőt, az előző állítás alapján még az is világos, hogy U megadható úgy, hogy az $f|_U : U \to F$ függvény nyílt leképezés legyen.

(ii)⇒(iii) Legyen (U', φ, u) olyan hármas, amelyre $U' \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, $\varphi : U' \to E$ olyan függvény, hogy $\varphi\langle U'\rangle$ nyílt halmaz E-ben és φ az U' és $\varphi\langle U'\rangle$ halmazok között C^n-diffeomorfizmus, valamint $u \in \mathscr{L}(E; F)$ olyan szürjektív operátor, hogy $\mathrm{Ker}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere és $f \circ \varphi^{-1} = u|_{\varphi\langle U'\rangle}$. Az u-ra vonatkozó hipotézis és 14.3.2. alapján vehetünk olyan $v \in \mathscr{L}(F; E)$ operátort, amelyre $u \circ v = \mathrm{id}_F$. (Megjegyezzük, hogy Banach nyíltleképezés tételét itt is alkalmazzuk, mert $u : E \to F$ szürjektív folytonos lineáris operátor, ezért nyílt leképezés.

Képezzük most a következő függvényeket:

$$g' := (\mathrm{id}_E - v \circ u) \circ \varphi : U' \to E;$$
$$w : F \times \mathrm{Ker}(u) \to E; \quad (y, x) \mapsto v(y) + x;$$
$$h' := \varphi^{-1} \circ w : \overset{-1}{w}\langle \varphi\langle U'\rangle\rangle \to U'.$$

Tekintsük továbbá az

$$(f, g') : U' \to F \times \mathrm{Ker}(u); \quad x \mapsto (f(x), g'(x))$$

leképezést. Természetesen $(f, g')\langle U'\rangle \subseteq \overset{-1}{w}\langle \varphi\langle U'\rangle\rangle =: \mathrm{Dom}(h')$, mert ha $x \in U'$, akkor $f|_{U'} = u \circ \varphi$ és $u \circ v = \mathrm{id}_F$ miatt

$$w(f(x), g'(x)) = v(f(x)) + g'(x) = v(u(\varphi(x))) + ((\mathrm{id}_E - v \circ u) \circ \varphi)(x) = \varphi(x) \in \varphi\langle U'\rangle.$$

Ugyanakkor $(f, g') \circ h' = \mathrm{id}_{\overset{-1}{w}\langle \varphi\langle U'\rangle\rangle}$ is teljesül, mert ha $(y, x) \in \overset{-1}{w}\langle \varphi\langle U'\rangle\rangle \subseteq F \times \mathrm{Ker}(u)$, akkor

$$\begin{aligned}((f, g') \circ h')(y, x) &= (f, g')(\varphi^{-1}(v(y) + x)) = \\ &= (f(\varphi^{-1}(v(y) + x)), g'(\varphi^{-1}(v(y) + x))) = \\ &= (u(v(y) + x), v(y) + x - (v \circ u)(v(y) + x)) = (y, x),\end{aligned}$$

hiszen $u \circ v = \mathrm{id}_F$ és $x \in \mathrm{Ker}(u)$ miatt $u(x) = 0$.

Ez azt jelenti, hogy az $(f, g') : U' \to \overset{-1}{w}\langle \varphi\langle U'\rangle\rangle$ függvény *bijekció*, és $(f, g')^{-1} = h'$. A $\varphi\langle U'\rangle \subseteq E$ halmaz nyílt, és nyilvánvaló, hogy az $(f, g')(\mathfrak{a}) = (f(\mathfrak{a}), \varphi(\mathfrak{a}) - v(u(\varphi(\mathfrak{a})))) = (f(\mathfrak{a}), \varphi(\mathfrak{a}) - v(f(\mathfrak{a}))) \in (f, g')\langle U'\rangle$, ezért létezik olyan $V \subseteq F$ nyílt halmaz és $Z \subseteq \mathrm{Ker}(u)$ nyílt halmaz, hogy $V \times Z \subseteq (f, g')\langle U'\rangle = \overset{-1}{w}\langle \varphi\langle U'\rangle\rangle$, valamint $f(\mathfrak{a}) \in V$ és $\varphi(\mathfrak{a}) - v(u(\varphi(\mathfrak{a}))) \in Z$. Legyenek

$$U := \overset{-1}{(f, g')}\langle V \times Z\rangle; \quad g := g'|_U; \quad h := h'|_{V \times Z}.$$

Ekkor az $(f, g) : U \to V \times Z$; $x \mapsto (f(x), g(x))$ függvény bijekció, $(f, g)^{-1} = h$, és világos, hogy az (f, g) és h függvények C^n-osztályúak, így (f, g) az U és $V \times Z$ halmazok között

C^n-diffeomorfizmus. Ezért a $G := \mathrm{Ker}(u)$ Banach-tér, a $Z \subseteq G$ és $V \subseteq F$ nyílt halmazok, valamint a $g : U \to Z$ függvény olyanok, hogy az (U, V, G, Z, g) ötösre teljesülnek a (iv)-ben megfogalmazott tulajdonságok.

(iii)⇒(iv) Legyen (U, V, G, Z, g) olyan ötös, amelyre teljesülnek a (iii)-ban megfogalmazott tulajdonságok. Tekintsük az

$$s := (f, g)^{-1}(\cdot, g(\mathfrak{a})) : V \to U$$

parciális függvényt, amely nyilvánvalóan C^n-osztályú, mert a $V \to V \times Z;\ y \mapsto (y, g(\mathfrak{a}))$ és az $(f, g)^{-1} : V \times Z \to U$ C^n-osztályú osztályú függvények kompozíciója. Ha $x := s(f(\mathfrak{a}))$, akkor $(f, g)(\mathfrak{a}) = (f(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a})) = (f, g)(s(f(\mathfrak{a}))) = (f, g)(x)$, tehát az (f, g) függvény injektivitása folytán $x = \mathfrak{a}$, vagyis $s(f(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$. (Vigyázzunk arra, hogy az f és g függvények külön-külön nem szükségképpen injektívek!) Legyen most $y \in V$ és $x := (f, g)^{-1}(y, g(\mathfrak{a}))$, vagyis $x = s(y)$. Ekkor $f(s(y)) = f(x)$ és $(f(x), g(x)) = (f, g)(x) = (y, g(\mathfrak{a}))$, tehát $f(x) = y$ (és egyébként $g(x) = g(\mathfrak{a})$), ezért $f(s(y)) = y$. Ez azt jelenti, hogy $f \circ s = \mathrm{id}_V$. Z

(iv)⇒(i) Legyen $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, és $V \subseteq F$ olyan nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak, valamint legyen $s : V \to E$ olyan függvény, amely C^n-osztályú, és teljesül az, hogy $f\langle U\rangle \subseteq V$, $s\langle V\rangle \subseteq U$, $s(f(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ és $f \circ s = \mathrm{id}_V$. Ekkor a függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint

$$\mathrm{id}_F = (\mathrm{D}\ \mathrm{id}_V)(f(\mathfrak{a})) = (\mathrm{D}f)(s(f(\mathfrak{a}))) \circ (\mathrm{D}s)(f(\mathfrak{a})) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ (\mathrm{D}s)(f(\mathfrak{a})),$$

tehát a $v := (\mathrm{D}s)(f(\mathfrak{a})) \in \mathscr{L}(F; E)$ operátor olyan, hogy $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ v = \mathrm{id}_F$. ■

14.3.9. Tétel. (**A szubmerziók jellemzése véges dimenziós esetben**) *Legyenek E és F véges dimenziós normált terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény. Az f függvény pontosan akkor szubmerzió az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha létezik olyan (U, V, Φ, Ψ) négyes, hogy*

– *$U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak és $V \subseteq F$ olyan nyílt környezete $f(\mathfrak{a})$-nak, amelyre $f\langle U\rangle \subseteq V$;*

– *$\Psi : V \to \mathbb{K}^{\dim(F)}$ olyan függvény, hogy $\Psi\langle V\rangle$ nyílt halmaz $\mathbb{K}^{\dim(F)}$-ben, és Ψ C^n-diffeomorfizmus V és $\Psi\langle V\rangle$ között;*

– *$\dim(F) \le \dim(E)$ és $\Phi : U \to \mathbb{K}^{\dim(E)-\dim(F)}$ olyan függvény, hogy a*

$$\Theta : U \to \mathbb{K}^{\dim(F)} \times \mathbb{K}^{\dim(E)-\dim(F)}; \quad x \mapsto (\Psi(f(x)), \Phi(x))$$

leképezés C^n-diffeomorfizmus U és $\Theta\langle U\rangle$ között.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (U, V, Φ, Ψ) olyan négyes, amelyre teljesülnek az állításban megfogalmazott tulajdonságok. Ha $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{K}^{\dim(F)} \times \mathbb{K}^{\dim(E)-\dim(F)} \to \mathbb{K}^{\dim(F)}$ a kanonikus projekció, akkor

$$\mathrm{pr}_1 \circ \Theta = \Psi \circ (f|_U)$$

nyilvánvalóan igaz. Ebből következik, hogy ha $\alpha : \mathbb{K}^{\dim(F)} \times \mathbb{K}^{\dim(E)-\dim(F)} \to E$ és $\beta : \mathbb{K}^{\dim(F)} \to F$ tetszőleges lineáris bijekciók, akkor az U környezet, a $\varphi := \alpha \circ \Theta : U \to E$ függvény, valamint az $u := \beta \circ \mathrm{pr}_1 \circ \alpha^{-1} : E \to F$ lineáris operátor olyan, hogy f helyett a $\beta \circ \Psi \circ (f|_U)$ függvényre az (U, φ, u) hármas kielégíti az előző tétel (iii) pontjában kimondott feltételeket, vagyis $\beta \circ \Psi \circ (f|_U)$ szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban. Ezért a függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint a

$$(\mathrm{D}(\beta \circ \Psi \circ (f|_U)))(\mathfrak{a}) = \beta \circ (\mathrm{D}\Psi)(f(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$$

folytonos lineáris operátor szürjektív, és a magjának létezik topologikus algebrai komplementere (14.1.4.). Azonban $\beta : \mathbb{K}^{\dim(F)} \to F$ lineáris bijekció, és $(\mathrm{D}\Psi)(f(\mathfrak{a})) : F \to \mathbb{K}^{\dim(F)}$ is lineáris bijekció, így a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) : E \to F$ folytonos lineáris operátor is szürjektív és persze a magjának van topologikus algebrai komplementere, tehát f szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban, és legyen (U, φ, u) olyan hármas, amelyre teljesülnek az előző tétel (iii) pontjában megfogalmazott tulajdonságok. Az $u \in \mathscr{L}(E; F)$ lineáris szürjekcióhoz léteznek olyan $\alpha : \mathbb{K}^{\dim(F)} \times \mathbb{K}^{\dim(E)-\dim(F)} \to E$ és $\beta : \mathbb{K}^{\dim(F)} \to F$ lineáris bijekciók, amelyekre

$$\beta \circ u = \mathrm{pr}_1 \circ \alpha,$$

ahol $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{K}^{\dim(F)} \times \mathbb{K}^{\dim(E)-\dim(F)} \to \mathbb{K}^{\dim(F)}$ a kanonikus projekció. Ekkor $f|_U = u \circ \varphi$ miatt $\beta \circ (f|_U) = \mathrm{pr}_1 \circ \alpha \circ \varphi$. Legyen $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{K}^{\dim(F)} \times \mathbb{K}^{\dim(E)-\dim(F)} \to \mathbb{K}^{\dim(E)-\dim(F)}$ a kanonikus projekció, és értelmezzük a

$$\Phi := \mathrm{pr}_2 \circ \alpha \circ \varphi : U \to \mathbb{K}^{\dim(E)-\dim(F)};$$
$$\Psi := \beta|_{f\langle U\rangle} : f\langle U\rangle \to \mathbb{K}^{\dim(F)}$$

függvényeket. Az $f\langle U\rangle$ halmaz nyílt, mert $f\langle U\rangle = u\langle\varphi\langle U\rangle\rangle$, és a feltevés alapján $\varphi\langle U\rangle \subseteq E$ nyílt halmaz, továbbá Banach nyíltleképezés-tétel alapján u nyílt leképezés. Ha $x \in U$, akkor

$$\begin{aligned}(\alpha \circ \varphi)(x) = \alpha(\varphi(x)) = (\mathrm{pr}_1(\alpha(\varphi(x))), \mathrm{pr}_2(\alpha(\varphi(x)))) = \\ = (\beta(f(x)), \Phi(x)) = (\Psi(f(x)), \Phi(x)) = \Theta(x),\end{aligned}$$

vagyis a $\Theta : U \to \mathbb{K}^{\dim(F)} \times \mathbb{K}^{\dim(E)-\dim(F)};\ x \mapsto (\Psi(f(x)), \Phi(x))$ függvény C^n-diffeomorfizmus U és $\Theta\langle U\rangle$ között. Továbbá Ψ nyilvánvalóan C^n-diffeomorfizmus $f\langle U\rangle$ és $\Psi\langle f\langle U\rangle\rangle$ között, ezért az U, Φ és Ψ objektumokra teljesülnek az állításban megfogalmazott tulajdonságok. ■

14.4. Szubimmerziók és állandó rangú függvények

A következő definíció előtt megjegyezzük, hogy ha E, F normált terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény, akkor az $E \times F$ normált szorzattér olyan, hogy az

$$i : \mathrm{Dom}(f) \to E \times F; \quad x \mapsto (x, f(x))$$

függvény C^n-osztályú immerzió és az

$$s : E \times F \to F; \quad (x, y) \mapsto y$$

függvény C^n-osztályú (valójában analitikus) szubmerzió, és teljesül az

$$f = s \circ i$$

egyenlőség. Ezt a tényt röviden úgy fogalmazzuk meg, hogy normált terek között ható C^n-osztályú függvény globálisan előállítható egy C^n-osztályú immerzió és egy azt követő C^n-osztályú szubmerzió kompozíciójaként. Azonban látni fogjuk, hogy szubmerzió és azt követő immerzió kompozíciójaként általában még lokálisan sem állíthatók elő a függvények.

14.4.1. Definíció. *Legyenek E, F normált terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Azt mondjuk, hogy f az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban* C^n**-szubimmerzió**, *ha létezik olyan G Banach-tér, és léteznek olyan $s : E \rightarrowtail G$ és $i : G \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvények, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(s) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, $\mathrm{Im}(s) \subseteq \mathrm{Dom}(i)$, s szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban, és i immerzió az $s(\mathfrak{a})$ pontban, és $f = i \circ s$ a $\mathrm{Dom}(s)$ halmazon (vagyis $i \circ s \subseteq f$).*

A következő állítás megmutatja, hogy a szubimmerziók fogalma az immerziók és a szubmerziók fogalmának általánosítása.

14.4.2. Állítás. *Legyenek E, F Banach-terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. Ha $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és f az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén C^n-osztályú, és $\mathfrak{a}$-ban immerzió vagy szubmerzió, akkor f az $\mathfrak{a}$ pontban C^n-szubimmerzió.*

Bizonyítás. Legyen U olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, amelyre $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és az $f|_U$ függvény C^n-osztályú.

Ha f az $\mathfrak{a}$ pontban immerzió, akkor $G := E$ Banach-tér, és az $s := \mathrm{id}_U : E \rightarrowtail G$ és $i := f|_U : G \rightarrowtail F$ függvények C^n-osztályúak, s szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban és i immerzió az $s(\mathfrak{a})$ pontban, továbbá $f = i \circ s$ a $\mathrm{Dom}(s) = U$ halmazon, ezért az f függvény az $\mathfrak{a}$ pontban C^n-szubimmerzió. olyan objektumok, hogy

Ha f az $\mathfrak{a}$ pontban szubmerzió, akkor $G := F$ Banach-tér, és az $s := f|_U : E \rightarrowtail G$, $i := \mathrm{id}_U : G \rightarrowtail F$ függvények C^n-osztályúak, s szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban és i immerzió az $s(\mathfrak{a})$ pontban, továbbá $f = i \circ s$ a $\mathrm{Dom}(s) = U$ halmazon, ezért az f függvény az $\mathfrak{a}$ pontban C^n-szubimmerzió. ■

A következő állítás megmutatja, hogy nem minden C^n-osztályú függvény C^n-szubimmerzió, tehát a szubimmerziók fogalma nem triviális. Ehhez először megfogalmazunk egy definíciót.

14.4.3. Definíció. *Legyenek E, F normált terek, és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ esetén*

$$\mathrm{rg}_{\mathfrak{a}}(f) := \begin{cases} \dim(\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))) & \text{, ha } \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \text{ véges dimenziós altér } F\text{-ben,} \\ +\infty & \text{, egyébként,} \end{cases}$$

és az $\mathrm{rg}_{\mathfrak{a}}(f) \in \overline{\mathbb{N}}$ elemet az f függvény **rangjának** *nevezzük az $\mathfrak{a}$ pontban.*

14.4.4. Állítás. *Legyenek E, F Banach-terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. Ha $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és f az $\mathfrak{a}$ pontban C^n-szubimmerzió, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U$ esetén f az x pontban C^n-szubimmerzió, valamint $\mathrm{rg}_x(f) = \mathrm{rg}_{\mathfrak{a}}(f)$, vagyis f az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén állandó rangú.*

Bizonyítás. Legyen G olyan Banach-tér, valamint legyenek $s : E \rightarrowtail G$ és $i : G \rightarrowtail F$ olyan C^n-osztályú függvények, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(s) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, $\mathrm{Im}(s) \subseteq \mathrm{Dom}(i)$, s szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban, és i immerzió az $s(\mathfrak{a})$ pontban, és $f = i \circ s$ a $\mathrm{Dom}(s)$ halmazon.

Az i függvény immerzió az $s(\mathfrak{a})$ pontban, így vehetjük $s(\mathfrak{a})$-nak olyan V nyílt környezetét, hogy $V \subseteq \mathrm{Dom}(i)$ és az i függvény a V minden pontjában immerzió. Az s függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, így $\overset{-1}{s}\langle V \rangle$ az $\mathfrak{a}$-nak nyílt környezete. Ugyanakkor, az s függvény szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért vehetjük $\mathfrak{a}$-nak olyan U' nyílt környezetét, hogy $U' \subseteq \mathrm{Dom}(s)$ és az s függvény az U' minden pontjában szubmerzió. Legyen

$U := U' \cap \overset{-1}{s}\langle V\rangle$, valamint $i' := i|_V$ és $s' := s|_U$. Ekkor U olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és $\mathrm{Im}(s') \subseteq \mathrm{Dom}(i')$, és a C^n-osztályú s' függvény a definíciós tartományának minden pontjában szubmerzió, és a C^n-osztályú i' függvény a definíciós tartományának minden pontjában immerzió, valamint $i' \circ s' = f$ a $\mathrm{Dom}(s')$ halmazon. Tehát, a definíció alapján, az f függvény az U minden pontjában C^n-szubimmerzió, továbbá, $x \in U$ esetén $(\mathrm{D}f)(x) = (\mathrm{D}i')(s'(x)) \circ (\mathrm{D}s')(x)$, következésképpen:

$$\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = (\mathrm{D}i')(s'(x))\langle(\mathrm{D}s')(x)\langle E\rangle\rangle = (\mathrm{D}i')(s'(x))\langle G\rangle,$$

hiszen a $(\mathrm{D}s')(x) : E \to G$ lineáris operátor szürjektív. De minden $y \in V$ esetén a $(\mathrm{D}i')(y) : G \to F$ lineáris operátor injektív, ezért a $(\mathrm{D}i')(y)\langle G\rangle \subseteq F$ lineáris altér algebrai dimenziója az y-tól független állandó (éspedig egyenlő a G vektortér algebrai dimenziójával). Tehát, ha $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ véges dimenziós, akkor minden $U \ni x$-re

$$\mathrm{rg}_x(f) = \dim(\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))) = \dim(\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))) = \mathrm{rg}_{\mathfrak{a}}(f),$$

és ha $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ végtelen dimenziós, akkor $\mathrm{rg}_x(f) = +\infty = \mathrm{rg}_{\mathfrak{a}}(f)$ teljesül minden $x \in U$ esetén. ∎

14.4.5. Következmény. *Ha E, F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény, akkor az*

$$\{\, x \in \mathrm{Dom}(f) \mid {''}f \textit{ az } x \textit{ pontban } \mathrm{C}^n\textit{-szubimmerzió}{''}\}$$

halmaz nyílt E-ben.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint ez nyilvánvaló. ∎

14.4.6. Állítás. *Legyenek E és F Banach-terek, $E_0 \subseteq E$ és $F_0 \subseteq F$ lineáris alterek, $f : E \rightarrowtail F$ folytonosan differenciálható függvény és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Fennállnak az*

$$E_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = E,$$

$$F_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = F$$

egyenlőségek, és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U_0 környezete, hogy $U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U_0$ esetén

$$F_0 \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = \{0\}.$$

(ii) *Létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U$ esetén fennállnak az*

$$E_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(x)) = E,$$

$$F_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = F$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $p \in \mathscr{L}(F;F)$ olyan, hogy $p \circ p = p$, és $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$, valamint $\mathrm{Ker}(p) = F_0$. Tekintsük a következő függvényt:

$$\mathrm{Dom}(f) \to \mathscr{L}(E_0; \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))); \quad x \mapsto p \circ (\mathrm{D}f)(x)|_{E_0}.$$

Ez a leképezés folytonos és a $\mathfrak{a}$ ponthoz a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}$ operátort rendeli, amely lineáris homeomorfizmus az E_0 és $\mathrm{Im}(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ Banach-terek között. Az E_0 és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ Banach-terek közötti lineáris homeomorfizmusok halmaza nyílt az $\mathscr{L}(E_0; \mathrm{Im}(\mathrm{D}f)((\mathfrak{a})))$ operátortérben, ezért létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U' környezete, hogy $U' \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U'$ esetén $p \circ (\mathrm{D}f)(x)|_{E_0}$ lineáris homeomorfizmus E_0 és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ között. Speciálisan, minden $U' \ni x$-re

$$p\langle(\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle\rangle = \mathrm{Im}\left(p \circ (\mathrm{D}f)(x)|_{E_0}\right) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})).$$

Megmutatjuk, hogy minden $x \in U' \cap U_0$ esetén $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = (\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle$. Valóban, legyen $x \in U' \cap U_0$ és $\mathbf{f} \in \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))$. Ekkor van olyan $\mathbf{e}$, hogy $\mathbf{f} = (\mathrm{D}f)(x)(\mathbf{e})$, így $p((\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e}) = p(\mathbf{f}) \in \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = p\langle(\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle\rangle$, tehát van olyan $\mathbf{e_0} \in E_0$, hogy $p(\mathrm{D}f(x)\mathbf{e}) = p(\mathrm{D}f(x)\mathbf{e_0})$. Ekkor $(\mathrm{D}f)(x)(\mathbf{e} - \mathbf{e_0}) \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = F_0 \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = \{0\}$, ha $x \in U_0$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{f} = (\mathrm{D}f)(x)(\mathbf{e}) = \mathbf{f} = (\mathrm{D}f)(x)(\mathbf{e_0}) \in (\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle$, következésképpen $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = (\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle$.

Most igazoljuk, hogy minden $x \in U' \cap U_0$ esetén

$$E_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(x)) = E.$$

Valóban, ha $x \in U' \cap U_0$ és $\mathbf{e} \in E$, akkor $(\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e} \in \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = (\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle$, így létezik olyan $\mathbf{e_0} \in E_0$, hogy $(\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e} = (\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e_0}$, tehát $\mathbf{e} = \mathbf{e_0} + (\mathbf{e} - \mathbf{e_0}) \in E_0 + \mathrm{Ker}(\mathrm{D}f)(x)$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in U' \cap U_0$ esetén $E_0 + \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(x)) = E$. Ugyanakkor, ha $x \in U'$ és $\mathbf{e_0} \in E_0 \cap \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(x))$, akkor $\left(p \circ (\mathrm{D}f)(x)|_{E_0}\right)\mathbf{e_0} = 0$, így az $p \circ (\mathrm{D}f)(x)|_{E_0}$ operátor injektivitása miatt $\mathbf{e_0} = 0$. Ez azt jelenti, hogy $E_0 \cap \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(x)) = \{0\}$. Ezért minden $U' \cap U_0 \ni x$-re $E_0 \underset{(t)}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(x)) = E$, hiszen az E_0 és $\mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(x))$ lineáris alterek zártak E-ben.

Megmutatjuk, hogy létezik a $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy $U \subseteq U' \cap U_0$ és minden $U \ni x$-re

$$F_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = F.$$

Az U_0 választása szerint minden $U_0 \ni x$-re $F_0 \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = \{0\}$. Legyen most $x \in U' \cap U_0$ és $\mathbf{f} \in F$. Ekkor $F = F_0 + \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = F_0 + p\langle(\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle\rangle$ miatt van olyan $\mathbf{f_0} \in F_0$ és $\mathbf{e_0} \in E_0$, hogy $\mathbf{f} = \mathbf{f_0} + p((\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e_0})$, tehát

$$\mathbf{f} = \mathbf{f_0} + (p((\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e_0}) - (\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e_0}) + (\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e_0} \in F_0 + \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)),$$

hiszen $p((\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e_0}) - (\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e_0} \in \mathrm{Ker}(p) = F_0$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in U' \cap U_0$ esetén $F = F_0 \bigoplus \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))$, azonban $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))$ nem szükségképpen zárt lineáris altér F-ben. Tehát az állítás bizonyítását úgy fejezhetjük be, hogy igazoljuk a $\mathfrak{a}$ olyan U környezetének létezését, amelyre $U \subseteq U' \cap U_0$ és minden $U \ni x$-re $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))$ *zárt* F-ben. Ehhez tekintsük a következő folytonos függvényt:

$$g : U' \cap U_0 \to \mathscr{L}(E_0; F); \quad x \mapsto (\mathrm{D}f)(x)|_{E_0}.$$

Tekintettel arra, hogy a

$$\mathfrak{M} := \{\ u \in \mathscr{L}(E_0; F) \mid \exists v \in \mathscr{L}(F; E_0) :\ v \circ u = \mathrm{id}_{E_0}\ \}$$

halmaz nyílt $\mathscr{L}(E_0;F)$-ben és $g(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{M}$; létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy $U \subseteq U' \cap U_0$ és $g\langle U\rangle \subseteq \mathfrak{M}$. Tehát minden $U \ni x$-re a $(\mathrm{D}f)(x)|_{E_0} \in \mathscr{L}(E_0;F)$ operátornak létezik folytonos lineáris balinverze, vagyis $(\mathrm{D}f)(x)|_{E_0}$ injektív és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)|_{E_0})$-nek létezik topologikus algebrai komplementere F-ben. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in U$ esetén az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = (\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)|_{E_0})$ altérnek létezik topologikus algebrai komplementere F-ben, így $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))$ zárt F-ben.

(ii)⇒(i) Az $U_0 := U$ környezet nyilvánvalóan eleget tesz a követelménynek. ■

14.4.7. Állítás. *Legyenek E és F Banach-terek, $f : E \rightarrowtail F$ folytonosan differenciálható függvény és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. Tegyük fel, hogy teljesül a következő feltételek valamelyike:*

a) *f az $\mathfrak{a}$ pontban immerzió;*

b) *f az $\mathfrak{a}$ pontban szubmerzió;*

c) *létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U' környezete, hogy $U' \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U'$ esetén $\mathrm{rg}_x f = \mathrm{rg}_{\mathfrak{a}} f < +\infty$ (vagyis az f függvény az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén állandó és véges rangú).*

Ekkor léteznek olyan $E_0 \subseteq E$ és $F_0 \subseteq F$ lineáris alterek, és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U$ esetén fennállnak az

$$E_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(x)) = E,$$
$$F_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = F$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy f az $\mathfrak{a}$ pontban immerzió, és legyen $p \in \mathscr{L}(F;F)$ olyan, hogy $p \circ p = p$ és $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$. Ekkor

$$\mathrm{Ker}(p) \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = F,$$

és a

$$\mathrm{Dom}(f) \to \mathscr{L}(E;\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))); \quad x \mapsto p \circ (\mathrm{D}f)(x)$$

leképezés folytonos, és a $\mathfrak{a}$ ponthoz a $p \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ operátort rendeli, amely lineáris homeomorfizmus E és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ között. Az E és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ Banach-terek közötti lineáris homeomorfizmusok halmaza nyílt, ezért létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U$ esetén a $p \circ (\mathrm{D}f)(x) \in \mathscr{L}(E;\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})))$ operátor lineáris homeomorfizmus. Ekkor minden $x \in U$ esetén $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = \{0\}$ teljesül, mert ha $\mathbf{f} \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))$, akkor van olyan $\mathbf{e} \in E$, hogy $\mathbf{f} = (\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e}$, és ekkor $p(\mathbf{f}) = 0$, így $(p \circ (\mathrm{D}f)(x))\mathbf{e} = 0$, tehát a $p \circ (\mathrm{D}f)(x)$ operátor injektivitása miatt $\mathbf{e} = 0$, következésképpen $\mathbf{f} = (\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e} = 0$. Tehát $F_0 := \mathrm{Ker}(p)$ olyan lineáris altere F-nek, és $E_0 := E$ olyan lineáris altere E-nek, és U olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U$ esetén $F_0 \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = \{0\}$, valamint fennállnak az

$$E_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = E,$$
$$F_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = F$$

egyenlőségek, tehát az előző állítás (i) pontjában megfogalmazott tulajdonság teljesül. (Itt az első egyenlőség nyilvánvaló, mert $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ injektivitása folytán természetesen

$\mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = \{0\}$.)

b) Tegyük fel, hogy f az $\mathfrak{a}$ pontban szubmerzió, és legyen E_0 olyan lineáris altere E-nek, hogy

$$E_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = E.$$

Ekkor a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E;F)$ operátor szürjektivitása miatt $F_0 := \{0\}$ olyan lineáris altere F-nek, hogy

$$F_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = F,$$

továbbá $U := \mathrm{Dom}(f)$ olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U$ esetén $F_0 \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = \{0\}$ triviálisan teljesül.

c) Legyen U' a $\mathfrak{a}$-nak olyan környezete E-ben, hogy $U' \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U'$ esetén $\mathrm{rg}_x f = \mathrm{rg}_{\mathfrak{a}} f < +\infty$. Speciálisan, ekkor $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$-nak létezik F-ben topologikus algebrai komplementere, mert véges dimenziós; továbbá $\mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$-nak létezik E-ben topologikus algebrai komplementere, mert véges kodimenziós zárt lineáris altér. Vehetünk tehát olyan $E_0 \subseteq E$ és $F_0 \subseteq F$ lineáris altereket, hogy

$$E_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = E,$$
$$F_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = F.$$

Legyen $p \in \mathscr{L}(F;F)$ olyan, hogy $p \circ p = p$, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ és $\mathrm{Ker}(p) = F_0$. Ekkor az

$$U' \to \mathscr{L}(E_0; \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))); \quad x \mapsto p \circ (\mathrm{D}f)(x)|_{E_0}$$

leképezés folytonos, és a $\mathfrak{a}$ ponthoz a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}$ operátort rendeli, amely lineáris bijekció, így homeomorfizmus az E_0 és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ véges dimenziós Banach-terek között. Ekkor vehetjük $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezetét E-ben, hogy $U \subseteq U'$ és minden $x \in U$ esetén a $p \circ (\mathrm{D}f)(x)|_{E_0}$ operátor lineáris homeomorfizmus E_0 és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ között. Ekkor $x \in U$ esetén $p\langle(\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle\rangle = \mathrm{Im}(p \circ (\mathrm{D}f)(x)|_{E_0}) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$, tehát

$$\mathrm{rg}_{\mathfrak{a}}(f) := \dim(\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))) = \dim(p\langle(\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle\rangle) \leq$$
$$\leq \dim((\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle) \leq \dim(\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))) =: \mathrm{rg}_x(f) = \mathrm{rg}_{\mathfrak{a}}(f),$$

tehát $\dim((\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle) = \dim(\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))) < +\infty$, következésképpen

$$(\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)).$$

Ha most $x \in U$ és $\mathbf{f} \in F_0 \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))$, akkor van olyan $\mathbf{e} \in E_0$, hogy $\mathbf{f} = (\mathrm{D}f)(x)\mathbf{e}$ és $\mathbf{f} \in F_0 = \mathrm{Ker}(p)$, vagyis $(p \circ (\mathrm{D}f)(x))\mathbf{e} = 0$, amiből a $p \circ (\mathrm{D}f)(x)$ operátor injektivitása alapján adódik, hogy $\mathbf{e} = 0$, tehát $\mathbf{f} = 0$. Ez azt jelenti, hogy U olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U$ esetén $F_0 \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = \{0\}$ teljesül. ■

14.4.8. Definíció. *Legyenek E, F normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény és $\mathfrak{a} \in E$. Ha $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy f az $\mathfrak{a}$ pontban* C^n**-linearizálható***, ha léteznek olyan $\varphi : E \rightarrowtail E$ és $\psi : F \rightarrowtail F$ lokális C^n-diffeomorfizmusok, valamint létezik olyan $u \in \mathscr{L}(E;F)$, hogy $\mathrm{Ker}(u)$-nak és $\mathrm{Im}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\varphi) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, $f\langle\mathrm{Dom}(\varphi)\rangle \subseteq \mathrm{Dom}(\psi)$, és $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = u$ az $\mathrm{Im}(\varphi)$ halmazon, vagy ami ugyanaz: $u\langle\mathrm{Im}(\varphi)\rangle \subseteq \mathrm{Im}(\psi)$ és $f|_{\mathrm{Dom}(\varphi)} = \psi^{-1} \circ u \circ \varphi$.*

A következő tétel megadja a C^n-linearizálhatóság legfontosabb elégséges feltételét. Később látni fogjuk, hogy bizonyos speciális esetben ez a feltétel szükséges is lesz.

14.4.9. Tétel. (**A C^n-linearizálhatóság elégséges feltétele.**) *Legyenek E és F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény, valamint $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. Ha léteznek olyan $E_0 \subseteq E$ és $F_0 \subseteq F$ lineáris alterek, és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U' környezete E-ben, hogy $U' \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U'$ esetén*

$$E_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(x)) = E,$$
$$F_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = F,$$

akkor f az $\mathfrak{a}$ pontban C^n-linearizálható.

Bizonyítás. (I) A hipotézis szerint E_0 topologikus algebrai komplementere $\mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$-nak, és F_0 topologikus algebrai komplementere $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$-nak, ezért 14.1.6. a) alapján vehetünk olyan $q \in \mathscr{L}(E; E)$ és $p \in \mathscr{L}(F; F)$ operátorokat, hogy

$$q \circ q = q, \quad \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})), \quad \mathrm{Ker}(q) = E_0,$$
$$p \circ p = p, \quad \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})), \quad \mathrm{Ker}(p) = F_0.$$

Könnyen látható, hogy a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0} : E_0 \to \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = \mathrm{Im}(p)$ leképezés lineáris bijekció E_0 és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ között. Valóban, ha $\mathbf{e}_0 \in E_0$ és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}(\mathbf{e}_0) = 0$, akkor $\mathbf{e}_0 \in E_0 \cap \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = \{0\}$, tehát $\mathbf{e}_0 = 0$, ami azt jelenti, hogy a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}$ operátor injektív. Továbbá, ha $\mathbf{f} \in \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$, akkor $E_0 + \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = E$ miatt léteznek olyan $\mathbf{e}_0 \in E_0$ és $\mathbf{e} \in \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$, hogy $\mathbf{f} = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}) = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}_0) = \left((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}\right)(\mathbf{e}_0)$, ami azt jelenti, hogy a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}$ operátor ráképez az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ altérre.

Világos, hogy a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0} : E_0 \to \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ operátor *homeomorfizmus* az E_0 és $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ normált alterek között, mert ezek a hipotézis alapján topologikus algebrai komplementerrel rendelkező, tehát zárt lineáris alterek az E, illetve F Banach-terekben, így ezek a normált alterek is Banach-terek, és a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}$ operátor folytonos lineáris bijekció ezek között, ezért elég Banach nyíltleképezés-tételére hivatkozni.

Megmutatjuk, hogy

$$\left((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}\right)^{-1} \circ ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) + q = \mathrm{id}_E.$$

Valóban, legyen $\mathbf{e} \in E$ tetszőleges. Ekkor az $\mathbf{e}_0 := \left((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}\right)^{-1} \circ ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e})$ vektorra $\mathbf{e}_0 \in E_0$ és $(\mathrm{D}f)(a)(\mathbf{e}_0) = (\mathrm{D}f)(a)(\mathbf{e})$, vagyis $\mathbf{e}_0 - \mathbf{e} \in \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = \mathrm{Im}(q)$. Ezért $\mathbf{e}_0 - \mathbf{e} = q(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}) = q(\mathbf{e}_0) - q(\mathbf{e}) = -q(\mathbf{e})$, hiszen $\mathbf{e}_0 \in E_0 = \mathrm{Ker}(q)$. Ebből következik, hogy $\mathbf{e}_0 + q(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$, amit bizonyítani kellett.

Képezzük most a

$$\Phi := \left(\left((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}\right)^{-1} \circ p \circ f + q\right)\Big|_{U'} : U' \to E$$

leképezést, amely nyilvánvalóan C^n-osztályú, és a függvénykompozíció differenciálási szabálya, valamint $p \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ miatt

$$(\mathrm{D}\Phi)(\mathfrak{a}) = \left((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}\right)^{-1} \circ p \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) + q = \left((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}\right)^{-1} \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) + q = \mathrm{id}_E.$$

Ezért az inverzfüggvény-tétel alapján létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $U'' \subseteq U'$ nyílt környezete, hogy $\Phi\langle U'' \rangle \subseteq E$ nyílt halmaz, és a $\Phi|_{U''}$ függvény C^n-diffeomorfizmus U'' és $\Phi\langle U'' \rangle$ között. A $\Phi(\mathfrak{a}) \in \Phi\langle U'' \rangle$ pontnak létezik olyan W nyílt környezete E-ben, amely *konvex* és $W \subseteq \Phi\langle U'' \rangle$. Ekkor az $U := \overset{-1}{\Phi}\langle W \rangle$ halmaz is nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, és a $\varphi := \Phi|_U$

függvény C^n-diffeomorfizmus az U és W nyílt halmazok között, valamint $W = \varphi\langle U\rangle$, tehát a $\varphi\langle U\rangle$ halmaz konvex. (Később kiderül, hogy miért fontos a φ értékkészletének konvexitása.) Ekkor a Φ és φ függvények definíciója alapján

$$\mathrm{id}_{\varphi\langle U\rangle} = \varphi \circ \varphi^{-1} = \Phi \circ \varphi^{-1} = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0})^{-1} \circ p \circ f \circ \varphi^{-1} + q \circ \varphi^{-1}$$

teljesül, és ezt az egyenlőséget a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ operátorral balról komponálva

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{\varphi\langle U\rangle} = p \circ f \circ \varphi^{-1}$$

adódik, hiszen $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ q = 0$ és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0})^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(p)}$.
(II) Megmutatjuk, hogy $z \in \varphi\langle U\rangle$, $z_0 \in \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ és $z + z_0 \in \varphi\langle U\rangle$ esetén

$$(f \circ \varphi^{-1})(z + z_0) = (f \circ \varphi^{-1})(z).$$

Valóban, a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{\varphi\langle U\rangle} = p \circ f \circ \varphi^{-1}$ függvény-egyenlőség alapján minden $z' \in \varphi\langle U\rangle$ esetén

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) &= (\mathrm{D}(p \circ f \circ \varphi^{-1}))(z') = p \circ ((\mathrm{D}(f \circ \varphi^{-1}))(z')) = \\ &= p \circ \left((\mathrm{D}f)(\varphi^{-1}(z'))\right) \circ \left((\mathrm{D}\varphi^{-1})(z')\right).\end{aligned}$$

Itt $z' \in \varphi\langle U\rangle$ esetén $(\mathrm{D}\varphi^{-1})(z') \in \mathscr{GL}(E)$, ezért

$$\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = p\langle \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\varphi^{-1}(z')))\rangle.$$

Ugyanakkor $z_0 \in \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ és $z' \in \varphi\langle U\rangle$ esetén

$$0 = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(z_0) = \left(p \circ ((\mathrm{D}(f \circ \varphi^{-1}))(z'))\right)(z_0) = p\left(\left((\mathrm{D}(f \circ \varphi^{-1}))(z')\right)(z_0)\right),$$

így $(\mathrm{D}(f \circ \varphi^{-1}))(z'))(z_0) = 0$. Ez azt jelenti, hogy az $f \circ \varphi^{-1}$ függvény tetszőleges $z_0 \in \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ irány menti deriváltja bármely $z' \in \varphi\langle U\rangle$ pontban nulla. Legyenek most $z \in \varphi\langle U\rangle$ és $z_0 \in \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ olyanok, hogy $z + z_0 \in \varphi\langle U\rangle$. Tekintsük a

$$g : [0,1] \to E; \quad t \mapsto (f \circ \varphi^{-1})(z + t.z_0)$$

leképezést. Ez jól értelmezett, mert $t \in [0,1]$ esetén $z + t.z_0 = (1-t).z + t.(z + z_0)$ és $z \in \varphi\langle U\rangle$, valamint $\varphi\langle U\rangle$ konvex halmaz, tehát $z + t.z_0 \in \varphi\langle U\rangle$. Világos, hogy a g függvény folytonos és a $]0,1[$ intervallum minden pontjában differenciálható (sőt C^n-osztályú a $]0,1[$ intervallumon). Ugyanakkor $t \in]0,1[$ esetén az előzőek alapján

$$(\mathrm{D}g)(t) = \left((\mathrm{D}(f \circ \varphi^{-1}))(z + t.z_0)\right)(z_0) = 0.$$

Ebből következik, hogy g a $]0,1[$ intervallumon állandó, tehát a g folytossága miatt

$$(f \circ \varphi^{-1})(z + z_0) = g(1) = g(0) = (f \circ \varphi^{-1})(z)$$

is teljesül, amint azt állítottuk.

(III) Most megmutatjuk, hogy $f(\mathfrak{a})$-nak létezik olyan V nyílt környezete F-ben, és létezik olyan $\psi : V \to V$ függvény, amely C^n-diffeomorfizmus, valamint létezik az $\mathfrak{a}$-nak olyan $U_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete $\mathbb{R}^n$-ben, hogy $U_{\mathfrak{a}} \subseteq U$, $f\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle \subseteq V$, és fennáll a

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

egyenlőség a $\varphi\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle$ halmazon, vagy ami ezzel ekvivalens: $((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))\langle\varphi\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle\rangle \subseteq \psi\langle V\rangle = V$ és

$$f = \psi^{-1} \circ ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \circ \varphi$$

teljesül az $U_{\mathfrak{a}}$ halmazon.

Ehhez először megjegyezzük, hogy $(p \circ f)|_U = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \circ \varphi$ és φ homeomorfizmus U és $\varphi\langle U\rangle$ között, míg a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) : E \to \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ operátor folytonos és szürjektív, ezért Banach nyíltleképezés-tétele alapján *nyílt leképezés*, így a $(p \circ f)|_U : U \to \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ függvény szintén nyílt leképezés, vagyis bármely $\Omega \subseteq U$ nyílt halmazra $(p \circ f)\langle\Omega\rangle$ nyílt halmaz az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ altérben (de az E-ben nem szükségképpen nyílt). Másfelől, az

$$U \to E; \quad x \mapsto \varphi(x) + q(\mathfrak{a} - x)$$

leképezés folytonos, és $\mathfrak{a}$-hoz a $\varphi(\mathfrak{a}) \in \varphi\langle U\rangle$ értéket rendeli, ezért létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $U_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete $\mathbb{R}^n$-ben, hogy $U_{\mathfrak{a}} \subseteq U$ és minden $U \ni x$-re $\varphi(x) + q(\mathfrak{a} - x) \in \varphi\langle U\rangle$. Az $U_{\mathfrak{a}}$ halmazt így választva teljesül az is, hogy $y \in \overset{-1}{p}\langle(p \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle\rangle$ esetén van olyan $x \in U_{\mathfrak{a}}$, hogy $p(y) = (p \circ f)(x)$, tehát a φ függvény definíciója szerint

$$\begin{aligned}\left(\left(((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))|_{E_0}\right)^{-1} \circ p + q(\mathfrak{a})\right)(y) &= \left(((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))|_{E_0}\right)^{-1}(p(y)) + q(\mathfrak{a}) = \\ &= \left(((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))|_{E_0}\right)^{-1}(p(f(x))) + q(\mathfrak{a}) = \varphi(x) - q(x) + q(\mathfrak{a}) \in \varphi\langle U\rangle.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a $V := \overset{-1}{p}\langle(p \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle\rangle \subseteq F$ halmazon jól értelmezett a

$$\psi := \mathrm{id}_F - (\mathrm{id}_F - p) \circ (f \circ \varphi^{-1}) \circ \left(\left(((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))|_{E_0}\right)^{-1} \circ p + q(\mathfrak{a})\right)$$

függvény. A $(p \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle$ halmaz nyílt az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ altérben, és a $p : F \to \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ leképezés folytonos, ezért V nyílt részhalmaza F-nek. Ha $y \in V$, akkor $p(y) \in (p \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle$ és $p \circ (\mathrm{id}_F - p) = 0$ miatt $p(\psi(y)) = p(y)$, tehát $\psi(y) \in \overset{-1}{p}\langle(p \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle\rangle = V$. Ez azt jelenti, hogy $\psi\langle V\rangle \subseteq V$. Az nyilvánvaló, hogy a ψ függvény C^n-osztályú. Ha $x \in U_0$, akkor természetesen $f(x) \in V$ és

$$\begin{aligned}\left(\left(((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))|_{E_0}\right)^{-1} \circ p + q(\mathfrak{a})\right)(f(x)) &= \left(\left(((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))|_{E_0}\right)^{-1} \circ p \circ f\right)(x) + q(\mathfrak{a}) = \\ &= \varphi(x) + q(\mathfrak{a} - x),\end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned}\psi(f(x)) &= f(x) - (\mathrm{id}_F - p)\left((f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x) + q(\mathfrak{a} - x))\right) = \\ &= f(x) - (\mathrm{id}_F - p)\left((f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\right) = (p \circ f)(x),\end{aligned}$$

mert $\varphi(x) \in \varphi\langle U\rangle$, $q(\mathfrak{a} - x) \in \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ és $\varphi(x) + q(\mathfrak{a} - x) \in \varphi\langle U\rangle$, tehát (II) alapján

$$(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x) + q(\mathfrak{a} - x)) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = f(x).$$

Ez azt jelenti, hogy $\psi \circ f = p \circ f = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) \circ \varphi$ az $U_{\mathfrak{a}}$ halmazon. Ha szintén a V halmazon értelmezzük a

$$\psi' := \mathrm{id}_F + (\mathrm{id}_F - p) \circ \left(\left(((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))|_{E_0}\right)^{-1} \circ p + q(\mathfrak{a})\right)$$

függvényt, akkor az előzőek mintájára kapjuk, hogy $\psi'\langle V\rangle \subseteq V$, és egyszerű számolás mutatja, hogy $\psi' \circ \psi = \psi \circ \psi' = \mathrm{id}_V$, így a $\psi : V \to V$ függvény C^n-diffeomorfizmus. ■

14.4.10. Lemma. *Ha X és Y normált terek és $M, N \subseteq X$ olyan lineáris alterek, hogy $M \underset{(t)}{\bigoplus} N = X$, akkor minden $w : X \to Y$ lineáris homeomorfizmusra $w\langle M\rangle \underset{(t)}{\bigoplus} w\langle N\rangle = Y$.*

Bizonyítás. A w operátor injektivitásából és az $M \cap N = \{0\}$ egyenlőségből következik, hogy $w\langle M\rangle \cap w\langle N\rangle = \{0\}$. A w operátor szürjektivitásából és az $M + N = X$ egyenlőségből következik, hogy $w\langle M\rangle + w\langle N\rangle = Y$, ezért $w\langle M\rangle \bigoplus w\langle N\rangle = Y$.

Vezessük be az

$$s : M \times N \to X; \quad (x, y) \mapsto x + y,$$
$$s' : w\langle M\rangle \times w\langle N\rangle \to Y; \quad (x', y') \mapsto x' + y'$$

leképezéseket. A w operátor additivitása és a definíciók miatt $s' \circ ((w|_M) \times (w|_N)) = w \circ s$, vagyis

$$s' = w \circ s \circ ((w|_M) \times (w|_N))^{-1}.$$

Az $M \underset{(t)}{\bigoplus} N = X$ hipotézis szerint s homeomorfizmus az $M \times N$ szorzattér és X között. Továbbá, a $(w|_M) \times (w|_N) : M \times N \to w\langle M\rangle \times w\langle N\rangle$ operátor egyenlő $(w \times w)|_{M \times N}$-nel, ezért homeomorfizmus az $M \times N$ és $w\langle M\rangle \times w\langle N\rangle$ szorzatterek között. Ezért s' is homeomorfizmus a $w\langle M\rangle \times w\langle N\rangle$ szorzattér és X között. Ez azt jelenti, hogy $w\langle M\rangle \underset{(t)}{\bigoplus} w\langle N\rangle = Y$. ■

14.4.11. Tétel. **(A szubimmerziók jellemzése.)** *Legyenek E és F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény. Az f függvény pontosan akkor C^n-szubimmerzió az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha f az $\mathfrak{a}$ pontban C^n-linearizálható.*

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy az f függvény C^n-szubimmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban, és legyen G olyan Banach-tér, valamint legyenek $s : E \rightarrowtail G$ és $i : G \rightarrowtail F$ olyan C^n-osztályú függvények, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(s) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, $\mathrm{Im}(s) \subseteq \mathrm{Dom}(i)$, s szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban, és i immerzió az $s(\mathfrak{a})$ pontban, és $f = i \circ s$ a $\mathrm{Dom}(s)$ halmazon, vagy ami ugyanaz $i \circ s \subseteq f$.

Az $i : G \rightarrowtail F$ függvény immerzió az $s(\mathfrak{a})$ pontban, így az immerziók jellemzési tétele (14.2.5.) alapján vehetünk olyan $(M, U_*, V, \varphi_*, \psi)$ ötöst, amelyre a következők teljesülnek:

– $M \subseteq F$ olyan lineáris altér, amelynek létezik topologikus algebrai komplementere;

– $U_* \subseteq \mathrm{Dom}(i)$ nyílt környezete $s(\mathfrak{a})$-nak G-ben, $V \subseteq F$ nyílt környezete az $i(s(\mathfrak{a})) = f(\mathfrak{a})$ pontnak F-ben, és $i\langle U_*\rangle \subseteq V$;

– $\varphi_* : U_* \to M$ olyan függvény, hogy $\varphi_*\langle U_*\rangle$ nyílt halmaz az M normált altérben és φ_* C^n-diffeomorfizmus az U_* és $\varphi_*\langle U_*\rangle$ halmazok között;

– $\psi : V \to F$ olyan függvény, hogy $\psi\langle V\rangle$ nyílt halmaz F-ben, és ψ C^n-diffeomorfizmus V és $\psi\langle V\rangle$ között;

– teljesül a $\psi \circ i \circ \varphi_*^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi_*\langle U_*\rangle}$ egyenlőség, vagyis $i = \psi^{-1} \circ \varphi_*$ az U_* halmazon.

Legyen $U_{**} := \overset{-1}{s}\langle U_*\rangle$, ami olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, amelyre $U_{**} \subseteq \mathrm{Dom}(s)$ és $s\langle U_{**}\rangle \subseteq U_*$. Vezessük be az $s_* := s|_{U_{**}} : E \rightarrowtail G$ függvényt, amely nyilvánvalóan C^n-osztályú és szubmerzió $\mathfrak{a}$-ban, és amelyre

$$f = i \circ s = \left(\psi_*^{-1} \circ \varphi_*\right) \circ s_* = \psi_*^{-1} \circ (\varphi_* \circ s_*)$$

teljesül az U_{**} halmazon. A $\varphi_* \circ s_* : U_{**} \to M$ függvény szintén szubmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban, így a szubmerziók jellemzési tétele (14.3.8.) alapján létezik olyan (U, φ, u) hármas, amelyre teljesülnek a következők:

– $U \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi_* \circ s_*) = U_{**}$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak;

– $\varphi : U \to E$ olyan függvény, hogy $\varphi\langle U\rangle$ nyílt halmaz E-ben, és φ C^n-diffeomorfizmus U és $\varphi\langle U\rangle$ között;

– $u \in \mathscr{L}(E; M)$ olyan szürjektív operátor, hogy $\mathrm{Ker}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere E-ben;

– $\varphi_* \circ s_* \circ \varphi^{-1} = u|_{\varphi\langle U\rangle}$, vagyis $(\varphi_* \circ s_*)\,|_U = u \circ \varphi$.

Ekkor
$$f = \psi^{-1} \circ u \circ \varphi,$$
teljesül az U halmazon, és $u \in \mathscr{L}(E; F)$ olyan lineáris operátor, amelyre $\mathrm{Ker}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere E-ben és $\mathrm{Im}(u) = M$ miatt $\mathrm{Im}(u)$-nak is létezik topologikus algebrai komplementere F-ben. Ez azt jelenti hogy f az $\mathfrak{a}$ pontban C^n-linearizálható.

(II) Megfordítva, tegyük fel, hogy az f függvény C^n-linearizálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és legyenek $\varphi : E \rightarrowtail E$ és $\psi : F \rightarrowtail F$ olyan lokális C^n-diffeomorfizmusok, valamint legyen $u \in \mathscr{L}(E; F)$ olyan, hogy $\mathrm{Ker}(u)$-nak és $\mathrm{Im}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\varphi) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, $f\langle \mathrm{Dom}(\varphi)\rangle \subseteq \mathrm{Dom}(\psi)$, és $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = u$ az $\mathrm{Im}(\varphi)$ halmazon, vagy ami ugyanaz: $f|_{\mathrm{Dom}(\varphi)} = \psi^{-1} \circ u \circ \varphi$.

Legyen $G := \mathrm{Im}(u)$, ami zárt lineáris altere az F Banach-térnek, mert $\mathrm{Im}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere, így G is Banach-tér. Vezessük be az
$$s := u \circ \varphi : \mathrm{Dom}(\varphi) \to G,$$
$$i := \psi^{-1}|_{\mathrm{Im}(\psi)\cap G} : \mathrm{Im}(\psi) \cap G \to F$$
leképezéseket, amelyekre nyilvánvalóan $f = i \circ s$ teljesül a $\mathrm{Dom}(\varphi)$ halmazon. Világos, hogy a $s : E \rightarrowtail G$ függvény C^n-osztályú és az $i : G \rightarrowtail F$ függvény is C^n-osztályú, hiszen $\mathrm{Dom}(i)$ az $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq F$ nyílt halmaz metszete G-vel, ezért nyílt G-ben, továbbá $i = \psi^{-1} \circ \mathrm{in}_{G,F}$, ahol $\mathrm{in}_{G,F}$ az $G \to F$ kanonikus injekció.

Minden $y \in \mathrm{Dom}(i) = \mathrm{Im}(\psi) \cap G$ esetén $(\mathrm{D}i)(y) = (\mathrm{D}\psi^{-1})(y) \circ \mathrm{in}_{G,F}$ teljesül, és a $(\mathrm{D}\psi^{-1})(y) : F \to F$ operátor injektív, ezért a $(\mathrm{D}i)(y) : G \to F$ folytonos lineáris operátor injektív. Továbbá, ha $y \in \mathrm{Im}(\psi) \cap G$, akkor $\mathrm{Im}((\mathrm{D}i)(y)) = (\mathrm{D}\psi^{-1})(y)\langle G\rangle$, és G-nek létezik topologikus algebrai komplementere F-ben, valamint $(\mathrm{D}\psi^{-1})(y) \in \mathscr{GL}(F)$, ezért az előző lemma szerint $\mathrm{Im}((\mathrm{D}i)(y))$-nak létezik topologikus algebrai komplementere F-ben. Ez azt jelenti, hogy minden $y \in \mathrm{Dom}(i)$ esetén az i függvény immerzió az y pontban (14.2.1.).

Minden $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ esetén $(\mathrm{D}s)(x) = u \circ (\mathrm{D}\varphi)(x)$ és a $(\mathrm{D}\varphi)(x) : E \to E$ operátor szürjektív, ezért $\mathrm{Im}((\mathrm{D}s)(x)) = u\langle \mathrm{Im}((\mathrm{D}\varphi)(x))\rangle = u\langle E\rangle = \mathrm{Im}(u) = G$, tehát a $(\mathrm{D}s)(x) : E \to G$ folytonos lineáris operátor szürjektív. Továbbá, ha $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Ker}((\mathrm{D}s)(x)) = \overset{-1}{(\mathrm{D}\varphi)}(x)\langle \mathrm{Ker}(u)\rangle = ((\mathrm{D}\varphi)(x))^{-1}\langle \mathrm{Ker}(u)\rangle$, és $\mathrm{Ker}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere E-ben, valamint $((\mathrm{D}\varphi)(x))^{-1} \in \mathscr{GL}(E)$, ezért az előző lemma szerint $\mathrm{Ker}((\mathrm{D}s)(x))$-nek létezik topologikus algebrai komplementere E-ben. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ esetén az s függvény szubmerzió az x pontban (14.3.2.).

Ezért az f függvény szubimmerzió az $\mathfrak{a}$ pontban. ∎

14.4.12. Tétel. (**Az állandó rang tétele**) *Legyenek E és F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. Tekintsük a következő állításokat.*

(i) *Léteznek olyan $E_0 \subseteq E$ és $F_0 \subseteq F$ lineáris alterek és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete E-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és*

$$E_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = E,$$
$$F_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})) = F,$$

valamint minden $x \in U$ esetén

$$F_0 \cap \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = \{0\}.$$

(ii) *Léteznek olyan $E_0 \subseteq E$ és $F_0 \subseteq F$ lineáris alterek és létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete E-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U$ esetén*

$$E_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Ker}((\mathrm{D}f)(x)) = E,$$
$$F_0 \underset{(\mathrm{t})}{\bigoplus} \mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x)) = F.$$

(iii) *Az f függvény az $\mathfrak{a}$ pontban C^n-linearizálható.*

(iv) *Az f függvény az $\mathfrak{a}$ pontban C^n-szubimmerzió.*

(v) *Az f függvény az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén állandó rangú.*

Ekkor (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v) *teljesül, és ha $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ véges dimenziós lineáris altere F-nek (vagyis $\mathrm{rg}_{\mathfrak{a}}(f) < +\infty$), akkor* (v)$\Rightarrow$(ii) *is igaz, tehát a felsorolt állítások ekvivalensek.*

Bizonyítás. A 14.4.6. állítás szerint (i)$\Leftrightarrow$(ii) igaz, és a C^n-linearizálhatóság elégséges feltétele (14.4.9.) alapján a (ii)$\Rightarrow$(iii) teljesül. A szubimmerziók jellemzési tétele (14.4.11.) miatt (iii)$\Leftrightarrow$(iv) igaz, és a 14.4.4. állítás alapján (iv)$\Rightarrow$(v) teljesül. Végül, ha $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ véges dimenziós, akkor a 14.4.7. állítás szerint helyes az (v)$\Rightarrow$(ii) következtetés is. ■

14.4.13. Állítás. (**A rang-függvény alulról félig folytonossága.**) *Legyenek E és F Banach-terek, és $f : E \rightarrowtail F$ folytonosan differenciálható függvény. Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ és $n \in \mathbb{N}^*$ olyan szám, hogy $n \leq \mathrm{rg}_{\mathfrak{a}}(f)$, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in U$ esetén $n \leq \mathrm{rg}_x(f)$.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbf{f}_k)_{1 \leq k \leq n}$ lineárisan független rendszer az $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))$ vektortérben, és válasszunk ki olyan $(\mathbf{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$ rendszert E-ben, amelyre minden $1 \leq k \leq n$ természetes számra $\mathbf{f}_k = ((\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))(\mathbf{e}_k)$ teljesül. Ekkor az $(\mathbf{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$ rendszer is lineárisan független E-ben; jelölje E_0 az $(\mathbf{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$ rendszer által generált lineáris alteret, és legyen $F_0 := (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\langle E_0 \rangle$. Legyen $p \in \mathscr{L}(F)$ olyan, hogy $p \circ p = p$ és $\mathrm{Im}(p) = F_0$. Tekintsük a

$$\mathrm{Dom}(f) \to \mathscr{L}(E_0; F_0); \quad x \mapsto (p \circ (\mathrm{D}f)(x))|_{E_0}$$

leképezést, amely az f *folytonos* differenciálhatósága miatt folytonos. Ennek a függvénynek az értéke az $\mathfrak{a}$ pontban $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|_{E_0}$, ami lineáris bijekció az E_0 és F_0 véges dimenziós vektorterek között, ezért létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$

és minden $x \in U$ esetén a $(p \circ (\mathrm{D}f)(x))|_{E_0}$ operátor szintén lineáris bijekció az E_0 és F_0 között. Speciálisan az is teljesül, hogy $x \in U$ esetén $p\langle(\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle\rangle = F_0$, következésképpen, ha $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))$ véges dimenziós, akkor

$$\mathrm{rg}_x(f) = \dim(\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))) \geq \dim((\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle) \geq \\ \geq \dim(p\langle(\mathrm{D}f)(x)\langle E_0\rangle\rangle) = \dim(F_0) = n,$$

és ha $\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))$ végtelen dimenziós, akkor $\mathrm{rg}_x(f) = +\infty > n$. ∎

14.4.14. Állítás. *Legyenek E, F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény. Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pont, hogy f ebben a pontban C^n-szubimmerzió, de nem immerzió, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $y \in f\langle U\rangle$ esetén az $\overset{-1}{f}\langle\{y\}\rangle \cap U$ halmaz végtelen.*

Bizonyítás. A szubimmerziók jellemzési tétele (14.4.11.) alapján f az $\mathfrak{a}$ pontban C^n-linearizálható. Legyenek $\varphi : E \rightarrowtail E$ és $\psi : F \rightarrowtail F$ olyan lokális C^n-diffeomorfizmusok, valamint legyen $u \in \mathscr{L}(E;F)$ olyan, hogy $\mathrm{Ker}(u)$-nak és $\mathrm{Im}(u)$-nak létezik topologikus algebrai komplementere, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\varphi) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, $f\langle\mathrm{Dom}(\varphi)\rangle \subseteq \mathrm{Dom}(\psi)$, és $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = u$ az $\mathrm{Im}(\varphi)$ halmazon. A közvetett függvény differenciálási szabálya szerint ekkor

$$(\mathrm{D}\psi)(f(\mathfrak{a})) \circ (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \circ (\mathrm{D}\varphi^{-1})(\varphi(\mathfrak{a})) = u,$$

és itt a $(\mathrm{D}\psi)(f(\mathfrak{a})) \in \mathscr{L}(F;F)$ és $(\mathrm{D}\varphi^{-1})(\varphi(\mathfrak{a})) \in \mathscr{L}(E;E)$ operátorok lineáris homeomorfizmusok, így a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ operátor magjának és képének létezik topologikus algebrai komplementere. Ugyanakkor f nem immerzió az $\mathfrak{a}$ pontban, következésképpen $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ nem injektív, tehát az $u \in \mathscr{L}(E;F)$ operátor sem injektív, azaz $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$. Legyen $y \in f\langle\mathrm{Dom}(\varphi)\rangle$ és $x \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ olyan, hogy $f(x) = y$. Ekkor $\psi \circ f|_{\mathrm{Dom}(\varphi)} = u \circ \varphi$ miatt könnyen látható, hogy

$$\overset{-1}{f}\langle\{y\}\rangle \cap \mathrm{Dom}(\varphi) = \overset{-1}{\varphi}\langle(\varphi(x) + \mathrm{Ker}(u)) \cap \mathrm{Im}(\varphi)\rangle,$$

és a $(\varphi(x) + \mathrm{Ker}(u)) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$ halmaz $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$ miatt végtelen (sőt legalább kontinuum-számosságú). Tehát az $U := \mathrm{Dom}(\varphi)$ halmaz olyan, amelynek a létezését állítottuk. ∎

14.4.15. Állítás. *Legyenek E, F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény. Ha E vagy F véges dimenziós, akkor az*

$$\{\ x \in \mathrm{Dom}(f) \mid \text{"}f \text{ az } x \text{ pontban } \mathrm{C}^n\text{-szubimmerzió"}\}$$

halmaz nyílt és sűrű $\mathrm{Dom}(f)$-ben.

Bizonyítás. Azt tudjuk, hogy ez a halmaz még akkor is nyílt, ha E és F mindketten végtelen dimenziósak. Legyen $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nem üres nyílt halmaz és

$$n := \max\{\ k \in \mathbb{N} \mid (\exists x \in \Omega) : \mathrm{rg}_x(f) = k\ \},$$

ami jól értelmezett, mert $\Omega \neq \emptyset$ és minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\mathrm{rg}_x(f) := \dim(\mathrm{Im}((\mathrm{D}f)(x))) \leq \min(\dim(E), \dim(F)) < +\infty,$$

hiszen E vagy F véges dimenziós. Legyen $\mathfrak{a} \in \Omega$ olyan pont, hogy $\mathrm{rg}_{\mathfrak{a}}(f) = n$. A rangfüggvény alulról félig folytonossága miatt létezik olyan $\Omega' \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt halmaz, hogy $\mathfrak{a} \in \Omega'$ és minden $x \in \Omega'$ esetén $\mathrm{rg}_x(f) \geq n$. Ekkor az n szám definíciója alapján minden $x \in \Omega \cap \Omega'$ pontra $\mathrm{rg}_x(f) = n$, tehát f állandó és véges rangú a $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén. Ezért az állandó rang tétele (14.4.12.) alapján az f függvény C^n-szubimmerzió az $\mathfrak{a} \in \Omega$ pontban. ∎

14.4.16. Következmény. *Legyenek E, F Banach-terek, $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, és $f : E \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény. Ha E vagy F véges dimenziós, és minden $y \in \mathrm{Im}(f)$ esetén az $\overset{-1}{f}\langle\{y\}\rangle$ halmaz véges, akkor az*

$$\{\ x \in \mathrm{Dom}(f) \mid {}''f \textit{ az } x \textit{ pontban immerzió}\,'' \}$$

halmaz nyílt és sűrű $\mathrm{Dom}(f)$*-ben.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nem üres nyílt halmaz. Az előző állítás alapján vehetünk olyan $\mathfrak{a} \in \Omega$ pontot, amelyben az f függvény C^n-szubimmerzió. Ha f az $\mathfrak{a}$-ban nem volna immerzió, akkor létezne $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $y \in f\langle U\rangle$ esetén az $\overset{-1}{f}\langle\{y\}\rangle \cap U$ halmaz végtelen, ami ellentmondana az f-re vonatkozó hipotézisnek. ■

XII. **DIFFERENCIÁLELMÉLET**

14. SZUBIMMERZIÓK*

15. fejezet

Differenciálható formák*

15.1. Differenciálható formák

Emlékeztetünk arra, hogy ha E és F vektorterek, valamint $p \in \mathbb{N}^*$, akkor az $u : E^p \to F$ multilineáris operátort *antiszimmetrikusnak* nevezzük, ha minden $\sigma : p \to p$ bijekcióra teljesül az, hogy minden $(x_i)_{i \in p} \in E^p$ esetén

$$u\left(\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i \in p}\right) = \varepsilon_p(\sigma) u\left((x_i)_{i \in p}\right),$$

továbbá az $E^p \to F$ antiszimmetrikus multilineáris operátorok vektorterét $\mathbf{A}_p(E;F)$ jelöli (**ALG** 11.1.1.) Megállapodás szerint, ha E és F vektorterek, akkor $\mathbf{A}_0(E;F) := F$, és $\mathbf{A}_1(E;F) := \mathbf{L}(E;F)$.

15.1.1. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, valamint $p \in \mathbb{N}^*$. Ekkor $\mathscr{A}_p(E;F)$ jelöli az $E^p \to F$ folytonos antiszimmetrikus multilineáris operátorok halmazát. Megállapodás szerint, ha E és F normált terek, akkor $\mathscr{A}_0(E;F) := F$, és $\mathscr{A}_1(E;F) := \mathscr{L}(E;F)$.*

15.1.2. Állítás. *Ha E és F normált terek, valamint $p \in \mathbb{N}$, akkor $\mathscr{A}_p(E;F)$ zárt lineáris altere $\mathscr{L}_p(E;F)$-nek.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy minden $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ és $(x_i)_{i \in p} \in E^p$ esetén az

$$M\left(\sigma, (x_i)_{i \in p}\right) := \left\{ u \in \mathscr{L}_p(E;F) \;\middle|\; u\left(\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i \in p}\right) = \varepsilon_p(\sigma) u\left((x_i)_{i \in p}\right) \right\}$$

halmaz zárt lineáris altere $\mathscr{L}_p(E;F)$-nek, és

$$\mathscr{A}_p(E;F) = \bigcap_{(\sigma,(x_i)_{i \in p}) \in \mathfrak{S}_p \times E^p} M\left(\sigma, (x_i)_{i \in p}\right),$$

ezért $\mathscr{A}_p(E;F)$ zárt lineáris altere $\mathscr{L}_p(E;F)$-nek. ■

15.1.3. Definíció. *Ha E és F normált terek, valamint $p \in \mathbb{N}^*$, és $r \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$, akkor az $E \rightarrowtail \mathscr{A}_p(E;F)$ C^r-osztályú függvényeket E-ben értelmezett, F-be érkező* **C^r-osztályú differenciálható p-formáknak** *nevezzük. Ha E és F normált terek, valamint $p \in \mathbb{N}^*$ és $r \in \mathbb{N}$, és $U \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor*

$${}^r\Omega^p(U;F) := \mathrm{C}^r\left(U; \mathscr{A}_p(E;F)\right).$$

Tehát, ha E és F normált terek, valamint $U \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor
– minden $p \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$^0\Omega^p(U;F) := \mathscr{C}\left(U;\mathscr{A}_p(E;F)\right)$$

az $U \to \mathscr{A}_p(E;F)$ folytonos függvények vektortere;
– minden $r \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$ esetén

$$^r\Omega^0(U;F) := \mathrm{C}^r(U;F)$$

a C^r-osztályú $U \to F$ függvények vektortere.

15.2. Differenciálható formák külső szorzata

15.2.1. Állítás. *Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $\mathbf{p} := (p_i)_{i\in n} \in (\mathbb{N}^*)^n$. Legyenek E és G normált terek, valamint $(F_i)_{i\in n}$ normált terek rendszere. Ha $\mathbf{m} \in \mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in n} F_i;G\Big)$ és $(u_i)_{i\in n} \in \prod_{i\in n} \mathscr{A}_{p_i}(E;F_i)$, akkor $(\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1} u_i \in \mathscr{A}_{|\mathbf{p}|}(E;G)$, és*

$$\left\|(\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1} u_i\right\| \le |\mathbf{p}|!\|\mathbf{m}\| \prod_{i\in n} \|u_i\|,$$

tehát a

$$\prod_{i\in n} \mathscr{A}_{p_i}(E;F_i) \to \mathscr{A}_{|\mathbf{p}|}(E;G)\,; \quad (u_i)_{i\in n} \mapsto (\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1} u_i$$

leképezés folytonos multilineáris operátor.

Bizonyítás. Legyen $(x_i)_{i\in|\mathbf{p}|} \in E^{|\mathbf{p}|}$. Ekkor

$$\left\|\left((\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1} u_i\right)\left((x_i)_{i\in|\mathbf{p}|}\right)\right\| = \left\|\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\mathbf{p}} \varepsilon_{|\mathbf{p}|}(\sigma)\mathbf{m}\left(\left(u_i\left(\left(x_{\sigma(\mathrm{s}_\mathbf{p}(i)+j)}\right)_{j\in p_i}\right)\right)_{i\in n}\right)\right\| \le$$
$$\le \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\mathbf{p}} \left\|\mathbf{m}\left(\left(u_i\left(\left(x_{\sigma(\mathrm{s}_\mathbf{p}(i)+j)}\right)_{j\in p_i}\right)\right)_{i\in n}\right)\right\| \le \|\mathbf{m}\| \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\mathbf{p}} \prod_{i\in n} \left\|u_i\left(\left(x_{\sigma(\mathrm{s}_\mathbf{p}(i)+j)}\right)_{j\in p_i}\right)\right\| \le$$
$$\le \|\mathbf{m}\| \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\mathbf{p}} \prod_{i\in n}\left(\|u_i\| \prod_{j\in p_i} \left\|x_{\sigma(\mathrm{s}_\mathbf{p}(i)+j)}\right\|\right) =$$
$$= \|\mathbf{m}\| \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\mathbf{p}} \left(\prod_{i\in n}\|u_i\|\right)\left(\prod_{i\in n}\prod_{j\in p_i} \left\|x_{\sigma(\mathrm{s}_\mathbf{p}(i)+j)}\right\|\right) = \|\mathbf{m}\|\left(\prod_{i\in n}\|u_i\|\right)|\mathbf{p}|!\left(\prod_{i\in|\mathbf{p}|}\|x_i\|\right),$$

hiszen az $(\mathrm{s}_\mathbf{p}(i))_{i\in n}$ rendszer definíciója (**ALG** 11.3.1.) szerint nyilvánvaló, hogy minden $\sigma \in \mathfrak{S}_\mathbf{p}$ esetén az $\mathbb{R}$-beli szorzás általános asszociativitása és általános kommutativitása miatt

$$\prod_{i\in n}\prod_{j\in p_i} \left\|x_{\sigma(\mathrm{s}_\mathbf{p}(i)+j)}\right\| = \prod_{i\in|\mathbf{p}|} \|x_{\sigma(i)}\| = \prod_{i\in|\mathbf{p}|} \|x_i\|.$$

Ez azt jelenti, hogy az $(\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1} u_i : E^{|\mathbf{p}|} \to G$ multilineáris operátor folytonos, és

$$\left\|(\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1} u_i\right\| \le |\mathbf{p}|!\|\mathbf{m}\| \prod_{i\in n} \|u_i\|.$$

Azt tudjuk, hogy a

$$\prod_{i\in n}\mathscr{A}_{p_i}(E;F_i)\to\mathscr{A}_{|\mathbf{p}|}(E;G);\quad (u_i)_{i\in n}\mapsto(\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1}u_i$$

leképezés multilineáris (**ALG** 11.3.2.), ezért az előző egyenlőtlenségből látszik, hogy ez folytonos is (és a normája kisebb-egyenlő a $|\mathbf{p}|!\|\mathbf{m}\|$ számnál). ■

Az előző állítás legfontosabb speciális esete az, amikor $n=2$, ezért érdemes ilyen esetre külön megfogalmazni az állítást.

15.2.2. Állítás. *Legyenek E, F, G és H normált terek, $\mathbf{b}:F\times G\to H$ folytonos bilineáris operátor, valamint $p,q\in\mathbb{N}^*$. Ekkor minden $u\in\mathscr{A}_p(E;F)$ és $v\in\mathscr{A}_q(E;G)$ esetén $u\underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge}v\in\mathscr{A}_{p+q}(E;H)$, és*

$$\|u\underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge}v\|\le(p+q)!\|\mathbf{b}\|\|u\|\|v\|,$$

továbbá az

$$\mathscr{A}_p(E;F)\times\mathscr{A}_q(E;G)\to\mathscr{A}_{p+q}(E;H);\quad (u,v)\mapsto u\underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge}v$$

leképezés folytonos bilineáris operátor. ■

15.2.3. Definíció. *Legyen $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{p}:=(p_i)_{i\in n}\in(\mathbb{N}^*)^n$, és $(r_i)_{i\in n}$ olyan rendszer, hogy minden $i\in n$ esetén $r_i\in\mathbb{N}^*$ vagy $r_i=\infty$. Legyenek E és G normált terek, $(F_i)_{i\in n}$ normált terek rendszere, és $\mathbf{m}\in\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in n}F_i;G\Big)$. Ha $U\subseteq E$ nyílt halmaz, és $(\omega_i)_{i\in n}\in\prod_{i\in n}{}^{r_i}\Omega^{p_i}(U;F_i)$, akkor*

$$(\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1}\omega_i:U\to\mathscr{A}_{|\mathbf{p}|}(E;G);\quad x\mapsto(\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1}\omega_i(x),$$

és az $(\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1}\omega_i$ függvényt az $(\omega_i)_{i\in n}$ differenciálható forma-rendszer **külső szorzatának** *nevezzük.*

15.2.4. Állítás. *Legyen $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{p}:=(p_i)_{i\in n}\in(\mathbb{N}^*)^n$, és $(r_i)_{i\in n}$ olyan rendszer, hogy minden $i\in n$ esetén $r_i\in\mathbb{N}^*$ vagy $r_i=\infty$. Legyenek E és G normált terek, $(F_i)_{i\in n}$ normált terek rendszere, és $\mathbf{m}\in\mathfrak{Mult}\Big(\prod_{i\in n}F_i;G\Big)$. Ha $U\subseteq E$ nyílt halmaz, és $(\omega_i)_{i\in n}\in\prod_{i\in n}{}^{r_i}\Omega^{p_i}(U;F_i)$, akkor $(\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1}\omega_i\in{}^{r}\Omega^{|\mathbf{p}|}(U;G)$, ahol $r:=\min_{i\in n}r_i$.*

Bizonyítás. Legyen

$$f:\prod_{i\in n}\mathscr{A}_{p_i}(E;F_i)\to\mathscr{A}_{|\mathbf{p}|}(E;G);\quad (u_i)_{i\in n}\mapsto(\mathbf{m})\bigwedge_{i=0}^{n-1}u_i,$$

amely az előző állítás szerint folytonos multilineáris operátor, tehát C^∞-osztályú (3.5.2.). Legyen továbbá

$$g:U\to\prod_{i\in n}\mathscr{A}_{p_i}(E;F_i);\quad x\mapsto(\omega_i(x))_{i\in n}.$$

A hipotézis szerint minden $i \in n$ esetén a g függvény i-edik komponense C^{r_i}-osztályú, tehát C^r-osztályú is, így a $g : U \to \prod_{i \in n} \mathscr{A}_{p_i}(E; F_i)$ függvény C^r-osztályú, következésképpen az $(\mathbf{m}) \bigwedge_{i=0}^{n-1} \omega_i = f \circ g$ függvény is C^r-osztályú. ■

15.3. Differenciálható formák külső deriváltja

Emlékeztetünk arra, hogy ha E és F vektorterek 0 karakterisztikájú test felett, $p \in \mathbb{N}^*$ és $u \in \mathbf{L}_p(E; F)$, akkor $\mathbb{A}_p(u)$ jelöli azt az $E^p \to F$ leképezést, amelyre minden $(x_i)_{i \in p} \in E^p$ esetén

$$\mathbb{A}_p(u)\left((x_i)_{i \in p}\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_p(\sigma) u\left(\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i \in p}\right),$$

és $\mathbb{A}_p(u)$-t az u multilineáris operátor *antiszimmetrizáltjának* nevezzük (**ALG** 11.2.1.) Tudjuk, hogy ekkor $\mathbb{A}_p(u) \in \mathbf{A}_p(E; F)$ teljesül (**ALG** 11.1.2.)

15.3.1. Állítás. *Ha E és F normált terek, valamint $p \in \mathbb{N}^*$, akkor minden $u \in \mathscr{L}_p(E; F)$ esetén $\mathbb{A}_p(u) \in \mathscr{A}_p(E; F)$, és az*

$$\mathscr{L}_p(E; F) \to \mathscr{A}_p(E; F); \quad u \mapsto \mathbb{A}_p(u)$$

leképezés folytonos lineáris operátor a multilineáris operátornormák szerint.

Bizonyítás. Legyen $u \in \mathscr{L}_p(E; F)$ és $(x_i)_{i \in n} \in E^p$. Ekkor

$$\| \left(\mathbb{A}_p(u)\right)\left((x_i)_{i \in n}\right) \| \leq \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \|u\left(\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i \in p}\right)\| \leq \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \|u\| \prod_{i \in n} \|x_{\sigma(i)}\| = \|u\| \prod_{i \in n} \|x_i\|,$$

mert az $\mathbb{R}$-beli szorzás általános kommutativitása miatt minden $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ permutációra $\prod_{i \in n} \|x_{\sigma(i)}\| = \prod_{i \in n} \|x_i\|$. Ezért az $\mathbb{A}_p(u) : E^p \to F$ antiszimmetrikus multilineáris operátor folytonos, és láthatóan $\left\|\mathbb{A}_p(u)\right\| \leq \|u\|$, így az $\mathscr{L}_p(E; F) \to \mathscr{A}_p(E; F)$; $u \mapsto \mathbb{A}_p(u)$ lineáris operátor folytonos (és a normája kisebb-egyenlő 1-nél). ■

15.3.2. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, $p \in \mathbb{N}^*$, és $w : E \rightarrowtail \mathscr{A}_p(E; F)$ függvény. Ekkor $\mathbf{d}w$ jelöli azt az $E \rightarrowtail \mathscr{A}_{p+1}(E; F)$ függvényt, amelyre* $\mathrm{Dom}(\mathbf{d}w) := \mathrm{Dom}(\mathrm{D}w)$, *és minden $x \in \mathrm{Dom}(\mathbf{d}w)$ esetén*

$$(\mathbf{d}w)(x) := (-1)^p (p+1) . \mathbb{A}_{p+1}\left(\pi_p\left((\mathrm{D}w)(x)\right)\right),$$

ahol

$$\pi_p : \mathscr{L}\left(E; \mathscr{L}_p\left(E; F\right)\right) \to \mathscr{L}_{p+1}\left(E; F\right)$$

az a lineáris homeomorfizmus, amelyre minden $u \in \mathscr{L}\left(E; \mathscr{L}_p\left(E; F\right)\right)$ és $(x_i)_{i \in p+1} \in E^{p+1}$ esetén

$$\left(\pi_p(u)\right)\left((x_i)_{i \in p+1}\right) := u(x_p)\left((x_i)_{i \in p}\right).$$

A $\mathbf{d}w$ függvényt a w függvény **külső deriváltjának** *nevezzük.*

A definíció természetesen értelmes, mert $x \in \mathrm{Dom}(\mathbf{d}w) = \mathrm{Dom}(\mathrm{D}w)$ esetén $(\mathrm{D}w)(x) \in \mathscr{L}(E; \mathscr{A}_p(E;F)) \subseteq \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_p(E;F))$, ezért $\pi_p((\mathrm{D}w)(x)) \in \mathscr{L}_{p+1}(E;F)$, így erre a multilineáris operátorra alkalmazva a $\mathbb{A}_{p+1}$ antiszimmetrizációt kapjuk az

$$\mathbb{A}_{p+1}(\pi_p((\mathrm{D}w)(x))) \in \mathscr{A}_{p+1}(E;F)$$

folytonos antiszimmetrikus multilineáris operátort. A $(-1)^p(p+1)$ szorzó-tényezőt azért vezetjük be, hogy a következő állításban szereplő formula $\mathbf{d}w$-re a lehető legegyszerűbb alakú legyen.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a definícióban szereplő $\pi_p : \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_p(E;F)) \to \mathscr{L}_{p+1}(E;F)$ lineáris homeomorfizmus az általános esetben *nem egyenlő* a **LIN** 3.7.4.állításban bevezetett $\pi_{1,p} : \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_p(E;F)) \to \mathscr{L}_{p+1}(E;F)$ kanonikus lineáris homeomorfizmussal, mert minden $u \in \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_p(E;F))$ és $(x_i)_{i\in p+1} \in E^{p+1}$ esetén

$$(\pi_{1,p}(u))((x_i)_{i\in p+1}) = u(x_0)((x_{i+1})_{i\in p}),$$

ugyanakkor

$$(\pi_p(u))((x_i)_{i\in p+1}) = u(x_p)((x_i)_{i\in p}).$$

15.3.3. Definíció. *Ha $p \in \mathbb{N}^*$ és $k \in p+1$, akkor $\mathrm{m}_{p,k} : p \to (p+1) \setminus \{k\}$ jelöli az (egyértelműen meghatározott) szigorúan monoton növő függvényt, vagyis minden $i \in p$ esetén*

$$\mathrm{m}_{p,k}(i) := \begin{cases} i & \text{, ha } i < k, \\ i+1 & \text{, ha } k \le i < p. \end{cases}$$

15.3.4. Állítás. *Legyenek E és F normálható terek, $p \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$ vagy $r = \infty$, és $w : E \rightarrowtail \mathscr{A}_p(E;F)$ C^r-osztályú függvény. Ekkor $\mathbf{d}w : E \rightarrowtail \mathscr{A}_{p+1}(E;F)$ olyan C^{r-1}-osztályú függvény, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}(w)$ és $(x_i)_{i\in p+1} \in E^{p+1}$ esetén*

$$(\mathbf{d}w)(x)((x_i)_{i\in p+1}) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k ((\mathrm{D}w)(x)(x_k)) \left(\left(x_{\mathrm{m}_{p,k}(i)}\right)_{i\in p} \right).$$

Bizonyítás. Legyenek $x \in \mathrm{Dom}(w)$ és $(x_i)_{i\in p+1} \in E^{p+1}$. A $\mathbf{d}w$ függvény és az antiszimmetrizáció definíciója szerint:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{d}w)(x)((x_i)_{i\in p+1}) &= (-1)^p(p+1)\frac{1}{(p+1)!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+1}} \varepsilon_{p+1}(\sigma)(\pi_p((\mathrm{D}w)(x))) \left(\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i\in p+1} \right) \stackrel{(1)}{=} \\
&\stackrel{(1)}{=} \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+1}} \varepsilon_{p+1}(\sigma) \left(((\mathrm{D}w)(x)) \left(x_{\sigma(p)}\right) \right) \left(\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i\in p} \right) \stackrel{(2)}{=} \\
&\stackrel{(2)}{=} \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+1} \\ \sigma(p)=k}} \varepsilon_{p+1}(\sigma) \left(((\mathrm{D}w)(x))(x_k) \right) \left(\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i\in p} \right),
\end{aligned}$$

ahol az $\stackrel{(1)}{=}$ egyenlőségnél a $\pi_p : \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_p(E;F)) \to \mathscr{L}_{p+1}(E;F)$ operátor definícióját alkalmaztuk, és a $\stackrel{(2)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy a $(\{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1} | \sigma(p) = k\})_{k\in p+1}$ halmazrendszer partíciója $\mathfrak{S}_{p+1}$-nek. Látható, hogy a további átalakításhoz minden $k \in p+1$ és $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1}$, $\sigma(p) = k$ esetén meg kell határozni a $(((\mathrm{D}w)(x))(x_k)) \left(\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i\in p} \right) \in F$ vektor értékét.

Legyen tehát $k \in p+1$ és $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1}$ olyan, hogy $\sigma(p) = k$. Világos, hogy $\sigma|_p : p \to (p+1) \setminus \{k\}$ bijekció, és mivel $\mathrm{m}_{p,k}$ szintén $p \to (p+1) \setminus \{k\}$ bijekció, így $\sigma' := \mathrm{m}_{p,k}^{-1} \circ (\sigma|_p) \in \mathfrak{S}_p$, következésképpen $\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i\in p} = \left(x_{\mathrm{m}_{p,k}(\sigma'(i))}\right)_{i\in p}$. Mivel $\mathrm{Im}(w) \subseteq \mathscr{A}_p(E;F)$, és $\mathscr{A}_p(E;F)$ zárt lineáris altere $\mathscr{L}_p(E;F)$-nek, így $(\mathrm{D}w)(x) \in \mathscr{L}(E;\mathscr{A}_p(E;F))$, tehát $((\mathrm{D}w)(x))(x_k) \in \mathscr{A}_p(E;F)$. Ezért

$$\begin{aligned}(((\mathrm{D}w)(x))(x_k))\left(\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i\in p}\right) &= (((\mathrm{D}w)(x))(x_k))\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p,k}(\sigma'(i))}\right)_{i\in p}\right) = \\ &= \varepsilon_p(\sigma')\,(((\mathrm{D}w)(x))(x_k))\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p,k}(i)}\right)_{i\in p}\right) = \\ &= \varepsilon_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1} \circ (\sigma|_p)\right)(((\mathrm{D}w)(x))(x_k))\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p,k}(i)}\right)_{i\in p}\right).\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$(\mathbf{d}w)(x)\left((x_i)_{i\in p+1}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=0}^{p}\Bigg(\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+1}\\ \sigma(p)=k}} \varepsilon_{p+1}(\sigma)\varepsilon_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right)\Bigg)(((\mathrm{D}w)(x))(x_k))\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p,k}(i)}\right)_{i\in p}\right),$$

amiből látható, hogy már csak a nagy zárójelben szereplő számot kell meghatározni minden $k \in p+1$ esetén.

Legyen tehát $k \in p+1$ rögzítve. Vegyünk egy olyan $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1}$ permutációt, amelyre $\sigma(p) = k$, és vezessük be a

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{p+1}(\sigma) &:= \{\ (i,j) \in (p+1)\times(p+1) \mid (i<j) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))\ \},\\ \mathrm{T}_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right) &:= \{\ (i,j) \in p\times p \mid (i<j) \wedge \left(\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right)(i) > \left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right)(j)\right)\ \}\end{aligned}$$

halmazokat. Az **ALG** 3.3.4. állítás alapján

$$\begin{aligned}\varepsilon_{p+1}(\sigma) &= (-1)^{\mathrm{Card}(\mathrm{T}_{p+1}(\sigma))},\\ \varepsilon_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right) &= (-1)^{\mathrm{Card}\left(\mathrm{T}_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right)\right)}.\end{aligned}$$

A $\mathrm{m}_{p,k} : p \to (p+1)\setminus\{k\}$ függvény szigorú monoton növése miatt minden $(i,j) \in p\times p$ párra a $\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right)(i) > \left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right)(j)$ és $\sigma(i) > \sigma(j)$ kijelentések ekvivalensek, ezért $\mathrm{T}_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right) \subseteq \mathrm{T}_{p+1}(\sigma)$, és

$$\mathrm{T}_{p+1}(\sigma) \setminus \mathrm{T}_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right) = \{\ (i,p) \mid (i\in p) \wedge (\sigma(i) > \sigma(p) = k)\ \}.$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned}\varepsilon_{p+1}(\sigma)\varepsilon_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right) &= (-1)^{\mathrm{Card}(\mathrm{T}_{p+1}(\sigma))+\mathrm{Card}\left(\mathrm{T}_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right)\right)} = \\ = (-1)^{\mathrm{Card}(\mathrm{T}_{p+1}(\sigma))-\mathrm{Card}\left(\mathrm{T}_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right)\right)} &= (-1)^{\mathrm{Card}\left(\mathrm{T}_{p+1}(\sigma)\setminus\mathrm{T}_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right)\right)} = \\ = (-1)^{\mathrm{Card}\{\{(i,p)\mid(i\in p)\wedge(\sigma(i)>k)\}\}} &= (-1)^{\mathrm{Card}(\{i\in p\mid\sigma(i)>k\})}.\end{aligned}$$

Világos, hogy

$$\{i\in p\mid\sigma(i)>k\} = p \cap \overset{-1}{\sigma}\langle]\!]k,p]\!]\rangle = \overset{-1}{\sigma}\langle]\!]k,p]\!]\rangle,$$

mert $i \in \overset{-1}{\sigma}\langle]\!]k,p]\!]\rangle$ esetén $\sigma(i) > k = \sigma(p)$, tehát $i \neq p$, vagyis $i \in p$, következésképpen $\overset{-1}{\sigma}\langle]\!]k,p]\!]\rangle \subseteq p$. Továbbá $\mathrm{Card}(\overset{-1}{\sigma}\langle]\!]k,p]\!]\rangle) = \mathrm{Card}(]\!]k,p]\!]) = p-k$, ezért

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+1}\\ \sigma(p)=k}} \varepsilon_{p+1}(\sigma)\varepsilon_p\left(\mathrm{m}_{p,k}^{-1}\circ(\sigma|_p)\right) = p!(-1)^{p-k},$$

amiből következik a bizonyítandó egyenlőség. ■

15.4. Differenciálható formák külső szorzatának külső deriváltja

15.4.1. Lemma. *Legyenek $p, q \in \mathbb{N}^*$. Minden $(\sigma, k) \in \mathfrak{S}_{(p+1,q)} \times (p+1)$ esetén*

$$\tau_{\sigma,k} := \mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}^{-1} \circ \sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k} \in \mathfrak{S}_{(p,q)},$$

valamint

$$\varepsilon_{p+q+1}(\sigma) = (-1)^{\sigma(k)-k} \varepsilon_{p+q}(\tau_{\sigma,k}).$$

Továbbá, az

$$\mathfrak{S}_{(p+1,q)} \times (p+1) \to \mathfrak{S}_{(p,q)} \times (p+q+1); \quad (\sigma, k) \mapsto (\tau_{\sigma,k}, \sigma(k)) \tag{$*$}$$

leképezés bijekció.

Bizonyítás. (I) Legyen $(\sigma, k) \in \mathfrak{S}_{(p+1,q)} \times (p+1)$. Először megjegyezzük, hogy a 15.3.3. definíció szerint $\mathrm{m}_{p+q,k} : p+q \to (p+q+1) \setminus \{k\}$ injekció, és $\sigma : p+q+1 \to p+q+1$ bijekció, és $\mathrm{Im}(\sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k}) = (p+q+1) \setminus \{\sigma(k)\} = \mathrm{Dom}\left(\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}^{-1}\right)$, és $\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}^{-1} : (p+q+1) \setminus \{\sigma(k)\} \to p+q$ injekció, ezért a $\tau_{\sigma,k} : p+q \to p+q$ függvény injekció, így bijekció is, vagyis $\tau_{\sigma,k} \in \mathfrak{S}_{p+q}$.

Tegyük fel, hogy $(i,j) \in [\![0,p[\![\times [\![0,p[\![$ és $i < j$. Ekkor $\mathrm{m}_{p+q,k}$ szigorú növekedése miatt $\mathrm{m}_{p+q,k}(i) < \mathrm{m}_{p+q,k}(j)$, ugyanakkor $\mathrm{m}_{p+q,k}(j) \le p$, hiszen $j < k$ esetén $\mathrm{m}_{p+q,k}(j) = j < p$, és $k \le j$ esetén $\mathrm{m}_{p+q,k}(j) = j+1 \le p$. Mivel $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1,q}$, így $\sigma|_{[\![0,p[\![} : [\![0,p[\![\to p+q+1$ szigorúan monoton növő, tehát $(\sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k})(i) < (\sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k})(j)$. Továbbá, az $\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}^{-1} : (p+q+1) \setminus \{\sigma(k)\} \to p+q$ függvény szigorúan monoton növő, ezért

$$\tau_{\sigma,k}(i) = \left(\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}^{-1} \circ \sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k}\right)(i) < \left(\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}^{-1} \circ \sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k}\right)(j) = \tau_{\sigma,k}(j), \tag{1}$$

tehát $\tau_{\sigma,k}$ szigorúan monoton növő a $[\![0,p[\![$ halmazon.

Tegyük fel, hogy $(i,j) \in [\![p,p+q[\![\times [\![p,p+q[\![$ és $i < j$. Ekkor $k \le p$ miatt $k \le i$ és $k \le j$, következésképpen $\mathrm{m}_{p+q,k}$ szigorú növekedése miatt $\mathrm{m}_{p+q,k}(i) = i+1 < j+1 = \mathrm{m}_{p+q,k}(j)$. Mivel $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1,q}$, így $\sigma|_{[\![p+1,p+q+1[\![} : [\![p+1,p+q+1[\![\to p+q+1$ szigorúan monoton növő, és $i+1, j+1 \in [\![p+1,p+q+1[\![$, tehát $(\sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k})(i) < (\sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k})(j)$. Ismét az $\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}^{-1}$ függvény szigorú monoton növéséből kapjuk az (1) összefüggéseket, vagyis $\tau_{\sigma,k}$ szigorúan monoton növő a $[\![p,p+q[\![$ halmazon.

Ezzel megmutattuk, hogy $\tau_{\sigma,k} \in \mathfrak{S}_{(p,q)}$ teljesül.

(II) Legyen $(\sigma, k) \in \mathfrak{S}_{(p+1,q)} \times (p+1)$. A $\tau_{\sigma,k}$ permutáció előjelének meghatározásához vezessük be a következő halmazokat:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\tau_{\sigma,k}) &:= \{(i,j) \in (p+q) \times (p+q) \mid (i < j) \wedge (\tau_{\sigma,k}(i) > \tau_{\sigma,k}(j))\}, \\
\mathrm{T}_0 &:= \{(i,j) \in (p+q) \times (p+q) \mid (i < j < k) \wedge (\tau_{\sigma,k}(i) > \tau_{\sigma,k}(j))\}, \\
\mathrm{T}_1 &:= \{(i,j) \in (p+q) \times (p+q) \mid (i < k \le j) \wedge (\tau_{\sigma,k}(i) > \tau_{\sigma,k}(j))\}, \\
\mathrm{T}_2 &:= \{(i,j) \in (p+q) \times (p+q) \mid (k \le i < j) \wedge (\tau_{\sigma,k}(i) > \tau_{\sigma,k}(j))\}, \\
\mathrm{T}(\sigma) &:= \{(i,j) \in (p+q+1) \times (p+q+1) \mid (i < j) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))\}.
\end{aligned}$$

Triviális, hogy

$$\mathrm{T}(\tau_{\sigma,k}) = \mathrm{T}_0 \cup \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2,$$

valamint a T_0, T_1 és T_2 halmazok páronként diszjunktak, továbbá az előjelfüggvény tulajdonságai szerint

$$\varepsilon_{p+q}(\tau_{\sigma,k}) = (-1)^{\mathrm{Card}(\mathrm{T}(\tau_{\sigma,k}))} = (-1)^{\mathrm{Card}(\mathrm{T}_0)+\mathrm{Card}(\mathrm{T}_1)+\mathrm{Card}(\mathrm{T}_2)}, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{p+q+1}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{Card}(\mathrm{T}(\sigma))}. \tag{3}$$

Mivel az $\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}^{-1}$ függvény szigorúan monoton növő, minden $(i,j) \in (p+q) \times (p+q)$ esetén

$$\tau_{\sigma,k}(i) > \tau_{\sigma,k}(j) \Leftrightarrow \sigma\left(\mathrm{m}_{p+q,k}(i)\right) > \sigma\left(\mathrm{m}_{p+q,k}(j)\right),$$

következésképpen $\mathrm{m}_{p+q,k}$ definícióját alkalmazva

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_0 &= \{(i,j) \in (p+q) \times (p+q) \mid (i < j < k) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))\}, \\
\mathrm{T}_1 &= \{(i,j) \in (p+q) \times (p+q) \mid (i < k \leq j) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j+1))\}, \\
\mathrm{T}_2 &= \{(i,j) \in (p+q) \times (p+q) \mid (k \leq i < j) \wedge (\sigma(i+1) > \sigma(j+1))\}
\end{aligned}$$

adódik.

Mivel $k \leq p$ és σ szigorúan növő a $[\![0,p]\!]$ halmazon, így $(i,j) \in \mathrm{T}_0$ esetén $\sigma(i) < \sigma(j)$ és $\sigma(j) < \sigma(i)$ egyszerre teljesülne, ezért $\mathrm{T}_0 = \emptyset$.

Ha $(i,j) \in \mathrm{T}_1$, akkor $(i,j+1) \in \mathrm{T}(\sigma)$, és nyilvánvaló, hogy az

$$f_1 : \mathrm{T}_1 \to \mathrm{T}(\sigma); \quad (i,j) \mapsto (i,j+1)$$

függvény injekció. Ha $(i,j) \in \mathrm{T}_2$, akkor $(i+1,j+1) \in \mathrm{T}(\sigma)$, és nyilvánvaló, hogy az

$$f_2 : \mathrm{T}_2 \to \mathrm{T}(\sigma); \quad (i,j) \mapsto (i+1,j+1)$$

függvény injekció.

Tegyük fel, hogy $(i,j) \in \mathrm{Im}(f_1) \cap \mathrm{Im}(f_2)$. Ekkor vehetjük azokat az $(i_1,j_1) \in \mathrm{T}_1$ és $(i_2,j_2) \in \mathrm{T}_2$ párokat, amelyekre $(i,j) = (i_1,j_1+1)$ és $(i,j) = (i_2+1,j_2+1)$, következésképpen $i_2 < i_2+1 = i_1 < k \leq i_2$, ami lehetetlen. Ebből következik, hogy $\mathrm{Im}(f_1) \cap \mathrm{Im}(f_2) = \emptyset$.

Legyen $(i,j) \in \mathrm{T}(\sigma)$. Ekkor három eset lehetséges.

1) Ha $i < k$, akkor $j \leq p$ lehetetlen, mert σ szigorúan növő a $[\![0,p]\!]$ halmazon és $i < j$ és $\sigma(i) > \sigma(j)$; ezért ekkor $i < k \leq p \leq j-1 < p+q$, így $i_1 := i$ és $j_1 := j-1$ olyan számok, hogy $\sigma(i_1) = \sigma(i) > \sigma(j) = \sigma(j_1+1)$, tehát $(i_1,j_1) \in \mathrm{T}_1$ és $(i,j) = f_1(i_1,j_1)$, vagyis $(i,j) \in \mathrm{Im}(f_1)$. Megfordítva, ha $(i,j) \in \mathrm{Im}(f_1)$, akkor léteznek olyan $(i_1,j_1) \in \mathrm{T}_1$, hogy $f_1(i_1,j_1) = (i_1,j_1+1) = (i,j)$, és ekkor $i = i_1 < k$. Ez azt jelenti, hogy

$$\mathrm{Im}(f_1) = \{(i,j) \in \mathrm{T}(\sigma) | i < k\}. \tag{4}$$

2) Ha $k < i$, akkor $i_2 := i-1$ és $j_2 := j-1$ olyan számok, hogy $k \leq i_2 < j_2 < p+q$ és $\sigma(i_2+1) = \sigma(i) > \sigma(j) = \sigma(j_2+1)$, tehát $(i_2,j_2) \in \mathrm{T}_2$ és $f_2(i_2,j_2) = (i_2+1,j_2+1) = (i,j)$, vagyis $(i,j) \in \mathrm{Im}(f_2)$. Megfordítva, ha $(i,j) \in \mathrm{Im}(f_2)$, akkor léteznek olyan $(i_2,j_2) \in \mathrm{T}_2$, hogy $f_2(i_2,j_2) = (i_2+1,j_2+1) = (i,j)$, és ekkor $k \leq i_2 = i-1 < i$, vagyis $k < i$. Ez azt jelenti, hogy

$$\mathrm{Im}(f_2) = \{(i,j) \in \mathrm{T}(\sigma) | k < i\}. \tag{5}$$

3) Ha $i = k$, akkor $(k,j) \in \mathrm{T}(\sigma)$ miatt $k < j < p+q+1$ és $\sigma(k) > \sigma(j)$. Megfordítva, ha $k < j < p+q+1$ és $\sigma(k) > \sigma(j)$, akkor $(k,j) \in \mathrm{T}(\sigma)$. Ez azt jelenti, hogy ha bevezetjük az

$$A(\sigma,k) := \{j \in p+q+1 \mid (k < j) \wedge (\sigma(k) > \sigma(j))\}$$

halmazt, akkor

$$\{(k,j) \mid j \in A(\sigma,k)\} = \{(i,j) \in \mathrm{T}(\sigma) | i = k\}. \tag{6}$$

A (4), (5) és (6) egyenlőségek jobb oldalán álló halmazok nyilvánvalóan páronként diszjunktak, és $\mathrm{T}(\sigma) = \mathrm{Im}(f_1) \cup \mathrm{Im}(f_2) \cup \{(k,j) \mid j \in A(\sigma,k)\}$, tehát

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\mathrm{T}(\sigma)) &= \mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f_1)) + \mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f_2)) + \mathrm{Card}(\{(k,j) \mid j \in A(\sigma,k)\}) = \\ &= \mathrm{Card}(\mathrm{T}_1) + \mathrm{Card}(\mathrm{T}_2) + \mathrm{Card}(A(\sigma,k)),\end{aligned}$$

következésképpen (2) és (3) alapján

$$\varepsilon_{p+q+1}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{Card}(A(\sigma,k))} \varepsilon_{p+q}(\tau_{\sigma,k}),$$

tehát elég azt igazolni, hogy $\mathrm{Card}(A(\sigma,k)) = \sigma(k) - k$. (Megjegyezzük, hogy $\sigma(k) \geq k$, mert σ szigorúan monoton növő a $[\![0,p]\!]$ halmazon és $k \in [\![0,p]\!]$.)

Ehhez megjegyezzük, hogy a definíció szerint $A(\sigma,k) = \overset{-1}{\sigma}\langle [\![0,\sigma(k)[\![\rangle \cap]\!]k, p+q]\!]$, tehát **ENS** 4.1.12. alkalmazásával

$$\mathrm{Card}(A(\sigma,k)) + \mathrm{Card}\left(\overset{-1}{\sigma}\langle [\![0,\sigma(k)[\![\rangle \cup]\!]k,p+q]\!]\right) = \mathrm{Card}\left(\overset{-1}{\sigma}\langle [\![0,\sigma(k)[\![\rangle\right) + \mathrm{Card}(]\!]k,p+q]\!])$$

adódik. Világos, hogy $\mathrm{Card}(]\!]k,p+q]\!]) = p+q-k$ és $\mathrm{Card}\left(\overset{-1}{\sigma}\langle [\![0,\sigma(k)[\![\rangle\right) = \sigma(k)$, hiszen a $[\![0,\sigma(k)[\![\subseteq p+q+1$ halmaz számossága egyenlő $\sigma(k)$-val és $\sigma : p+q+1 \to p+q+1$ bijekció. Továbbá, nyilvánvaló, hogy

$$\overset{-1}{\sigma}\langle [\![0,\sigma(k)[\![\rangle \cup]\!]k,p+q]\!] = \{j \in p+q+1 | (k < j) \vee (\sigma(k) > \sigma(j))\} = (p+q+1) \setminus \{k\},$$

mert $\overset{-1}{\sigma}\langle [\![0,\sigma(k)[\![\rangle \cup]\!]k,p+q]\!] \subseteq (p+q+1) \setminus \{k\}$ triviális, és megfordítva, ha $j \in (p+q+1) \setminus \{k\}$, akkor $k < j$ esetén $j \in]\!]k,p+q]\!]$, míg $j \leq k$ esetén a $\sigma|_{[\![0,p[\![} : [\![0,p]\!] \to p+q+1$ függvény szigorú monoton növekedése és $j,k \in [\![0,p]\!]$ miatt $\sigma(j) < \sigma(k)$, azaz $j \in \overset{-1}{\sigma}\langle [\![0,\sigma(k)[\![\rangle$.

Ezért $\mathrm{Card}\left(\overset{-1}{\sigma}\langle [\![0,\sigma(k)[\![\rangle \cup]\!]k,p+q]\!]\right) = p+q$. Tehát

$$\mathrm{Card}(A(\sigma,k)) + (p+q) = \sigma(k) + (p+q-k),$$

így $\mathrm{Card}(A(\sigma,k)) = \sigma(k) - k$, amit bizonyítani kellett.

(III) A $(*)$ függvény injektivitásának bizonyításához legyenek $(\sigma,k),(\sigma',k') \in \mathfrak{S}_{(p+1,q)} \times (p+1)$ olyanok, hogy $\tau_{\sigma,k} = \tau_{\sigma',k'}$ és $\sigma(k) = \sigma'(k')$. Ekkor a definíció szerint

$$\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}^{-1} \circ \sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k} = \tau_{\sigma,k} = \tau_{\sigma',k'} = \mathrm{m}_{p+q,\sigma'(k')}^{-1} \circ \sigma' \circ \mathrm{m}_{p+q,k'},$$

tehát ezt az egyenlőséget balról komponálva az $\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}$ függvénnyel kapjuk, hogy

$$\sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k} = \sigma' \circ \mathrm{m}_{p+q,k'}. \tag{$**$}$$

Tegyük fel, hogy $k < k'$. Ekkor $k \leq k' - 1$, ezért $\mathrm{m}_{p+q,k}$ és $\mathrm{m}_{p+q,k'}$ definíciója, valamint a $(**)$ egyenlőség és $\sigma(k) = \sigma'(k')$ szerint

$$\sigma(k') = \sigma\left(\mathrm{m}_{p+q,k}(k'-1)\right) = \sigma'\left(\mathrm{m}_{p+q,k'}(k'-1)\right) = \sigma'(k'-1) < \sigma'(k') = \sigma(k),$$

ahol kihasználtuk azt, hogy $k' \leq p$ és σ' szigorúan monoton növő a $[\![0,p]\!]$ halmazon, így $\sigma'(k'-1) < \sigma'(k')$. Tehát azt kapjuk, hogy $\sigma(k') < \sigma(k)$, ugyanakkor $k < k' \leq p$

miatt $\sigma(k) < \sigma(k')$ is teljesül, mert σ is szigorúan monoton növő a $[\![0,p]\!]$ halmazon. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $k < k'$ lehetetlen. Teljesen szimmetrikus megfontolással kapjuk, hogy $k' < k$ is lehetetlen, vagyis $k = k'$. Ekkor a $(**)$ egyenlőséget jobbról komponálva az $\mathrm{m}_{p+q,k}^{-1}$ függvénnyel kapjuk, hogy $\sigma = \sigma'$ a $(p+q+1)\setminus\{k\}$ halmazon. Mivel pedig $\sigma(k) = \sigma'(k') = \sigma'(k)$ is teljesül, így $\sigma = \sigma'$.

Tehát a $(*)$ függvény injektív, ugyanakkor **ALG** 11.3.2. alapján

$$\mathrm{Card}\left(\mathfrak{S}_{(p+1,q)} \times (p+1)\right) = \mathrm{Card}\left(\mathfrak{S}_{(p+1,q)}\right)(p+1) = \frac{(p+q+1)!}{(p+1)!q!}(p+1) =$$
$$= \frac{(p+q)!}{p!q!}(p+q+1) = \mathrm{Card}\left(\mathfrak{S}_{(p,q)}\right)(p+q+1) = \mathrm{Card}\left(\mathfrak{S}_{(p,q)} \times (p+q+1)\right),$$

így a $(*)$ függvény bijekció. ■

15.4.2. Állítás. *Legyenek $p, q \in \mathbb{N}^*$, $r, s \in \mathbb{N}^*$ vagy $r = \infty$ vagy $s = \infty$. Ha E, F, G és H normált terek, $\mathbf{b} : F \times G \to H$ folytonos bilineáris operátor, valamint $U \subseteq E$ nyílt halmaz, és $\alpha \in {}^r\Omega^p(U;F)$ és $\beta \in {}^s\Omega^q(U;G)$, akkor*

$$\mathbf{d}\left(\alpha \underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge} \beta\right) = (\mathbf{d}\alpha) \underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge} \beta + (-1)^p.(\alpha \underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge} \mathbf{d}\beta).$$

Bizonyítás. Ha $x \in U$ és $(x_i)_{i\in p+q+1} \in E^{p+q+1}$, akkor 15.3.4. alapján

$$\mathbf{d}\left(\alpha \underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge} \beta\right)(x)\left((x_i)_{i\in p+q+1}\right) = \sum_{j=0}^{p+q}(-1)^j(((\mathrm{D}(\alpha \underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge} \beta))(x))x_j)\left((x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(i)})_{i\in p+q}\right).$$

Továbbá, a külső szorzat definíciója szerint minden $x \in U$ és $(z_i)_{i\in p+q} \in E^{p+q}$ esetén

$$\left(\alpha \underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge} \beta\right)(x)\left((z_i)_{i\in p+q}\right) = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}} \varepsilon_{p+q}(\tau)\mathbf{b}\left(\alpha(x)\left(\left(z_{\tau(i)}\right)_{i\in p}\right), \beta(x)\left(\left(z_{\tau(p+i)}\right)_{i\in q}\right)\right),$$

amiből látható, hogy minden $x \in U$, $z \in E$ és $(z_i)_{i\in p+q} \in E^{p+q}$ esetén

$$(((\mathrm{D}(\alpha \underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge} \beta))(x))z)\left((z_i)_{i\in p+q}\right) =$$
$$= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}} \varepsilon_{p+q}(\tau)\mathbf{b}\left(((\mathrm{D}\alpha)(x)z)\left(\left(z_{\tau(i)}\right)_{i\in p}\right), \beta(x)\left(\left(z_{\tau(p+i)}\right)_{i\in q}\right)\right) +$$
$$+ \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}} \varepsilon_{p+q}(\tau)\mathbf{b}\left(\alpha(x)\left(\left(z_{\tau(i)}\right)_{i\in p}\right), ((\mathrm{D}\beta)(x)z)\left(\left(z_{\tau(p+i)}\right)_{i\in q}\right)\right).$$

Ebből következik, hogy $x \in U$ és $(x_i)_{i\in p+q+1} \in E^{p+q+1}$ esetén

$$\mathbf{d}\left(\alpha \underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge} \beta\right)(x)\left((x_i)_{i\in p+q+1}\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{p+q} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}} (-1)^j \varepsilon_{p+q}(\tau)\mathbf{b}\left(((\mathrm{D}\alpha)(x)x_j)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(i))}\right)_{i\in p}\right), \beta(x)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(p+i))}\right)_{i\in q}\right)\right) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{p+q} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}} (-1)^j \varepsilon_{p+q}(\tau)\mathbf{b}\left(\alpha(x)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(i))}\right)_{i\in p}\right), ((\mathrm{D}\beta)(x)x_j)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(p+i))}\right)_{i\in q}\right)\right). \tag{1}$$

Ha $x \in U$ és $(x_i)_{i\in p+q+1} \in E^{p+q+1}$, akkor

$$\sum_{j=0}^{p+q} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}} (-1)^j \varepsilon_{p+q}(\tau)\mathbf{b}\left(((\mathrm{D}\alpha)(x)x_j)\left((x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(i))})_{i\in p}\right), \beta(x)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(p+i))}\right)_{i\in q}\right)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}\\ j\in p+q+1}} (-1)^j \varepsilon_{p+q}(\tau)\mathbf{b}\left(((\mathrm{D}\alpha)(x)x_j)\left((x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(i))})_{i\in p}\right), \beta(x)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(p+i))}\right)_{i\in q}\right)\right) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{(p+1,q)}\\ k\in p+1}} (-1)^{\sigma(k)} \varepsilon_{p+q}(\tau_{\sigma,k})\mathbf{b}\left(((\mathrm{D}\alpha)(x)x_{\sigma(k)})\left((x_{\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}(\tau_{\sigma,k}(i))})_{i\in p}\right), \beta(x)\left((x_{\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}(\tau_{\sigma,k}(p+i))})_{i\in q}\right)\right) \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{(p+1,q)}\\ k\in p+1}} (-1)^k \varepsilon_{p+q+1}(\sigma)\mathbf{b}\left(((\mathrm{D}\alpha)(x)x_{\sigma(k)})\left(\left(x_{\sigma(\mathrm{m}_{p+q,k}(i))}\right)_{i\in p}\right), \beta(x)\left(\left(x_{\sigma(\mathrm{m}_{p+q,k}(p+i))}\right)_{i\in q}\right)\right) \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{(p+1,q)}} \varepsilon_{p+q+1}(\sigma) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \mathbf{b}\left(((\mathrm{D}\alpha)(x)x_{\sigma(k)})\left(\left(x_{\sigma(\mathrm{m}_{p+q,k}(i))}\right)_{i\in p}\right), \beta(x)\left(\left(x_{\sigma(p+1+i)}\right)_{i\in q}\right)\right) \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{(p+1,q)}} \varepsilon_{p+q+1}(\sigma)\mathbf{b}\left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k ((\mathrm{D}\alpha)(x)x_{\sigma(k)})\left(\left(x_{\sigma(\mathrm{m}_{p+q,k}(i))}\right)_{i\in p}\right), \beta(x)\left(\left(x_{\sigma(p+1+i)}\right)_{i\in q}\right)\right) \overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{(p+1,q)}} \varepsilon_{p+q+1}(\sigma)\mathbf{b}\left((\mathbf{d}\alpha)(x)\left(((x_{\sigma(i)})_{i\in p+1})\right), \beta(x)\left(\left(x_{\sigma(p+1+i)}\right)_{i\in q}\right)\right) \overset{(6)}{=}$$

$$\overset{(6)}{=} ((\mathbf{d}\alpha) \underset{(\mathbf{b})}{\bigwedge} \beta)(x)\left((x_i)_{i\in p+q+1}\right),$$

ahol

– az $\overset{(1)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk az előző lemmát, amely szerint a

$$\mathfrak{S}_{(p+1,q)} \times (p+1) \to \mathfrak{S}_{(p,q)} \times (p+q+1); \quad (\sigma, k) \mapsto (\tau_{\sigma,k}, \sigma(k))$$

leképezés bijekció, ahol minden $(\sigma, k) \in \mathfrak{S}_{(p+1,q)} \times (p+1)$ esetén

$$\tau_{\sigma,k} := \mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)}^{-1} \circ \sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k}.$$

– a $\overset{(2)}{=}$ egyenlőségnél alkalmaztuk az előző lemmában igazolt

$$(-1)^k \varepsilon_{p+q+1}(\sigma) = (-1)^{\sigma(k)} \varepsilon_{p+q}(\tau_{\sigma,k})$$

összefüggést, valamint a $\tau_{\sigma,k}$ függvény imént felírt definícóját, amely szerint

$$\mathrm{m}_{p+q,\sigma(k)} \circ \tau_{\sigma,k} = \sigma \circ \mathrm{m}_{p+q,k};$$

– a $\overset{(3)}{=}$ egyenlőségnél beírtuk $\mathrm{m}_{p+q,k}$ definícióját;

– a $\overset{(4)}{=}$ egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $\mathbf{b}$ az első változójában lineáris;

– az $\overset{(5)}{=}$ egyenlőségnél alkalmaztuk a 15.3.4. állításban bizonyított formulát a $\mathbf{d}\alpha$ külső deriváltra;

– a $\overset{(6)}{=}$ egyenlőségnél a $(\mathbf{d}\alpha)(x) \in \mathbf{A}_{p+1}(E; F)$ és $\beta(x) \in \mathbf{A}_p(E; G)$ külső formák külső szorzatának definícióját alkalmaztuk.

Ezzel megmutattuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{p+q}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}}(-1)^j\varepsilon_{p+q}(\tau)\mathbf{b}\left(((\mathrm{D}\alpha)(x)x_j)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(i))}\right)_{i\in p}\right),\beta(x)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(p+i))}\right)_{i\in q}\right)\right)=$$
$$=((\mathbf{d}\alpha)\bigwedge_{(\mathbf{b})}\beta)(x)\left((x_i)_{i\in p+q+1}\right). \qquad (2)$$

Felcserélve a p és q természetes számokat, valamint az α és β differenciálható formákat, továbbá áttérve $\mathbf{b}$-ről a

$$\check{\mathbf{b}}:G\times F\to H;\quad (z,y)\mapsto(y,z)$$

folytonos bilineáris formára, kapjuk, hogy ha $x\in U$ és $(x_i)_{i\in p+q+1}\in E^{q+p+1}$, akkor

$$\sum_{j=0}^{q+p}\sum_{\tau'\in\mathfrak{S}_{(q,p)}}(-1)^j\varepsilon_{q+p}(\tau')\check{\mathbf{b}}\left(((\mathrm{D}\beta)(x)x_j)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{q+p,j}(\tau'(i))}\right)_{i\in q}\right),\alpha(x)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{q+p,j}(\tau'(q+i))}\right)_{i\in p}\right)\right)=$$
$$=((\mathbf{d}\beta)\bigwedge_{(\check{\mathbf{b}})}\alpha)(x)\left((x_i)_{i\in q+p+1}\right)=(-1)^{(q+1)p}(\alpha\bigwedge_{(\mathbf{b})}(\mathbf{d}\beta))(x)\left((x_i)_{i\in q+p+1}\right),$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk a külső formák antiszimmetrikusságát (**ALG** 11.4.3.). Ebből kapjuk, hogy minden $x\in U$ és $(x_i)_{i\in p+q+1}\in E^{q+p+1}$ esetén

$$(-1)^{(q+1)p}\Big(\alpha\bigwedge_{(\mathbf{b})}(\mathbf{d}\beta)\Big)(x)\left((x_i)_{i\in q+p+1}\right)\overset{(7)}{=}$$
$$\overset{(7)}{=}\sum_{j=0}^{q+p}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}}(-1)^j\varepsilon_{q+p}(\tau\circ\sigma_{p,q})\check{\mathbf{b}}\left(((\mathrm{D}\beta)(x)x_j)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{q+p,j}(\tau(\sigma_{p,q}(i)))}\right)_{i\in q}\right),\alpha(x)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{q+p,j}(\tau(\sigma_{p,q}(q+i)))}\right)_{i\in p}\right)\right)$$
$$\overset{(8)}{=}\sum_{j=0}^{p+q}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}}(-1)^j\varepsilon_{p+q}(\tau)\varepsilon_{p+q}(\sigma_{p,q})\check{\mathbf{b}}\left(((\mathrm{D}\beta)(x)x_j)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(p+i))}\right)_{i\in q}\right),\alpha(x)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(i))}\right)_{i\in p}\right)\right)\overset{(9)}{=}$$
$$\overset{(9)}{=}(-1)^{pq}\sum_{j=0}^{p+q}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{(p,q)}}(-1)^j\varepsilon_{p+q}(\tau)\mathbf{b}\left(\alpha(x)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(i))}\right)_{i\in p}\right),((\mathrm{D}\beta)(x)x_j)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(p+i))}\right)_{i\in q}\right)\right),$$

ahol

– az $\overset{(7)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk az **ALG** 11.4.2. lemma a) pontját, amely szerint az

$$\mathfrak{S}_{(p,q)}\to\mathfrak{S}_{(q,p)};\quad \tau\mapsto\tau\circ\sigma_{p,q},$$

függvény bijekció, ahol

$$\sigma_{p,q}:p+q\to p+q;\quad i\mapsto\begin{cases}p+i & \text{, ha } 0\le i<q,\\ i-q & \text{, ha } q\le i<q+p;\end{cases}$$

– a $\overset{(8)}{=}$ egyenlőségnél alkalmaztuk a $\varepsilon_{p+q}:\mathfrak{S}_{p+q}\to\{-1,1\}$ előjel-függvény morfikusságát és a $\sigma_{p,q}$ permutáció imént felírt definícióját;

– a $\overset{(9)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk az **ALG** 11.4.2. lemma a) pontjában igazolt $\varepsilon_{p+q}(\sigma_{p,q})=(-1)^{pq}$ egyenlőséget és $\check{\mathbf{b}}$ definícióját.

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in U$ és $(x_i)_{i \in p+q+1} \in E^{q+p+1}$ esetén

$$\sum_{j=0}^{p+q} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{(p,q)}} (-1)^j \varepsilon_{p+q}(\tau) \mathbf{b}\left(\alpha(x)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(i))}\right)_{i \in p}\right), ((\mathrm{D}\beta)(x) x_j)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+q,j}(\tau(p+i))}\right)_{i \in q}\right)\right) =$$

$$= (-1)^p \Big(\alpha \bigwedge_{(\mathbf{b})} (\mathbf{d}\beta)\Big)(x)\left((x_i)_{i \in q+p+1}\right). \tag{3}$$

A (2) és (3) formulákat (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy minden $x \in U$ és $(x_i)_{i \in p+q+1} \in E^{q+p+1}$ esetén

$$\mathbf{d}\Big(\alpha \bigwedge_{(\mathbf{b})} \beta\Big)(x)\left((x_i)_{i \in p+q+1}\right) =$$

$$= \Big((\mathbf{d}\alpha) \bigwedge_{(\mathbf{b})} \beta\Big)(x)\left((x_i)_{i \in p+q+1}\right) + (-1)^p \Big(\alpha \bigwedge_{(\mathbf{b})} (\mathbf{d}\beta)\Big)(x)\left((x_i)_{i \in q+p+1}\right),$$

amit bizonyítani kellett. ■

15.5. Lokálisan egzakt differenciálható formák zártsága

15.5.1. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, $p \in \mathbb{N}^*$ és $r \in \mathbb{N}^*$ vagy $r = \infty$. Ha $U \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor azt mondjuk, hogy a $w \in {}^r\Omega^p(U; F)$ differenciálható p-forma* **egzakt**, *ha létezik olyan $\tilde{w} \in {}^{r+1}\Omega^{p-1}(U; F)$ differenciálható $p-1$-forma, amelyre $w = \mathbf{d}\tilde{w}$.*

15.5.2. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, $p \in \mathbb{N}^*$ és $r \in \mathbb{N}^*$ vagy $r = \infty$. Ha $U \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor azt mondjuk, hogy a $w \in {}^r\Omega^p(U; F)$ differenciálható p-forma* **zárt**, *ha $\mathbf{d}w = 0$.*

15.5.3. Állítás. *Legyenek E és F normált terek, $p \in \mathbb{N}^*$ és $r \in \mathbb{N}^*$ vagy $r = \infty$. Ha $U \subseteq E$ nyílt halmaz, $w \in {}^r\Omega^p(U; F)$ és $r \geq 2$, akkor*

$$\mathbf{d}(\mathbf{d}w) = 0.$$

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy a definíciók és $r \geq 2$ szerint a w differenciálható p-forma itt érintett deriváltjai

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}w &: U \to \mathscr{L}_{p+1}(E; F);\\
\mathrm{D}w &: U \to \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_p(E; F));\\
\mathrm{D}(\mathbf{d}w) &: U \to \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_{p+1}(E; F));\\
\mathrm{D}(\mathrm{D}w) &: U \to \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(E; \mathscr{L}_p(E; F)));\\
\mathrm{D}^2 w &: U \to \mathscr{L}_2(E; \mathscr{L}_p(E; F))
\end{aligned}$$

típusú függvények. A 15.3.4. állítást alkalmazva w helyett $\mathbf{d}w$-re kapjuk, hogy minden $x \in U$ és $(x_i)_{i \in p+2} \in E^{p+2}$ esetén

$$(\mathbf{d}(\mathbf{d}w))(x)\left((x_i)_{i \in p+2}\right) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \left((\mathrm{D}(\mathbf{d}w))(x)(x_j)\right)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+1,j}(i)}\right)_{i \in p+1}\right), \tag{1}$$

amiből látható, hogy a $((\mathbf{d}(\mathbf{d}w)(x))((x_i)_{i\in p+2}) \in F$ vektor meghatározásához szükség lesz a $((\mathrm{D}(\mathbf{d}w))(x)(z))((z_i)_{i\in p+1}) \in F$ alakú vektorok kiszámítására, ahol $x \in U$, $z \in E$ és $(z_i)_{i\in p+1} \in E^{p+1}$. Mivel pedig 15.3.4. szerint minden $x \in U$ és $(x_i)_{i\in p+1} \in E^{p+1}$ esetén

$$(\mathbf{d}w)(x)\left((x_i)_{i\in p+1}\right) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left((\mathrm{D}w)(x)(x_k)\right)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p,k}(i)}\right)_{i\in p}\right), \tag{2}$$

így látható, hogy a $\mathrm{D}(\mathbf{d}w)$ deriváltfüggvény előállításához az

$$U \to F; \quad x \mapsto (((\mathrm{D}w)(x))(z))\left((z_i)_{i\in p+1}\right)$$

alakú függvények deriváltjára lesz szükség, ahol $z \in E$ és $(z_i)_{i\in p+1} \in E^{p+1}$.

Minden $(z,(z_i)_{i\in p+1}) \in E \times E^{p+1}$ párra vezessük be a

$$\Psi_{(z,(z_i)_{i\in p+1})} : \mathscr{L}\left(E;\mathscr{L}_{p+1}\left(E;F\right)\right) \to F; \quad u \mapsto u(z)\left((z_i)_{i\in p+1}\right)$$

leképezést, amely nyilvánvalóan lineáris, és folytonos is, mert $u \in \mathscr{L}\left(E;\mathscr{L}_{p+1}\left(E;F\right)\right)$ esetén

$$\left\|\Psi_{(z,(z_i)_{i\in p+1})}(u)\right\| \leq \|u\|\|z\|\prod_{i=0}^{p}\|z_i\|.$$

Továbbá, minden $(z_i)_{i\in p+1} \in E^{p+1}$ esetén értelmezzük a

$$\Phi_{(z_i)_{i\in p+1}} : \mathscr{L}_{p+1}\left(E;F\right) \to F; \quad u \mapsto u\left((z_i)_{i\in p+1}\right),$$

leképezést, amely nyilvánvalóan lineáris, és folytonos is, mert $u \in \mathscr{L}_{p+1}\left(E;F\right)$ esetén

$$\left\|\Phi_{(z_i)_{i\in p+1}}(u)\right\| \leq \|u\|\prod_{i=0}^{p}\|z_i\|.$$

Ekkor világos, hogy (2) alapján minden $x \in U$ és $(z_i)_{i\in p+1} \in E^{p+1}$ esetén

$$\begin{aligned}\left(\Phi_{(z_i)_{i\in p+1}} \circ \mathbf{d}w\right)(x) &= (\mathbf{d}w)(x)\left((z_i)_{i\in p+1}\right) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left((\mathrm{D}w)(x)(z_k)\right)\left(\left(z_{\mathrm{m}_{p,k}(i)}\right)_{i\in p}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left(\Psi_{\left(z_k,(z_{\mathrm{m}_{p,k}(i)})_{i\in p}\right)} \circ (\mathrm{D}w)\right)(x),\end{aligned}$$

vagyis rögzített $(z_i)_{i\in p+1} \in E^{p+1}$ esetén az U halmazon fennáll a

$$\Phi_{(z_i)_{i\in p+1}} \circ \mathbf{d}w = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left(\Psi_{\left(z_k,(z_{\mathrm{m}_{p,k}(i)})_{i\in p}\right)} \circ (\mathrm{D}w)\right)$$

függvény-egyenlőség, továbbá az ebben szereplő összes függvény C^1-osztályú az U halmazon, hiszen $w \in {}^r\Omega^p(U;F)$ és $r \geq 2$. Most rögzített $(z_i)_{i\in p+1} \in E^{p+1}$ rendszerre, a függvénykompozíció differenciálási szabályát alkalmazva kapjuk, hogy minden $x \in U$ pontra

$$\begin{aligned}\Phi_{(z_i)_{i\in p+1}} \circ ((\mathrm{D}(\mathbf{d}w))(x)) &= \left(\mathrm{D}\left(\Phi_{(z_i)_{i\in p+1}} \circ \mathbf{d}w\right)\right)(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left(\mathrm{D}\left(\Psi_{\left(z_k,(z_{\mathrm{m}_{p,k}(i)})_{i\in p}\right)} \circ (\mathrm{D}w)\right)\right)(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left(\Psi_{\left(z_k,(z_{\mathrm{m}_{p,k}(i)})_{i\in p}\right)} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}w))(x)\right),\end{aligned}$$

következésképpen minden $z \in E$ vektorra

$$\begin{aligned}(((\mathrm{D}(\mathbf{d}w))(x))(z))((z_i)_{i\in p+1}) &= \left(\Phi_{(z_i)_{i\in p+1}} \circ ((\mathrm{D}(\mathbf{d}w))(x))\right)(z) = \\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \left(\Psi_{\left(z_k,(z_{\mathrm{m}_{p,k}(i)})_{i\in p}\right)} \circ (\mathrm{D}(\mathrm{D}w))(x)\right)(z) = \\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k ((((\mathrm{D}(\mathrm{D}w))(x))(z))(z_k))\left((z_{\mathrm{m}_{p,k}(i)})_{i\in p}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \left(\left(\left(\mathrm{D}^2 w\right)(x)\right)(z,z_k)\right)\left((z_{\mathrm{m}_{p,k}(i)})_{i\in p}\right),\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy a definíció szerint $((\mathrm{D}^2 w)(x))(z,z_k) = (((\mathrm{D}(\mathrm{D}w))(x))(z))(z_k)$. Tehát azt kaptuk, hogy $x \in U$, $z \in E$ és $(z_i)_{i\in p+1}$ esetén

$$(((\mathrm{D}(\mathbf{d}w))(x))(z))((z_i)_{i\in p+1}) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \left(\left(\left(\mathrm{D}^2 w\right)(x)\right)(z,z_k)\right)\left(\left(z_{\mathrm{m}_{p,k}(i)}\right)_{i\in p}\right).$$

Legyen most $x \in E$ és $(x_i)_{i\in p+2} \in E^{p+2}$ rögzítve. Ekkor minden $0 \le j \le p+1$ természetes számra, a $z := x_j$ és $(z_i)_{i\in p+1} := \left(x_{\mathrm{m}_{p+1,j}(i)}\right)_{i\in p+1}$ választással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&(((\mathrm{D}(\mathbf{d}w))(x))(x_j))\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+1,j}(i)}\right)_{i\in p+1}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \left((\mathrm{D}^2 w)(x)\right)\left(x_j, x_{\mathrm{m}_{p+1,j}(k)}\right)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+1,j}\left(\mathrm{m}_{p,k}(i)\right)}\right)_{i\in p}\right),\end{aligned}$$

amit behelyettesítve az (1) formulába kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&(\mathbf{d}(\mathbf{d}w))(x)((x_i)_{i\in p+2}) = \\ &= \sum_{j=0}^{p+1}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{j+k} \left((\mathrm{D}^2 w)(x)\right)\left(x_j, x_{\mathrm{m}_{p+1,j}(k)}\right)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+1,j}\left(\mathrm{m}_{p,k}(i)\right)}\right)_{i\in p}\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Vezessük be minden $(j,k) \in (p+2)\times(p+1)$ párra a

$$z_{j,k} := \left((\mathrm{D}^2 w)(x)\right)\left(x_j, x_{\mathrm{m}_{p+1,j}(k)}\right)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+1,j}\left(\mathrm{m}_{p,k}(i)\right)}\right)_{i\in p}\right) \in F$$

vektort, tehát (3) szerint

$$((\mathbf{d}(\mathbf{d}w))(x))((x_i)_{i\in p+2}) = \sum_{(j,k)\in(p+2)\times(p+1)} (-1)^{j+k} z_{j,k}.$$

Legyenek

$$I_- := \{(j,k) \in (p+2)\times(p+1) | j \le k\}; \quad I_+ := \{(j,k) \in (p+2)\times(p+1) | j > k\}.$$

Világos, hogy $I_- \cup I_+ = (p+2)\times(p+1)$ és $I_- \cap I_+ = \emptyset$, ezért

$$((\mathbf{d}(\mathbf{d}w))(x))((x_i)_{i\in p+2}) = \sum_{(j,k)\in I_-} (-1)^{j+k} z_{j,k} + \sum_{(j,k)\in I_+} (-1)^{j+k} z_{j,k}.$$

Nyilvánvaló, hogy az $I_- \to I_+$; $(j,k) \mapsto (k+1,j)$ leképezés bijekció, ezért az F vektortér összeadásának általános kommutativitása miatt

$$((\mathbf{d}(\mathbf{d}w))(x))\,((x_i)_{i\in p+2}) = \sum_{(j,k)\in I_-} (-1)^{j+k} z_{j,k} + \sum_{(j,k)\in I_-} (-1)^{(k+1)+j} z_{k+1,j} =$$
$$= \sum_{(j,k)\in I_-} (-1)^{j+k} (z_{j,k} - z_{k+1,j})\,.$$

A bizonyítást azzal fejezzük be, hogy minden $(j,k) \in I_-$ párra igazoljuk a $z_{j,k} = z_{k+1,j}$ egyenlőséget, amiből következik, hogy $((\mathbf{d}(\mathbf{d}w))(x))\,((x_i)_{i\in p+2}) = 0$, így $x \in U$ és $(x_i)_{i\in p+2} \in E^{p+2}$ tetszőlegessége folytán $\mathbf{d}(\mathbf{d}w) = 0$.

Valóban, legyen $(j,k) \in I_-$ rögzített, tehát j és k olyan természetes számok, amelyekre $0 \le j \le k \le p$. Ekkor $j \le k$ miatt $\mathrm{m}_{p+1,j}(k) = k+1$, tehát

$$z_{j,k} = \left((\mathrm{D}^2 w)(x)\right)(x_j, x_{k+1})\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+1,j}(\mathrm{m}_{p,k}(i))}\right)_{i\in p}\right),$$

ugyanakkor $j < k+1$, így $\mathrm{m}_{p+1,k+1}(j) = j$, tehát

$$z_{k+1,j} = \left((\mathrm{D}^2 w)(x)\right)\left(x_{k+1}, x_{\mathrm{m}_{p+1,k+1}(j)}\right)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+1,k+1}(\mathrm{m}_{p,j}(i))}\right)_{i\in p}\right) =$$
$$= \left((\mathrm{D}^2 w)(x)\right)(x_{k+1}, x_j)\left(\left(x_{\mathrm{m}_{p+1,k+1}(\mathrm{m}_{p,j}(i))}\right)_{i\in p}\right).$$

A Young-tétel szerint $((\mathrm{D}^2 w)(x))\,(x_j, x_{k+1}) = ((\mathrm{D}^2 w)(x))\,(x_{k+1}, x_j)$, ezért a $z_{j,k} = z_{k+1,j}$ egyenlőség bizonyításához elég azt igazolni, hogy

$$\mathrm{m}_{p+1,j} \circ \mathrm{m}_{p,k} = \mathrm{m}_{p+1,k+1} \circ \mathrm{m}_{p,j}.$$

Ez viszont esetszétválasztással könnyen belátható, hiszen mindkét függvény a p halmazon van értelmezve, és minden $i \in p$ esetén:

– ha $i < j$, akkor $j \le k$ miatt $i < k$ is igaz, tehát $\mathrm{m}_{p,k}(i) = i$ és $\mathrm{m}_{p+1,j}(i) = i$, ezért $(\mathrm{m}_{p+1,j} \circ \mathrm{m}_{p,k})\,(i) = i$, ugyanakkor $\mathrm{m}_{p,j}(i) = i$ és $i \le j \le k < k+1$ miatt $i < k+1$, így $\mathrm{m}_{p+1,k+1}(i) = i$, ezért $(\mathrm{m}_{p+1,k+1} \circ \mathrm{m}_{p,j})\,(i) = i$;

– ha $j \le i < k$, akkor $\mathrm{m}_{p,k}(i) = i$ és $\mathrm{m}_{p+1,j}(i) = i+1$, ezért $(\mathrm{m}_{p+1,j} \circ \mathrm{m}_{p,k})\,(i) = i+1$, ugyanakkor $\mathrm{m}_{p,j}(i) = i+1$ és $i < k$ miatt $i+1 < k+1$, így $\mathrm{m}_{p+1,k+1}(i+1) = i+1$, ezért $(\mathrm{m}_{p+1,k+1} \circ \mathrm{m}_{p,j})\,(i) = i+1$;

– ha $k \le i$, akkor $\mathrm{m}_{p,k}(i) = i+1$ és $j \le k < i$ miatt $j < i+1$, így $\mathrm{m}_{p+1,j}(i+1) = i+2$, ezért $(\mathrm{m}_{p+1,j} \circ \mathrm{m}_{p,k})\,(i) = i+2$, ugyanakkor $\mathrm{m}_{p,j}(i) = i+1$ és $k \le i$ miatt $k+1 \le i+1$, így $\mathrm{m}_{p+1,k+1}(i+1) = i+2$, ezért $(\mathrm{m}_{p+1,k+1} \circ \mathrm{m}_{p,j})\,(i) = i+2$. ■

15.5.4. Tétel. *Legyenek E és F normált terek, $p \in \mathbb{N}^*$ és $r \in \mathbb{N}^*$ vagy $r = \infty$, és $U \subseteq E$ nyílt halmaz. Ha $w \in {}^r\Omega^p(U;F)$ és w egzakt, akkor w zárt.*

Bizonyítás. A $w \in {}^r\Omega^p(U;F)$ differenciálható p-forma egzaktsága miatt vehetünk olyan $\tilde{w} \in {}^{r+1}\Omega^{p-1}(U;F)$ differenciálható $p-1$-formát, amelyre $w = \mathbf{d}\tilde{w}$. A hipotézis szerint $r \ge 1$, ezért $r+1 \ge 2$, így a 15.5.3. állítást alkalmazva w helyett $\tilde{w}$-ra, kapjuk, hogy $\mathbf{d}w = \mathbf{d}(\mathbf{d}\tilde{w}) = 0$, vagyis w zárt differenciálható p-forma. ■

15.6. Zárt differenciálható formák lokális egzaktsága

15.6.1. Definíció. *Legyenek E és F normált terek, $p \in \mathbb{N}^*$ és $r \in \mathbb{N}^*$ vagy $r = \infty$, és $U \subseteq E$ nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy a $w \in {}^r\Omega^p(U;F)$ differenciálható forma* **lokálisan egzakt**, *ha U minden pontjának van olyan V nyílt környezete, hogy $V \subseteq U$ és a $w|_V \in {}^r\Omega^p(V;F)$ differenciálható forma egzakt.*

XIII. rész

Additív halmazfüggvények és mértékek

BEVEZETÉS

Az analízisben és az analízis alkalmazásaiban (például az elméleti fizikában) gyakran előfordulnak olyan függvények, amelyek adott halmaz bizonyos részhalmazain vannak értelmezve, vektorértékűek, és a definíciós tartományuk bármely két diszjunkt elemének uniójához rendelt értékük megegyezik az egyes halmazokhoz rendelt vektorok összegével. Az ilyen típusú leképezéseket a matematikában *additív halmazfüggvényeknek* nevezzük. Ezekkel lehet megfelelően modellezni az elméleti fizikában az *extenzív fizikai mennyiségeket*. Ebben a részben megvizsgáljuk az additív halmazfüggvények néhány elemi tulajdonságát, és bevezetjük a legfontosabb additív halmazfüggvényeket: a *vektormértékeket*.

Az első fejezetben azokat a halmazokat vizsgáljuk, amelyek az additív halmazfüggvények természetes definíciós tartományai; ezek a *félgyűrűk* és *halmazgyűrűk*. Itt adjuk meg az additív halmazfüggvények pontos definícióját, és bemutatunk néhány elemi példát additív halmazfüggvényekre, amelyek közül a legnevezetesebbek a *számláló mértékek*, a *Dirac-mértékek*, és a *Lebesgue-Stieltjes mértékek*.

A második fejezetben értelmezünk egy fontos függvénytér-típust, a félgyűrűkkel kapcsolatos *lépcsősfüggvények* terét. Megmutatjuk, hogy minden additív halmazfüggvény kitüntetett módon (az általa generált *elemi integrálként*) kiterjeszthető egy lépcsősfüggvénytéren értelmezett lineáris operátorrá. Ez azért fontos tény, mert egy additív halmazfüggvény eleve nem lineáris objektum, mégis helyettesíthető egy lineáris operátorral. Az additív halmazfüggvényeknek itt bemutatott "linearizációja" mind elvi, mind technikai szempontból kiválóan felhasználható az analízisben. Például egy valós, vagy komplex értékű additív halmazfüggvény azonosul egy lépcsősfüggvény-tér feletti lineáris funkcionállal, és ilyenekre rendelkezésünkre állnak lényegesen nem triviális állítások, mint például a Hahn-Banach-tétel.

A harmadik fejezetben bevezetünk három nevezetes korlátossági tulajdonságot normált térbe ható additív halmazfüggvényekre: a *korlátosságot*, a *relatív korlátosságot*, és a *korlátos változást*. Értelmezzük korlátos változású additív halmazfüggvény *abszolút értékét*, ami azért fontos, mert ez lehetővé teszi a vektorértékű additív halmazfüggvények elméletének bizonyos redukcióját a *skalárértékű* additív halmazfüggvények elméletére.

A vektorértékű additív halmazfüggvények elméletének skaláris értékűekre való visszavezetése azért érdekes, mert skaláris additív halmazfüggvényekre végrehajthatók olyan konstrukciók, amik vektorértékűek esetében általában értelmetlenek. A negyedik fejezetben részletesebben vizsgálat alá vetjük a skaláris additív halmazfüggvényeket. Megmutatjuk, hogy minden relatív korlátos komplex additív halmazfüggvény kitüntetett módon előáll négy *pozitív* additív halmazfüggvény komplex lineáris kombinációjaként (ez az *elemi Hahn-Jordan felbontás*). Az eredmények alkalmazásaként igazoljuk, hogy véges dimenziós normált térbe ható additív halmazfüggvény esetében a relatív korlátosság és a korlátos változás ekvivalens tulajdonságok.

Az ötödik fejezetben pontos választ adunk arra a kérdésre, hogy milyen kapcsolat van egy Banach-térbe ható additív halmazfüggvény korlátossága, és az általa generált elemi integrál sup-normában való folytonossága között. Kiderül, hogy az ilyen típusú elemi integrálok természetes módon kiterjeszthetők egy olyan függvénytérre (az *egyszerű függvények* terére), amely már lényegesen bővebb lehet a lépcsősfüggvények terénél. Ez az állítás tekinthető az *absztrakt Riemann-integrálás* alaptételének. Ennek a tételnek fontos alkalmazásai vannak az általános valószínűségelméletben, nevezetesen a *spektrálsereg*, vagy más néven *projektormérték* szerinti integrálás elméletében.

Az utolsó fejezetben a normált térbe ható additív halmazfüggvények legfontosabb analitikus tulajdonságáról, a *σ-additivitásról* lesz szó. A σ-additív és korlátos változású additív halmazfüggvényeket *mértékeknek* nevezzük. Megvizsgáljuk a mértékek által generált elemi integrálok pontonkénti konvergenciával való kapcsolatát, és jellemzést adunk a skaláris mértékekre. Végül értelmezzük a *mértéktereket*, és megmutatjuk, hogy skaláris mérték *tenzorszorzata* szintén mérték. A mértékterek fogalma előkészíti az *integrálelméletet*, amit majd a következő részben (**INT**) tárgyalunk.

Irodalomjegyzék

[1] N. Bourbaki, **Éléments de mathématique. Intégration**, Hermann, Paris

[2] L. Schwartz, **Analyse mathématique**, Hermann, Paris, 1967.

[3] P. R. Halmos, **Mértékelmélet**, Gondolat Kiadó, Budapest, 1984.

[4] Szőkefalvi-Nagy B., **Valós függvények és függvénysorok**, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[5] Riesz F.-Szőkefalvi-Nagy B., **Funkcionálanalízis**, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[6] А. Н. Колмогоров-С. В. Фомин, **Элементы теории функций и функционального анализа**, Наука, Москва, 1974.

IRODALOMJEGYZÉK

1. fejezet

Félgyűrűk, halmazgyűrűk és additív halmazfüggvények

1.1. Félgyűrűk és halmazgyűrűk

1.1.1. Definíció. *Egy $\mathscr{S}$ halmazt* **félgyűrűnek** *nevezünk, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal.*

$(\mathrm{SR_I})$ $\emptyset \in \mathscr{S}$.

$(\mathrm{SR_{II}})$ *Minden $E, E' \in \mathscr{S}$ halmazra $E \cap E' \in \mathscr{S}$.*

$(\mathrm{SR_{III}})$ *Minden $E, E' \in \mathscr{S}$ halmazhoz létezik olyan $(E_i)_{i \in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $E' \setminus E = \bigcup_{i \in I} E_i$.*

Ha T halmaz, akkor azt mondjuk, hogy $\mathscr{S}$ **félgyűrű a T halmaz felett***, ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, és $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$, vagyis $\mathscr{S}$ minden eleme részhalmaza T-nek.*

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, akkor a $T := \bigcup_{E \in \mathscr{S}} E$ halmaz a tartalmazás tekintetében legkisebb halmaz, amelyre teljesül az, hogy $\mathscr{S}$ félgyűrű T felett.

Az indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval és $(\mathrm{SR_{II}})$ alkalmazásával könnyen belátható, hogy ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, akkor minden $(E_i)_{i \in I}$ nem üres véges $\mathscr{S}$-beli rendszerre $\bigcap_{i \in I} E_i \in \mathscr{S}$.

Minden E és E' halmazra $E' \setminus E = E' \setminus (E \cap E')$, ezért nyilvánvaló, hogy ha $\mathscr{S}$ olyan halmaz, amelyre $(\mathrm{SR_{II}})$ teljesül, akkor $(\mathrm{SR_{III}})$ ekvivalens a következő állítással:

$(\mathrm{SR'_{III}})$ Minden $E, E' \in \mathscr{S}$ halmazhoz, $E \subseteq E'$ esetén létezik olyan $(E_i)_{i \in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $E' \setminus E = \bigcup_{i \in I} E_i$.

Példák félgyűrűkre.

1) Legyen T halmaz. Ekkor $\{\emptyset\}$ és $\mathscr{P}(T)$ félgyűrű a T halmaz felett. Nyilvánvaló, hogy minden T feletti $\mathscr{S}$ félgyűrűre $\{\emptyset\} \subseteq \mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$.

2) Ha T halmaz, akkor a T véges (illetve megszámlálható) részhalmazainak halmaza félgyűrű T felett.

3) Az $\mathbb{R}$ feletti balról zárt, jobbról nyílt, korlátos intervallumok $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ halmaza félgyűrű $\mathbb{R}$ felett. Valóban:

– minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\emptyset = [a, a[\in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}$;

– minden $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ esetén $[a, b[\cap [a', b'[= [\max(a, a'), \min(b, b')[\in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}$;

– ha $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $[a', b'[\subseteq [a, b[$, akkor $a' \leq b'$ esetén $[a, b[\setminus [a', b'[= [a, a'[\cup [b', b[$, míg $a' > b'$ esetén $[a', b'[= \emptyset$, így $[a, b[\setminus [a', b'[= [a, b[$.

Ezt a félgyűrűt az $\mathbb{R}$ feletti **standard félgyűrűnek** nevezzük, és az $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ szimbólummal jelöljük.

1.1.2. Definíció. *Egy $\mathscr{R}$ halmazt* **halmazgyűrűnek** *nevezünk, ha teljesülnek rá a következők:*

(R_I) $\emptyset \in \mathscr{R}$.

(R_{II}) *Minden $E, E' \in \mathscr{R}$ halmazra $E \cup E' \in \mathscr{R}$.*

(R_{III}) *Minden $E, E' \in \mathscr{R}$ halmazra $E' \setminus E \in \mathscr{R}$.*

Ha T halmaz, akkor azt mondjuk, hogy $\mathscr{R}$ **halmazgyűrű a T halmaz felett**, *ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, és $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(T)$.*

Ha E és E' halmazok, akkor $E \cap E' = E' \setminus (E' \setminus E)$, ezért minden halmazgyűrű félgyűrű. Ugyanakkor egy félgyűrűre általában sem (R_{II}), sem (R_{III}) nem teljesül. Például, az $\mathbb{R}$ feletti standard félgyűrű nem halmazgyűrű, ugyanakkor az 1) és 2) példában szereplő félgyűrűk halmazgyűrűk.

Az indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval és (R_{II}) alkalmazásával könnyen belátható, hogy ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, akkor minden $(E_i)_{i \in I}$ véges $\mathscr{R}$-beli rendszerre $\bigcup_{i \in I} E_i \in \mathscr{R}$, ugyanakkor $I \neq \emptyset$ esetén $\bigcap_{i \in I} E_i \in \mathscr{R}$ is teljesül, mert $\mathscr{R}$ félgyűrű.

1.1.3. Állítás. *Minden $\mathscr{H}$ halmazhoz egyértelműen létezik olyan $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, amely tartalmazza $\mathscr{H}$-t, és amely minden $\mathscr{H}$-t tartalmazó halmazgyűrűnek részhalmaza, vagyis $\mathscr{R}$ a tartalmazás tekintetében legkisebb $\mathscr{H}$-t tartalmazó halmazgyűrű.*

Bizonyítás. Legyen $T := \bigcup_{E \in \mathscr{H}} E$; ekkor $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{P}(T)$. Jelölje $\mathfrak{R}$ azon T feletti halmazgyűrűk halmazát, amelyek $\mathscr{H}$-t tartalmazzák. Ekkor $\mathscr{P}(T) \in \mathfrak{R}$, tehát $\mathfrak{R} \neq \emptyset$. Nyilvánvaló, hogy halmazgyűrűk tetszőleges nem üres rendszerének a metszete halmazgyűrű, ezért $\mathscr{R} := \bigcap_{\mathscr{R}' \in \mathfrak{R}} \mathscr{R}'$ olyan halmazgyűrű, amelyre $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{R}$. Ha $\mathscr{R}'$ tetszőleges olyan halmazgyűrű, amelyre $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{R}'$, akkor $\mathscr{R}'' = \mathscr{R}' \cap \mathscr{P}(T)$ olyan halmazgyűrű, amelyre $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{R}''$, és $\mathscr{R}'' \subseteq \mathscr{P}(T)$, így $\mathscr{R}'' \in \mathfrak{R}$, ezért az $\mathscr{R}$ definíciója szerint $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}'' \subseteq \mathscr{R}'$. Tehát $\mathscr{R}$ olyan halmazgyűrű, amelynek a létezését állítottuk. ■

1.1.4. Definíció. *Ha $\mathscr{H}$ halmaz, akkor a tartalmazás tekintetében legkisebb, $\mathscr{H}$-t tartalmazó halmazgyűrűt a $\mathscr{H}$* **által generált halmazgyűrűnek** *nevezzük. Az $\mathbb{R}$ feletti standard félgyűrű által generált halmazgyűrűt az $\mathbb{R}$ feletti* **standard halmazgyűrűnek** *nevezzük, és az $\mathscr{R}_{\mathbb{R}}$ szimbólummal jelöljük.*

Tetszőleges halmaz esetében nem túl könnyű leírni az általa generált halmazgyűrűt (**1**. gyakorlat). Azonban félgyűrű által generált halmazgyűrű könnyen jellemezhető, amint az a következő állításból kiderül.

1.1.5. Állítás. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű, és vezessük be a kövekező jelöléseket:*

a) *$\mathscr{R}$ az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrű;*

b) *$\mathscr{R}'$ a véges sok $\mathscr{S}$-beli halmaz uniójaként előálló halmazok halmaza;*

c) *$\mathscr{R}''$ a véges sok diszjunkt $\mathscr{S}$-beli halmaz uniójaként előálló halmazok halmaza.*

Ekkor $\mathscr{R} = \mathscr{R}' = \mathscr{R}''$ teljesül.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{R}'' \subseteq \mathscr{R}' \subseteq \mathscr{R}$, tehát elég azt igazolni, hogy $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}''$. A generált halmazgyűrű értelmezése alapján ehhez elég azt megmutatni, hogy $\mathscr{R}''$ olyan halmazgyűrű, amely $\mathscr{S}$-t tartalmazza. Az nyilvánvaló, hogy $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{R}''$, tehát csak az szorul bizonyításra, hogy $\mathscr{R}''$ halmazgyűrű.

Legyenek $E, E' \in \mathscr{R}''$ tetszőlegesek. Az $\mathscr{R}''$ definíciója szerint léteznek olyan $(E_i)_{i\in I}$ és $(E'_j)_{j\in J}$ véges diszjunkt rendszerek $\mathscr{S}$-ben, amelyekre $E = \bigcup\limits_{i\in I} E_i$, és $E' = \bigcup\limits_{j\in J} E'_j$. Ekkor az $(E_i \cap E'_j)_{(i,j)\in I\times J}$ halmazrendszer véges, diszjunkt, és minden tagja $\mathscr{S}$-nek eleme, mert $\mathscr{S}$-re $(\mathrm{R_{II}})$ teljesül. Továbbá

$$E \cap E' = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (E_i \cap E'_j),$$

ezért $E \cap E' \in \mathscr{R}''$. Ebből látható, hogy $\mathscr{R}''$-beli halmazok nem üres véges rendszerének a metszete eleme $\mathscr{R}''$-nek.

Nyilvánvaló, hogy ha I üres, akkor $E = \emptyset$, így $E' \setminus E = E' \in \mathscr{R}''$, továbbá, ha I nem üres, akkor

$$E' \setminus E = \Big(\bigcup_{j\in J} E'_j\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \bigcup_{j\in J}\Big(\bigcap_{i\in I}(E'_j \setminus E_i)\Big).$$

Nyilvánvaló, hogy minden $(i,j) \in I \times J$ esetén $(\mathrm{R_{III}})$ miatt $E'_j \setminus E_i \in \mathscr{R}''$, tehát a fentiek alapján minden $J \ni j$-re $\bigcap\limits_{i\in I}(E'_j \setminus E_i) \in \mathscr{R}''$. Ugyanakkor az $(E'_j)_{j\in J}$ halmazrendszer diszjunktságából következik, hogy a $\Big(\bigcap\limits_{i\in I}(E'_j \setminus E_i)\Big)_{j\in J}$ halmazrendszer is diszjunkt. Az $\mathscr{R}'$ definícója szerint triviális hogy bármely véges diszjunkt $\mathscr{R}''$-beli rendszer uniója eleme $\mathscr{R}''$-nek. Ezért $E' \setminus E \in \mathscr{R}''$ teljesül. Ebből már az is következik, hogy $E \cup E' \in \mathscr{R}''$, hiszen $E \cup E' = (E \setminus E') \cup (E' \setminus E) \cup (E \cap E')$, és a jobb oldalon álló halmazok diszjunktak és $\mathscr{R}''$-nek elemei. ■

1.1.6. Állítás. *Ha $(\mathscr{S}_i)_{i\in I}$ félgyűrűk nem üres, véges rendszere, akkor az*

$$\mathscr{S} := \Big\{ \prod_{i\in I} E_i \Big| (E_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{S}_i \Big\}$$

halmaz félgyűrű.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{S}$-re $(\mathrm{SR_I})$ teljesül.

Legyenek $(E_i)_{i\in I}, (E'_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} \mathscr{S}_i$ tetszőlegesek. Nyilvánvaló, hogy

$$\Big(\prod_{i\in I} E_i\Big) \cap \Big(\prod_{i\in I} E'_i\Big) = \prod_{i\in I}(E_i \cap E'_i) \in \mathscr{S},$$

hiszen minden $I \ni i$-re $E_i \cap E'_i \in \mathscr{S}_i$; ezért $\mathscr{S}$-re $(\mathrm{SR_{II}})$ teljesül.

Minden $A \subseteq I$ nem üres halmazra és $I \ni i$-re legyen

$$H_{A,i} := \begin{cases} E'_i \setminus E_i & \text{, ha } i \in A, \\ E'_i \cap E_i & \text{, ha } i \notin A. \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\Big(\prod_{i \in I} E'_i\Big) \setminus \Big(\prod_{i \in I} E_i\Big) = \bigcup_{A \in \mathscr{P}_0(I)} \Big(\prod_{i \in I} H_{A,i}\Big),$$

ahol $\mathscr{P}_0(I)$ az I nem üres részhalmazainak halmaza.

Legyen $(x_i)_{i \in I} \in \Big(\prod_{i \in I} E'_i\Big) \setminus \Big(\prod_{i \in I} E_i\Big)$. Ekkor minden $i \in I$ esetén $x_i \in E'_i$ és van olyan $i \in I$, hogy $x_i \notin E_i$. Legyen $A := \{i \in I | x_i \notin E_i\}$. Ekkor $A \in \mathscr{P}_0(I)$ és $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} H_{A,i}$, mert $i \in A$ esetén $x_i \in E'_i$ és $x_i \notin E_i$, vagyis $x_i \in E'_i \setminus E_i = H_{A,i}$, továbbá $i \in I \setminus A$ esetén $x_i \in E'_i$ és $x_i \in E_i$, vagyis $x_i \in E'_i \cap E_i = H_{A,i}$. Ez azt jelenti, hogy

$$\Big(\prod_{i \in I} E'_i\Big) \setminus \Big(\prod_{i \in I} E_i\Big) \subseteq \bigcup_{A \in \mathscr{P}_0(I)} \Big(\prod_{i \in I} H_{A,i}\Big).$$

Megfordítva, legyen $(x_i)_{i \in I} \in \bigcup_{A \in \mathscr{P}_0(I)} \Big(\prod_{i \in I} H_{A,i}\Big)$. Vegyünk olyan $A \in \mathscr{P}_0(I)$ halmazt, amelyre $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} H_{A,i}$. Ha $i \in A$, akkor $x_i \in H_{A,i} = E'_i \setminus E_i$, vagyis $x_i \in E'_i$ és $x_i \notin E_i$. Ha $i \in I \setminus A$, akkor $x_i \in H_{A,i} = E'_i \cap E_i$. Tehát minden $i \in I$ esetén $x_i \in E'_i$ és $A \neq \emptyset$ miatt van olyan $i \in I$, hogy $x_i \notin E_i$ (ti. minden $i \in A$ elem ilyen), ezért $(x_i)_{i \in I} \in \Big(\prod_{i \in I} E'_i\Big) \setminus \Big(\prod_{i \in I} E_i\Big)$, Ez azt jelenti, hogy

$$\bigcup_{A \in \mathscr{P}_0(I)} \Big(\prod_{i \in I} H_{A,i}\Big) \subseteq \Big(\prod_{i \in I} E'_i\Big) \setminus \Big(\prod_{i \in I} E_i\Big).$$

Most igazoljuk, hogy a $\Big(\prod_{i \in I} H_{A,i}\Big)_{A \in \mathscr{P}_0(I)}$ halmazrendszer diszjunkt.

Valóban, legyenek $A, A' \subseteq I$ nem üres halmazok és $A \neq A'$. Ekkor $j \in A \setminus A'$ esetén

$$H_{A,j} \cap H_{A',j} = (E'_j \setminus E_j) \cap (E'_j \cap E_j) = \emptyset,$$

ezért $\prod_{i \in I} (H_{A,i} \cap H_{A',i}) = \emptyset$, míg $j \in A' \setminus A$ esetén

$$H_{A,j} \cap H_{A',j} = (E'_j \cap E_j) \cap (E'_j \setminus E_j) = \emptyset,$$

ezért $\prod_{i \in I} (H_{A,i} \cap H_{A',i}) = \emptyset$. Mivel

$$\Big(\prod_{i \in I} H_{A,i}\Big) \cap \Big(\prod_{i \in I} H_{A',i}\Big) = \prod_{i \in I} (H_{A,i} \cap H_{A',i}),$$

ez azt jelenti, hogy $\Big(\prod_{i \in I} H_{A,i}\Big) \cap \Big(\prod_{i \in I} H_{A',i}\Big) = \emptyset$.

Az $\mathscr{S}_i$ félgyűrűre vonatkozó ($\mathrm{SR_{II}}$) és ($\mathrm{SR_{III}}$) feltételek alapján minden $i \in I$ indexhez és $A \subseteq I$ nem üres halmazhoz létezik olyan $(H_{A,i,j})_{j \in J_{A,i}}$ véges diszjunkt rendszer $\mathscr{S}_i$-ben, amelyre $H_{A,i} = \bigcup\limits_{j \in J_{A,i}} H_{A,i,j}$ teljesül. Ha tehát minden $A \subseteq I$ nem üres halmazra $J_A := \prod\limits_{i \in I} J_{A,i}$, valamint $K := \bigcup\limits_{A \in \mathscr{P}_0(I)} (\{A\} \times J_A)$, akkor a szorzásra és unióra vonatkozó disztributivitás-formulák alapján

$$\Big(\prod_{i \in I} E'_i\Big) \setminus \Big(\prod_{i \in I} E_i\Big) = \bigcup_{A \in \mathscr{P}_0(I)} \Big(\prod_{i \in I}\Big(\bigcup_{j \in J_{A,i}} H_{A,i,j}\Big)\Big) =$$
$$= \bigcup_{A \in \mathscr{P}_0(I)} \Big(\bigcup_{f \in J_A} \Big(\prod_{i \in I} H_{A,i,f(i)}\Big)\Big) = \bigcup_{(A,f) \in K} \Big(\prod_{i \in I} H_{A,i,f(i)}\Big),$$

adódik.

A bizonyítás utolsó lépéseként igazoluk, hogy a $\Big(\prod\limits_{i \in I} H_{A,i,f(i)}\Big)_{(A,f) \in K}$ halmazrendszer (amelynek minden tagja eleme $\mathscr{S}$-nek) diszjunkt. Ehhez legyenek $(A, f), (A', f') \in K$ olyanok, hogy

$$\Big(\prod_{i \in I} H_{A,i,f(i)}\Big) \cap \Big(\prod_{i \in I} H_{A',i,f'(i)}\Big) \neq \emptyset.$$

Ekkor az ismert

$$\Big(\prod_{i \in I} H_{A,i,f(i)}\Big) \cap \Big(\prod_{i \in I} H_{A',i,f'(i)}\Big) = \prod_{i \in I} \Big(H_{A,i,f(i)} \cap H_{A',i,f'(i)}\Big)$$

egyenlőség alapján minden $i \in I$ esetén $H_{A,i,f(i)} \cap H_{A',i,f'(i)} \neq \emptyset$. De minden $i \in I$ indexre $H_{A,i,f(i)} \subseteq H_{A,i}$ és $H_{A',i,f'(i)} \subseteq H_{A',i}$, ezért minden $i \in I$ esetén $H_{A,i} \cap H_{A',i} \neq \emptyset$, következésképpen $\prod\limits_{i \in I} \Big(H_{A,i} \cap H_{A',i}\Big) \neq \emptyset$. De

$$\prod_{i \in I} \Big(H_{A,i} \cap H_{A',i}\Big) = \Big(\prod_{i \in I} H_{A,i}\Big) \cap \Big(\prod_{i \in I} H_{A',i}\Big),$$

így a $\Big(\prod\limits_{i \in I} H_{B,i}\Big)_{B \in \mathscr{P}_0(I)}$ halmazrendszer diszjunktságából következik, hogy $A = A'$. Ekkor minden $i \in I$ esetén $f(i), f'(i) \in J_{A,i}$ olyan elemek, hogy $H_{A,i,f(i)} \cap H_{A,i,f'(i)} \neq \emptyset$, ezért a $(H_{A,i,j})_{j \in J_{A,i}}$ halmazrendszer diszjunktságából következik, hogy $f(i) = f'(i)$. Ez azt jelenti, hogy $f = f'$ is teljesül.

Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{S}$-re ($\mathrm{SR_{III}}$) is teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állításban értelmezett $\mathscr{S}$ halmaz általában még akkor sem halmazgyűrű, ha minden $i \in I$ esetén $\mathscr{S}_i$ halmazgyűrű. Nyilvánvaló, hogy ha minden $i \in I$ esetén $\mathscr{S}_i$ félgyűrű a T_i halmaz felett, akkor az előző állításban értelmezett $\mathscr{S}$ halmaz a $\prod\limits_{i \in I} T_i$ szorzathalmaz felett félgyűrű.

1.1.7. Definíció. *Legyen $(\mathscr{S}_i)_{i \in I}$ félgyűrűk nem üres, véges rendszere. Ekkor a*

$$\mathscr{S} := \Big\{ \prod_{i \in I} E_i \Big| (E_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathscr{S}_i \Big\}$$

félgyűrű által generált halmazgyűrűt $\bigotimes\limits_{i\in I}\mathscr{S}_i$ *jelöli, és ezt az* $(\mathscr{S}_i)_{i\in I}$ *félgyűrű rendszer* **tenzorszorzatának** *nevezzük. Ha* $n \in \mathbb{N}^*$, *akkor* $\mathscr{R}_{\mathbb{R}^n}$ *jelöli azt a* $\bigotimes\limits_{i\in n}\mathscr{S}_i$ *halmazgyűrűt* $\mathbb{R}^n$ *felett, amelyre minden* $i \in n$ *esetén* $\mathscr{S}_i := \mathscr{S}_{\mathbb{R}}$*; ezt a* $\mathscr{R}_{\mathbb{R}^n}$ *halmazgyűrűt a* **standard halmazgyűrűnek** *nevezzük* $\mathbb{R}^n$ *felett.*

Z

Vigyázzunk arra, hogy ha $(\mathscr{S}_i)_{i\in I}$ félgyűrűk rendszere és $I = \emptyset$, akkor

$$\mathscr{S} := \left\{ \prod_{i\in I} E_i \middle| (E_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{S}_i \right\} = \{\{\emptyset\}\},$$

tehát $\emptyset \notin \mathscr{S}$, vagyis $\mathscr{S}$-re $(\mathrm{SR_I})$ nem teljesül, így $\mathscr{S}$ nem félgyűrű. Ezért a félgyűrűk tenzorszorzatával kapcsolatos meggondolásokban mindig feltesszük, hogy *nem üres*, véges félgyűrű-rendszerről van szó. Ehhez a konvencióhoz tartjuk magunkat akkor is, ha ezt nem mondjuk ki.

1.2. Additív halmazfüggvények

1.2.1. Definíció. *Legyen* $\mathscr{S}$ *félgyűrű és* F *vektortér (tetszőleges test felett). Egy* $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ *függvényt* **additívnak** *mondunk, ha minden* $(E_i)_{i\in I}$ *véges, diszjunkt* $\mathscr{S}$*-beli rendszerre,* $\bigcup\limits_{i\in I} E_i \in \mathscr{S}$ *esetén* $\mathbf{m}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} E_i\Big) = \sum\limits_{i\in I}\mathbf{m}(E_i)$ *teljesül.*

Megjegyezzük, hogy a félgyűrűkön értelmezett függvényeket *halmazfüggvényeknek* is szokták nevezni, és használják az *additív halmazfüggvény* kifejezést.

Könnyen látható, hogy ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, F vektortér, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény, akkor

a) $\mathbf{m}(\emptyset) = 0$, mert az $\mathbf{m}$ additivitása folytán $\mathbf{m}(\emptyset) = \mathbf{m}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathbf{m}(\emptyset) + \mathbf{m}(\emptyset)$;

b) minden $E, E' \in \mathscr{S}$ esetén, ha $E \subseteq E'$ és $E' \setminus E \in \mathscr{S}$, akkor teljesül a

$$\mathbf{m}(E' \setminus E) = \mathbf{m}(E') - \mathbf{m}(E)$$

szubtraktivitás-formula, mert az E és $E' \setminus E$ halmazok $\mathscr{S}$-ben vannak, diszjunktak, és $E' = E \cup (E' \setminus E)$, így az $\mathbf{m}$ additivitása miatt $\mathbf{m}(E') = \mathbf{m}(E) + \mathbf{m}(E' \setminus E)$;

1.2.2. Állítás. *Legyen* $\mathscr{S}$ *félgyűrű,* F *vektortér, és* $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ *additív halmazfüggvény. Minden* $E, E' \in \mathscr{S}$ *esetén, ha* $E \cup E' \in \mathscr{S}$*, akkor*

$$\mathbf{m}(E \cup E') + \mathbf{m}(E \cap E') = \mathbf{m}(E) + \mathbf{m}(E').$$

Bizonyítás. Mivel $E \cap E' \in \mathscr{S}$ és $E \cap E' \subseteq E$, valamint $E \cap E' \subseteq E'$, így léteznek olyan $(A_i)_{i\in I}$ és $(B_j)_{j\in J}$ véges, diszjunkt rendszerek $\mathscr{S}$-ben, hogy $E \setminus (E \cap E') = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ és $E' \setminus (E \cap E') = \bigcup\limits_{j\in J} B_i$. Legyen

$$K := \{(0, i) | i \in I\} \cup \{(1, j) | j \in J\} \cup \{(2, 0)\},$$

és minden $k \in K$ esetén értelmezzük a H_k halmazt a következőképpen

$$H_k := \begin{cases} A_i & \text{, ha } i \in I \text{ és } k = (0,i), \\ B_j & \text{, ha } j \in J \text{ és } k = (1,j), \\ E \cap E' & \text{, ha } k = (2,0). \end{cases}$$

Ekkor $(H_k)_{k\in K}$ olyan véges, diszjunkt, $\mathscr{S}$-ben haladó rendszer, amelyre

$$\bigcup_{k\in K} H_k = \Big(\bigcup_{i\in I} H_{(0,i)}\Big) \cup \Big(\bigcup_{j\in J} H_{(1,j)}\Big) \cup H_{(2,0)} =$$
$$= (E \setminus (E \cap E')) \cup (E' \setminus (E \cap E')) \cup (E \cap E') = E \cup E',$$

ezért $\mathbf{m}$ additivitása és az $E \cup E' \in \mathscr{S}$ hipotézis folytán

$$\mathbf{m}(E \cup E') = \sum_{k\in K} \mathbf{m}(H_k) = \Big(\sum_{i\in I} \mathbf{m}(H_{(0,i)})\Big) + \Big(\sum_{j\in J} \mathbf{m}(H_{(1,j)})\Big) + \mathbf{m}(H_{(2,0)}) =$$
$$= \Big(\sum_{i\in I} \mathbf{m}(A_i)\Big) + \Big(\sum_{j\in J} \mathbf{m}(B_j)\Big) + \mathbf{m}(E \cap E'). \tag{$*$}$$

Legyen i_* és j_* olyan halmaz, hogy $i_* \notin I$ és $j_* \notin J$. Vezessük be az $I_* := I \cup \{i_*\}$, valamint $J_* := J \cup \{j_*\}$ halmazokat, és legyen $A_{i_*} := E \cap E'$, valamint $B_{j_*} := E \cap E'$. Ekkor $(A_i)_{i\in I_*}$ és $(B_j)_{j\in J_*}$ olyan véges, diszjunkt rendszerek $\mathscr{S}$-ben, hogy

$$E = (E \setminus (E \cap E')) \cup (E \cap E') = \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cup A_{i_*} = \bigcup_{i\in I_*} A_i$$

és hasonlóan

$$E' = (E' \setminus (E \cap E')) \cup (E \cap E')) = \Big(\bigcup_{j\in J} B_i\Big) \cup B_{j_*} = \bigcup_{j\in J_*} B_i.$$

Ezért $\mathbf{m}$ additivitása és $E, E' \in \mathscr{S}$ folytán

$$\mathbf{m}(E) = \sum_{i\in I_*} \mathbf{m}(A_i) = \Big(\sum_{i\in I} \mathbf{m}(A_i)\Big) + \mathbf{m}(A_{i_*}) = \Big(\sum_{i\in I} \mathbf{m}(A_i)\Big) + \mathbf{m}(E \cap E'),$$

és hasonlóan

$$\mathbf{m}(E') = \sum_{j\in J_*} \mathbf{m}(B_j) = \Big(\sum_{j\in J} \mathbf{m}(B_j)\Big) + \mathbf{m}(B_{j_*}) = \Big(\sum_{j\in J} \mathbf{m}(B_j)\Big) + \mathbf{m}(E \cap E').$$

Ezekből következik, hogy

$$\sum_{i\in I} \mathbf{m}(A_i) = \mathbf{m}(E) - \mathbf{m}(E \cap E'),$$
$$\sum_{j\in J} \mathbf{m}(B_j) = \mathbf{m}(E') - \mathbf{m}(E \cap E'),$$

amiket a $(*)$ egyenlőségbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\mathbf{m}(E \cup E') = \Big(\mathbf{m}(E) - \mathbf{m}(E \cap E')\Big) + \Big(\mathbf{m}(E') - \mathbf{m}(E \cap E')\Big) + \mathbf{m}(E \cap E') =$$
$$= \mathbf{m}(E) + \mathbf{m}(E') - \mathbf{m}(E \cap E'),$$

amiből következik a bizonyítandó egyenlőség. ■

1.2.3. Állítás. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű, F vektortér, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ függvény. Ahhoz, hogy az $\mathbf{m}$ halmazfüggvény additív legyen elégéges, és ha $\mathscr{S}$ halmazgyűrű, akkor szükséges is, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, minden $\mathscr{S}$-ben haladó $(E_i)_{i\in n}$ rendszerre, ha $\bigcup\limits_{i\in n} E_i \in \mathscr{S}$, akkor*

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in n} E_i\Big) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big)\Big) \tag{$*$}$$

teljesül, ahol minden $k \leq n$ természetes számra $\mathscr{M}(k;n)$ a $k \to n$ szigorúan monoton növő függvények halmaza.

Bizonyítás. (*Elégségesség.*) Tegyük fel, hogy a $(*)$ egyenlőség teljesül minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén minden olyan $\mathscr{S}$-ben haladó $(E_i)_{i\in n}$ rendszerre, amelyre $\bigcup\limits_{i\in n} E_i \in \mathscr{S}$. Legyen $(E_i)_{i\in I}$ tetszőleges olyan véges, diszjunkt $\mathscr{S}$-beli rendszer, amelyre $\bigcup\limits_{i\in I} E_i \in \mathscr{S}$. Ha $I = \emptyset$, akkor $\mathbf{m}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} E_i\Big) = 0 = \sum\limits_{i\in I}\mathbf{m}(E_i)$ triviálisan teljesül, tehát feltehető, hogy I nem üres. Legyen $n := \mathrm{Card}(I)$ és rögzítsünk egy $\tau : n \to I$ bijekciót. Ekkor $\bigcup\limits_{k\in n} E_{\tau(k)} = \bigcup\limits_{i\in I} E_i \in \mathscr{S}$, tehát a $(*)$ egyenlőség alkalmazható az $(E_{\tau(k)})_{k\in n}$ halmazrendszerre. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \mathbf{m}\Big(\bigcup_{k\in n} E_{\tau(k)}\Big) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\tau(\sigma(i))}\Big)\Big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathscr{M}(1;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in 1} E_{\tau(\sigma(i))}\Big) + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\tau(\sigma(i))}\Big)\Big) = \sum_{i\in I}\mathbf{m}(E_i),$$

ahol az utolsó egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy

$$\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(1;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in 1} E_{\tau(\sigma(i))}\Big) = \sum_{\sigma\in\mathscr{M}(1;n)} \mathbf{m}\Big(E_{\tau(\sigma(0))}\Big) = \sum_{i\in I}\mathbf{m}(E_i),$$

hiszen az $\mathscr{M}(1;n) \to I;\ \sigma \mapsto \tau(\sigma(0))$ leképezés nyilvánvalóan bijekció, továbbá $2 \leq k \leq n$ esetén léteznek olyan $i', i'' \in k$, hogy $i' \neq i''$, és akkor minden $\sigma \in \mathscr{M}(k;n)$ esetén $E_{\tau(\sigma(i'))} \cap E_{\tau(\sigma(i''))} = \emptyset$, következésképpen $\bigcap\limits_{i\in k} E_{\tau(\sigma(i))} = \emptyset$, így

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\tau(\sigma(i))}\Big)\Big) = 0.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\mathbf{m}$ additív halmazfüggvény.

(*Szükségesség.*) Tegyük fel, hogy $\mathbf{m}$ additív halmazfüggvény. A szóbanfordó egyenlőséget n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ez az egyenlőség $n = 1$ esetén triviális, és $n = 2$ esetén minden $E_0, E_1 \in \mathscr{S}$ halmazra, ha $E_0 \cup E_1 \in \mathscr{S}$, akkor

$$\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;2)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big)\Big) = \sum_{\sigma\in\mathscr{M}(1;2)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in 1} E_{\sigma(i)}\Big) - \sum_{\sigma\in\mathscr{M}(2;2)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in 2} E_{\sigma(i)}\Big) =$$

$$= \mathbf{m}(E_0) + \mathbf{m}(E_1) - \mathbf{m}(E_0 \cap E_1) = \mathbf{m}(E_0 \cup E_1),$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk az előző állításban igazolt formulát.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^*$ olyan szám, hogy a $(*)$ egyenlőség teljesül minden olyan $\mathscr{S}$-ben haladó $(E_i)_{i\in n}$ rendszerre, amelyre $\bigcup\limits_{i\in n} E_i \in \mathscr{S}$. Vegyünk egy tetszőleges $\mathscr{S}$-ben haladó $(E_i)_{i\in n+1}$ rendszert. Ekkor

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in n+1} E_i\Big) = \mathbf{m}\Big(\Big(\bigcup_{i\in n} E_i\Big) \cup E_n\Big) \overset{(1)}{=} \mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in n} E_i\Big) + \mathbf{m}(E_n) - \mathbf{m}\Big(\Big(\bigcup_{i\in n} E_i\Big) \cap E_n\Big) \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big)\Big) + \mathbf{m}(E_n) - \mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in n}(E_i \cap E_n)\Big) \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big)\Big) + \mathbf{m}(E_n) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k}(E_{\sigma(i)} \cap E_n)\Big)\Big),$$

ahol

– az $\overset{(1)}{=}$ egyenlőségnél az előző állítást alkalmaztuk az $E := \bigcup\limits_{i\in n} E_i$ és $E' := E_n$ választással, kihasználva azt, hogy a hipotézis szerint $\mathscr{S}$ halmazgyűrű, így $E \in \mathscr{S}$ teljesül;

– a $\overset{(2)}{=}$ egyenlőségnél az indukciós hipotézist alkalmaztuk az $\mathscr{S}$-ben haladó $(E_i)_{i\in n}$ rendszerre, kihasználva azt, hogy a hipotézis szerint $\mathscr{S}$ halmazgyűrű, így $\bigcup\limits_{i\in n} E_i \in \mathscr{S}$ teljesül;

– a $\overset{(3)}{=}$ egyenlőségnél szintén az indukciós hipotézist alkalmaztuk az $\mathscr{S}$-ben haladó $(E_i \cap E_n)_{i\in n}$ rendszerre, kihasználva azt, hogy a hipotézis szerint $\mathscr{S}$ halmazgyűrű, így $\bigcup\limits_{i\in n}(E_i \cap E_n) \in \mathscr{S}$ teljesül.

Nyilvánvaló, hogy minden $1 \le k \le n$ természetes számra

$$\mathscr{M}(k;n) = \{\sigma \in \mathscr{M}(k;n+1) | n \notin \mathrm{Im}(\sigma)\},$$

továbbá világos, hogy a

$$\{\sigma' \in \mathscr{M}(k+1;n+1) | \sigma'(k) = n\} \to \mathscr{M}(k;n); \quad \sigma' \mapsto \sigma'|_k$$

leképezés bijekció. Ezekből kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{M}(k;n+1)\\ n\notin\mathrm{Im}(\sigma)}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big)\Big),$$

valamint

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;n)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k}(E_{\sigma(i)} \cap E_n)\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(k+1;n+1)\\ \sigma'(k)=n}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k+1} E_{\sigma'(i)}\Big)\Big) =$$

$$= \sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j}\Big(\sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(j;n+1)\\ \sigma'(j-1)=n}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in j} E_{\sigma'(i)}\Big)\Big) = -\sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(j;n+1)\\ \sigma'(j-1)=n}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in j} E_{\sigma'(i)}\Big)\Big).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in n+1} E_i\Big) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{M}(k;n+1)\\ n\notin\mathrm{Im}(\sigma)}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma'(i)}\Big)\Big)+$$

$$+\mathbf{m}(E_n) + \sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(j;n+1)\\ \sigma'(j-1)=n}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in j} E_{\sigma'(i)}\Big)\Big).$$

Továbbá, nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{m}(E_n) = \sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(1;n+1)\\ \sigma'(0)=n}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in 1} E_{\sigma'(i)}\Big),$$

valamint minden $2\le j\le n+1$ természetes számra

$$\{\sigma'\in\mathscr{M}(j;n+1)|\sigma'(j-1)=n\} = \{\sigma'\in\mathscr{M}(j;n+1)|n\in\mathrm{Im}(\sigma')\},$$

következésképpen

$$\sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(j;n+1)\\ \sigma'(j-1)=n}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in j} E_{\sigma'(i)}\Big)\Big) = \sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(j;n+1)\\ n\in\mathrm{Im}(\sigma')}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in j} E_{\sigma'(i)}\Big)\Big),$$

vagyis

$$\mathbf{m}(E_n)+\sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(j;n+1)\\ \sigma'(j-1)=n}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in j} E_{\sigma'(i)}\Big)\Big) = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(j;n+1)\\ n\in\mathrm{Im}(\sigma')}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in j} E_{\sigma'(i)}\Big)\Big).$$

Most figyelembe vesszük, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{M}(k;n+1)\\ n\notin\mathrm{Im}(\sigma)}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{M}(k;n+1)\\ n\notin\mathrm{Im}(\sigma)}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big)\Big),$$

hiszen $k=n+1$ esetén $\mathscr{M}(k;n+1)$ egyetlen eleme id_{n+1}, és természetesen $n\in\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{n+1})$, így a $\{\sigma\in\mathscr{M}(n+1;n+1)|n\notin\mathrm{Im}(\sigma)\}$ indexhalmaz *üres*, tehát

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{M}(n+1;n+1)\\ n\notin\mathrm{Im}(\sigma)}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in n+1} E_{\sigma(i)}\Big) = 0.$$

Ezért írható, hogy

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in n+1} E_i\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{M}(k;n+1)\\ n\notin\mathrm{Im}(\sigma)}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big)\Big) + \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}\Big(\sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(j;n+1)\\ n\in\mathrm{Im}(\sigma')}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in j} E_{\sigma'(i)}\Big)\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{M}(k;n+1)\\ n\notin\mathrm{Im}(\sigma)}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big) + \sum_{\substack{\sigma'\in\mathscr{M}(k;n+1)\\ n\in\mathrm{Im}(\sigma')}} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma'(i)}\Big)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{M}(k;n+1)} \mathbf{m}\Big(\bigcap_{i\in k} E_{\sigma(i)}\Big)\Big),$$

vagyis a $(*)$ formula teljesül n helyett $n+1$-re is. ■

Példák (additív halmazfüggvényekre).

1) Legyen T halmaz, és $\mathscr{R}$ a T véges részhalmazainak halmaza, ami halmazgyűrű T felett. Ekkor az $\mathscr{R} \to \mathbb{R};\ E \mapsto \mathrm{Card}(E)$ leképezés additív halmazfüggvény (**ENS** 5.1.4.). Ezt az additív halmazfüggvény *számláló-mértéknek* nevezzük T felett, és a μ_T szimbólummal jelöljük.

2) Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ rögzített pont, és jelölje $\delta_{\mathfrak{a}}$ az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, ha } t > \mathfrak{a}, \\ 0 & \text{, ha } t \leq \mathfrak{a} \end{cases}$$

függvény által meghatározott Lebesgue-Stieltjes-mértéket. Hasonlóan, jelölje $\delta_{\mathfrak{a},+}$ az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, ha } t \geq \mathfrak{a}, \\ 0 & \text{, ha } t < \mathfrak{a} \end{cases}$$

függvény által meghatározott Lebesgue-Stieltjes-mértéket. Ekkor $\delta_{\mathfrak{a}}$ és $\delta_{\mathfrak{a},+}$ mindketten additív halmazfüggvények az $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ standard félgyűrű felett. Könnyen látható, hogy minden $E \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ esetén

$$\delta_{\mathfrak{a}}(E) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } \mathfrak{a} \in E, \\ 0 & \text{, ha } \mathfrak{a} \notin E \end{cases}$$

teljesül.

3) Az előző példában értelmezett $\delta_{\mathfrak{a}}$ mérték fogalma a következőképpen általánosítható. Legyen T halmaz, $\mathfrak{a} \in T$ rögzített pont, és $\mathscr{S}$ tetszőleges félgyűrű T felett. Ekkor az

$$\mathscr{S} \to \mathbb{R}; \quad E \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, ha } \mathfrak{a} \in E, \\ 0 & \text{, ha } \mathfrak{a} \notin E \end{cases}$$

leképezés additív halmazfüggvény. Ezt az additív halmazfüggvényt az $\mathfrak{a}$ pontba koncentrált, $\mathscr{S}$-en értelmezett *Dirac-mértéknek* nevezzük, és a $\delta_{\mathscr{S},\mathfrak{a}}$ szimbólummal jelöljük.

4) (*Diszkrét additív halmazfüggvények.*) Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, F vektortér a K test felett, és $\alpha : T \to F$ olyan függvény, hogy minden $E \in \mathscr{S}$ esetén az $E \cap \{t \in T | \alpha(t) \neq 0\}$ halmaz véges. Értelmezzük a

$$\mathbf{m}_\alpha : \mathscr{S} \to F; \quad E \mapsto \sum_{t \in E} \alpha(t)$$

leképezést. Ekkor $\mathbf{m}_\alpha$ additív halmazfüggvény. Az $\mathbf{m}_\alpha$ alakú halmazfüggvényeket *diszkréteknek* nevezzük.

A matematikai analízis számára legfontosabb additív halmazfüggvényről szól a következő állítás.

1.2.4. Állítás. *Legyen F vektortér, és $L : \mathbb{R} \to F$ tetszőleges függvény. Jelölje $\mathbf{m}_L$ azt az $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} \to F$ halmazfüggvényt, amely minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ számokra eleget tesz az $\mathbf{m}_L([a,b[) = L(b) - L(a)$ egyenlőségnek. Ekkor $\mathbf{m}_L : \mathscr{S}_{\mathbb{R}} \to F$ additív halmazfüggvény.*

Bizonyítás. Azt kell igazolni, hogy ha $(a_i)_{i\in I}$ és $(b_i)_{i\in I}$ olyan véges rendszerek $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $i \in I$ esetén $a_i \leq b_i$, továbbá az $\mathscr{S}_\mathbb{R}$-ben haladó $([a_i, b_i[)_{i\in I}$ halmazrendszer diszjunkt, akkor $\bigcup_{i\in I}[a_i, b_i[\in \mathscr{S}_\mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{m}_L\Big(\bigcup_{i\in I}[a_i, b_i[\Big) = \sum_{i\in I}\mathbf{m}_L([a_i, b_i[),$$

tehát ha $a, b \in \mathbb{R}$ olyan számok, hogy $[a, b[= \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i[$, akkor

$$L(b) - L(a) = \sum_{i\in I}(L(b_i) - L(a_i)).$$

Ezt az állítást az I véges indexhalmaz számossága szerint teljes indukcióval bizonyítjuk. Ehhez jelölje $\mathfrak{A}(n)$ a következő állítást:

"$n \in \mathbb{N}$ és minden n számosságú I véges halmazra, valamint minden $(a_i)_{i\in I}$ és $(b_i)_{i\in I}$ valós számokból álló rendszerre, abból, hogy minden $i \in I$ esetén $a_i \leq b_i$, továbbá az $\mathscr{S}_\mathbb{R}$-ben haladó $([a_i, b_i[)_{i\in I}$ halmazrendszer diszjunkt, és $a, b \in \mathbb{R}$ olyan számok, hogy $[a, b[= \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i[$, következik, hogy $L(b) - L(a) = \sum_{i\in I}(L(b_i) - L(a_i))$."

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $(\forall n)\mathfrak{A}(n)$. Ha $n = 0$, és az I halmaz n számosságú, akkor $I = \emptyset$, ezért ha $(a_i)_{i\in I}$ és $(b_i)_{i\in I}$ valós számokból álló rendszerek, akkor minden $i \in I$ esetén $a_i \leq b_i$ automatikusan teljesül, továbbá az $([a_i, b_i[)_{i\in I}$ halmazrendszer is automatikusan diszjunkt, és ha $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $[a, b[= \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i[$, akkor $a = b$, mert a jobb oldalon az $\emptyset$ halmaz áll, így az $L(b) - L(a) = \sum_{i\in I}(L(b_i) - L(a_i))$ egyenlőség igaz, hiszen az egyenlőség bal oldalán 0 áll és a jobb oldal is 0, a **ALG** 2.5.3. definíció alapján. Tehát az $\mathfrak{A}(0)$ formula tétel.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\mathfrak{A}(n)$ tétel, és legyen az I véges halmaz $n + 1$ számosságú. Vegyünk olyan $(a_i)_{i\in I}$ és $(b_i)_{i\in I}$ valós számokból álló rendszereket, amelyekre minden $i \in I$ esetén $a_i \leq b_i$, továbbá az $\mathscr{S}_\mathbb{R}$-ben haladó $([a_i, b_i[)_{i\in I}$ halmazrendszer diszjunkt, és tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$ olyan számok, amelyekre $[a, b[= \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i[$. Feltehető, hogy $a < b$ különben a bizonyítandó egyenlőség triviálisan teljesül, hiszen akkor $[a, b[= \emptyset$ és minden $i \in I$ esetén $[a_i, b_i[\subseteq [a, b[$ miatt $[a_i, b_i[= \emptyset$, vagyis $a_i = b_i$. Mivel $a \in \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i[$, így létezik olyan $i_* \in I$, hogy $a \in [a_{i_*}, b_{i_*}[$, és az i_* index ezzel a feltétellel egyértelműen van meghatározva, mert az $([a_i, b_i[)_{i\in I}$ halmazrendszer diszjunkt. Nyilvánvaló, hogy $a_{i_*} = a$, különben $a_{i_*} < a$, ami lehetetlen, mert a az $[a, b[$ intervallum legkisebb eleme és $a_{i_*} \in [a, b[$. Ezért

$$[a, b_{i_*}[\cup[b_{i_*}, b[= [a, b[= \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i[= [a_{i_*}, b_{i_*}[\cup \bigcup_{i\in I\setminus\{i_*\}}[a_i, b_i[= [a, b_{i_*}[\cup \bigcup_{i\in I\setminus\{i_*\}}[a_i, b_i[.$$

Ennek az egyenlőségnek mindkét oldalából kivonva az $[a, b_{i_*}[$ halmazt kapjuk, hogy

$$\bigcup_{i\in I\setminus\{i_*\}}[a_i, b_i[= [b_{i_*}, b[\in \mathscr{S}_\mathbb{R},$$

és természetesen $\mathrm{Card}(I \setminus \{i_*\}) = n$. Ezért az $\mathfrak{A}(n)$ indukciós hipotézist alkalmazva az $(a_i)_{i\in I\setminus\{i_*\}}$ és $(b_i)_{i\in I\setminus\{i_*\}}$ valós számokból álló rendszerekre kapjuk, hogy $L(b) - L(b_{i_*}) = \bigcup\limits_{i\in I\setminus\{i_*\}} (L(b_i) - L(a_i))$. Ebből következik, hogy

$$\sum_{i\in I}(L(b_i) - L(a_i)) = (L(b_{i_*}) - L(a_{i_*})) + \sum_{i\in I\setminus\{i_*\}} (L(b_i) - L(a_i)) =$$
$$= (L(b_{i_*}) - L(a)) + (L(b) - L(b_{i_*}) = L(b) - L(a),$$

amit bizonyítani kellett. ■

1.2.5. Állítás. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű, $\mathscr{R}$ az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrű, F vektortér, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény. Ekkor létezik egyetlen olyan $\mathbf{n} : \mathscr{R} \to F$ additív halmazfüggvény, amely $\mathbf{m}$-nek kiterjesztése.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{n}$ és $\mathbf{n}'$ mindketten olyan $\mathscr{R} \to F$ additív halmazfüggvények, amelyek $\mathbf{m}$-nek kiterjesztései, és $E \in \mathscr{R}$, akkor létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, hogy $E = \bigcup\limits_{i\in I} E_i$; ekkor az $\mathbf{n}$ és $\mathbf{n}'$ additivitása miatt

$$\mathbf{n}(E) = \mathbf{n}\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \sum_{i\in I}\mathbf{n}(E_i) = \sum_{i\in I}\mathbf{m}(E_i) = \sum_{i\in I}\mathbf{n}'(E_i) = \mathbf{n}'\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \mathbf{n}'(E),$$

vagyis $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$. Tehát legfeljebb egy olyan $\mathscr{R} \to F$ additív halmazfüggvény létezhet, amely $\mathbf{m}$-nek kiterjesztése.

Legyen $E \in \mathscr{R}$, és vegyünk olyan $(E_i)_{i\in I}$ és $(E'_i)_{j\in J}$ véges diszjunkt rendszereket $\mathscr{S}$-ben, amelyekre $E = \bigcup\limits_{i\in I} E_i$, valamint $E = \bigcup\limits_{j\in J} E'_j$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor fennáll a

$$\sum_{i\in I}\mathbf{m}(E_i) = \sum_{j\in J}\mathbf{m}(E'_j)$$

egyenlőség. Valóban, $i \in I$ esetén

$$E_i = E_i \cap E = E_i \cap \Big(\bigcup_{j\in J} E'_j\Big) = \bigcup_{j\in J}(E_i \cap E'_j),$$

és természetesen $(E_i \cap E'_j)_{j\in J}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, így az $\mathbf{m}$ additivitása folytán

$$\mathbf{m}(E_i) = \sum_{j\in J}\mathbf{m}(E_i \cap E'_j)$$

teljesül. Ugyanakkor $j \in J$ esetén

$$E'_j = E \cap E'_j = \Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) \cap E'_j = \bigcup_{i\in I}(E_i \cap E'_j),$$

és természetesen $(E_i \cap E'_j)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, így az $\mathbf{m}$ additivitása folytán

$$\mathbf{m}(E'_j) = \sum_{i\in I}\mathbf{m}(E_i \cap E'_j)$$

teljesül. Ebből következik, hogy

$$\sum_{i\in I}\mathbf{m}(E_i)=\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J}\mathbf{m}(E_i\cap E'_j)\Big)=\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I}\mathbf{m}(E_i\cap E'_j)\Big)=\sum_{j\in J}\mathbf{m}(E'_j).$$

Ez azt jelenti, hogy jól értelmezett az az $\mathbf{n}:\mathscr{R}\to F$ függvény, amely minden $E\in\mathscr{R}$ halmazhoz a $\sum\limits_{i\in I}\mathbf{m}(E_i)$ vektort rendeli, ahol $(E_i)_{i\in I}$ tetszőleges olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $E=\bigcup\limits_{i\in I}E_i$. Ez az $\mathbf{n}$ halmazfüggvény az $\mathbf{m}$-nek nyilvánvalóan kiterjesztése.
Az $\mathbf{n}$ additivitásának bizonyításához legyen $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben (és most nem kell feltenni, hogy $\bigcup\limits_{i\in I}E_i\in\mathscr{R}$, mert ez automatikusan igaz, hiszen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű). Minden $i\in I$ esetén legyen $(E_{i,j})_{j\in J_i}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, hogy $E_i=\bigcup\limits_{j\in J_i}E_{i,j}$. Az $\mathbf{n}$ definíciója szerint minden $I\ni i$-re

$$\mathbf{n}(E_i)=\sum_{j\in J_i}\mathbf{m}(E_{i,j}).$$

Tehát ha $K:=\bigcup\limits_{i\in I}(\{i\}\times J_i)$, akkor az $(E_{i,j})_{(i,j)\in K}$ rendszer diszjunkt, véges, minden tagja eleme $\mathscr{S}$-nek, és

$$\bigcup_{i\in I}E_i=\bigcup_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J_i}E_{i,j}\Big)=\bigcup_{(i,j)\in K}E_{i,j},$$

így $\mathbf{n}$ definíciója szerint

$$\mathbf{n}\Big(\bigcup_{i\in I}E_i\Big)=\sum_{(i,j)\in K}\mathbf{m}(E_{i,j})=\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J_i}\mathbf{m}(E_{i,j})\Big)=\sum_{i\in I}\mathbf{n}(E_i)$$

teljesül, vagyis $\mathbf{n}$ additív. ■

Tehát, ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, $\mathscr{R}$ az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrű, és F vektortér, akkor az $\mathscr{S}\to F$ additív halmazfüggvények halmaza és az $\mathscr{R}\to F$ additív halmazfüggvények halmaza között létezik egy kitüntetett *bijekció*. Ez az a leképezés, amely minden $\mathbf{m}:\mathscr{S}\to F$ additív halmazfüggvényhez azt az egyetlen $\mathbf{n}:\mathscr{R}\to F$ additív halmazfüggvényt rendeli, amelyre $\mathbf{m}=\mathbf{n}|_{\mathscr{S}}$. E leképezés inverze az a függvény, amely minden $\mathbf{n}:\mathscr{R}\to F$ additív halmazfüggvényhez az $\mathbf{n}|_{\mathscr{S}}:\mathscr{S}\to F$ additív halmazfüggvényt rendeli.

1.2.6. Definíció. *Legyen F vektortér, és $L:\mathbb{R}\to F$ tetszőleges függvény. Ekkor $\mathbf{m}_L$ jelöli azt az $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}\to F$ halmazfüggvényt, amely minden $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$ számokra eleget tesz az $\mathbf{m}_L([a,b[)=L(b)-L(a)$ egyenlőségnek. Az $\mathbf{m}_L:\mathscr{S}_{\mathbb{R}}\to F$ additív halmazfüggvény $\mathscr{R}_{\mathbb{R}}$-re vett additív kiterjesztését az L függvény által meghatározott* **egydimenziós Lebesgue–Stieltjes-mértéknek** *nevezzük. Az $\mathbf{m}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}:\mathscr{S}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ additív halmazfüggvény $\mathscr{R}_{\mathbb{R}}$-re vett additív kiterjesztését* **egydimenziós Lebesgue-mértéknek** *nevezzük, és a $\mu_{\mathbb{R}}$ szimbólummal jelöljük.*

Z Vigyázzunk arra, hogy az egydimenziós Lebesgue–Stieltjes-mértékek definíciójában szereplő egyenlőség *nem definíciója* a szóban forgó additív függvénynek, hanem egy *követelmény* az értelmezendő objektumra vonatkozóan.

Tehát az egydimenziós Lebesgue-mérték az $\mathbb{R}$ balról zárt, jobbról nyílt korlátos intervallumainak véges uniójaként előálló halmazok halmazán (vagyis a standard halmazgyűrűn) értelmezett, és olyan, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ esetén fennáll az $\mu_{\mathbb{R}}([a, b[) = b - a$ egyenlőség.

Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű és F vektortér a K test felett. Ekkor az összes $\mathscr{S} \to F$ függvények halmaza (vagyis $\mathscr{F}(\mathscr{S}; F)$) a pontonként értelmezett összeadással és a K-beli elemekkel vett szorzással ellátva *vektortér* a K test felett. Tehát bármely két $\mathbf{m}, \mathbf{m}' : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvényre, és bármely $c \in K$ elemre jól értelmezettek az $\mathbf{m} + \mathbf{m}' : \mathscr{S} \to F$ és $c.\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ leképezések, továbbá az $\mathscr{F}(\mathscr{S}; F)$ függvénytér lineáris műveleteinek definíciója szerint minden $\mathscr{S} \ni E$-re

$$(\mathbf{m} + \mathbf{m}')(E) := \mathbf{m}(E) + \mathbf{m}'(E);$$
$$(c.\mathbf{m})(E) := c.\mathbf{m}(E)$$

teljesül. Ebből könnyen látható, hogy az $\mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvények halmaza *lineáris altere* a $\mathscr{F}(\mathscr{S}; F)$ függvénytérnek. A következő definícióval *rendezést* vezetünk be az $\mathscr{S}$ félgyűrűn értelmezett *valós* additív halmazfüggvények halmazán.

1.2.7. Definíció. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű. Ha $\mu, \nu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ additív halmazfüggvények, akkor az írjuk, hogy $\mu \leq \nu$, ha minden $E \in \mathscr{S}$ esetén $\mu(E) \leq \nu(E)$. A $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ additív halmazfüggvényt* **pozitívnak** *nevezzük, ha minden $E \in \mathscr{S}$ esetén $0 \leq \mu(E)$, vagyis $\mathbf{0} \leq \mu$, ahol $\mathbf{0}$ jelöli az $\mathscr{S} \to \mathbb{R}$ azonosan nulla függvényt (amely természetesen additív halmazfüggvény).*

Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, akkor az $\mathscr{S} \to \mathbb{R}$ additív halmazfüggvények halmazán az imént értelmezett $\leq$ reláció olyan *rendezés*, amely abban az értelemben összhangban áll az $\mathscr{S} \to \mathbb{R}$ additív halmazfüggvények vektortér-struktúrájával, hogy ha $\mu, \nu, \lambda : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ additív halmazfüggvények, és $c \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\mu \leq \nu$ esetén $\mu + \lambda \leq \nu + \lambda$ és $c.\mu \leq c.\nu$ teljesül. Ez azonnal következik a félgyűrűn értelmezett valós additív halmazfüggvények lineáris műveleteinek értelmezéséből, és abból, hogy $\mathbb{R}$ rendezett test, vagyis az $\mathbb{R}$ feletti műveletek és a természetes rendezés között teljesülnek a $(\mathrm{KO_I})$ és $(\mathrm{KO_{II}})$ tulajdonságok (**ALG** 7.1.1.).

Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, $\mathscr{R}$ az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrű, és $\mu, \nu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ additív halmazfüggvények, valamint $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ ezek additív kiterjesztései $\mathscr{R}$-re, akkor a $\mu \leq \nu$ és $\tilde{\mu} \leq \tilde{\nu}$ relációk ekvivalensek, így aztán μ pozitivitása is egyenértékű a $\tilde{\mu}$ pozitivitásával. Ez azonnal következik a félgyűrű által generált halmazgyűrű jellemzési tételéből, a halmazfüggvények additivitásának definíciójából, valamint abból, hogy az $\mathbb{R}$ feletti összeadásra és természetes rendezésre teljesülnek a $(\mathrm{KO_I})$ és $(\mathrm{KO_{II}})$ tulajdonságok (**ALG** 7.1.1.).

Megjegyezzük még, hogy ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, és $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ additív halmazfüggvény, akkor μ pozitivitása ekvivalens azzal, hogy μ a tartalmazás tekintetében *monoton növő*, vagyis minden $E, E' \in \mathscr{S}$ esetén, ha $E \subseteq E'$, akkor $\mu(E) \leq \mu(E')$. Valóban, tegyük fel, hogy $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény, és legyenek $E, E' \in \mathscr{S}$ olyanok, hogy $E \subseteq E'$. Az $(\mathrm{R_{III}})$ alapján vegyünk olyan $(E_i)_{i \in I}$ diszjunkt véges rendszert $\mathscr{S}$-ben, amelyre $E' \setminus E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Legyen ω olyan halmaz, hogy $\omega \notin I$, továbbá értelmezzük az $E_\omega := E$ halmazt. Ekkor $(E_i)_{i \in I \cup \{\omega\}}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre

$E' = E \cup (E' \setminus E) = \bigcup_{i \in I \cup \{\omega\}} E_i$, tehát a μ additivitása és pozitivitása folytán

$$\mu(E) \leq \mu(E) + \sum_{i \in I} \mu(E_i) = \sum_{i \in I \cup \{\omega\}} \mu(E_i) = \mu\Big(\bigcup_{i \in I \cup \{\omega\}} E_i\Big) = \mu(E'),$$

így μ monoton növő. Megfordítva, ha μ monoton növő, akkor $E \in \mathscr{S}$ esetén $\emptyset \subseteq E$ miatt $0 = \mu(\emptyset) \leq \mu(E)$, vagyis μ pozitív.

1.3. Additív halmazfüggvények tenzorszorzata

1.3.1. Lemma. (Felbontási lemma) *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, és $(E_i)_{i \in I}$ tetszőleges véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, akkor létezik olyan $(E'_j)_{j \in J}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre teljesül az $\bigcup_{i \in I} E_i = \bigcup_{j \in J} E'_j$ egyenlőség, és minden $I \ni i$-hez létezik olyan $J_i \subseteq J$ halmaz, hogy $E_i = \bigcup_{j \in J_i} E'_j$.*

Bizonyítás. Először megnutatjuk, hogy ha az állítás igaz *halmazgyűrűkre*, akkor félgyűrűkre is igaz. Valóban, legyen $\mathscr{R}$ a $\mathscr{S}$ félgyűrű által generált halmazgyűrű, és legyen $(E_i)_{i \in I}$ tetszőleges véges rendszer $\mathscr{S}$-ben. Ekkor $(E_i)_{i \in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, így a hipotézis szerint van olyan $(E'_j)_{j \in J}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, amelyre $\bigcup_{i \in I} E_i = \bigcup_{j \in J} E'_j$, és minden $I \ni i$-hez létezik olyan $J_i \subseteq J$ halmaz, hogy $E_i = \bigcup_{j \in J_i} E'_j$. A félgyűrűk által generált halmazgyűrűk jellemzésének ismeretében állíthatjuk, hogy minden $j \in J$ indexhez van olyan $(E''_{j,\alpha})_{\alpha \in A_j}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, hogy $E'_j = \bigcup_{\alpha \in A_j} E''_{j,\alpha}$. Ha tehát $B := \bigcup_{j \in J} (\{j\} \times A_j)$, akkor $(E''_{j,\alpha})_{(j,\alpha) \in B}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $\bigcup_{i \in I} E_i = \bigcup_{(j,\alpha) \in B} E''_{j,\alpha}$, és minden $i \in I$ esetén $E_i = \bigcup_{j \in J_i} \Big(\bigcup_{\alpha \in A_j} E''_{j,\alpha}\Big)$, tehát $\mathrm{B}_i := \bigcup_{j \in J_i} (\{j\} \times A_j)$, akkor $E_i = \bigcup_{(j,\alpha) \in \mathrm{B}_j} E''_{j,\alpha}$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathscr{S}$ félgyűrűre is teljesül az állítás.

Tegyük fel tehát, hogy $\mathscr{S}$ halmazgyűrű, és legyen $(E_i)_{i \in I}$ tetszőleges véges rendszer $\mathscr{S}$-ben. Feltehetjük, hogy I nem üres, különben az állítás nyilvánvalóan igaz. Legyen J az I nem üres részhalmazainak halmaza, és minden $j \in J$ esetén, ha $j \neq I$, akkor

$$E'_j := \Big(\bigcap_{i \in j} E_i\Big) \setminus \bigcap_{i \in I \setminus j} (T \setminus E_i),$$

és $E'_I := \bigcap_{i \in I} E_i$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $(E'_j)_{j \in J}$ olyan diszjunkt rendszer hogy $\bigcup_{i \in I} E_i = \bigcup_{j \in J} E'_j$, és minden $i \in I$ esetén $J_i := \{j \in J | i \in j\}$ olyan részhalmaza J-nek, hogy $E_i = \bigcup_{j \in J_i} E'_j$. ■

1.3.2. Állítás. *Legyen $(\mathscr{S}_i)_{i\in I}$ félgyűrűk véges rendszere. Ha K test, és $(\theta_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $\theta_i : \mathscr{S}_i \to K$ additív halmazfüggvény, akkor egyértelműen létezik olyan $\theta : \bigotimes_{i\in I} \mathscr{S}_i \to K$ additív halmazfüggvény, amelyre minden $(E_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{S}_i$ esetén*

$$\theta\Big(\prod_{i\in I} E_i\Big) = \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \theta_i(E_i)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{S} := \Big\{ \prod_{i\in I} E_i \Big| (E_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{S}_i \Big\}$. A definíció szerint $\bigotimes_{i\in I} \mathscr{S}_i$ egyenlő az $\mathscr{S}$ félgyűrű által generált halmazgyűrűvel. Ebből azonnal következik az adott feltételnek eleget tevő θ additív függvény egyértelműsége.

Az egzisztencia bizonyításához megjegyezzük, hogy minden $E \in \mathscr{S}$ esetén $E = \prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i\langle E\rangle$, és minden $I \ni i$-re $\mathrm{pr}_i\langle E\rangle \in \mathscr{S}_i$, ezért jól értelmezett a

$$\theta' : \mathscr{S} \to K; \quad E \mapsto \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \theta_i(\mathrm{pr}_i\langle E\rangle)$$

halmazfüggvény. Ha ez a leképezés additív volna, akkor egyértelműen ki lehetne terjeszteni a $\bigotimes_{i\in I} \mathscr{S}_i$ halmazgyűrűre egy θ additív halmazfüggvénnyé, és nyilvánvaló, hogy ezt a θ-t szeretnénk előállítani. Tehát azt kell igazolni, hogy a θ' halmazfüggvény *additív.*

Legyen $(H_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $H := \bigcup_{\alpha\in A} H_\alpha \in \mathscr{S}$. A $\theta'(H) = \sum_{\alpha\in A} \theta'(H_\alpha)$ egyenlőség nyilvánvalóan teljesül, ha H üres, ezért feltehető, hogy $H \neq \emptyset$, és minden $A \ni \alpha$-ra $H_\alpha \neq \emptyset$. Ekkor $i \in I$ esetén $\bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle = \mathrm{pr}_i\langle H\rangle \in \mathscr{S}_i$, de a $(\mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$ rendszer nem feltétlenül diszjunkt. Azonban a felbontási lemma alapján minden $i \in I$ esetén az $\mathscr{S}_i$-beli $(\mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$ véges rendszerhez vehetünk olyan nem üres halmazokból álló $(H_{i,j})_{j\in J_i}$ diszjunkt rendszert $\mathscr{S}_i$-ben, amelyre $\bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle = \bigcup_{j\in J_i} H_{i,j}$, és minden $\alpha \in A$ esetén van olyan $J_{i,\alpha} \subseteq J_i$ halmaz, hogy $\mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle = \bigcup_{j\in J_{i,\alpha}} H_{i,j}$.

Ha $i \in I$, akkor $\bigcup_{j\in J_i} H_{i,j} = \bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle = \mathrm{pr}_i\langle H\rangle \in \mathscr{S}_i$, ezért a θ_i additivitása miatt $\theta_i(\mathrm{pr}_i\langle H\rangle) = \sum_{j\in J_i} \theta_i(H_{i,j})$, tehát

$$\theta'\Big(\bigcup_{\alpha\in A} H_\alpha\Big) = \theta'(H) := \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \theta_i(\mathrm{pr}_i\langle H\rangle) =$$

$$= \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \Big(\sum_{j\in J_i} \theta_i(H_{i,j})\Big) = \sum_{f\in J} \Big(\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \theta_i(H_{i,f(i)})\Big),$$

ahol $J := \prod_{i\in I} J_i$.

Ha $\alpha \in A$, akkor minden $I \ni i$-re $\bigcup_{j\in J_{i,\alpha}} H_{i,j} = \mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle \in \mathscr{S}_i$, ezért θ_i additivitásából következik, hogy $\theta_i(\mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle) = \sum_{j\in J_{i,\alpha}} \theta_i(H_{i,j})$, így

$$\theta'(H_\alpha) := \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \theta_i(\mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle) = \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J_{i,\alpha}} \theta_i(H_{i,j})\Big) = \sum_{f\in \mathrm{B}_\alpha} \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \theta_i(H_{i,f(i)}),$$

ahol $\mathrm{B}_\alpha := \prod_{i\in I} J_{i,\alpha}$. Ebből következik, hogy

$$\sum_{\alpha\in A} \theta'(H_\alpha) = \sum_{\alpha\in A}\Big(\sum_{f\in \mathrm{B}_\alpha}\Big(\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \theta_i(H_{i,f(i)})\Big)\Big).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\theta'(H) = \sum_{\alpha\in A} \theta'(H_\alpha)$ egyenlőség ekvivalens a következővel:

$$\sum_{f\in J}\Big(\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \theta_i(H_{i,f(i)})\Big) = \sum_{\alpha\in A}\Big(\sum_{f\in \mathrm{B}_\alpha}\Big(\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \theta_i(H_{i,f(i)})\Big)\Big).$$

Ennek bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $(\mathrm{B}_\alpha)_{\alpha\in A}$ rendszer diszjunkt. Valóban, legyenek $\alpha, \beta \in A$ olyanok, hogy

$$\emptyset \neq \mathrm{B}_\alpha \cap \mathrm{B}_\beta = \Big(\prod_{i\in I} J_{i,\alpha}\Big) \cap \Big(\prod_{i\in I} J_{i,\beta}\Big) = \prod_{i\in I}(J_{i,\alpha} \cap J_{i,\beta}),$$

és legyen f eleme ennek a szorzathalmaznak, tehát f olyan függvény, amely az I halmazon értelmezett, és minden $I \ni i$-re $f(i) \in J_{i,\alpha} \cap J_{i,\beta}$. Ekkor minden $i \in I$ esetén $\emptyset \neq H_{i,f(i)} \subseteq \mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle \cap \mathrm{pr}_i\langle H_\beta\rangle$, következésképpen

$$\emptyset \neq \prod_{i\in I}\Big(\mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle \cap \mathrm{pr}_i\langle H_\beta\rangle\Big) = \Big(\prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle\Big) \cap \Big(\prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i\langle H_\beta\rangle\Big) = H_\alpha \cap H_\beta.$$

Ekkor viszont $\alpha = \beta$, mert a $(H_\gamma)_{\gamma\in A}$ rendszer diszjunkt.

Ezért az állítás bizonyításához elegendő azt igazolni, hogy $J = \bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{B}_\alpha$. Ha $\alpha \in A$, akkor $\mathrm{B}_\alpha := \prod_{i\in I} J_{i,\alpha} \subseteq \prod_{i\in I} J_i =: J$, hiszen minden $I \ni i$-re $J_{i,\alpha} \subseteq J_i$. Ezért $\bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{B}_\alpha \subseteq J$. A fordított tartalmazást indirekt bizonyítjuk, tehát feltesszük, hogy az állítással ellentétben van olyan $f \in J$, hogy $f \notin \bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{B}_\alpha$. Ekkor f olyan I-n értelmezett függvény, amelyre minden $I \ni i$-re $f(i) \in J_i$, és és minden $\alpha \in A$ esetén $f \notin \mathrm{B}_\alpha$, vagyis van olyan $i \in I$, hogy $f(i) \notin J_{i,\alpha}$. Ha $\alpha \in A$ és $i \in I$ olyanok, hogy $f(i) \notin J_{i,\alpha}$, akkor a $(H_{i,j})_{j\in J_i}$ rendszer diszjunktsága és $J_{i,\alpha} \subseteq J_i$ miatt

$$\emptyset = H_{i,f(i)} \cap \Big(\bigcup_{j\in J_{i,\alpha}} H_{i,j}\Big) = \bigcup_{j\in J_{i,\alpha}} (H_{i,f(i)} \cap H_{i,j}) = H_{i,f(i)} \cap \mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle.$$

Tehát minden $\alpha \in A$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $H_{i,f(i)} \cap \mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle = \emptyset$, így minden $A \ni \alpha$-ra

$$\emptyset = \prod_{i\in I}\Big(H_{i,f(i)} \cap \mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle\Big) = \Big(\prod_{i\in I} H_{i,f(i)}\Big) \cap \Big(\prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i\langle H_\alpha\rangle\Big) = \Big(\prod_{i\in I} H_{i,f(i)}\Big) \cap H_\alpha,$$

amiből következik, hogy

$$\Big(\prod_{i\in I} H_{i,f(i)}\Big) \cap H = \Big(\prod_{i\in I} H_{i,f(i)}\Big) \cap \Big(\bigcup_{\alpha\in A} H_\alpha\Big) = \emptyset.$$

Ez viszont lehetetlen, mert ezzel együtt

$$\prod_{i\in I} H_{i,f(i)} \subseteq \prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i\langle H\rangle = H$$

is teljesül, és $\prod\limits_{i\in I} H_{i,f(i)} \neq \emptyset$. ■

1.3.3. Definíció. *Legyen $(\mathscr{S}_i)_{i\in I}$ félgyűrűk véges rendszere, K test, és $(\theta_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $\theta_i : \mathscr{S}_i \to K$ additív halmazfüggvény. Ekkor $\bigotimes\limits_{i\in I} \theta_i$ jelöli azt a $\bigotimes\limits_{i\in I} \mathscr{S}_i \to K$ additív halmazfüggvényt, amelyre minden $(E_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} \mathscr{S}_i$ esetén*

$$\Big(\bigotimes_{i\in I} \theta_i\Big)\Big(\prod_{i\in I} E_i\Big) = \mathrm{P}_{i\in I}\, \theta_i(E_i)$$

teljesül; és $\bigotimes\limits_{i\in I} \theta_i$-t a $(\theta_i)_{i\in I}$ additív halmazfüggvény-rendszer **tenzorszorzatának** *nevezzük. Ha $n \in \mathbb{N}$ és minden $i \in n$ esetén $\theta_i := \mu_{\mathbb{R}}$ (vagyis az egydimenziós Lebesgue-mérték), akkor a $\bigotimes\limits_{i\in n} \theta_i : \mathscr{R}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ additív halmazfüggvényt az n-***dimenziós Lebesgue-mértéknek** *nevezzük, és $\mu_{\mathbb{R}^n}$-nel jelöljük.*

1.4. Gyakorlatok

1. Legyen $\mathscr{H}$ olyan halmaz, hogy $\emptyset \in \mathscr{H}$, és legyen

a) $\mathscr{R}' := \{X \setminus Y | X, Y \in \mathscr{H}\}$;

b) $\mathscr{R}''$ a véges sok $\mathscr{R}'$-beli halmaz metszeteként előálló halmazok halmaza;

c) $\mathscr{R}$ a véges sok $\mathscr{R}''$-beli halmaz uniójaként előálló halmazok halmaza.

Ekkor $\mathscr{R}$ egyenlő a $\mathscr{H}$ által generált halmazgyűrűvel. Ha M metrikus tér, és $\mathcal{K}$ az M kompakt részhalmazainak halmaza, akkor a $\mathcal{K}$ által generált halmazgyűrű megegyezik az $X \setminus Y$ alakú halmazok véges unióinak halmazával, ahol $X, Y \in \mathcal{K}$ tetszőlegesek.

2. Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű, F vektortér, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ olyan függvény, hogy minden $E, E' \in \mathscr{S}$ halmazra, $E \cup E' \in \mathscr{S}$ és $E \cap E' = \emptyset$ esetén $\mathbf{m}(E \cup E') = \mathbf{m}(E) + \mathbf{m}(E')$ teljesül. Következik-e ebből az $\mathbf{m}$ halmazfüggvény additivitása? Mi a válasz erre a kérdésre akkor, ha $\mathscr{S}$ halmazgyűrű?

(*Útmutatás.* Az $\mathbf{m}$ halmazfüggvény nem szükségképpen additív. Legyen például $T := \{a, b, c\}$ három elemű halmaz, és $\mathscr{S} := \{\emptyset, T, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Ekkor $\mathscr{S}$ félgyűrű T felett, de $\mathscr{S}$ nem halmazgyűrű. Ha F vektortér, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ tetszőleges olyan függvény, hogy $\mathbf{m}(\emptyset) := 0$, és

$$\mathbf{m}(\{a\}) + \mathbf{m}(\{b\}) + \mathbf{m}(\{c\}) \neq \mathbf{m}(T),$$

akkor $\mathbf{m}$ nem additív, de triviálisan eleget tesz az előírt feltételnek.

Ha viszont $\mathscr{S}$ halmazgyűrű, akkor az adott feltételből következik az $\mathbf{m}$ additivitása; ez teljes indukcióval könnyen igazolható.)

3. *σ-gyűrűnek* (illetve *δ-gyűrűnek*) nevezünk minden olyan $\mathscr{R}$ halmazt, amely halmazgyűrű, és minden $\mathscr{R}$-ben haladó $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{R}$ (illetve $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{R}$) teljesül. Azt mondjuk, hogy $\mathscr{B}$ *σ-algebra* a T halmaz felett, ha $\mathscr{B}$ σ-gyűrű a T halmaz felett, és $T \in \mathscr{B}$. Bizonyítsuk be a következőket.

a) Minden σ-algebra σ-gyűrű, és minden σ-gyűrű δ-gyűrű.

b) Ha $\mathscr{B}$ a T halmaz megszámlálható részhalmazainak halmaza, akkor $\mathscr{B}$ σ-gyűrű, és ez pontosan akkor σ-algebra T felett, ha T *megszámlálható.* Ha $\mathscr{B}$ a T halmaz véges részhalmazainak halmaza, akkor $\mathscr{B}$ δ-gyűrű, és ez pontosan akkor σ-gyűrű, ha T *véges.*

c) δ-gyűrűk (illetve σ-gyűrűk, illetve adott halmaz feletti σ-algebrák) bármely nem üres rendszerének metszete szintén δ-gyűrű (illetve σ-gyűrű, illetve σ-algebra az adott halmaz felett). Minden $\mathscr{H}$ halmazhoz létezik egyetlen olyan δ-gyűrű (illetve σ-gyűrű) amely tartalmazza $\mathscr{H}$-t, és tartalmazás tekintetében a legkisebb; ezt nevezzük a $\mathscr{H}$ halmaz által generált δ-gyűrűnek (illetve σ-gyűrűnek). Ha T halmaz, akkor minden $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{P}(T)$ halmazhoz létezik egyetlen olyan σ-algebra T felett, amely tartalmazza $\mathscr{H}$-t, és tartalmazás tekintetében a legkisebb; ezt nevezzük a $\mathscr{H}$ halmaz által generált T feletti σ-algebrának.

d) Ha T metrikus tér, akkor a T *Borel-féle σ-algebrájának* nevezzük, és $\mathscr{B}(T)$-vel jelöljük a T zárt részhalmazai által generált T feletti σ-algebrát; a $\mathscr{B}(T)$ elemeit a T *Borel-halmazainak* nevezzük. A T metrikus tér *Baire-féle σ-gyűrűjének* nevezzük, és $\mathscr{B}_0(T)$-vel jelöljük a T kompakt részhalmazai által generált T feletti σ-gyűrűt; a $\mathscr{B}_0(T)$ elemeit a T *Baire-halmazainak* nevezzük. Ha T a metrikus tér olyan, hogy létezik a T kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $T = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (ilyenkor azt mondjuk, hogy *T σ-kompakt*), akkor a T Borel-féle σ-algebrája megegyezik a T Baire-féle σ-gyűrűjével. Jellemezzük a diszkrét metrikus terek Borel-féle σ-algebráját, és Baire-féle σ-gyűrűjét!

2. fejezet

Lépcsősfüggvények és elemi integrál

2.1. A lépcsősfüggvények tere

2.1.1. Definíció. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, és K test. Egy $f : T \to K$ függvényt* $\mathscr{S}$**-lépcsősfüggvénynek** *nevezünk, ha létezik olyan véges $(E_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathscr{S}$-ben, és olyan $(c_i)_{i\in I}$ rendszer K-ban, hogy $f = \sum_{i\in I} c_i.\chi_{E_i}$. A T-n értelmezett K-ba ható $\mathscr{S}$-lépcsősfüggvénynek halmazát $\mathscr{E}_K(T, \mathscr{S})$ jelöli.*

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, és K test, akkor $\mathscr{E}_K(T, \mathscr{S})$ lineáris altere az $\mathscr{F}(T; K)$ függvénytérnek. Továbbá, ha $\mathscr{R}$ az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrű, akkor $\mathscr{E}_K(T, \mathscr{S}) = \mathscr{E}_K(T, \mathscr{R})$ teljesül, hiszen $E \in \mathscr{R}$ esetén van olyan $\mathscr{S}$-ben haladó $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer, hogy $E = \bigcup_{i\in I} E_i$, ezért $\chi_E = \sum_{i\in I} \chi_{E_i} \in \mathscr{E}_K(T, \mathscr{S})$, így $\mathscr{E}_K(T, \mathscr{R}) \subseteq \mathscr{E}_K(T, \mathscr{S})$.

2.1.2. Állítás. *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, és K test, akkor minden $f \in \mathscr{E}_K(T, \mathscr{S})$ függvényhez létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, és olyan $(c_i)_{i\in I}$ rendszer K-ban, hogy $f = \sum_{i\in I} c_i.\chi_{E_i}$.*

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{S})$, akkor a definíció szerint létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, és olyan $(c_i)_{i\in I}$ rendszer K-ban, hogy $f = \sum_{i\in I} c_i.\chi_{E_i}$. A felbontási lemma alkalmazásával vehetünk olyan $(E'_j)_{j\in J}$ diszjunkt véges rendszert $\mathscr{S}$-ben, amelyre $\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup_{j\in J} E'_j$, és minden $I \ni i$-hez létezik olyan $J_i \subseteq J$ halmaz, hogy $E_i = \bigcup_{j\in J_i} E'_j$. Ekkor az $\mathscr{F}(T; K)$ függvénytér összeadásának általános asszociativitását (**ENS** 4.7.3.) alkalmazva:

$$f = \sum_{i\in I} c_i.\chi_{E_i} = \sum_{i\in I} c_i.\Big(\sum_{j\in J_i} \chi_{E'_j}\Big) = \sum_{j\in J} \Big(\sum_{\substack{i\in I,\\ j\in J_i}} c_i\Big)\chi_{E'_j},$$

tehát f előáll a kívánt alakban. ■

2.1.3. Következmény. *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, és $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{S})$, akkor $|f| \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{S})$.*

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{S})$, akkor az előző állítás alapján van olyan $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, és olyan $(c_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy $f = \sum_{i\in I} c_i.\chi_{E_i}$. Ekkor nyilvánvalóan

$$|f| = \sum_{i\in I} |c_i|.\chi_{E_i} \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{S})$$

teljesül. ■

2.1.4. Következmény. *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény, és $(E_i)_{i\in I}$ olyan véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, hogy $\bigcup_{i\in I} E_i \in \mathscr{S}$, akkor*

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mu(E_i).$$

Bizonyítás. A felbontási lemma szerint vehetünk olyan $(E'_j)_{j\in J}$ *diszjunkt* véges rendszert $\mathscr{S}$-ben, amelyre teljesül az $\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup_{j\in J} E'_j$ egyenlőség, és minden $I \ni i$-hez létezik olyan $J_i \subseteq J$ halmaz, hogy $E_i = \bigcup_{j\in J_i} E'_j$. Ekkor a μ additivitása és pozitivitása miatt

$$\sum_{i\in I}\mu(E_i) = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J_i}\mu(E'_j)\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I,\ j\in J_i}\mu(E'_j)\Big) =$$
$$= \sum_{j\in J}\Big(\mathrm{Card}\{i\in I | j\in J_i\}\Big)\mu(E'_j) \geq \sum_{j\in J}\mu(E'_j) = \mu\Big(\bigcup_{j\in J}E'_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i\in I}E_i\Big)$$

teljesül, ahol felhasználtuk azt, hogy ha $j \in J$ olyan, hogy $E'_j \neq \emptyset$, akkor $j \in J_i \neq \emptyset$ (tehát $\mathrm{Card}\{i \in I | j \in J_i\} \geq 1$), hiszen $E'_j = \bigcup_{i\in I}(E'_j \cap E_i)$ miatt vehetünk olyan $i \in I$ indexet, hogy $E'_j \cap E_i \neq \emptyset$; és bármely ilyen i-re $E_i = \bigcup_{k\in J_i} E'_k$ miatt van olyan $k \in J_i$, hogy $E'_j \cap E'_k \neq \emptyset$, így $j = k \in J_i$. ■

2.1.5. Következmény. *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény, $E \in \mathscr{S}$, és $(E_i)_{i\in I}$ olyan véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, hogy $E \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$, akkor*

$$\mu(E) \leq \sum_{i\in I} \mu(E_i).$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{R}$ az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrűt, és ν a μ additív kiterjesztését $\mathscr{S}$-ről $\mathscr{R}$-re. Legyen $E \in \mathscr{S}$, és $(E_i)_{i\in I}$ olyan véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, hogy $E \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$. Ekkor $\bigcup_{i\in I} E_i \in \mathscr{R}$, és a ν pozitivitásából következik annak monoton növése, így az előző állítást alkalmazva ν-re

$$\mu(E) = \nu(E) \leq \nu\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) \leq \sum_{i\in I}\nu(E_i) = \sum_{i\in I}\mu(E_i)$$

adódik. ■

2.2. Additív halmazfüggvény által generált elemi integrál

2.2.1. Állítás. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, F vektortér a K test felett, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény. Ekkor létezik egyetlen olyan $\mathbf{I} : \mathscr{E}_K(T, \mathscr{S}) \to F$ lineáris operátor, amelyre minden $E \in \mathscr{S}$ esetén $I(\chi_{_E}) = \mathbf{m}(E)$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{I}, \mathbf{I}' : \mathscr{E}_K(T, \mathscr{S}) \to F$ mindketten olyan lineáris operátorok, hogy minden $E \in \mathscr{S}$ esetén $\mathbf{I}(\chi_{_E}) = \mathbf{m}(E) = \mathbf{I}'(\chi_{_E})$, akkor bármely $\mathscr{S}$-beli $(E_i)_{i \in I}$ rendszerre és $\mathbb{K}$-beli $(c_i)_{i \in I}$ rendszerre

$$\mathbf{I}\Big(\sum_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}}\Big) = \sum_{i\in I} c_i.\mathbf{I}\left(\chi_{_{E_i}}\right) = \sum_{i\in I} c_i.\mathbf{m}(E_i) = \sum_{i\in I} c_i.\mathbf{I}'\left(\chi_{_{E_i}}\right) = \mathbf{I}'\Big(\sum_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}}\Big),$$

ami azt jelenti, hogy $\mathbf{I} = \mathbf{I}'$.

Az $\mathbf{I}$ létezésének bizonyításához megmutatjuk, hogy minden $\mathscr{S}$-beli $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszerre és K-beli $(c_i)_{i\in I}$ rendszerre, ha $\sum\limits_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}} = 0$, akkor $\sum\limits_{i\in I} c_i.\mathbf{m}(E_i) = 0$. Valóban, a felbontási lemma alkalmazásával vegyünk olyan $(E'_j)_{j\in J}$ diszjunkt véges rendszert $\mathscr{S}$-ben, amelyre $\bigcup\limits_{i\in I} E_i = \bigcup\limits_{j\in J} E'_j$, és minden $I \ni i$-hez létezik olyan $J_i \subseteq J$ halmaz, hogy $E_i = \bigcup\limits_{j\in J_i} E'_j$. Ekkor a feltétel szerint

$$0 = \sum_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}} = \sum_{i\in I} c_i.\Big(\sum_{j\in J_i} \chi_{_{E'_j}}\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}} c_i\Big)\chi_{_{E'_j}},$$

amiből az $(E'_j)_{j\in J}$ rendszer diszjunktsága alapján kapjuk, hogy minden $j \in J$ esetén, ha $E'_j \neq \emptyset$, akkor $\sum\limits_{i\in I,\ j\in J_i} c_i = 0$. Továbbá, az $\mathbf{m}$ additivitása miatt

$$\sum_{i\in I} c_i.\mathbf{m}(E_i) = \sum_{i\in I} c_i.\Big(\sum_{j\in J_i} \mathbf{m}(E'_j)\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}} c_i\Big)\mathbf{m}(E'_j).$$

Ha $j \in J$ olyan, hogy $E'_j = \emptyset$, akkor $\mathbf{m}(E'_j) = 0$; és ha $E'_j \neq \emptyset$, akkor $\sum\limits_{i\in I,\ j\in J_i} c_i = 0$. Ezért minden $j \in J$ esetén $\Big(\sum\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}} c_i\Big).\mathbf{m}(E'_j) = 0$, így $\sum\limits_{i\in I} c_i.\mathbf{m}(E_i) = 0$.

Ebből következik, hogy egyértelműen létezik olyan $\mathbf{I} : \mathscr{E}_K(T, \mathscr{S}) \to F$ függvény, amelyre minden $\mathscr{S}$-beli $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszerre és K-beli $(c_i)_{i\in I}$ rendszerre $\mathbf{I}\Big(\sum\limits_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}}\Big) = \sum\limits_{i\in I} c_i.\mathbf{m}(E_i)$. Ez az $\mathbf{I}$ leképezés nyilvánvalóan lineáris operátor, és minden $E \in \mathscr{S}$ esetén $\mathbf{I}(\chi_{_E}) = \mathbf{m}(E)$ teljesül. ■

2.2.2. Definíció. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, F vektortér a K test felett, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény. Az* **$\mathbf{m}$ által generált elemi integrálnak** *nevezzük azt egyetlen olyan $\mathscr{E}_K(T, \mathscr{S}) \to F$ lineáris operátort, amely minden $E \in \mathscr{S}$*

halmazra a χ_E *függvényhez a* $\mathbf{m}(E)$ *értéket rendeli. Továbbá, minden* $f \in \mathscr{E}_K(T, \mathscr{S})$ *lépcsősfüggvényre, az* $\mathbf{m}$ *altal generált elemi integrál által* f*-hez rendelt vektort az*

$$\int f \, \mathrm{d}\mathbf{m}, \quad \textit{vagy} \quad \int\limits_T f(t) \, \mathrm{d}\mathbf{m}(t)$$

szimbólummal jelöljük, és az f *függvény* **elemi integráljának** *nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy ha $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, $\mathscr{R}$ az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrű, F vektortér a K test felett, $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény, és $\mathbf{n} : \mathscr{R} \to F$ az $\mathbf{m}$ additív kiterjesztése, akkor az $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ által generált elemi integrálok egyenlők.

2.3. Gyakorlatok

1. Bizonyítsuk be a felbontási lemmát a benne szereplő halmazrendszer indexhalmazának számossága szerinti teljes indukcióval!

2. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett. Ha $f, g \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ olyan függvények, hogy $|f| \leq |g|$, akkor létezik olyan $h \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$, hogy $f = h.g$ és $|h| \leq 1$.

3. Legyen T halmaz, és $L \subseteq \mathscr{F}(T; \mathbb{R})$ lineáris altér az $\mathscr{F}(T; \mathbb{R})$ függvénytérben. A következő állítások ekvivalensek.

a) Minden $f \in L$ esetén $|f| \in L$.

b) Minden $f \in L$ esetén $f^+ \in L$.

c) Minden $f \in L$ esetén $f^- \in L$.

d) Minden $f, g \in L$ esetén $\sup(f, g) \in L$.

e) Minden $f, g \in L$ esetén $\inf(f, g) \in L$.

(Ha az $L \subseteq \mathscr{F}(T; \mathbb{R})$ lineáris altérre teljesül e tulajdonságok közül az egyik (tehát mindegyik), akkor azt mondjuk, hogy L *lineáris függvényháló* T felett.) Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, akkor $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{S})$ lineáris függvényháló T felett.

(*Útmutatás.* Használjuk fel az

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-, \quad \sup(f, g) = f + (g - f)^+,$$
$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

egyenlőségeket!)

4. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett. Ekkor minden $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R})$ és $c \in \mathbb{R}_+$ esetén $\inf(f, c) \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R})$. (Egy T halmaz feletti L lineáris függvény hálót *Stone-feltételűnek* nevezünk, ha minden $f \in L$ és $c \in \mathbb{R}_+$ esetén $\inf(f, c) \in L$.) Adjunk példát nem Stone-feltételű lineáris függvényhálóra!

5. Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, F, G, H vektorterek a K test felett, $b : G \times F \to H$ K-bilineáris operátor, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény. Ekkor létezik egyetlen olyan $\mathscr{E}_G(T,\mathscr{S}) \to H$ K-lineáris operátor, amely minden $E \in \mathscr{S}$ és $z \in G$ esetén a $\chi_{_E}.z$ függvényhez a $b(z,\mathbf{m}(E))$ vektort rendeli. (Ha $f \in \mathscr{E}_G(T,\mathscr{S})$, akkor a szóban forgó lineáris operátor f helyen felvett értékét az

$$\int b(f,\mathrm{d}\mathbf{m})$$

szimbólummal jelöljük.) Ha $b : K \times F \to F;\ (c,z) \mapsto c.z$, akkor $f \in \mathscr{E}_K(T,\mathscr{S})$ esetén

$$\int b(f,\mathrm{d}\mathbf{m}) = \int f \ \mathrm{d}\mathbf{m}$$

teljesül.

3. fejezet

Korlátos változású additív halmazfüggvények

3.1. Korlátos változású additív halmazfüggvény abszolút értéke

3.1.1. Definíció. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű, F normált tér, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény. Azt mondjuk, hogy*

– **m korlátos***, ha az* $\{\mathbf{m}(E)|E \in \mathscr{S}\}$ *halmaz korlátos F-ben, tehát* $\sup\limits_{E\in\mathscr{S}} \|\mathbf{m}(E)\| < +\infty$*;*

– **m relatív korlátos***, ha minden $E \in \mathscr{S}$ esetén az* $\{\mathbf{m}(E')|(E' \in \mathscr{S}) \wedge (E' \subseteq E)\}$ *halmaz korlátos F-ben, tehát* $\sup\limits_{\substack{E'\in\mathscr{S}\\ E'\subseteq E}} \|\mathbf{m}(E')\| < +\infty$*;*

– **m korlátos változású***, ha minden $E \in \mathscr{S}$ esetén létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges $\mathscr{S}$-beli rendszerre, ha $E = \bigcup\limits_{i\in I} E_i$, akkor $\sum\limits_{i\in I} \|\mathbf{m}(E_i)\| \leq C$, vagyis a $\sum\limits_{i\in I} \|\mathbf{m}(E_i)\|$ alakú számok halmaza felülről korlátos, ahol $(E_i)_{i\in I}$ tetszőleges olyan diszjunkt véges $\mathscr{S}$-beli rendszer, amelyre $E = \bigcup\limits_{i\in I} E_i$.*

Vigyázzunk arra, hogy a fenti korlátossági tulajdonságok nem öröklődnek a félgyűrű által generált halmazgyűrűre vett additív kiterjesztésre (**1**. és **2**. gyakorlatok). Z

Nyilvánvaló, hogy minden korlátos additív halmazfüggvény relatív korlátos, és hamarosan látni fogjuk, hogy minden korlátos változású additív halmazfüggvény is relatív korlátos. Azonban korlátos additív halmazfüggvény nem szükségképpen korlátos változású (**3**. gyakorlat), és korlátos változású additív halmazfüggvény nem szükségképpen korlátos (amit rövidesen látni fogunk).

Tehát additív halmazfüggvényekre a korlátosság és a korlátos változás logikailag nem összehasonlítható tulajdonságok, vagyis egyikből sem következik a másik. Később megmutatjuk, hogy egy halmazgyűrűn értelmezett, *véges dimenziós* normált térbe ható additív halmazfüggvény pontosan akkor korlátos változású, ha relatív korlátos.

3.1.2. Állítás. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű, F normált tér, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ korlátos változású additív halmazfüggvény. Minden $E \in \mathscr{S}$ esetén jelölje $|\mathbf{m}|(E)$ az $\sum\limits_{i\in I} \|\mathbf{m}(E_i)\|$ alakú* *számok halmazának szuprémumát, ahol $(E_i)_{i\in I}$ tetszőleges olyan diszjunkt véges $\mathscr{S}$-beli rendszer, amelyre $E = \bigcup_{i\in I} E_i$. Ekkor az $\mathscr{S} \to \mathbb{R}$; $E \mapsto |\mathbf{m}|(E)$ leképezés pozitív additív függvény, és minden $E \in \mathscr{S}$ esetén*

$$\|\mathbf{m}(E)\| \leq \sup_{\substack{E'\in\mathscr{S}\\ E'\subseteq E}} \|\mathbf{m}(E')\| \leq |\mathbf{m}|(E)$$

teljesül, így $\mathbf{m}$ relatív korlátos is.

Bizonyítás. Legyen $(E_i)_{i\in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $\bigcup_{i\in I} E_i \in \mathscr{S}$; azt kell megmutatni, hogy $|\mathbf{m}|\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \sum_{i\in I} |\mathbf{m}|(E_i)$.

Először legyen $(H_\alpha)_{\alpha\in A}$ tetszőleges olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $\bigcup_{\alpha\in A} H_\alpha = \bigcup_{i\in I} E_i$. Ha $i \in I$, akkor $\bigcup_{\alpha\in A}(H_\alpha \cap E_i) = E_i \in \mathscr{S}$, és $(H_\alpha \cap E_i)_{\alpha\in A}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, így az $|\mathbf{m}|$ definíciója alapján $\sum_{\alpha\in A} \|\mathbf{m}(H_\alpha \cap E_i)\| \leq |\mathbf{m}|(E_i)$. Ugyanakkor, $\alpha \in A$ esetén $\bigcup_{i\in I}(H_\alpha \cap E_i) = H_\alpha \in \mathscr{S}$, és $(H_\alpha \cap E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, ezért az $\mathbf{m}$ additivititása alapján $\sum_{i\in I} \mathbf{m}(H_\alpha \cap E_i) = \mathbf{m}(H_\alpha)$, így

$$\sum_{\alpha\in A} \|\mathbf{m}(H_\alpha)\| = \sum_{\alpha\in A} \Big\| \sum_{i\in I} \mathbf{m}(H_\alpha \cap E_i)\Big\| \leq$$
$$\leq \sum_{\alpha\in A} \Big(\sum_{i\in I} \|\mathbf{m}(H_\alpha \cap E_i)\|\Big) = \sum_{i\in I} \Big(\sum_{\alpha\in A} \|\mathbf{m}(H_\alpha \cap E_i)\|\Big) \leq \sum_{i\in I} |\mathbf{m}|(E_i).$$

Ebből következik, hogy $|\mathbf{m}|\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) \leq \sum_{i\in I} |\mathbf{m}|(E_i)$.

Megfordítva, legyen $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $c < \sum_{i\in I} |\mathbf{m}|(E_i)$. Vegyünk olyan $(c_i)_{i\in I}$ rendszert $\mathbb{R}$-ben, amelyre $c < \sum_{i\in I} c_i$, és minden $I \ni i$-re $c_i < |\mathbf{m}|(E_i)$. Ekkor az $|\mathbf{m}|$ definíciója alapján minden $i \in I$ esetén van olyan $(H_{i,j})_{j\in J_i}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $c_i < \sum_{j\in J_i} \|\mathbf{m}(H_{i,j})\|$ és $E_i = \bigcup_{j\in J_i} H_{i,j}$. Legyen $K := \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times J_i)$; ekkor $(H_{i,j})_{(i,j)\in K}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, és

$$\bigcup_{(i,j)\in K} H_{i,j} = \bigcup_{i\in I} \Big(\bigcup_{j\in J_i} H_{i,j}\Big) = \bigcup_{i\in I} E_i \in \mathscr{S}.$$

Ebből az $|\mathbf{m}|$ definíciója alapján következik, hogy

$$c < \sum_{i\in I} c_i < \sum_{i\in I} \Big(\sum_{j\in J_i} \|\mathbf{m}(H_{i,j})\|\Big) = \sum_{\alpha\in A} \|\mathbf{m}(H_\alpha)\| \leq |\mathbf{m}|\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big).$$

Ez viszont maga után vonja a $\sum_{i\in I} |\mathbf{m}|(E_i) \leq |\mathbf{m}|\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big)$ egyenlőtlenséget, amivel az $|\mathbf{m}| : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény additivitását igazoltuk.

Ha $E \in \mathscr{S}$, akkor az $\|\mathbf{m}(E)\| \leq \sup\limits_{\substack{E' \in \mathscr{S} \\ E' \subseteq E}} \|\mathbf{m}(E')\|$ egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül. Ugyanakkor, $E, E' \in \mathscr{S}$ és $E' \subseteq E$ esetén vehetünk olyan $(E_i)_{i \in I}$ diszjunkt véges rendszert $\mathscr{S}$-ben, hogy $E \setminus E' = \bigcup\limits_{i \in I} E_i$. Legyen ω olyan halmaz, hogy $\omega \notin I$, továbbá $E_\omega := E'$. Ekkor $(E_i)_{i \in I \cup \{\omega\}}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $\bigcup\limits_{i \in I \cup \{\omega\}} E_i = E$, ezért az $|\mathbf{m}|$ definíciója szerint

$$\|\mathbf{m}(E')\| \leq \|\mathbf{m}(E')\| + \sum_{i \in I} \|\mathbf{m}(E_i)\| = \sum_{i \in I \cup \{\omega\}} \|\mathbf{m}(E_i)\| \leq |\mathbf{m}|(E),$$

amiből következik, hogy $\sup\limits_{\substack{E' \in \mathscr{S} \\ E' \subseteq E}} \|\mathbf{m}(E')\| \leq |\mathbf{m}|(E)$. Ebből az is látható, hogy $\mathbf{m}$ szükségképpen relatív korlátos. ■

3.1.3. Definíció. *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, F normált tér, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ korlátos változású additív halmazfüggvény, akkor az előző állításban értelmezett $|\mathbf{m}| : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvényt az* $\mathbf{m}$ **abszolút értékének**, *vagy* **teljes variációjának** *nevezzük.*

Az előző állításból látható, hogy ha $\mathbf{m}$ olyan korlátos változású additív halmazfüggvény, amelyre $|\mathbf{m}|$ korlátos, akkor $\mathbf{m}$ korlátos. Azonban $\mathbf{m}$ lehet korlátos, de nem korlátos változású (**3**. gyakorlat).

3.1.4. Állítás. *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, akkor minden $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény korlátos változású, és $|\mu| = \mu$.*

Bizonyítás. Legyen $E \in \mathscr{S}$, és $(E_i)_{i \in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $E = \bigcup\limits_{i \in I} E_i$. Ekkor a μ additivitása és pozitivitása folytán

$$\sum_{i \in I} |\mu(E_i)| = \sum_{i \in I} \mu(E_i) = \mu\Big(\bigcup_{i \in I} E_i\Big) = \mu(E),$$

amiből azonnal látható, hogy μ korlátos változású, és $|\mu| = \mu$ teljesül. ■

Tehát minden pozitív additív halmazfüggvény korlátos változású, ugyanakkor nem szükségképpen korlátos; például az egydimenziós Lebesgue-mérték pozitív, de nem korlátos.

3.2. Az abszolút érték tulajdonságai

3.2.1. Állítás. *Legyenek F és G normált terek, $u : F \to G$ folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátor, $\mathscr{S}$ félgyűrű, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény. Ha $\mathbf{m}$ korlátos (illetve relatív korlátos, illetve korlátos változású) additív halmazfüggvény, akkor $u \circ \mathbf{m} : \mathscr{S} \to G$ szintén korlátos (illetve relatív korlátos, illetve korlátos változású) additív halmazfüggvény. Ha $\mathbf{m}$ korlátos változású, akkor $|u \circ \mathbf{m}| \leq \|u\| |\mathbf{m}|$ teljesül.*

Bizonyítás. Az $u : F \to G$ operátor additivitása miatt $u \circ m : \mathscr{S} \to G$ additív halmazfüggvény. Ha $E \in \mathscr{S}$, akkor $\|(u \circ \mathbf{m})(E)\| \leq \|u\|\|\mathbf{m}(E)\|$, ezért $\mathbf{m}$ korlátosságából következik $u \circ \mathbf{m}$ korlátossága. Továbbá, ha $E \in \mathscr{S}$, akkor

$$\sup_{\substack{E' \in \mathscr{S} \\ E' \subseteq E}} \|(u \circ \mathbf{m})(E')\| \leq \sup_{\substack{E' \in \mathscr{S} \\ E' \subseteq E}} (\|u\|\|\mathbf{m}(E')\|) = \|u\| \sup_{\substack{E' \in \mathscr{S} \\ E' \subseteq E}} \|\mathbf{m}(E')\|,$$

ezért $\mathbf{m}$ relatív korlátosságából következik $u \circ \mathbf{m}$ relatív korlátossága.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{m}$ korlátos változású, és legyen $E \in \mathscr{S}$, és $(E_i)_{i \in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, hogy $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Ekkor

$$\sum_{i \in I} \|(u \circ \mathbf{m})(E_i)\| \leq \sum_{i \in I} \|u\|\|\mathbf{m}(E_i)\| = \|u\| \sum_{i \in I} \|\mathbf{m}(E_i)\| \leq \|u\||\mathbf{m}|(E),$$

ezért $u \circ \mathbf{m}$ is korlátos változású, és láthatóan $|u \circ \mathbf{m}| \leq \|u\||\mathbf{m}|$ teljesül. ■

3.2.2. Állítás. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű, és F normált tér $\mathbb{K}$ felett. Ha $\mathbf{m}, \mathbf{m}' : \mathscr{S} \to F$ korlátos változású additív halmazfüggvények és $c \in \mathbb{K}$, akkor $\mathbf{m} + \mathbf{m}'$ és $c.\mathbf{m}$ szintén korlátos változásúak, és $|\mathbf{m} + \mathbf{m}'| \leq |\mathbf{m}| + |\mathbf{m}'|$, valamint $|c.\mathbf{m}| = |c|.|\mathbf{m}|$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $E \in \mathscr{S}$ és $(E_i)_{i \in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, hogy $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, akkor

$$\sum_{i \in I} \|(\mathbf{m} + \mathbf{m}')(E_i)\| \leq \sum_{i \in I} \|\mathbf{m}(E_i)\| + \sum_{i \in I} \|\mathbf{m}'(E_i)\| \leq |\mathbf{m}|(E) + |\mathbf{m}'|(E),$$

továbbá

$$\sum_{i \in I} \|(c.\mathbf{m})(E_i)\| = |c| \sum_{i \in I} \|\mathbf{m}(E_i)\| \leq |c||\mathbf{m}|(E).$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{m} + \mathbf{m}'$ és $c.\mathbf{m}$ korlátos változásúak, valamint $|\mathbf{m} + \mathbf{m}'| \leq |\mathbf{m}| + |\mathbf{m}'|$ és $|c.\mathbf{m}| \leq |c|.|\mathbf{m}|$ teljesül. Ha $c = 0$, akkor $|c.\mathbf{m}| = 0 = |c|.|\mathbf{m}|$. Ha $c \neq 0$, akkor az előzőekből kapjuk, hogy $|\mathbf{m}| = |c^{-1}.(c.\mathbf{m})| \leq |c|^{-1}.|c.\mathbf{m}|$, így $|c|.|\mathbf{m}| \leq |c.\mathbf{m}|$ is igaz, ami azt jelenti, hogy $|c.\mathbf{m}| = |c|.|\mathbf{m}|$ is teljesül. ■

3.2.3. Állítás. *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, F normált tér $\mathbb{K}$ felett, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ korlátos változású additív halmazfüggvény, akkor minden $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{S})$ függvényre*

$$\Big\| \int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big\| \leq \int |\varphi| \mathrm{d}|\mathbf{m}|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{S})$ és $(E_i)_{i \in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, valamint $(c_i)_{i \in I}$ olyan rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy $\varphi = \sum_{i \in I} c_i \chi_{E_i}$. Ekkor az elemi integrál definíciója szerint

$$\Big\| \int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big\| = \Big\| \sum_{i \in I} c_i \mathbf{m}(E_i) \Big\| \leq \sum_{i \in I} |c_i| \|\mathbf{m}(E_i)\| \leq \sum_{i \in I} |c_i| |\mathbf{m}|(E_i) = \int |\varphi| \mathrm{d}|\mathbf{m}|,$$

hiszen minden $i \in I$ esetén $\|\mathbf{m}(E_i)\| \leq |\mathbf{m}|(E_i)$, továbbá $|\varphi| = \sum_{i \in I} |c_i| \chi_{E_i}$ nyilvánvaló. ■

3.3. Gyakorlatok

1. Legyen T halmaz, és $\mathscr{S}$ a T legfeljebb egy elemű részhalmazainak halmaza, ami félgyűrű T felett. Legyen $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\mu(\emptyset) := 0$, és minden $t \in T$ esetén $\mu(\{t\}) := 1$. Ekkor μ korlátos additív halmazfüggvény, de a μ additív kiterjesztése az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrűre akkor és csak akkor korlátos, ha T véges.

2. Az $\mathbb{R}$ feletti standard félgyűrűn értelmezett $\mathbf{m}_{\chi_{\mathbb{Q}}}$ Lebesgue-Stieltjes típusú additív halmazfüggvény korlátos (így relatív korlátos is), de az additív kiterjesztése az $\mathbb{R}$ feletti standard halmazgyűrűre nem relatív korlátos (így nem is korlátos).
(*Útmutatás.* Jelölje $\tilde{\mathbf{m}}_{\chi_{\mathbb{Q}}}$ az $\mathbf{m}_{\chi_{\mathbb{Q}}}$ additív kiterjesztését $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$-ről $\mathscr{R}_{\mathbb{R}}$-re. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, és vegyünk olyan $n \geq 2$ természetes számot, és olyan $(t_k)_{0 \leq k \leq 2n+1}$ szigorúan monoton növő rendszert $\mathbb{R}$-ben, amelyre $t_0 := a$, $t_{2n+1} := b$, és minden $0 < i < 2n+1$ természetes számra, ha i páros, akkor t_i racionális, és ha i páratlan, akkor t_i irracionális. Ekkor az $E := \bigcup_{k=1}^{n} [t_{2k-1}, t_{2k}[$ halmaz eleme $\mathscr{R}_{\mathbb{R}}$ (de $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$-nek nem feltétlenül eleme), és $E \subseteq [a, b[$, továbbá

$$\left|\tilde{\mathbf{m}}_{\chi_{\mathbb{Q}}}(E)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \mathbf{m}_{\chi_{\mathbb{Q}}}([t_{2k-1}, t_{2k}[)\right| = n,$$

ezért $\tilde{\mathbf{m}}_{\chi_{\mathbb{Q}}}$ nem relatív korlátos.)

3. Legyen $F := \mathscr{L}(l^2_{\mathbb{K}}; l^2_{\mathbb{K}})$, ahol az $l^2_{\mathbb{K}}$ sorozattéren a $\|\cdot\|_2$ normát vesszük. Legyen $\mathbf{m} : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to F$ az a leképezés, amely minden $E \subseteq \mathbb{N}$ halmazhoz az

$$l^2_{\mathbb{K}} \to l^2_{\mathbb{K}}; \quad \mathbf{s} \mapsto \chi_E.\mathbf{s}$$

operátort rendeli. Ekkor $\mathbf{m}$ korlátos additív halmazfüggvény (így relatív korlátos is), de nem korlátos változású.
(*Útmutatás.* Minden $E \subseteq \mathbb{N}$ halmazra

$$\|\mathbf{m}(E)\| = \sup_{\substack{\mathbf{s} \in l^2_{\mathbb{K}} \\ \|\mathbf{s}\|_2 \leq 1}} \|\chi_E.\mathbf{s}\|_2 = \begin{cases} 1 & \text{, ha } E \neq \emptyset \\ 0 & \text{, ha } E = \emptyset, \end{cases}$$

ezért $\mathbf{m}$ korlátos. Ha $(E_i)_{i \in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-ben, hogy minden $I \ni i$-re E_i nem üres, akkor $\sum_{i \in I} \|\mathbf{m}(E_i)\| = \mathrm{Card}(I)$, ezért $\mathbf{m}$ nem korlátos változású.)

4. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ korlátos változású additív halmazfüggvény. Ekkor minden $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ függvényre

$$\int |\varphi| \, \mathrm{d}|\theta| = \sup_{\substack{\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}), \\ |\psi| \leq |\varphi|}} \left| \int \psi \, \mathrm{d}\theta \right|.$$

(*Útmutatás.* Természetesen elég arra az esetre bizonyítani, amikor minden $t \in T$ esetén

$\varphi(t) \in \mathbb{R}_+$. Ekkor legyen $(E_i)_{i\in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, és $(z_i)_{i\in I}$ olyan rendszer $\mathbb{R}_+^*$-ben, hogy $\varphi = \sum\limits_{i\in I} z_i.\chi_{E_i}$. Legyen $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$c < \int \varphi \, \mathrm{d}|\theta| := \sum_{i\in I} z_i |\theta|(E_i).$$

Ekkor van olyan $(c_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $c < \sum\limits_{i\in I} c_i$, és minden $T \ni i$-re $c_i < z_i|\theta|(E_i)$, vagyis $c_i/z_i < |\theta|(E_i)$. Ekkor minden $i \in I$ esetén van olyan $(E_{i,j})_{j\in J_i}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, hogy $E_i = \bigcup\limits_{j\in J_i} E_{i,j}$, és $c_i/z_i < \sum\limits_{j\in J_i} |\theta(E_{i,j})|$. Minden $i \in I$ és $j \in J_i$ esetén van olyan $u_{i,j} \in \mathbb{K}$, hogy $|u_{i,j}| = 1$, és $|\theta(E_{i,j})| = u_{i,j}\theta(E_{i,j})$. Ekkor a

$$\psi := \sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} (z_i u_{i,j}).\chi_{E_{i,j}}$$

függvény eleme $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$-nek, és az $(E_i)_{i\in I}$ rendszer diszjunktsága, valamint minden $i \in I$ esetén az $(E_{i,j})_{j\in J_i}$ rendszer diszjunktsága folytán

$$|\psi| = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} \left|(z_i u_{i,j}).\chi_{E_{i,j}}\right| = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} z_i.\chi_{E_{i,j}} = \varphi,$$

továbbá fennálnak az

$$\left|\int \psi \, \mathrm{d}\theta\right| = \left|\sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} u_{i,j} z_i \theta(E_{i,j})\right| = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} u_{i,j} z_i \theta(E_{i,j}) = \sum_{i\in I} z_i \Big(\sum_{j\in J_i} |\theta(E_{i,j})|\Big) > \sum_{i\in I} c_i > c$$

összefüggések. Ebből következik, hogy

$$\int |\varphi| \, \mathrm{d}|\theta| \leq \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\psi|\leq|\varphi|}} \left|\int \psi \, \mathrm{d}\theta\right|,$$

és ennek az egyenlőtlenségnek a megfordítása nyilvánvalóan igaz.)

4. fejezet

Relatív korlátos skaláris additív halmazfüggvények

4.1. Relatív korlátos skaláris additív halmazfüggvény Hahn-Jordan felbontása

4.1.1. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű és $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ relatív korlátos additív halmazfüggvény. Ekkor a*

$$\mu^+ : \mathscr{R} \to \mathbb{R}; \quad E \mapsto \sup_{E' \in \mathscr{R},\ E' \subseteq E} \mu(E')$$

leképezés pozitív additív halmazfüggvény, és $\mu^- := \mu^+ - \mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ szintén pozitív additív halmazfüggvény, továbbá $\mu = \mu^+ - \mu^-$ teljesül. Ha μ korlátos, akkor μ^+ és μ^- szintén korlátosak.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy $E \in \mathscr{R}$ esetén $0 \leq \mu^+(E) < +\infty$. Valóban, ha $E \in \mathscr{R}$, akkor $\emptyset \in \mathscr{R}$ és $\emptyset \subseteq E$, így $0 = \mu(\emptyset) \leq \mu^+(E)$; továbbá a μ relatív korlátossága miatt $\mu^+(E) \leq \sup\limits_{E' \in \mathscr{R},\ E' \subseteq E} |\mu(E')| < +\infty$. A μ^+ additivitásának bizonyításához legyen $(E_i)_{i \in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben.

Legyen $E' \in \mathscr{R}$ olyan halmaz, amelyre $E' \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} E_i$. Ekkor $E' = \bigcup\limits_{i \in I} (E' \cap E_i)$, és minden $I \ni i$-re $E' \cap E_i \in \mathscr{R}$, így a μ additivitásából következik, hogy

$$\mu(E') = \sum_{i \in I} \mu(E' \cap E_i) \leq \sum_{i \in I} \mu^+(E_i),$$

tehát fennáll a

$$\mu^+\Big(\bigcup_{i \in I} E_i\Big) \leq \sum_{i \in I} \mu^+(E_i)$$

egyenlőtlenség.

Megfordítva, legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, amelyre $c < \sum\limits_{i \in I} \mu^+(E_i)$. Legyen $(c_i)_{i \in I}$ olyan rendszer $\mathbb{R}$-ben, amelyre $c < \sum\limits_{i \in I} c_i$ és minden $i \in I$ esetén $c_i < \mu^+(E_i)$. Válasszunk ki olyan $(E_i')_{i \in I}$ rendszert $\mathscr{R}$-ben, amelyre minden $I \ni i$-re $E_i' \subseteq E_i$ és $c_i < \mu(E_i')$. Ekkor $\mathscr{R} \ni \bigcup\limits_{i \in I} E_i' \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} E_i$, tehát a μ additivitása folytán

$$c < \sum_{i \in I} c_i < \sum_{i \in I} \mu(E_i') = \mu\Big(\bigcup_{i \in I} E_i'\Big) \leq \mu^+\Big(\bigcup_{i \in I} E_i\Big).$$

Ebből következik, hogy teljesül a

$$\sum_{i\in I}\mu^+(E_i)\leq\mu^+\Big(\bigcup_{i\in I}E_i\Big)$$

egyenlőtlenség.

Ez azt jelenti, hogy μ^+ pozitív additív halmazfüggvény. Ha $E\in\mathscr{R}$, akkor a definíció alapján nyilvánvaló, hogy $\mu(E)\leq\mu^+(E)$, vagyis a $\mu^-:=\mu^+-\mu:\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ leképezés is pozitív additív halmazfüggvény.

Ha μ korlátos, akkor minden $E\in\mathscr{R}$ halmazra a μ^+ értelmezése alapján

$$0\leq\mu^+(E):=\sup_{E'\in\mathscr{R},\ E'\subseteq E}\mu(E')\leq\sup_{E'\in\mathscr{R}}\mu(E')\leq\sup_{E'\in\mathscr{R}}|\mu(E')|<+\infty,$$

tehát μ^+ is korlátos, így μ^- is szükségképpen korlátos. ■

4.1.2. Definíció. *Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű és $\mu:\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ relatív korlátos additív halmazfüggvény, akkor az előző állításban értelmezett μ^+ (illetve μ^-) pozitív additív halmazfüggvényt a μ* **pozitív** (*illetve* **negatív**) **részének** *nevezzük. Továbbá, a $\mu=\mu^+-\mu^-$ előállítást a μ* **elemi Hahn-Jordan felbontásának** *nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű és $\mu:\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ relatív korlátos additív halmazfüggvény, akkor minden $E\in\mathscr{R}$ halmazra

$$\mu^-(E)=\sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\E'\subseteq E}}(-\mu(E'))=-\inf_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\E'\subseteq E}}\mu(E'),$$

mert a μ^- és μ^+ definíciója szerint

$$\mu^-(E):=\mu^+(E)-\mu(E):=\Big(\sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\E'\subseteq E}}\mu(E')\Big)-\mu(E)=$$
$$=\sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\E'\subseteq E}}(\mu(E')-\mu(E))=\sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\E'\subseteq E}}(-\mu(E\setminus E'))=\sup_{\substack{E''\in\mathscr{R}\\E''\subseteq E}}(-\mu(E'')),$$

ahol felhasználtuk μ szubtraktivitását, valamint azt, hogy az $E'\to E\setminus E'$ leképezés az $\{E'\in\mathscr{R}|E'\subseteq E\}$ halmaznak permutációja.

4.1.3. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű. Egy $\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ additív halmazfüggvény pontosan akkor relatív korlátos (illetve korlátos), ha előáll két $\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény különbségeként (illetve két $\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ korlátos pozitív additív halmazfüggvény különbségeként). Ha μ:$\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ additív halmazfüggvény, és $\mu_1,\mu_2:\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ olyan pozitív additív halmazfüggvények, hogy $\mu=\mu_1-\mu_2$, akkor $\mu^+\leq\mu_1$ és $\mu^-\leq\mu_2$ (ezt nevezzük az elemi Hahn-Jordan felbontás* **minimalitási tulajdonságának**).

Bizonyítás. A pozitív additív halmazfüggvények korlátos változásúak, ezért a valós lineáris kombinációik is korlátos változásúak, így relatív korlátosak. Ezért a pozitív additív halmazfüggvények különbségeként előálló additív halmazfüggvények relatív korlátosak. Az előző állítás szerint minden relatív korlátos valós additív halmazfüggvény előáll két pozitív additív halmazfüggvény különbségeként.

A korlátos pozitív additív halmazfüggvények különbségeként előálló additív halmazfüggvények korlátosak. Az előző állítás szerint minden korlátos valós additív halmazfüggvény előáll két korlátos pozitív additív halmazfüggvény különbségeként.

Legyen $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ additív halmazfüggvény, és $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ olyan pozitív additív halmazfüggvények, hogy $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Ekkor $E, E' \in \mathscr{R}$ és $E' \subseteq E$ esetén $\mu(E') = \mu_1(E') - \mu_2(E') \leq \mu_1(E') \leq \mu_1(E)$, ezért $\mu^+(E) \leq \mu_1(E)$, így $\mu^+ \leq \mu_1$. Ebből következik, hogy minden $\mathscr{R} \ni E$-re $\mu^-(E) = \mu^+(E) - \mu_1(E) + \mu_2(E) \leq \mu_2(E)$, ezért $\mu^- \leq \mu_2$. ■

4.1.4. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ additív halmazfüggvény. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *θ relatív korlátos (illetve korlátos).*

(ii) *Az $\Re \circ \theta$ és $\Im \circ \theta$ valós additív halmazfüggvények relatív korlátosak (illetve korlátosak).*

(iii) *A θ előáll véges sok pozitív additív halmazfüggvény (illetve véges sok korlátos pozitív additív halmazfüggvény) komplex lineáris kombinációjaként.*

(iv) *θ korlátos változású (illetve korlátos).*

Bizonyítás. Ha $E \in \mathscr{R}$, akkor $|(\Re \circ \theta)(E)| \leq |\theta(E)|$ és $|(\Im \circ \theta)(E)| \leq |\theta(E)|$, amiből látható, hogy ha θ relatív korlátos (illetve korlátos), akkor $\Re\circ\theta$ és $\Im\circ\theta$ relatív korlátosak (illetve korlátosak), vagyis (i)⇒(ii) teljesül.

Ha a $\Re\circ\theta$ és $\Im\circ\theta$ valós additív halmazfüggvények relatív korlátosak (illetve korlátosak), akkor

$$\theta = (\Re \circ \theta)^+ - (\Re \circ \theta)^- + \mathbf{i}(\Im \circ \theta)^+ - \mathbf{i}(\Im \circ \theta)^-,$$

tehát θ előáll véges sok pozitív additív halmazfüggvény (illetve korlátos pozitív additív halmazfüggvény) komplex lineáris kombinációjaként, így (ii)⇒(iii) teljesül.

Legyen $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan véges rendszer, hogy minden $A \ni \alpha$-ra $\mu_\alpha : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény (illetve korlátos pozitív additív halmazfüggvény), és legyen $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ komplex számok rendszere. Tegyük fel, hogy $\theta := \sum_{\alpha\in A} c_\alpha.\mu_\alpha$, és $E \in \mathscr{R}$. Ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, amelyre $E = \bigcup_{i\in I} E_i$ akkor

$$\sum_{i\in I} |\theta(E_i)| = \sum_{i\in I} \Big|\sum_{\alpha\in A} c_\alpha \mu_\alpha(E_i)\Big| \leq \sum_{i\in I} \Big(\sum_{\alpha\in A} |c_\alpha||\mu_\alpha(E_i)|\Big) =$$
$$= \sum_{\alpha\in A} |c_\alpha| \Big(\sum_{i\in I} |\mu_\alpha(E_i)|\Big) = \sum_{\alpha\in A} |c_\alpha| \Big(\sum_{i\in I} \mu_\alpha(E_i)\Big) = \sum_{\alpha\in A} |c_\alpha| \mu_\alpha(E),$$

ezért θ korlátos változású, és az is látható, hogy

$$|\theta| \leq \sum_{\alpha\in A} |c_\alpha| \mu_\alpha,$$

tehát ha minden $A \ni \alpha$-ra μ_α korlátos, akkor $|\theta|$ is az, így θ korlátos. Ezért (iii)⇒(iv) teljesül.

Végül, a (iv)⇒(i) következmény nyilvánvalóan igaz, tetszőleges normált térbe ható additív halmazfüggvény esetében is. ■

Tehát ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ relatív korlátos additív halmazfüggvény, akkor

$$\theta = (\Re \circ \theta)^+ - (\Re \circ \theta)^- + \mathbf{i}(\Im \circ \theta)^+ - \mathbf{i}(\Im \circ \theta)^-$$

teljesül: ezt nevezzük a θ *elemi Hahn-Jordan felbontásának.* Ha θ korlátos, akkor az ebben szereplő pozitív additív halmazfüggvények mind korlátosak.

4.2. Véges dimenziós vektortérbe ható relatív korlátos additív halmazfüggvények

4.2.1. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű. A $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ additív halmazfüggvény pontosan akkor relatív korlátos, ha korlátos változású. Ha a $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ additív halmazfüggvény relatív korlátos, akkor minden $E \in \mathscr{R}$ esetén*

$$\sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} |\theta(E')| \leq |\theta|(E) \leq d(\mathbb{K}) \cdot \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} |\theta(E')|,$$

ahol $d(\mathbb{R}) := 2$ és $d(\mathbb{C}) := 4$. A $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ additív halmazfüggvény pontosan akkor korlátos, ha korlátos változású és $|\theta|$ korlátos.

Bizonyítás. Az előző két állítás szerint θ pontosan akkor relatív korlátos, ha korlátos változású. Az előző állítás (iii)$\Rightarrow$(iv) következtetésének bizonyításában láttuk, hogy ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, és $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ olyan véges rendszer, hogy minden $A \ni \alpha$-ra $\mu_\alpha : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény, és $(c_\alpha)_{\alpha \in A}$ komplex számok rendszere, akoor $\theta := \sum_{\alpha \in A} c_\alpha . \mu_\alpha$ esetén $|\theta| \leq \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha| \mu_\alpha$ teljesül. Ezért ha θ korlátos változású, és $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor a θ elemi Hahn-Jordan felbontásából kapjuk, hogy

$$|\theta| \leq (\Re \circ \theta)^+ + (\Re \circ \theta)^- + (\Im \circ \theta)^+ + (\Im \circ \theta)^-.$$

Ugyanakkor, $E \in \mathscr{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
(\Re \circ \theta)^+(E) &= \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} (\Re \circ \theta)(E') \leq \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} |\theta(E')|, \\
(\Re \circ \theta)^-(E) &= \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} \Big(-(\Re \circ \theta)(E') \Big) \leq \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} |\theta(E')|, \\
(\Im \circ \theta)^+(E) &= \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} (\Im \circ \theta)(E') \leq \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} |\theta(E')|, \\
(\Im \circ \theta)^-(E) &= \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} \Big(-(\Im \circ \theta)(E') \Big) \leq \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} |\theta(E')|,
\end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$|\theta|(E) \leq (\Re \circ \theta)^+(E) + (\Re \circ \theta)^-(E) + (\Im \circ \theta)^+(E) + (\Im \circ \theta)^-(E) \leq 4 \cdot \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} |\theta(E')|.$$

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ relatív korlátos additív halmazfüggvény, akkor $|\theta| = |\theta^+ - \theta^-| \leq \theta^+ + \theta^-$, tehát $E \in \mathscr{R}$ esetén

$$|\theta|(E) \leq \theta^+(E) + \theta^-(E) = \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} \theta(E') + \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} (-\theta(E')) \leq 2 \cdot \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} |\theta(E')|,$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

4.2.2. Tétel. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, F véges dimenziós normált tér $\mathbb{K}$ felett, és $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ additív halmazfüggvény. $\mathbf{m}$ pontosan akkor relatív korlátos, ha korlátos változású. Ha $\mathbf{m}$ korlátos változású, és $(z_i)_{i\in I}$ algebrai bázis F-ben, valamint $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer F'-ben, hogy minden $i, j \in I$ esetén $u_i(z_j) = \delta_{i,j}$, akkor minden $E \in \mathscr{R}$ halmazra fennállnak a*

$$\sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\ E'\subseteq E}} \|\mathbf{m}(E')\| \le |\mathbf{m}|(E) \le d(\mathbb{K})\Big(\sum_{i\in I}\|z_i\|\|u_i\|\Big) \sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\ E'\subseteq E}} \|\mathbf{m}(E')\|$$

egyenlőtlenségek, ahol $d(\mathbb{R}) := 2$ és $d(\mathbb{C}) := 4$. Továbbá, az $\mathbf{m}$ additív halmazfüggvény pontosan akkor korlátos, ha korlátos változású és $|\mathbf{m}|$ korlátos.

Bizonyítás. Legyen $(z_i)_{i\in I}$ algebrai bázis F-ben, valamint $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer F'-ben, hogy minden $i, j \in I$ esetén $u_i(z_j) = \delta_{i,j}$. Ekkor minden $z \in F$ esetén $z = \sum_{i\in I} u_i(z).z_i$. Ha $\mathbf{m}$ relatív korlátos, akkor minden $I \ni i$-re a $u_i \circ \mathbf{m} : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ skaláris additív halmazfüggvény is relatív korlátos, tehát az előző állítás szerint korlátos változású is. Ha tehát $\mathbf{m}$ relatív korlátos, $E \in \mathscr{R}$, és $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, amelyre $E = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha$, akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in A}\|\mathbf{m}(E_\alpha)\| &= \sum_{\alpha\in A}\Big\|\sum_{i\in I} u_i(\mathbf{m}(E_\alpha)).z_i\Big\| \le \sum_{\alpha\in A}\Big(\sum_{i\in I}|u_i(\mathbf{m}(E_\alpha))|\|z_i\|\Big) = \\
&= \sum_{i\in I}\|z_i\|\Big(\sum_{\alpha\in A}|u_i(\mathbf{m}(E_\alpha))|\Big) = \sum_{i\in I}\|z_i\|\Big(\sum_{\alpha\in A}|(u_i\circ\mathbf{m})(E_\alpha)|\Big) \le \\
&\le \sum_{i\in I}\|z_i\|\Big(\sum_{\alpha\in A}|u_i\circ\mathbf{m}|(E_\alpha)\Big) = \sum_{i\in I}\|z_i\||u_i\circ\mathbf{m}|(E) \le \\
&\le \sum_{i\in I}\Big(\|z_i\|d(\mathbb{K})\sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\ E'\subseteq E}}|(u_i\circ\mathbf{m})(E')|\Big) \le \sum_{i\in I}\Big(\|z_i\|d(\mathbb{K})\sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\ E'\subseteq E}}(\|u_i\|\|\mathbf{m}(E')\|)\Big) = \\
&= d(\mathbb{K})\Big(\sum_{i\in I}\|z_i\|\|u_i\|\Big)\sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\ E'\subseteq E}}\|\mathbf{m}(E')\|,
\end{aligned}$$

amiből következik az, hogy $\mathbf{m}$ korlátos változású, és

$$|\mathbf{m}|(E) \le d(\mathbb{K})\Big(\sum_{i\in I}\|z_i\|\|u_i\|\Big)\sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\ E'\subseteq E}}\|\mathbf{m}(E')\|.$$

Ha $\mathbf{m}$ korlátos, akkor $\mathbf{m}$ relatív korlátos, így az előzőek alapján $\mathbf{m}$ korlátos változású, és van olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ esetén

$$|\mathbf{m}|(E) \le C\sup_{\substack{E'\in\mathscr{R}\\ E'\subseteq E}}\|\mathbf{m}(E')\| \le C\sup_{E'\in\mathscr{R}}\|\mathbf{m}(E')\| < +\infty,$$

így $|\mathbf{m}|$ korlátos. Megfordítva, ha $\mathbf{m}$ korlátos változású, és $|\mathbf{m}|$ korlátos, akkor $\mathbf{m}$ is korlátos, mert minden $E \in \mathscr{R}$ esetén

$$\|\mathbf{m}(E)\| \le |\mathbf{m}|(E) \le \sup_{E'\in\mathscr{R}}|\mathbf{m}|(E') < +\infty$$

teljesül. ■

4.3. Korlátos változású skaláris additív halmazfüggvények szorzata

4.3.1. Állítás. *Legyen* $(\mathscr{R}_i)_{i\in I}$ *halmazgyűrűk véges rendszere, és* $(\theta_i)_{i\in I}$ *olyan rendszer, hogy minden* $i \in I$ *esetén* $\theta_i : \mathscr{R}_i \to \mathbb{K}$ *korlátos változású additív halmazfüggvény. Ekkor a* $\bigotimes\limits_{i\in I} \theta_i : \bigotimes\limits_{i\in I} \mathscr{R}_i \to \mathbb{K}$ *additív halmazfüggvény is korlátos változású, és*

$$\Big|\bigotimes_{i\in I} \theta_i\Big| = \bigotimes_{i\in I} |\theta_i|$$

teljesül.

Bizonyítás. Vezessük be az $\mathscr{R} := \bigotimes\limits_{i\in I} \mathscr{R}_i$ és $\mathscr{S} := \Big\{\prod\limits_{i\in I} E_i \Big| (E_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} \mathscr{R}_i\Big\}$ jelöléseket! Tudjuk, hogy $\mathscr{S}$ félgyűrű, és $\mathscr{R}$ egyenlő az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrűvel.
Legyen $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben. Minden $A \ni \alpha$-hoz kiválasztunk olyan $(E_{\alpha,\beta})_{\beta\in \mathrm{B}_\alpha}$ diszjunkt véges rendszert $\mathscr{S}$-ben, amelyre $E_\alpha = \bigcup\limits_{\beta\in\mathrm{B}_\alpha} E_{\alpha,\beta}$. Ekkor

$$\sum_{\alpha\in A} \Big|\Big(\bigotimes_{i\in I} \theta_i\Big)(E_\alpha)\Big| = \sum_{\alpha\in A} \Big|\sum_{\beta\in\mathrm{B}_\alpha} \Big(\bigotimes_{i\in I} \theta_i\Big)(E_{\alpha,\beta})\Big| =$$
$$= \sum_{\alpha\in A} \Big|\sum_{\beta\in\mathrm{B}_\alpha} \mathrm{P}_{i\in I}\, \theta_i(\mathrm{pr}_i\langle E_{\alpha,\beta}\rangle)\Big| \leq \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in\mathrm{B}_\alpha} \mathrm{P}_{i\in I}\, |\theta_i(\mathrm{pr}_i\langle E_{\alpha,\beta}\rangle)| \leq$$
$$\leq \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in\mathrm{B}_\alpha} \mathrm{P}_{i\in I}\, |\theta_i|(\mathrm{pr}_i\langle E_{\alpha,\beta}\rangle) = \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in\mathrm{B}_\alpha} \Big(\bigotimes_{i\in I} |\theta_i|\Big)(E_{\alpha,\beta}) =$$
$$= \sum_{\alpha\in A} \Big(\bigotimes_{i\in I} |\theta_i|\Big)(E_\alpha) = \Big(\bigotimes_{i\in I} |\theta_i|\Big)\Big(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\Big).$$

Ebből következik, hogy a $\bigotimes\limits_{i\in I} \theta_i : \bigotimes\limits_{i\in I} \mathscr{R}_i \to \mathbb{K}$ additív halmazfüggvény korlátos változású, és minden $E \in \mathscr{R}$ esetén

$$\Big|\bigotimes_{i\in I} \theta_i\Big|(E) \leq \Big(\bigotimes_{i\in I} |\theta_i|\Big)(E)$$

teljesül.
A fordított egyenlőtlenség bizonyításához legyen $E \in \mathscr{R}$, és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, amelyre $c < \Big(\bigotimes\limits_{i\in I} |\theta_i|\Big)(E)$. Az E halmazhoz veszünk olyan $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ diszjunkt véges rendszert $\mathscr{S}$-ben, hogy $E = \bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$. Ekkor

$$c < \Big(\bigotimes_{i\in I} |\theta_i|\Big)\Big(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\Big) = \sum_{\alpha\in A} \Big(\bigotimes_{i\in I} |\theta_i|\Big)(E_\alpha) = \sum_{\alpha\in A'} \Big(\bigotimes_{i\in I} |\theta_i|\Big)(E_\alpha),$$

ahol $A' := \Big\{\alpha \in A \Big| \Big(\bigotimes\limits_{i\in I} |\theta_i|\Big)(E_\alpha) > 0\Big\}$. Az A halmaz végessége miatt létezik olyan $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $c < \sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha$, és minden $A \ni \alpha$-ra

$$c_\alpha < \Big(\bigotimes_{i\in I} |\theta_i|\Big)(E_\alpha) = \mathrm{P}_{i\in I}\, |\theta_i|(\mathrm{pr}_i\langle E_\alpha\rangle).$$

Ekkor minden $\alpha \in A'$ esetén van olyan $(p_{\alpha,i})_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{R}_+^*$-ban, hogy

$$c_\alpha < \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} p_{\alpha,i} < \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} |\theta_i|(\mathrm{pr}_i\langle E_\alpha\rangle),$$

és minden $I \ni i$-re $p_{\alpha,i} < |\theta_i|(\mathrm{pr}_i\langle E_\alpha\rangle)$. Ha tehát $\alpha \in A'$ és $i \in I$, akkor a korlátos változású additív halmazfüggvények abszolút értékének definíciója szerint van olyan $(E_{\alpha,i,\beta})_{\beta\in \mathrm{B}_{\alpha,i}}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}_i$-ben, hogy $\mathrm{pr}_i\langle E_\alpha\rangle = \bigcup\limits_{\beta\in\mathrm{B}_{\alpha,i}} E_{\alpha,i,\beta}$ és $p_{\alpha,i} < \sum\limits_{\beta\in\mathrm{B}_{\alpha,i}} |\theta_i(E_{\alpha,i,\beta})|$. Tehát ha $\alpha \in A'$, akkor a $\mathrm{B}_\alpha := \prod\limits_{i\in I} \mathrm{B}_{\alpha,i}$ halmazra

$$c < \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \le \sum_{\alpha\in A'} c_\alpha < \sum_{\alpha\in A'} \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} p_{\alpha,i} < \sum_{\alpha\in A'} \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \sum_{\beta\in\mathrm{B}_{\alpha,i}} |\theta_i(E_{\alpha,i,\beta})| =$$

$$= \sum_{\alpha\in A'} \sum_{f\in\mathrm{B}_\alpha} \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} |\theta_i(E_{\alpha,i,f(i)})| = \sum_{\alpha\in A'} \sum_{f\in\mathrm{B}_\alpha} \Big|\Big(\bigotimes_{i\in I}\theta_i\Big)\Big(\prod_{i\in I} E_{\alpha,i,f(i)}\Big)\Big|.$$

Ugyanakkor, $\alpha \in A'$ esetén a szorzatra és unióra vonatkozó disztributivitás formula szerint

$$E_\alpha = \prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i\langle E_\alpha\rangle = \prod_{i\in I} \bigcup_{\beta\in\mathrm{B}_{\alpha,i}} E_{\alpha,i,\beta} = \bigcup_{f\in\mathrm{B}_\alpha} \prod_{i\in I} E_{\alpha,i,f(i)},$$

és nyilvánvaló, hogy $\Big(\prod\limits_{i\in I} E_{\alpha,i,f(i)}\Big)_{f\in\mathrm{B}_\alpha}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, ezért

$$\sum_{f\in\mathrm{B}_\alpha} \Big|\Big(\bigotimes_{i\in I}\theta_i\Big)\Big(\prod_{i\in I} E_{\alpha,i,f(i)}\Big)\Big| \le \Big|\bigotimes_{i\in I}\theta_i\Big|(E_\alpha),$$

amiből következik, hogy

$$c < \sum_{\alpha\in A'} \sum_{f\in\mathrm{B}_\alpha} \Big|\Big(\bigotimes_{i\in I}\theta_i\Big)\Big(\prod_{i\in I} E_{\alpha,i,f(i)}\Big)\Big| \le \sum_{\alpha\in A'} \Big|\bigotimes_{i\in I}\theta_i\Big|(E_\alpha) \le \sum_{\alpha\in A} \Big|\bigotimes_{i\in I}\theta_i\Big|(E_\alpha) = \Big|\bigotimes_{i\in I}\theta_i\Big|(E)$$

is teljesül, így fennáll a

$$\Big(\bigotimes_{i\in I}|\theta_i|\Big)(E) \le \Big|\bigotimes_{i\in I}\theta_i\Big|(E)$$

egyenlőtlenség. ∎

4.4. Gyakorlatok

1. Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, és $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ relatív korlátos additív halmazfüggvény, akkor $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

(*Útmutatás.* A $\mu = \mu^+ - \mu^-$ egyenlőség miatt a $|\mu| \le \mu^+ + \mu^-$ egyenlőtlenség nyilvánvaló. A fordított egyenlőtlenség bizonyításához legyen $E \in \mathscr{R}$, és $c \in \mathbb{R}$ olyan szám, amelyre

$$c < (\mu^+ + \mu^-)(E) = \sup_{E'\in\mathscr{R},\ E'\subseteq E} \mu(E') - \inf_{E''\in\mathscr{R},\ E''\subseteq E} \mu(E'').$$

Ekkor léteznek olyan $E', E'' \in \mathscr{R}$ halmazok, hogy $E', E'' \subseteq E$, és $c < \mu(E') - \mu(E'')$. Tekintsük most az $E' \cap E''$, $E' \setminus E''$, $E'' \setminus E'$ és $E \setminus (E' \cup E'')$ halmazokat, amelyek mind elemei $\mathscr{R}$-nek, és az E diszjunkt felbontását alkotják. Ekkor a $|\mu|$ definíciója alapján

$$|\mu(E' \cap E'')| + |\mu(E' \setminus E'')| + |\mu(E'' \setminus E')| + |\mu(E \setminus (E' \cup E''))| \le |\mu|(E).$$

Ugyanakkor $\mu(E' \setminus E'') = \mu(E') - \mu(E' \cap E'')$ és $\mu(E'' \setminus E') = \mu(E'') - \mu(E'' \cap E')$, ezért

$$\begin{gathered}
c < \mu(E') - \mu(E'') = (\mu(E') - \mu(E' \cap E'')) + (\mu(E' \cap E'') - \mu(E'')) \leq \\
\leq |\mu(E' \setminus E'')| + |\mu(E'' \setminus E')| \leq \\
\leq |\mu(E' \cap E'')| + |\mu(E' \setminus E'')| + |\mu(E'' \setminus E')| + |\mu(E \setminus (E' \cup E''))| \leq |\mu|(E)
\end{gathered}$$

teljesül, amit bizonyítani kellett.)

2. Legyen F normált tér, $L : \mathbb{R} \to F$ függvény, és tekintsük az $\mathbf{m}_L : \mathscr{S}_\mathbb{R} \to F$ Lebesgue-Stieltjes típusú additív halmazfüggvényt. Azt mondjuk, hogy L *korlátos változású függvény*, ha az $\mathbf{m}_L$ additív kiterjesztése az $\mathscr{R}_\mathbb{R}$ standard halmazgyűrűre korlátos változású additív halmazfüggvény. Mutassuk meg, hogy az L függvény pontosan akkor korlátos változású, ha minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számhoz létezik olyan $V_{a,b} \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re, és minden $(t_k)_{0 \leq k \leq n}$ monoton növő $\mathbb{R}$-beli rendszerre, ha $t_0 = a$ és $t_n = b$, akkor

$$\sum_{k \in n} \|L(t_{k+1}) - L(t_k)\| \leq V_{a,b}.$$

(*Útmutatás.* Jelölje $\tilde{\mathbf{m}}_L$ a $\mathbf{m}_L$ additív kiterjesztését $\mathscr{R}_\mathbb{R}$-re.

Tegyük fel, hogy $\tilde{\mathbf{m}}_L$ korlátos változású, és legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, valamint $n \in \mathbb{N}^*$, és $(t_k)_{0 \leq k \leq n}$ olyan monoton növő $\mathbb{R}$-beli rendszer, hogy $t_0 = a$ és $t_n = b$. Ekkor $([t_k, t_{k+1}[)_{k \in n}$ olyan diszjunkt rendszer $\mathscr{S}_\mathbb{R}$-ben, hogy $\bigcup_{k \in n} [t_k, t_{k+1}[= [a, b[\in \mathscr{S}_\mathbb{R}$, tehát az $|\tilde{\mathbf{m}}_L|$ értelmezése alapján

$$\sum_{k \in n} \|L(t_{k+1}) - L(t_k)\| = \sum_{k \in n} \|\mathbf{m}_L([t_k, t_{k+1}[)\| \leq |\tilde{\mathbf{m}}_L|([a, b[),$$

vagyis az L függvény korlátos változású.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az L függvény korlátos változású. Legyen $E \in \mathscr{R}_\mathbb{R}$; megmutatjuk olyan $C_E \in \mathbb{R}_+$, csak E-től (és természetesen L-től) függő szám létezését, amelyre minden $(E_i)_{i \in I}$ diszjunkt véges $\mathscr{R}_\mathbb{R}$-beli rendszerre, $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ esetén

$$\sum_{i \in I} \|\tilde{\mathbf{m}}_L(E_i)\| \leq C_E$$

teljesül. Természetesen $E \neq \emptyset$ feltehető. Legyen $(E_i)_{i \in I}$ olyan diszjunkt véges $\mathscr{R}_\mathbb{R}$-beli rendszer, amelyre $E = \bigcup_{i \in I} E_i$; itt is feltehető, hogy minden $i \in I$ esetén $E_i \neq \emptyset$. Legyen $a := \inf(E)$ és $b := \sup(E)$; ekkor a standard $\mathbb{R}$ feletti halmazgyűrű értelmezése alapján $E \subseteq [a, b[$. Minden $i \in I$ esetén legyen $(E_{i,j})_{j \in J_i}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}_\mathbb{R}$-ben, amelyre $E_i = \bigcup_{j \in J_i} E_{i,j}$. Feltehető, hogy minden $i \in I$ és $j \in J_i$ esetén $E_{i,j} \neq \emptyset$, így az $\mathscr{S}_\mathbb{R}$ definíciója szerint $E_{i,j} = [\inf(E_{i,j}), \sup(E_{i,j})[$. Vezessük be I felett azt a $\leq$ relációt, amelyre $i, i' \in I$ esetén $i \leq i'$ pontosan akkor teljesül, ha $\sup(E_i) \leq \inf(E_{i'})$. Az $(E_i)_{i \in I}$ rendszer diszjunktsága miatt $\leq$ *lineáris rendezés* az I véges halmaz felett. Minden $i \in I$ esetén vezessük be J_i felett azt a $\leq_i$ relációt, amelyre $j, j' \in J_i$ esetén $j \leq_i j'$ pontosan akkor teljesül, ha $\sup(E_{i,j}) \leq \inf(E_{i,j'})$. Minden $I \ni i$-re, az $(E_{i,j})_{j \in J_i}$ rendszer diszjunktsága miatt $\leq$ *lineáris rendezés* a J_i véges halmaz felett. A

$J := \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times J_i)$ halmazon bevezetjük a *lexikografikus rendezést*, tehát $(i,j),(i',j') \in J$ esetén $(i,j) \leq (i',j')$ azt jelenti, hogy $i < i'$, vagy $i = i'$ és $j \leq_i j'$; ez *lineáris rendezés* a J véges halmaz felett, így létezik egyetlen olyan $\sigma : \mathrm{Card}(J) \to J$ bijekció, amely szigorúan monoton növő (tehát rendezés-izomorfizmus). Minden $k \in \mathrm{Card}(J)$ esetén legyen $t_{2k} := \inf(E_{\sigma(k)})$, és $t_{2k+1} := \sup(E_{\sigma(k)})$. Ekkor $(t_k)_{k\in 2\mathrm{Card}(J)}$ monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, és $t_0 = \inf(E) = a$, $t_{2\mathrm{Card}(J)-1} = \sup(E) = b$, továbbá

$$\sum_{i\in I} \|\tilde{\mathbf{m}}_L(E_i)\| = \sum_{i\in I} \Big\| \sum_{j\in J_i} \mathbf{m}_L(E_{i,j}) \Big\| \leq \sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} \|L(\sup(E_{i,j})) - L(\inf(E_{i,j}))\| =$$
$$= \sum_{k=0}^{2\mathrm{Card}(J)-2} \|L(t_{k+1}) - L(t_k)\| \leq V_{a,b},$$

ezért $\tilde{\mathbf{m}}_L$ korlátos változású.)

3. (*Probléma.*) Legyen F véges dimenziós normált tér, és jelölje $c(F)$ a

$$\sum_{i\in\dim(F)} \|u_i\|\|z_i\|$$

alakú összegek *infimumát*, ahol $(z_i)_{i\in I}$ algebrai bázis F-ben, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer F'-ben, hogy minden $i,j \in I$ esetén $u_i(z_j) = \delta_{i,j}$. Világos, hogy $c(F) \geq \dim(F)$; igaz-e az egyenlőség?

5. fejezet

Az egyszerű Riemann-integrál

5.1. Sup-normában folytonos elemi integrálok

A következő állítás teljes jellemzést nyújt a korlátos additív halmazfüggvényekre az általuk generált elemi integrálok segítségével.

5.1.1. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett és F normált tér $\mathbb{K}$ felett. Az $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ additív halmazfüggvény pontosan akkor korlátos, ha az $\mathbf{m}$ által generált elemi integrál folytonos a sup-normával ellátott $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ függvénytér és az F normált tér között.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{m}$ által generált elemi integrál folytonos a $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ függvénytér feletti sup-norma szerint. A $\{\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}) \mid\ \|| \varphi \|| \leq 1\}$ függvényhalmaz korlátos a sup-norma szerint, ezért az

$$\left\{ \int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \middle| (\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})) \wedge (\||\varphi\|| \leq 1) \right\}$$

halmaz korlátos F-ben. Ugyanakkor $\{\chi_{_E} | E \in \mathscr{R}\} \subseteq \{\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}) \mid\ \|| \varphi \|| \leq 1\}$, és minden $\mathscr{R} \ni E$-re $\mathbf{m}(E) = \displaystyle\int \chi_{_E} \mathrm{d}\mathbf{m}$, ezért a $\{\mathbf{m}(E) | E \in \mathscr{R}\}$ halmaz korlátos F-ben, vagyis $\mathbf{m}$ korlátos additív halmazfüggvény.

Megfordítva; tegyük fel, hogy az $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ additív halmazfüggvény korlátos. A Hahn-Banach-tételből következik, hogy minden $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ esetén

$$\left\| \int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \right\| = \sup_{\substack{u \in F' \\ \|u\| \leq 1}} \left| u\Big(\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big) \right|,$$

ezért az $\mathbf{m}$ által generált elemi integrál sup-normában való folytonosságához elég olyan $C \in \mathbb{R}_+$ szám létezését igazolni, amelyre minden $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ és $u \in F'$, $\|u\| \leq 1$ esetén

$$\left| u\Big(\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big) \right| \leq C \, \|| \, \varphi \, \|| \, .$$

Legyen $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ nem nulla függvény, és vegyünk olyan $(E_i)_{i \in I}$ diszjunkt véges rendszert $\mathscr{R}$-ben, és olyan $(c_i)_{i \in I}$ rendszert $\mathbb{K}$-ban, hogy $\varphi = \displaystyle\sum_{i \in I} c_i \chi_{_{E_i}}$. Feltehetjük, hogy minden $I \ni i$-re $E_i \neq \emptyset$; ekkor $\||\varphi\|| = \max\limits_{i \in I} |c_i|$ és $\displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i = [\varphi \neq 0]$. Ha $u \in F'$, akkor $u \circ \mathbf{m} : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ korlátos additív halmazfüggvény, ezért relatív korlátos is, így korlátos változású, mert skaláris additív halmazfüggvény pontosan akkor relatív korlátos, ha korlátos változású. Ezért $u \in F'$ esetén

$$\left|u\Big(\int \varphi \,\mathrm{d}\mathbf{m}\Big)\right| = \left|u\Big(\sum_{i\in I} c_i \mathbf{m}(E_i)\Big)\right| = \left|\sum_{i\in I} c_i (u\circ\mathbf{m})(E_i)\right| \leq \sum_{i\in I} |c_i||(u\circ\mathbf{m})(E_i)| \leq$$
$$\leq \sum_{i\in I} |c_i||u\circ\mathbf{m}|(E_i) \leq \Big(\max_{i\in I}|c_i|\Big)\sum_{i\in I}|u\circ\mathbf{m}|(E_i) = |||\varphi|||\;|u\circ\mathbf{m}|\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) =$$
$$= |||\varphi|||\;|u\circ\mathbf{m}|([\varphi\neq 0]) \leq |||\varphi|||\; d(\mathbb{K}) \sup_{\substack{E\in\mathscr{R}\\ E\subseteq[\varphi\neq 0]}} |(u\circ\mathbf{m})(E)| \leq$$
$$\leq |||\varphi|||\; d(\mathbb{K}) \sup_{\substack{E\in\mathscr{R}\\ E\subseteq[\varphi\neq 0]}} (\|u\|\|\mathbf{m}(E)\|) = \|u\|\Big(d(\mathbb{K})\sup_{E\in\mathscr{R}}\|\mathbf{m}(E)\|\Big)\;|||\varphi|||,$$

ahol $d(\mathbb{R}) := 2$ és $d(\mathbb{C}) := 4$. Ez azt mutatja. hogy a $C := d(\mathbb{K}) \sup\limits_{E\in\mathscr{R}} \|\mathbf{m}(E)\|$ szám olyan, amelynek a létezését bizonyítani kellett. ■

5.2. Az egyszerű függvények tere

5.2.1. Definíció. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és F normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f : T \to F$ függvény* **$\mathscr{R}$-egyszerű**, *ha létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon. A T-n értelmezett, F-be érkező $\mathscr{R}$-egyszerű függvények halmazát $\widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R})$ jelöli.*

Másként fogalmazva, $\widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R})$ egyenlő az $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ halmaz sup-norma szerinti *lezártjával* a $T \to F$ korlátos függvények terében, tehát $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ a sup-norma szerint *sűrű* $\widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R})$-ben. Ebből azonnal látható, hogy $\widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R})$ lineáris altere az $\mathscr{F}^b(T;F)$ függvénytérnek, de ez természetesen közvetlenül is könnyen belátható. Ha F teljes, akkor $\mathscr{F}^b(T;F)$ a sup-normával ellátva Banach-tér, tehát $\widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R})$ teljes lineáris altér, vagyis $\widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R})$ a sup-normával ellátva szintén Banach-tér.

Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, F normált tér, és $f \in \widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R})$, akkor $\|f\| \in \widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$, hiszen ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon, akkor az $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$-ben halad, $\|f\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$, és az $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat szintén egyenletesen konvergens a T halmazon.

5.2.2. Definíció. *Ha M metrikus tér, és F normált tér, akkor egy $f : M \to F$ függvényt* **végtelenben eltűnőnek** *nevezünk, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, amelyre minden $x \in M \setminus K$ esetén $\|f(x)\| < \varepsilon$ teljesül.*

Természetesen, ha M metrikus tér, és F normált tér, akkor minden $M \to F$ *kompakt tartójú* függvény végtelenben eltűnő.

5.2.3. Állítás. *Ha $n \in \mathbb{N}^*$, és F normált tér, akkor minden $\mathbb{R}^n \to F$ folytonos, végtelenben eltűnő függvény $\mathscr{R}_{\mathbb{R}^n}$-egyszerű.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to F$ folytonos, végtelenben eltűnő függvény, és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Megmutatjuk olyan $g \in \mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_{\mathbb{R}^n})$ függvény létezését, amelyre fennáll a $|||f - g||| \leq \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Az f végtelenben eltűnő, ezért vehetünk olyan $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmazt, amelyre minden $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ esetén $\|f(x)\| < \varepsilon$. A K halmaz korlátos az $\mathbb{R}^n$ feletti $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint, ezért léteznek olyan $(a_k)_{k\in n}$, $(b_k)_{k\in n}$ rendszerek $\mathbb{R}^n$-ben, hogy minden $n \ni k$-ra $a_k < b_k$, és $K \subseteq \prod_{k\in n}[a_k, b_k] =: K'$. A K' halmaz kompakt $\mathbb{R}^n$-ben, tehát ezt ellétva a $\|\cdot\|_\infty$ norma által meghatározott metrika leszűkítésével, a Heine-tétel alapján kapjuk, hogy az $f|_{K'} : K' \to F$ függvény *egyenletesen folytonos*. Tehát az ε-hoz rögzíthetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre minden $x, x' \in K'$ esetén, ha $\|x - x'\|_\infty < \delta$, akkor $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$.

Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan szám, amelyre $1/\delta < N$, és minden $n \ni k$-hoz rögzítsünk egy $b'_k > b_k$ valós számot. Minden $k < n$ és $j < N$ természetes számra értelmezzük az

$$E_{k,j} := [a_k + (j/N)(b'_k - a_k), a_k + ((j+1)/N)(b'_k - a_k)[$$

halmazt, ami eleme $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$-nek, vagyis az $\mathbb{R}$ feletti standard félgyűrűnek. Nyilvánvaló, hogy ha $k \in n$, akkor $[a_k, b'_k[= \bigcup_{j\in N} E_{k,j}$, amiből a szorzásra és unióra vonatkozó disztributivitás formula alapján következik, hogy

$$\prod_{k\in n}[a_k, b'_k[= \prod_{k\in n}\Big(\bigcup_{j\in N} E_{k,j}\Big) = \bigcup_{\sigma\in\mathscr{F}(n;N)}\Big(\prod_{k\in n} E_{k,\sigma(k)}\Big).$$

Világos, hogy a $\Big(\prod_{k\in n} E_{k,\sigma(k)}\Big)_{\sigma\in\mathscr{F}(n;N)}$ rendszer diszjunkt, véges, és minden tagja nem üres eleme $\mathscr{S}_{\mathbb{R}^n}$-nek, vagyis az $\mathbb{R}^n$ feletti standard félgyűrűnek. Legyen

$$(z_\sigma)_{\sigma\in\mathscr{F}(n;N)} \in \prod_{\sigma\in\mathscr{F}(n;N)}\Big(\prod_{k\in n} E_{k,\sigma(k)}\Big)$$

tetszőlegesen kiválasztott elem, és legyen

$$g := \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(n;N)} \chi_{E_\sigma}.f(z_\sigma),$$

ahol $\sigma \in \mathscr{F}(n;N)$ esetén $E_\sigma := \prod_{k\in n} E_{k,\sigma(k)}$. Ekkor természetesen $g \in \mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_{\mathbb{R}^n})$; megmutatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ teljesül.

Valóban, ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus \prod_{k\in n}[a_k, b'_k[$, akkor $g(x) = 0$, és $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ miatt $\|f(x)\| < \varepsilon$, így $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$. Ha $x \in \prod_{k\in n}[a_k, b'_k[= \bigcup_{\sigma\in\mathscr{F}(n;N)} E_\sigma$, akkor létezik olyan $\sigma \in \mathscr{F}(n;N)$, hogy $x \in E_\sigma$, tehát $g(x) = f(z_\sigma)$. Ekkor $x, z_\sigma \in E_\sigma$, és az E_σ bármely két elemének távolsága a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint kisebb-egyenlő $1/N$-nél, tehát kisebb δ-nál, vagyis $\|f(x) - g(x)\| = \|f(x) - f(z_\sigma)\| < \varepsilon$.

Ezzel megmutattuk, hogy $|||f - g||| \leq \varepsilon$. Ebből következik, hogy f egyenletesen közelíthető $\mathbb{R}^n$-en $\mathscr{R}_{\mathbb{R}^n}$-lépcsősfüggvényekkel. ■

5.3. A Riemann-integrálás alaptétele

5.3.1. Tétel. (**A Riemann-integrálás alaptétele**) *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ additív halmazfüggvény. A következő állítások ekvivalensek.*

a) $\mathbf{m}$ *korlátos.*

b) *Az* $\mathbf{m}$ *által generált elemi integrál folytonos a sup-normával ellátott $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ függvénytér és az F normált tér között.*

c) *Létezik egyetlen olyan $\widehat{\mathbf{m}} : \widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R}) \to F$ lineáris operátor, amely folytonos a sup-normával ellátott $\widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R})$ függvénytér, és az F Banach-tér között, és amelyre teljesül az, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\widehat{\mathbf{m}}(\chi_{_E}) = \mathbf{m}(E)$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy az a) és b) kijelentések még akkor is ekvivalensek, ha F nem teljes. A c) állításból következik, hogy az adott tulajdonságú $\widehat{\mathbf{m}}$ operátor az $\mathbf{m}$ által generált elemi integrál lineáris kiterjesztése $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$-ről $\widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R})$-re, ezért b) teljesül. Végül, a b)$\Rightarrow$c) implikáció nyilvánvalóan következik a normált tér sűrű lineáris alterén értelmezett, Banach-térbe ható folytonos lineáris operátorok egyértelmű folytonos kiterjeszthetőségének tételéből (VI. fejezet, 2. pont). ■

5.3.2. Definíció. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ korlátos additív halmazfüggvény. Az $\mathbf{m}$ által generált* **egyszerű Riemann-integrálnak** *nevezzük azt a $\widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R}) \to F$ sup-normában folytonos lineáris operátort, amely minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\chi_{_E}$-hez a $\mathbf{m}(E)$ vektort rendeli. Ha $\varphi \in \widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R})$, akkor a φ egyszerű integrálját szintén az $\displaystyle\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m}$ szimbólummal jelöljük, ami nem okozhat félreértést, mert az $\mathbf{m}$ által generált egyszerű integrál az elemi integrál kiterjesztése.*

A normált tér sűrű alterén értelmezett, Banach-térbe ható folytonos lineáris operátor folytonos kiterjesztési tételének *bizonyítása* alapján az egyszerű integrálok *kiszámítására* a következő "eljárás" adható. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ korlátos additív halmazfüggvény, és $\varphi \in \widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R})$. Vegyünk tetszőleges olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$-ben, amely egyenletesen konvergens T-n, és $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$. Ekkor az

$$\Big(\int \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

elemi integrálok sorozata F-ben Cauchy-sorozat, tehát konvergens, és ekkor a határértéke csak φ-től és $\mathbf{m}$-től függ, nem pedig a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat választásától; ekkor

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{m}$$

teljesül.

5.3.3. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ korlátos változású additív halmazfüggvény. Ha $|\mathbf{m}|$ korlátos, akkor $\mathbf{m}$ korlátos, és minden $\varphi \in \widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R})$ esetén*

$$\Big\| \int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big\| \leq \int |\varphi| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}|$$

teljesül.

Bizonyítás. Minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\|\mathbf{m}(E)\| \le |\mathbf{m}|(E)$, ezért $|\mathbf{m}|$ korlátosságából következik $\mathbf{m}$ korlátossága.

Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$-ben, amely egyenletesen konvergens T-n, és $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$; ekkor

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

Ugyanakkor $(|\varphi_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$-ben, amely egyenletesen konvergens T-n, és $|\varphi| = \lim_{n\to\infty} |\varphi_n|$, következésképpen

$$\int |\varphi| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}|.$$

Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül az

$$\Big\| \int \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big\| \le \int |\varphi_n| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}|$$

egyenlőtlenség. Ebből következik, hogy

$$\Big\| \int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big\| = \lim_{n\to\infty} \Big\| \int \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big\| \le \lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = \int |\varphi| \, \mathrm{d}|\mathbf{m}|,$$

és ezt kellett bizonyítani. ■

5.3.4. Állítás. (**Az egyszerű integrál és folytonos lineáris operátor felcserélhetősége**) *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ korlátos additív halmazfüggvény. Ha G is Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $u : F \to G$ folytonos lineáris operátor, akkor $u \circ \mathbf{m} : \mathscr{R} \to G$ korlátos additív halmazfüggvény, és minden $\varphi \in \widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T,\mathscr{R})$ esetén*

$$u\Big(\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big) = \int \varphi \, \mathrm{d}(u \circ \mathbf{m}).$$

Bizonyítás. Az u operátor korlátos halmazt korlátosba képez le, ezért $u \circ \mathbf{m}$ korlátos függvény. Továbbá, az u additivitásából következik az $u \circ \mathbf{m} : \mathscr{R} \to G$ halmazfüggvény additivitása.

Ha $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$, és $(E_i)_{i\in I}$ olyan véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, valamint $(c_i)_{i\in I}$ olyan rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy $\varphi = \sum_{i\in I} c_i \chi_{E_i}$, akkor az elemi integrál definíciója és az u linearitása folytán

$$u\Big(\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big) = u\Big(\sum_{i\in I} c_i \mathbf{m}(E_i) \Big) = \sum_{i\in I} c_i u(\mathbf{m}(E_i)) = \int \varphi \, \mathrm{d}(u \circ \mathbf{m}),$$

tehát a bizonyítandó egyenlőség teljesül minden $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}) \ni \varphi$-re.

Legyen $\varphi \in \widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T,\mathscr{R})$, és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$-ben, amely egyenletesen konvergál φ-hez. Ekkor az u folytonossága, az egyszerű integrál definíciója, és az előző bekezdés alapján

$$u\Big(\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big) := u\Big(\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big) = \lim_{n\to\infty} u\Big(\int \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}(u \circ \mathbf{m}) = \int \varphi \, \mathrm{d}(u \circ \mathbf{m}) \ ■$$

Végül megjegyezzük, hogy a Riemann-integrálás alaptételének van olyan változata, amely a *relatív korlátos* additív halmazfüggvényeket jellemzi az általuk generált elemi integrálok kiterjesztési tulajdonságaival (**3**. gyakorlat).

5.4. Gyakorlatok

1. Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és F normált tér, akkor egy $f : T \to F$ függvény pontosan akkor eleme $\widehat{\mathscr{E}_F}(T, \mathscr{R})$-nek, ha teljesülnek rá a következők

- minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén létezik olyan $E \in \mathscr{R}$, hogy minden $t \in T \setminus E$ pontra $\|f(t)\| < \varepsilon$;

- minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és $E \in \mathscr{R}$ esetén létezik olyan $g \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$, hogy minden $E \ni t$-re $\|f(t) - g(t)\| < \varepsilon$.

2. Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor

$$\mathscr{R} = \{E \in \mathscr{P}(T) | \chi_{_E} \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R})\} = \{E \in \mathscr{P}(T) | \chi_{_E} \in \widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R})\}.$$

(*Útmutatás*. Legyen $E \subseteq T$ olyan halmaz, hogy $\chi_{_E} \in \widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R})$; azt kell megmutatni, hogy $E \in \mathscr{R}$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges valós szám. Az **1**. gyakorlat szerint van olyan $E' \in \mathscr{R}$, hogy minden $t \in T \setminus E'$ pontra $|\chi_{_E}(t)| < \varepsilon$, így $\varepsilon < 1$ esetén $T \setminus E' \subseteq T \setminus E$, vagyis $E \subseteq E'$. A továbbiakban feltesszük, hogy $\varepsilon < 1$. A **1**. gyakorlat szerint van olyan $g \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R})$, hogy minden $t \in E'$ esetén $|\chi_{_E}(t) - g(t)| < \varepsilon$. Könnyen látható, hogy $\{t \in T | g(t) > \varepsilon\} \cap E' \subseteq E$, hiszen ha $t \in T$ olyan volna, hogy $g(t) > \varepsilon$, $t \in E'$ és $t \notin E$, akkor $\varepsilon > |\chi_{_E}(t) - g(t)| = |g(t)| \geq g(t) > \varepsilon$, ami lehetetlen. Ugyanakkor, $\varepsilon \leq 1/2$ esetén $E \subseteq \{t \in T | g(t) > \varepsilon\} \cap E'$ is igaz, mert ha $t \in E$ és $g(t) \leq \varepsilon$ egyszerre teljesülne, akkor $\varepsilon > |\chi_{_E}(t) - g(t)| = |1 - g(t)| \geq 1 - g(t) \geq 1 - \varepsilon$, így $\varepsilon > 1/2$ lenne. Tehát ha $\varepsilon \leq 1/2$, akkor $E = \{t \in T | g(t) > \varepsilon\} \cap E' \in \mathscr{R}$.)

3. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és F normált tér. Minden $E \in \mathscr{R}$ halmazra $\widehat{\mathscr{E}_F}(T, \mathscr{R}, E)$ jelöli azon $f : T \to F$ függvények halmazát, amelyekhez létezik olyan $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben, hogy $f = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n$, és a $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{t \in T | \varphi_n(t) \neq 0\} \subseteq E$. Továbbá, minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E)$ jelöli azon $\varphi \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$ függvények halmazát, amelyekre $\{t \in T | \varphi(t) \neq 0\} \subseteq E$.

a) Minden $E \in \mathscr{R}$ esetén

$$\overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E)} = \widehat{\mathscr{E}_F}(T, \mathscr{R}, E) = \{f \in \widehat{\mathscr{E}_F}(T, \mathscr{R}) | \{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq E\},$$

ahol $\overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E)}$ jelöli az $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E)$ függvényhalmaz sup-norma szerinti lezártját.

b) Az $\bigcup\limits_{E \in \mathscr{R}} \widehat{\mathscr{E}_F}(T, \mathscr{R}, E)$ halmaz olyan lineáris altere $\widehat{\mathscr{E}_F}(T, \mathscr{R})$-nek, amely tartalmazza az $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$ függvényteret.

c) Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, akkor egy $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ additív függvény pontosan akkor *relatív korlátos*, ha létezik olyan $\mathbf{I} : \bigcup\limits_{E \in \mathscr{R}} \widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R}, E) \to F$ lineáris operátor, amelyre a következők teljesülnek:

- minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\mathbf{I}(\chi_{_E}) = \mathbf{m}(E)$, tehát a $\mathbf{I}$ leszűkítése $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$-re egyenlő az $\mathbf{m}$ által generált elemi integrállal;

- minden $E \in \mathscr{R}$ esetén az $\mathbf{I}$ leszűkítése $\widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R}, E)$-re folytonos a sup-normában, vagyis minden $\mathscr{R} \ni E$-hez létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $f \in \widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R}, E)$ esetén $\|\mathbf{I}(f)\| \leq C \|f\|_T$.

d) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\bigcup_{E \in \mathscr{R}_{\mathbb{R}^n}} \widehat{\mathscr{E}}_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_{\mathbb{R}^n}, E)$$

függvénytér tartalmazza az $\mathbb{R}^n \to F$ kompakt tartójú folytonos függvények halmazát.

(Megjegyezzük, hogy ez az $\mathbf{I}$ operátor egyértelműen van meghatározva, és $\mathbf{I}$-t az $\mathbf{m}$ által generált *egyszerű integrálnak* nevezzük.)

(*Útmutatás.* a) A definíció alapján nyilvánvaló, hogy $E \in \mathscr{R}$ esetén

$$\overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E)} \subseteq \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E) \subseteq \{f \in \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}) | \{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq E\}.$$

Tegyük fel, hogy $f \in \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R})$ olyan, amelyre $\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq E$. Legyen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben, hogy $f = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n$, és a $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon. Ekkor a $(\chi_E \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E)$-ben halad, és egyenletesen konvergál f-hez a T halmazon, tehát $f \in \overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E)}$.

b) Ha $E, E' \in \mathscr{R}$, akkor az a) alapján

$$\widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E) \cup \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E') = \overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E)} \cup \overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E')} =$$
$$= \overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E) \cup \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E')} \subseteq \overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E \cup E')} = \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E \cup E'),$$

amiből következik, hogy $\bigcup\limits_{E \in \mathscr{R}} \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E)$ lineáris altere $\widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R})$-nek.

c) Legyen $\mathbf{m}$ relatív korlátos, $E \in \mathscr{R}$ rögzített, és $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ olyan, hogy $[\varphi \neq 0] := \{t \in T | \varphi(t) \neq 0\} \subseteq E$. Vegyünk tetszőleges olyan $u \in F'$ funkcionált, amelyre $\|u\| \leq 1$. Az $u \circ \mathbf{m} : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ additív halmazfüggvény relatív korlátos, tehát *korlátos változású*, ezért a korábbi számításokhoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\left| u\Big(\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big) \right| \leq |||\varphi \, ||| \, |u \circ \mathbf{m}|([\varphi \neq 0]) \leq |||\varphi \, ||| \, |u \circ \mathbf{m}|(E) \leq$$
$$\leq |||\varphi \, ||| \, d(\mathbb{K}) \sup_{E' \in \mathscr{R}, \ E' \subseteq E} |(u \circ \mathbf{m})(E')| \leq \Big(d(\mathbb{K}) \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} \|\mathbf{m}(E')\| \Big) \, ||| \, \varphi |||,$$

így a Hahn-Banach-tételből következik, hogy

$$\Big\| \int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} \Big\| \leq \Big(d(\mathbb{K}) \sup_{\substack{E' \in \mathscr{R} \\ E' \subseteq E}} \|\mathbf{m}(E')\| \Big) \, ||| \, \varphi |||,$$

vagyis az $\mathbf{m}$ által generált elemi integrál $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, E)$-re vett leszűkítése folytonos a sup-norma szerint, így az F teljessége miatt egyértelműen kiterjeszthető $\mathbf{I}_E : \overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E)} \to F$ sup-normában folytonos lineáris operátorrá. Minden $E \in \mathscr{R}$ esetén az a) alapján $\overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E)} = \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E)$, tehát $\mathrm{Dom}(\mathbf{I}_E) = \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E)$. Ha $E, E' \in \mathscr{R}$, akkor az a)-ból következik, hogy

$$\widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E) \cap \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E') = \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E \cap E') = \overline{\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E \cap E')},$$

továbbá az $\mathbf{I}_E$ és $\mathbf{I}_{E'}$ operátorok leszűkítése az $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}, E \cap E')$ függvénytérre egyenlő, így az egyenlőségek folytatásának elve alapján $\mathbf{I}_E = \mathbf{I}_{E'}$ az $\widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E) \cap \widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E')$ halmazon. Ebből következik egyetlen olyan $\mathbf{I} : \bigcup\limits_{E \in \mathscr{R}} \widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, E) \to F$ leképezés létezése, amelyre minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\mathbf{I} = \mathbf{I}_E$ az $\widehat{\mathscr{E}}_F(T, \mathscr{R}, E)$ halmazon. Ez az $\mathbf{I}$ leképezés az az operátor, amelynek létezését állítottuk.)

4. Legyen $\mathscr{B}$ σ-algebra a T halmaz felett, és jelölje $\mathscr{B}(\mathbb{K})$ a $\mathbb{K}$ Borel-féle σ-algebráját (VIII. fejezet, 1. pont, **3**. gyakorlat). Minden $f : T \to \mathbb{K}$ korlátos függvényre a következő állítások ekvivalensek.

(i) $f \in \widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{B})$.

(ii) Létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{B})$-ben, hogy $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

(iii) Minden $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{B}$.

(iv) Minden $H \in \mathscr{B}(\mathbb{K})$ Borel-halmazra $\overset{-1}{f}\langle H\rangle \in \mathscr{B}$.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor ezek az állítások ekvivalensek a következővel.

(iii)$'$ Minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\{t \in T | f(t) > c\} \in \mathscr{B}$ (illetve $\{t \in T | f(t) < c\} \in \mathscr{B}$).

(*Útmutatás.* Csak a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetre bizonyítunk; a komplex függvények esete erre könnyen visszavezethető.

(i)$\Rightarrow$(ii) Az $\widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{B})$ definíciója szerint nyilvánvaló.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B})$-ben, hogy $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$. Ha $t \in T$, akkor teljesülnek a következő ekvivalenciák:

$$t \in \overset{-1}{f}\langle]a,b[\rangle \;\Leftrightarrow\; a < f(t) < b \;\Leftrightarrow\; a < \lim_{n\to\infty} f_n(t) < b \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : ((n > m) \Rightarrow (a < f_n(t) < b)) \;\Leftrightarrow\; t \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big(\bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>m}} \overset{-1}{f_n}\langle]a,b[\rangle \Big),$$

következésképpen

$$\overset{-1}{f}\langle]a,b[\rangle = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big(\bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>m}} \overset{-1}{f_n}\langle]a,b[\rangle \Big) \in \mathscr{B},$$

hiszen nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\overset{-1}{f_n}\langle]a,b[\rangle \in \mathscr{B}$, mert $f_n \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B})$, továbbá $\mathscr{B}$ σ-algebra a T halmaz felett. Az $\mathbb{R}$ minden nyílt részhalmaza előáll megszámlálható sok korlátos nyílt intervallum uniójaként, ezért ebből következik, hogy minden $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{B}$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Vezessük be az

$$\mathscr{A} := \{H \subseteq \mathbb{K} | \overset{-1}{f}\langle H\rangle \in \mathscr{B}\}$$

halmazt. Könnyen látható, hogy ez σ-algebra $\mathbb{R}$ felett, és a (iii) szerint tartalmazza az $\mathbb{R}$ nyílt részhalmazainak halmazát, ezért a $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ Borel-féle σ-algebrát is. Ezért minden $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ esetén $H \in \mathscr{A}$, vagyis $\overset{-1}{f}\langle H\rangle \in \mathscr{B}$.

(iv)$\Rightarrow$(i) Tegyük fel, hogy $f : T \to \mathbb{R}_+$ olyan korlátos függvény, amelyre (iv) teljesül. Legyen minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{\overset{-1}{f}\langle [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\rangle}.$$

Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ monoton növő függvényrendszer minden tagja a (iv) alapján eleme $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{B})$-nek, hiszen $a,b \in \mathbb{R}$ esetén $[a,b[\in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Könnyen látható, hogy $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, ezért $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Ugyanakkor az f korlátosságából következik, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ egyenletesen konvergens a T halmazon, így $f \in \widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{B})$.

Világos, hogy (iii)⇒(iii)′, ugyanakkor (iii)′ ⇒(iii) is teljesül, mert $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ esetén

$$\overset{-1}{f}\langle]a,b[\rangle = \{t\in T|f(t)<b\}\cap\{t\in T|f(t)>a\}\in\mathscr{B},$$

így minden $\Omega\subseteq\mathbb{K}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle\in\mathscr{B}$.)

6. fejezet

Mértékek és mértékterek

6.1. σ-additív halmazfüggvények

Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ additív halmazfüggvény.

– Ha $\mathbf{m}$ *korlátos*, akkor a Riemann-integrálás alaptétele szerint tekinthetjük az $\mathbf{m}$ által generált egyszerű integrált az $\widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ függvénytér felett, és ez az integrál folytonos a sup-norma szerint. Másként fogalmazva, ha $\varphi \in \widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$, és $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$-ben, amely egyenletesen konvergens a T halmazon, és $\varphi = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n$, akkor $\displaystyle\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{m}$. Ha viszont $\varphi \in \widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$, és $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$-ben, amely csak pontonként, de nem egyenletesen konvergens a T halmazon, és $\varphi = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n$, akkor már előfordulhat az, hogy az $\left(\displaystyle\int \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{m}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ egyszerű integrál-sorozat *nem konvergens* (**1**. gyakorlat), vagy konvergens, de a határértéke *nem egyenlő* az $\displaystyle\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m}$ egyszerű integrállal (**1**. gyakorlat). Sőt ez a jelenség már akkor is megfigyelhető, ha $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$, és a $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$-nek eleme, vagyis $\mathscr{R}$-lépcsősfüggvény.

– Ha $\mathbf{m}$ *nem korlátos*, akkor a Riemann-integrálás alaptétele szerint az $\mathbf{m}$ által generált elemi integrál *nem terjeszthető* ki $\widehat{\mathscr{E}}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$-re sup-norma szerint folytonos lineáris operátorrá, ezért szükségképpen létezik olyan $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$, és olyan $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$-ben, amely egyenletesen konvergens a T halmazon, és $\varphi = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n$, azonban az $\left(\displaystyle\int \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{m}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ elemi integrál-sorozat *nem konvergál* az $\displaystyle\int \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{m}$ elemi integrálhoz.

Ez azt jelenti, hogy az általános esetben a halmazgyűrűn értelmezett, Banach-térbe ható additív halmazfüggvények által generált elemi integrálok egészen rossz tulajdonságúak lehetnek a lépcsősfüggvények *pontonkénti konvergenciáját* illetően.

Ebben a pontban egy olyan analitikus természetű tulajdonságot értelmezünk additív halmazfüggvényekre (a *σ-additivitást*), amely biztosítani fogja azt, hogy ha egy valós lépcsősfüggvényekből álló sorozat *monoton növő* vagy *monoton fogyó*, és a pontonkénti limeszfüggvénye szintén lépcsősfüggvény, akkor a limeszfüggvény elemi integrálja megegyezik a függvények elemi integráljainak határértékével. A σ-additív és korlátos változású additív halmazfüggvényeket nevezzük majd *mértékeknek*.

6.1.1. Definíció. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű és F normált tér. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ függvény* σ-**additív**, *ha minden $\mathscr{S}$-beli $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozatra, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{S}$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(E_k)$ sor konvergens F-ben, és $\mathbf{m}\Big(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}(E_k)$ teljesül.*

Megjegyzések. Az alábbi megjegyzésekben feltesszük, hogy $\mathscr{S}$ félgyűrű és F normált tér $\mathbb{K}$ felett.

1) Ha az $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ halmazfüggvény σ-additív, akkor additív is, mert ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, hogy $\bigcup\limits_{i\in I} E_i \in \mathscr{S}$, akkor egyértelműen létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyhez létezik $\pi : N \to I$ bijekció, és ekkor az

$$\mathbb{N} \to \mathscr{P}(T); \quad k \mapsto E'_k := \begin{cases} E_{\pi(k)} & \text{, ha } k < N, \\ \emptyset & \text{, ha } k \geq N \end{cases}$$

halmazsorozat $\mathscr{S}$-ben halad, diszjunkt, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E'_k = \bigcup\limits_{i\in I} E_i \in \mathscr{S}$, így az $\mathbf{m}$ σ-additivitása miatt a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(E'_k)$ sor konvergens F-ben (ami triviális, hiszen az $(\mathbf{m}(E'_k))_{k\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat minden N-nél nagyobb-egyenlő indexű tagja 0), továbbá

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \mathbf{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E'_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}(E'_k) = \sum_{k\in N} \mathbf{m}(E_{\pi(k)}) = \sum_{i\in I} \mathbf{m}(E_i)$$

teljesül.

2) Ha az $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ halmazfüggvény σ-additív, és $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{S}$-ben, hogy $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{S}$, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(E_k)$ sor *feltétlen konvergens* F-ben, vagyis ennek minden átrendezése konvergens, és ugyanaz az összege. Ez triviálisan következik abból, hogy minden $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcióra az $(E_{\pi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat szintén diszjunkt, és $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_{\pi(k)} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{S}$, tehát az $\mathbf{m}$ σ-additivitása folytán a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(E_{\pi(k)})$ sor konvergens F-ben, és $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}(E_{\pi(k)}) = \mathbf{m}\Big(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}(E_k)$. Véges dimenziós normált térben egy sor pontosan akkor feltétlen konvergens, ha abszolút konvergens (II. fejezet, 4. pont, **4**. gyakorlat), ezért a fentiekből következik, hogy ha F véges dimenziós, $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ σ-additív halmazfüggvény, és $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{S}$-ben, hogy $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{S}$, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(E_k)$ sor abszolút konvergens F-ben.

3) Ha $\mathbf{m}, \mathbf{m}' : \mathscr{S} \to F$ σ-additív halmazfüggvények és $c \in \mathbb{K}$, akkor az $\mathbf{m} + \mathbf{m}'$ és $c.\mathbf{m}$ halmazfüggvények is σ-additívak. Ez a σ-additivitás definíciójából könnyen látható.

6.1.2. Állítás. *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű, $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény, és $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{S}$-ben, hogy $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{S}$, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k)$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) \leq \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big)$$

teljesül. (*Ezt a tulajdonságot* **megszámlálható szuperadditivitásnak** *nevezzük.*)

Bizonyítás. (I) Először arra az esetre bizonyítunk, amikor $\mathscr{S}$ *halmazgyűrű.* Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén $\bigcup_{k\in n} E_k \in \mathscr{S}$, tehát a μ additivitása és pozitivitása miatt

$$\sum_{k\in n} \mu(E_k) = \mu\Big(\bigcup_{k\in n} E_k\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big),$$

vagyis a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k)$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k\in n} \mu(E_k)\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big)$$

teljesül.

(II) Tegyük fel, hogy $\mathscr{S}$ tetszőleges félgyűrű, és jelölje $\mathscr{R}$ az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrűt, valamint ν a μ additív kiterjesztését $\mathscr{S}$-ről $\mathscr{R}$-re. Az (I) alapján a $\nu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény megszámlálhatóan szuperadditív, és akkor triviális, hogy μ is ilyen. ■

Ha tehát $\mathscr{R}$ halmazgyűrű és $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény, akkor a μ σ-additivitása ekvivalens azzal, hogy minden $\mathscr{R}$-ben haladó $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozatra, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$ esetén fennáll a

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k)$$

egyenlőtlenség. (Ezt a tulajdonságot **megszámlálható szubadditivitásnak** nevezzük.)

6.2. σ-additív halmazfüggvény kiterjesztése félgyűrűről halmazgyűrűre

Korábban láttuk, hogy a félgyűrűn értelmezett, normált térbe ható additív halmazfüggvények korlátossági tulajdonságai nem öröklődnek a generált halmazgyűrűre vett additív kiterjesztésekre. Ezzel szemben a σ-additivitás öröklődő tulajdonság: erről szól a következő állítás.

6.2.1. Állítás. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű, $\mathscr{R}$ az általa generált halmazgyűrű, és F normált tér. Ha $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény, és $\tilde{\mathbf{m}} : \mathscr{R} \to F$ az $\mathbf{m}$ additív kiterjesztése, akkor $\mathbf{m}$ σ-additivitása ekvivalens $\tilde{\mathbf{m}}$ σ-additivitásával.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\tilde{\mathbf{m}}$ σ-additivitásából következik $\mathbf{m}$ σ-additivitása. Tegyük fel, hogy $\mathbf{m}$ σ-additív, és legyen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{R}$-ben, hogy $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$. Azt kell igazolni, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \tilde{\mathbf{m}}(E_k)$ sor konvergens F-ben, és $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{m}}(E_k) = \tilde{\mathbf{m}}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big)$.

Ha a $\{k \in \mathbb{N} | E_k \neq \emptyset\}$ halmaz véges, akkor elegendő az $\tilde{\mathbf{m}}$ additivitását alkalmazni, ezért feltesszük, hogy ez a halmaz végtelen.

Legyen $(E'_i)_{i\in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, amelyre $\bigcup_{i\in I} E'_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. A kiválasztási axióma alkalmazásával kiválaszthatunk olyan $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{N}$-ben, és olyan $((E_{k,j})_{j\in n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer-sorozatot, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(E_{k,j})_{j\in n_k}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, és $\bigcup_{j\in n_k} E_{k,j} = E_k$.

A $\{k \in \mathbb{N} | E_k \neq \emptyset\}$ halmaz végtelensége folytán a $\{k \in \mathbb{N} | n_k > 0\}$ halmaz is végtelen, így az $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{k\} \times n_k)$ halmaz megszámlálhatóan végtelen; legyen $\pi : \mathbb{N} \to \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{k\} \times n_k)$ tetszőleges bijekció. Minden $i \in I$ esetén

$$E'_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(E'_i \cap E_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Big(\bigcup_{j\in n_k}(E'_i \cap E_{k,j})\Big) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}}(E'_i \cap E_{\pi(p)}),$$

és $E'_i \in \mathscr{S}$, valamint minden $\mathbb{N} \ni p$-re $E'_i \cap E_{\pi(p)} \in \mathscr{S}$, így az $\mathbf{m}$ σ-additivitása miatt a $\sum_{p\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(E'_i \cap E_{\pi(p)})$ sor konvergens F-ben, és $\sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{m}(E'_i \cap E_{\pi(p)}) = \mathbf{m}(E'_i)$. Ebből az I halmaz végessége és az $\tilde{\mathbf{m}}$ definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\tilde{\mathbf{m}}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) = \tilde{\mathbf{m}}\Big(\bigcup_{i\in I} E'_i\Big) = \sum_{i\in I} \mathbf{m}(E'_i) =$$

$$= \sum_{i\in I}\Big(\sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{m}(E'_i \cap E_{\pi(p)})\Big) = \sum_{p=0}^{\infty}\Big(\sum_{i\in I} \mathbf{m}(E'_i \cap E_{\pi(p)})\Big) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{m}(E_{\pi(p)}),$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy minden $p \in \mathbb{N}$ esetén $E_{\pi(p)} = \bigcup_{i\in I}(E'_i \cap E_{\pi(p)})$, és az $\mathbf{m}$ additív. Ezzel megmutattuk, hogy *minden* $\pi : \mathbb{N} \to \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{k\} \times n_k)$ bijekcióra igaz az, hogy a $\sum_{p\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(E_{\pi(p)})$ sor konvergens F-ben, és $\sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{m}(E_{\pi(p)}) = \tilde{\mathbf{m}}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big)$. Ezért elég volna azt igazolni, hogy *létezik* olyan $\pi : \mathbb{N} \to \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{k\} \times n_k)$ bijekció, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{m}(E_{\pi(p)}) - \sum_{k\in n}\Big(\sum_{j\in n_k} \mathbf{m}(E_{k,j})\Big)\Big\| = 0,$$

hiszen a $\Big(\sum_{k\in n}\Big(\sum_{j\in n_k} \mathbf{m}(E_{k,j})\Big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat *egyenlő* a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \tilde{\mathbf{m}}(E_k)$ sorral.

Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\tau(k) := \sum_{j\in k} n_j$. Az $\{k \in \mathbb{N} | n_k > 0\}$ halmaz végtelensége miatt $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *nem korlátos* monoton növő sorozat, így $\mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\tau(k), \tau(k+1)[$. Legyen $\pi{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N}$ az a függvény, amely minden $p \in \mathbb{N}$ számhoz a $\pi(p) := (k, p - \tau(k))$ párt rendeli, ahol $k \in \mathbb{N}$ az az egyértelműen meghatározott szám, amelyre $p \in [\tau(k), \tau(k+1)[$. Könnyen látható, hogy π bijekció $\mathbb{N}$ és $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{k\} \times n_k)$ között. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor nyilvánvalóan $[0, \tau(n)[= \bigcup_{k\in n} [\tau(k), \tau(k+1)[$, ezért a π definíciója alapján

$$\sum_{p\in\tau(n)} \mathbf{m}(E_{\pi(p)}) = \sum_{k\in n} \Big(\sum_{p\in[\tau(k),\tau(k+1)[} \mathbf{m}(E_{\pi(p)}) \Big) = \sum_{k\in n} \Big(\sum_{j\in n_k} \mathbf{m}(E_{k,j}) \Big).$$

Ebből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{m}(E_{\pi(p)}) - \sum_{k\in n} \Big(\sum_{j\in n_k} \mathbf{m}(E_{k,j}) \Big) = \sum_{p=\tau(n)+1}^{\infty} \mathbf{m}(E_{\pi(p)}).$$

De a $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sorozat nem korlátos, és a $\sum_{p\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(E_{\pi(p)})$ sor konvergens F-ben, ezért fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=\tau(n)+1}^{\infty} \mathbf{m}(E_{\pi(p)}) = 0$$

egyenlőség, amit bizonyítani akartunk. ■

6.3. Korlátos változású σ-additív halmazfüggvények

6.3.1. Állítás. *Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, F normált tér, és $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ korlátos változású additív halmazfüggvény, akkor az $\mathbf{m}$ σ-additivitása ekvivalens az $|\mathbf{m}|$ σ-additivitásával.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{m}$ σ-additív, és legyen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$. Legyen $(H_\alpha)_{\alpha\in A}$ tetszőleges olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, amelyre $\bigcup_{\alpha\in A} H_\alpha = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Minden $\alpha \in A$ esetén $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (H_\alpha \cap E_k) = H_\alpha \in \mathscr{R}$, és természetesen $(H_\alpha \cap E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt rendszer $\mathscr{R}$-ben, ezért az $\mathbf{m}$ σ-additivitása miatt a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(H_\alpha \cap E_k)$ sor konvergens F-ben, és $\mathbf{m}(H_\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}(H_\alpha \cap E_k)$. Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $E_k = \bigcup_{\alpha\in A} (H_\alpha \cap E_k)$, és természetesen $(H_\alpha \cap E_k)_{\alpha\in A}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben. Ezért az $\mathbf{m}$ σ-additivitása, és az $|\mathbf{m}|$ definíciója szerint

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in A} \|\mathbf{m}(H_\alpha)\| &= \sum_{\alpha\in A} \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}(H_\alpha \cap E_k) \Big\| = \sum_{\alpha\in A} \Big(\lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{k\in n} \mathbf{m}(H_\alpha \cap E_k) \Big\| \Big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha\in A} \Big\| \sum_{k\in n} \mathbf{m}(H_\alpha \cap E_k) \Big\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\alpha\in A} \Big\| \sum_{k\in n} \mathbf{m}(H_\alpha \cap E_k) \Big\| \le \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in n} \sum_{\alpha\in A} \|\mathbf{m}(H_\alpha \cap E_k)\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in n} |\mathbf{m}|(E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{m}|(E_k).\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$|\mathbf{m}|\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \Big) \le \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{m}|(E_k),$$

tehát az $|\mathbf{m}| : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény megszámlálhatóan szubadditív, így σ-additív.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $|\mathbf{m}|$ σ-additív, és legyen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$. Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor $\bigcup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} E_k = \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \setminus \Big(\bigcup_{k\in n} E_k\Big) \in \mathscr{R}$, hiszen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű. Ezért a $\mathbf{m}$ additivitása, szubtraktivitása, és az $|\mathbf{m}|$ σ-additivitása folytán

$$\Big\|\mathbf{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) - \sum_{k\in n}\mathbf{m}(E_k)\Big\| = \Big\|\mathbf{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) - \mathbf{m}\Big(\bigcup_{k\in n} E_k\Big)\Big\| =$$

$$= \Big\|\mathbf{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} E_k\Big)\Big\| \leq |\mathbf{m}|\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} E_k\Big) = \sum_{k=n}^{\infty}|\mathbf{m}|(E_k).$$

Mivel pedig $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|\mathbf{m}|(E_k) = 0$; ebből következik, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{m}(E_k)$ sor konvergens, és az összege egyenlő az $\mathbf{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big)$ vektorral, vagyis $\mathbf{m}$ σ-additív. ■

6.4. Korlátos változású σ-additív halmazfüggvények szerinti elemi integrál

6.4.1. Definíció. *Legyen T halmaz, és $(f_i)_{i\in I}$ tetszőleges olyan rendszer, hogy minden $I\ni i$-re $f_i : T\to\overline{\mathbb{R}}$ függvény. Ekkor a következő függvényeket értelmezzük:*

$$\bigvee_{i\in I} f_i : T\to\overline{\mathbb{R}}\ ;\quad t\mapsto \sup_{i\in I} f_i(t),$$

$$\bigwedge_{i\in I} f_i : T\to\overline{\mathbb{R}}\ ;\quad t\mapsto \inf_{i\in I} f_i(t).$$

A $\bigvee_{i\in I} f_i$ (illetve $\bigwedge_{i\in I} f_i$) függvényt az $(f_i)_{i\in I}$ függvényrendszer **felső** *(illetve* **alsó***)* **burkolójának** *nevezzük. Továbbá, ha I végtelen, és minden $i\in I$ esetén $\mathrm{Im}(f_i)\subseteq\overline{\mathbb{R}}_+$, akkor $\sum_{i\in I} f_i$ jelöli a $\Big(\sum_{i\in J} f_i\Big)_{J\subseteq I,\ J\ \text{véges}}$ függvényrendszer felső burkolóját, vagyis*

$$\sum_{i\in I} f_i := \bigvee_{\substack{J\subseteq I\\ J\ \text{véges}}}\Big(\sum_{i\in J} f_i\Big),$$

és ezt a $T\to\overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt az $(f_i)_{i\in I}$ függvényrendszer **összegének** *nevezzük.*

6.4.2. Jelölés. *Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor*

$$\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R}) := \{\varphi\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R}) | \mathrm{Im}(\varphi)\subseteq\mathbb{R}_+\}.$$

Most jellemzést adunk a σ-additív halmazfüggvényekre az általuk generált elemi integrálok pontonkénti konvergenciával való kapcsolatán keresztül.

6.4.3. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, F normált tér, és $\mathbf{m} : \mathscr{R}\to F$ additív halmazfüggvény. Tekintsük a következő állításokat!*

a) *Minden* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton növő,* $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$*-ben haladó sorozatra, ha* $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$*, akkor az* $\left(\int \varphi_n \mathrm{d}\mathbf{m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens* F*-ben, és*

$$\int \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n\Big)\mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \ \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

a′) *Minden* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fogyó,* $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$*-ben haladó sorozatra, ha* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$*, akkor az* $\left(\int \varphi_n \mathrm{d}\mathbf{m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens* F*-ben és*

$$\int \Big(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n\Big)\mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \ \mathrm{d}\mathbf{m}.$$

a″) *Minden* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fogyó,* $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$*-ben haladó sorozatra, ha* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n = 0$*, akkor az* $\left(\int \varphi_n \mathrm{d}\mathbf{m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens* F*-ben, és*

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \ \mathrm{d}\mathbf{m} = 0.$$

b) *Minden* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton növő,* $\mathscr{R}$*-ben haladó sorozatra, ha* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{R}$*, akkor az* $(\mathbf{m}(E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens* F*-ben, és*

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(E_n).$$

b′) *Minden* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fogyó,* $\mathscr{R}$*-ben haladó sorozatra, ha* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{R}$*, akkor az* $(\mathbf{m}(E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens* F*-ben, és*

$$\mathbf{m}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(E_n).$$

b″) *Minden* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fogyó,* $\mathscr{R}$*-ben haladó sorozatra, ha* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$*, akkor az* $(\mathbf{m}(E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens* F*-ben, és*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(E_n) = 0.$$

c) *Az* $\mathbf{m}$ *halmazfüggvény* σ*-additív, vagyis minden* $\mathscr{R}$*-beli* $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *diszjunkt sorozatra,* $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$ *esetén a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(E_k)$ *sor konvergens* F*-ben, és*

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}(E_k).$$

Ekkor a)⇔a′)⇔a″), *és* b)⇔b′)⇔b″)⇔c) *teljesül, valamint* a″)⇒b″). *Ha* $\mathbf{m}$ *korlátos változású, akkor* b″)⇒a″) *is igaz, tehát ekkor mind a hét állítás ekvivalens egymással.*

Bizonyítás. a)$\Rightarrow$a$'$) Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó, $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$-ben haladó sorozat, hogy $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$. Ekkor $(-\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő, $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$-ben haladó sorozat, hogy $\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(-\varphi_n) = -\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$, tehát az a) alapján az $\left(\int(-\varphi_n)\mathrm{d}\mathbf{m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, és

$$\int\Big(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n\Big)\mathrm{d}\mathbf{m} = -\int\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(-\varphi_n)\Big)\mathrm{d}\mathbf{m} = -\lim_{n\to\infty}\int(-\varphi_n)\,\mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty}\int\varphi_n\,\mathrm{d}\mathbf{m}.$$

a$'$)$\Rightarrow$a$''$) Triviális, mert $\int 0\,\mathrm{d}\mathbf{m} = 0$.

a$''$)$\Rightarrow$a) Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő, $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$-ben haladó sorozat, hogy $\varphi := \bigvee_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$. Ekkor a $(\varphi-\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$-ben halad, monoton fogyó, és $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}(\varphi-\varphi_n) = \varphi - \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n\Big) = 0$, ezért az a$''$) alapján az $\left(\int(\varphi-\varphi_n)d\mathbf{m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, és

$$\lim_{n\to\infty}\int(\varphi-\varphi_n)\mathrm{d}\mathbf{m} = 0.$$

Ebből következik, hogy az $\left(\int\varphi_n\,\mathrm{d}\mathbf{m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens F-ben, és

$$\int\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n\Big)\mathrm{d}\mathbf{m} = \int\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{m} = \lim_{n\to\infty}\int\varphi_n\,\mathrm{d}\mathbf{m}.$$

b)$\Rightarrow$b$'$) Legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó, $\mathscr{R}$-ben haladó sorozat, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n \in \mathscr{R}$. Ekkor $(E_0\setminus E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő, $\mathscr{R}$-ben haladó halmazsorozat, hogy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E_0\setminus E_n) = E_0\setminus\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n \in \mathscr{R}$, tehát a b) alapján az $(\mathbf{m}(E_0\setminus E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, és

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E_0\setminus E_n)\Big) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{m}(E_0\setminus E_n).$$

Ebből az $\mathbf{m}$ szubtraktivitása folytán kapjuk, hogy az $(\mathbf{m}(E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, és

$$\begin{aligned}\mathbf{m}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n\Big) &= \mathbf{m}(E_0) - \mathbf{m}\Big(E_0\setminus\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n\Big) = \mathbf{m}(E_0) - \lim_{n\to\infty}\mathbf{m}(E_0\setminus E_n) = \\ &= \mathbf{m}(E_0) - \lim_{n\to\infty}(\mathbf{m}(E_0)-\mathbf{m}(E_n)) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{m}(E_n).\end{aligned}$$

b$'$)$\Rightarrow$b$''$) Triviális, mert $\mathbf{m}(\emptyset) = 0$.

b$''$)$\Rightarrow$c) Legyen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}}E_k \in \mathscr{R}$. Legyen minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $H_n := E\setminus\bigcup_{k\in n}E_k$. Ekkor $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó, $\mathscr{R}$-ben haladó sorozat, amelyre $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}H_n = E\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in n}E_k = E\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n = \emptyset$, ezért b$''$) alapján az $(\mathbf{m}(H_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, és $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{m}(H_n) = 0$. Az $\mathbf{m}$ additivitása és szubtraktivitása folytán minden $\mathbb{N}\ni n$-re $\mathbf{m}(H_n) = \mathbf{m}(E) - \mathbf{m}\Big(\bigcup\limits_{k\in n} E_k\Big) = \mathbf{m}(E) - \sum\limits_{k\in n}\mathbf{m}(E_k)$, tehát a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{m}(E_k)$ sor konvergens F-ben, és

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{m}(E_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in n}\mathbf{m}(E_k) = \mathbf{m}(E) = \mathbf{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big).$$

c)$\Rightarrow$b) Legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő, $\mathscr{R}$-ben haladó sorozat, hogy $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{R}$. Legyen minden $k\in\mathbb{N}$ esetén $H_k := E_{k+1}\setminus E_k$. Ekkor $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt, $\mathscr{R}$-ben haladó sorozat, amelyre

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(E_{k+1}\setminus E_k) = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)\setminus E_0 \in \mathscr{R},$$

ezért c) alapján a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{m}(H_k)$ sor konvergens F-ben, és az összege megegyezik az $\mathbf{m}\Big(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} H_k\Big)$ vektorral. Ugyanakkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k\in n}\mathbf{m}(H_k) = \sum_{k\in n}(\mathbf{m}(E_{k+1}) - \mathbf{m}(E_k)) = \mathbf{m}(E_n) - \mathbf{m}(E_0).$$

Ebből következik, hogy az $(\mathbf{m}(E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, és

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \mathbf{m}(E_0) + \mathbf{m}\Big(\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)\setminus E_0\Big) = \mathbf{m}(E_0) + \mathbf{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k\Big) =$$
$$= \mathbf{m}(E_0) + \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{m}(H_k) = \mathbf{m}(E_0) + \lim_{n\to\infty}(\mathbf{m}(E_n) - \mathbf{m}(E_0)) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{m}(E_n).$$

a$''$)$\Rightarrow$b$''$) Nyilvánvaló, mert ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó, $\mathscr{R}$-ben haladó sorozat, hogy $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$, akkor a $(\chi_{E_n})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton fogyó, mindegyik tagja eleme $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$-nek, és $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}}\chi_{E_n} = 0$, így az a$''$) szerint az $\Big(\int\chi_{E_n}\,\mathrm{d}\mathbf{m}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, és

$$\lim_{n\to\infty}\int\chi_{E_n}\,\mathrm{d}\mathbf{m} = 0,$$

ami éppen azt jelenti, hogy az $(\mathbf{m}(E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, és

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{m}(E_n) = 0.$$

Tegyük most fel, hogy $\mathbf{m}$ korlátos változású, és b$''$) teljesül rá; megmutatjuk, hogy ekkor a$''$) is teljesül. Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó, $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$-ben haladó sorozat, hogy $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n = 0$. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\Big\|\int\varphi_n\mathrm{d}\mathbf{m}\Big\| \leq \int\varphi_n\mathrm{d}|\mathbf{m}|$, ezért a $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n\mathrm{d}\mathbf{m} = 0$ egyenlőség bizonyításához *elegendő* azt belátni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n\mathrm{d}|\mathbf{m}| = 0$.

Ennek bizonyításához legyen $E := \{t \in T | \varphi_0(t) > 0\}$, és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, valamint $n \in \mathbb{N}$ esetén $E_n(\varepsilon) := \{t \in T | \varphi_n(t) > \varepsilon\}$. Legyen továbbá a $C \in \mathbb{R}$ szám tetszőleges felső korlátja a φ_0 függvénynek.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve; ekkor nyilvánvaló, hogy az $(E_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyó, mindegyik tagja eleme $\mathscr{R}$-nek, és $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n(\varepsilon) = \emptyset$, mert ha a t pont eleme volna a metszetnek, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_n(t) > \varepsilon$ teljesülne, így $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(t) \geq \varepsilon > 0$, ami ellentmond az $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n = 0$ hipotézisnek. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a

$$\varphi_n \leq C\chi_{_{E_n(\varepsilon)}} + \varepsilon\chi_{_E}$$

függvény-egyenlőtlenség, hiszen $t \in E_n(\varepsilon)$ esetén $\varphi_n(t) \leq \varphi_0(t) \leq C$, míg $t \in T \setminus E_n(\varepsilon)$ esetén $\varphi_n(t) \leq \varepsilon$. Ebből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\int \varphi_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leq C|\mathbf{m}|(E_n(\varepsilon)) + \varepsilon|\mathbf{m}|(E).$$

A b″)-ből következik, hogy $\mathbf{m}$ σ-additív, ezért $|\mathbf{m}|$ is σ-additív. Ezért $\mathbf{m}$ helyett $|\mathbf{m}|$-re is teljesül a b″) állítás, így $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathbf{m}|(E_n(\varepsilon)) = 0$. Ebből kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| \leq \lim_{n\to\infty} \Big(C|\mathbf{m}|(E_n(\varepsilon)) + \varepsilon|\mathbf{m}|(E)\Big) = \varepsilon|\mathbf{m}|(E).$$

Ez minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számra igaz, így $\lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}|\mathbf{m}| = 0$, amit bizonyítani akartunk. ■

6.4.4. Definíció. *Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű és F normált tér, akkor az $\mathscr{R} \to F$ korlátos változású és σ-additív halmazfüggvényeket* **mértékeknek** *nevezzük. A $(T, \mathscr{R}, \mathbf{m}, F)$ négyest* **méréktérnek** *nevezzük, ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, F normált tér, és $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ mérték. A $(T, \mathscr{R}, \theta)$ hármast* **skaláris mértéktérnek** *nevezzük, ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték. A $(T, \mathscr{R}, \mu)$ hármast* **pozitív mértéktérnek** *nevezzük, ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ pozitív mérték.*

Megjegyezzük, hogy a korlátos változás és a σ-additivitás egymástól logikailag független fogalmak, tehát az általános esetben egyikből sem következik a másik. Van azonban olyan speciális eset, amikor a σ-additivitásból következtethetünk a korlátos változásra (**7**. gyakorlat).

6.5. σ-additív skaláris halmazfüggvények szorzata

6.5.1. Állítás. *Legyen $(\mathscr{R}_i)_{i\in I}$ halmazgyűrűk véges rendszere, és $(\theta_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\theta_i : \mathscr{R}_i \to \mathbb{K}$ mérték. Ekkor a $\bigotimes\limits_{i\in I} \theta_i : \bigotimes\limits_{i\in I} \mathscr{R}_i \to \mathbb{K}$ halmazfüggvény szintén mérték.*

Bizonyítás. Korábban láttuk, hogy korlátos változású skaláris additív halmazfüggvények tenzorszorzata korlátos változású, és még azt is megmutattuk, hogy ha minden $I \ni i$-re a $\theta_i : \mathscr{R}_i \to \mathbb{K}$ additív halmazfüggvény korlátos változású, akkor

$$\Big|\bigotimes_{i\in I} \theta_i\Big| = \bigotimes_{i\in I} |\theta_i|.$$

Azt is tudjuk, hogy ekkor a $\bigotimes_{i\in I}\theta_i$ és $\left|\bigotimes_{i\in I}\theta_i\right|$ additív halmazfüggvények σ-additivitása ekvivalens egymással, ezért elég a $\bigotimes_{i\in I}|\theta_i|$ pozitív additív halmazfüggvény σ-additivitását igazolni. Ugyanakkor a hipotézis szerint minden $I \ni i$-re θ_i σ-additív, így $|\theta_i|$ is σ-additív.

Ez azt jelenti, hogy *elegendő* a következő állítást bizonyítani: ha $(\mathscr{R}_i)_{i\in I}$ halmazgyűrűk véges rendszere, és $(\mu_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\mu_i : \mathscr{R}_i \to \mathbb{R}$ σ-additív pozitív halmazfüggvény (vagyis pozitív mérték), akkor a $\bigotimes_{i\in I}\mu_i : \bigotimes_{i\in I}\mathscr{R}_i \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény σ-additív (vagyis pozitív mérték). Ezt az állítást az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval fogjuk igazolni.

Az állítás érdektelen, ha $I = \emptyset$ (de természetesen ekkor is igaz), továbbá nyilvánvalóan igaz akkor, ha I egy elemű. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan szám, hogy az állítás minden olyan I indexhalmaz esetében teljesül, amely n számosságú.

Legyen $(\mathscr{R}_i)_{i\in I}$ halmazgyűrűk véges rendszere, és $(\mu_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\mu_i : \mathscr{R}_i \to \mathbb{R}$ σ-additív pozitív halmazfüggvény, továbbá tegyük fel, hogy $\mathrm{Card}(I) = n+1$. Minden $i \in I$ esetén legyen T_i olyan halmaz, hogy $\mathscr{R}_i \subseteq \mathscr{P}(T_i)$, és rögzítsünk egy $k \in I$ indexet. Vezessük be a következő jelöléseket: $\mathscr{R} := \bigotimes_{i\in I}\mathscr{R}_i$, $\mathscr{S} := \left\{\prod_{i\in I}E_i \,\middle|\, (E_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{R}_i\right\}$, $I' := I \setminus \{k\}$, $T' := \prod_{i\in I}T_i$, $\mathscr{R}' := \bigotimes_{i\in I'}\mathscr{R}_i$, $\mu' := \bigotimes_{i\in I'}\mu_i$.
Az indukciós hipotézis és $\mathrm{Card}(I') = n$ alapján a $\mu' : \mathscr{R}' \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény σ-additív.

Megmutatjuk, hogy $E \in \mathscr{R}$ esetén teljesülnek a következők:

– minden $t' \in T'$ pontra $\chi_E \circ \mathrm{in}_{k,t'} \in \mathscr{E}(T_k, \mathscr{R}_k)$,

– a

$$T' \to \mathbb{R};\quad t' \mapsto \int_{T_k}(\chi_E \circ \mathrm{in}_{k,t'})\mathrm{d}\mu_k$$

függvény eleme $\mathscr{E}(T', \mathscr{R}')$-nek,

– fennáll a

$$\Big(\bigotimes_{i\in I}\mu_i\Big)(E) = \int_{T'}\Big(\int_{T_k}(\chi_E \circ \mathrm{in}_{k,t'})\mathrm{d}\mu_k\Big)\mathrm{d}\mu'(t')$$

egyenlőség.

Valóban, a halmazgyűrűk tenzorszorzatának definíciója szerint vehetünk olyan $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ diszjunkt véges rendszert $\mathscr{S}$-ben, hogy $E = \bigcup_{\alpha\in A}E_\alpha$. Ekkor minden $I \ni i$-re és $A \ni \alpha$-ra $\mathrm{pr}_i\langle E_\alpha\rangle \in \mathscr{R}_i$, ezért $t' \in T'$ esetén

$$\chi_E \circ \mathrm{in}_{k,t'} = \sum_{\alpha\in A}\Big(\chi_{E_\alpha} \circ \mathrm{in}_{k,t'}\Big) = \sum_{\alpha\in A}\chi_{\prod\limits_{i\in I'}\mathrm{pr}_i\langle E_\alpha\rangle}(t').\chi_{\mathrm{pr}_k\langle E_\alpha\rangle} \in \mathscr{E}(T_k, \mathscr{R}_k).$$

Az elemi integrál értelmezése alapján ebből az is látszik, hogy minden $t' \in T'$ pontra

$$\int_{T_k}(\chi_E \circ \mathrm{in}_{k,t'})\mathrm{d}\mu_k = \sum_{\alpha\in A}\chi_{\prod\limits_{i\in I'}\mathrm{pr}_i\langle E_\alpha\rangle}(t')\mu_k\Big(\mathrm{pr}_k\langle E_\alpha\rangle\Big).$$

Minden $\alpha \in A$ esetén $\prod_{i \in I'} \mathrm{pr}_i \langle E_\alpha \rangle \in \mathscr{R}'$, ezért ebből az is kiderül, hogy a

$$T' \to \mathbb{R}; \quad t' \mapsto \int_{T_k} (\chi_{_E} \circ \mathrm{in}_{k,t'}) \mathrm{d}\mu_k$$

függvény eleme $\mathscr{E}(T', \mathscr{R}')$-nek, valamint

$$\int_{T'} \Big(\int_{T_k} (\chi_{_E} \circ \mathrm{in}_{k,t'}) \mathrm{d}\mu_k \Big) \mathrm{d}\mu'(t') = \sum_{\alpha \in A} \mu_k \Big(\mathrm{pr}_k \langle E_\alpha \rangle \Big) \mu' \Big(\prod_{i \in I'} \mathrm{pr}_i \langle E_\alpha \rangle \Big) =$$
$$= \sum_{\alpha \in A} \mu_k \Big(\mathrm{pr}_k \langle E_\alpha \rangle \Big) \Big(\mathop{\mathrm{P}}_{i \in I'} \mu_i(\mathrm{pr}_i \langle E_\alpha \rangle) \Big) = \sum_{\alpha \in A} \Big(\mathop{\mathrm{P}}_{i \in I} \mu_i(\mathrm{pr}_i \langle E_\alpha \rangle) \Big) =$$
$$= \sum_{\alpha \in A} \Big(\bigotimes_{i \in I} \mu_i \Big)(E_\alpha) = \Big(\bigotimes_{i \in I} \mu_i \Big) \Big(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \Big) = \Big(\bigotimes_{i \in I} \mu_i \Big)(E)$$

teljesül.

Legyen most $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan halmazsorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E_{n+1} \subseteq E_n$, és $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \emptyset$. A $\bigotimes_{i \in I} \mu_i$ halmazfüggvény σ-additivitásának bizonyításához elég azt igazolni, hogy $\lim_{n \to \infty} \Big(\bigotimes_{i \in I} \mu_i \Big)(E_n) = 0$.

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $t' \in T'$, akkor $\chi_{_{E_n}} \circ \mathrm{in}_{k,t'} \in \mathscr{E}(T_k, \mathscr{R}_k)$, és $E_{n+1} \subseteq E_n$ miatt nyilvánvalóan $\chi_{_{E_{n+1}}} \circ \mathrm{in}_{k,t'} \leq \chi_{_{E_n}} \circ \mathrm{in}_{k,t'}$ teljesül a T_k halmazon. Továbbá, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \emptyset$ miatt minden $T' \ni t'$-re $\inf_{n \in \mathbb{N}} \Big(\chi_{_{E_n}} \circ \mathrm{in}_{k,t'} \Big) = 0$ a T_k halmazon. Ezért a μ_k σ-additivitása és pozitivitása folytán minden $t' \in T'$ pontra az $\Big(\int_{T_k} (\chi_{_{E_n}} \circ \mathrm{in}_{k,t'}) \mathrm{d}\mu_k \Big)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat monoton fogyó, és

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \int_{T_k} (\chi_{_{E_n}} \circ \mathrm{in}_{k,t'}) \mathrm{d}\mu_k = \lim_{n \to \infty} \int_{T_k} (\chi_{_{E_n}} \circ \mathrm{in}_{k,t'}) \mathrm{d}\mu_k = 0.$$

Továbbá, ha $n \in \mathbb{N}$ esetén bevezetjük a

$$\varphi_n : T' \to \mathbb{R}; \quad t' \mapsto \int_{T_k} (\chi_{_{E_n}} \circ \mathrm{in}_{k,t'}) \mathrm{d}\mu_k$$

függvényt, akkor $\varphi_n \in \mathscr{E}(T', \mathscr{R}')$, és a $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton fogyó, és $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n = 0$ a T' halmazon. Ezért a $\mu' : \mathscr{R}' \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény indukciós hipotézisből adódó σ-additivitását felhasználva kapjuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \int_{T'} \varphi_n \mathrm{d}\mu' = 0,$$

következésképpen

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_{T'} \Big(\int_{T_k} (\chi_{_{E_n}} \circ \mathrm{in}_{k,t'}) \mathrm{d}\mu_k \Big) \mathrm{d}\mu'(t') = \lim_{n \to \infty} \Big(\bigotimes_{i \in I} \mu_i \Big)(E_n),$$

amit bizonyítani kellett. ■

6.6. Gyakorlatok

1. Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$, és jelölje $\delta_{\mathfrak{a},+}$ az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & , \text{ha } t \geq \mathfrak{a}, \\ 0 & , \text{ha } t < \mathfrak{a} \end{cases}$$

függvény által meghatározott Lebesgue-Stieltjes-mértéket.
a) Adjunk meg olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozatot $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{S}_\mathbb{R})$-ben, amelyre $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n = 0$, de

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a},+} > 0.$$

b) Adjunk meg olyan $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozatot $\mathscr{S}_\mathbb{R}$-ben, hogy $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{S}_\mathbb{R}$, és a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_{\mathfrak{a},+}(E_k)$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{\mathfrak{a},+}(E_k) < \delta_{\mathfrak{a},+}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big).$$

2. Legyen $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, és tekintsük a $\mathbf{m}_L : \mathscr{S}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-Stieltjes típusú additív halmazfüggvényt. Az $\mathbf{m}_L$ pozitív additív halmazfüggvény pontosan akkor σ-additív, ha minden $t \in \mathbb{R}$ pontban létezik L-nek baloldali határértéke és $\lim_{t-0} L = L(t)$ (ilyenkor azt mondjuk, hogy L *balról folytonos* függvény).

(*Útmutatás.* Először megjegyezzük, hogy egy $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény balról folytonossága a $t \in \mathbb{R}$ pontban ekvivalens azzal, hogy minden *monoton növő* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatra, ha $\lim_{k\to\infty} t_k = t$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $t_k < t$, akkor $\lim_{k\to\infty} L(t_k) = L(t)$ teljesül. Ez az *átviteli elv* a balról folytonosságra, amely a folytonosságra vonatkozó átviteli elvhez hasonlóan igazolható.

Tegyük fel, hogy $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, és az $\mathbf{m}_L : \mathscr{S}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-Stieltjes típusú additív halmazfüggvény σ-additív. Ha $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan valós számosorozat, hogy $\lim_{k\to\infty} t_k = t$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $t_k < t$, akkor a $([t_k, t[)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat minden tagja eleme $\mathscr{S}_\mathbb{R}$-nek, és a tartalmazás tekintetében monoton fogyó, valamint $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} [t_k, t[= \emptyset$, ezért $\lim_{k\to\infty} \mathbf{m}_L([t_k, t[) = 0$, ami éppen azt jelenti, hogy $\lim_{k\to\infty} L(t_k) = L(t)$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény balról folytonos, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, továbbá legyenek $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozatok $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $a_k < b_k$, és az $([a_k, b_k[)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat diszjunkt, továbbá $[a, b[= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k[$. Az $\mathbf{m}_L$ additív halmazfüggvény pozitív, ezért a σ-additivitásához elég azt igazolni, hogy

$$L(b) - L(a) = \mathbf{m}_L([a, b[) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}_L([a_k, b_k[).$$

Az L függvény balról folytonos b-ben, tehát $\lim_{b'\to b,\ b'<b} L(b') = L(b)$, ezért elég azt megmutatni, hogy minden $b' \in]a, b[$ számra $L(b') - L(a) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}_L([a_k, b_k[)$ teljesül. Ehhez legyen $b' \in]a, b[$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Rögzítsünk olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens, és $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \leq \varepsilon$; például jó választás az, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_k := \varepsilon/2^{k+1}$, de az $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konkrét alakjának semmi jelentősége nem lesz. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén L balról folytonos az a_k pontban, ezért ε_k számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $L(a_k) - L(a_k - \delta) < \varepsilon_k$. Tehát a kiválasztási axióma alapján vehetünk olyan $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{R}_+^*$-ban, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $L(a_k) - L(a_k - \delta_k) < \varepsilon_k$, következésképpen

$$0 \leq \mathbf{m}_L([a_k - \delta_k, b_k[) - \mathbf{m}_L([a_k, b_k[) = L(b_k) - L(a_k - \delta_k) - L(b_k) + L(a_k) < \varepsilon_k.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$[a, b'] \subseteq [a, b[= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k[\subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]a_k - \delta_k, b_k[,$$

tehát az $(]a_k - \delta_k, b_k[)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat nyílt befedése az $[a, b']$ kompakt intervallumnak. Legyen $K \subseteq \mathbb{N}$ olyan véges halmaz, amelyre $(]a_k - \delta_k, b_k[)_{k\in K}$ befedése $[a, b']$-nek. Ekkor

$$[a, b'[\subseteq [a, b'] \subseteq \bigcup_{k\in K}]a_k - \delta_k, b_k[\subseteq \bigcup_{k\in K} [a_k - \delta_k, b_k[,$$

amiből következik, hogy

$$L(b') - L(a) = \mathbf{m}_L([a, b'[) \leq \sum_{k\in K} \mathbf{m}_L([a_k - \delta_k, b_k[) <$$

$$< \sum_{k\in K} \mathbf{m}_L([a_k, b_k[) + \sum_{k\in K} \varepsilon_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}_L([a_k, b_k[) + \varepsilon$$

teljesül. Ez tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számra igaz, ezért $L(b') - L(a) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}_L([a_k, b_k[)$.)

3. (*Diszkrét mértékek.*) Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és $\alpha : T \to \mathbb{K}$ tetszőleges olyan függvény, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ halmazra az $E \cap \{t \in T | \alpha(t) \neq 0\}$ halmaz *véges*.

a) Mutassuk meg, hogy a

$$\theta_\alpha : \mathscr{R} \to \mathbb{K}; \quad E \mapsto \sum_{t\in E} \alpha(t)$$

leképezés *mérték*, és fennáll a $|\theta_\alpha| \leq \theta_{|\alpha|}$ mérték-egyenlőtlenség. Továbbá, minden $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ esetén

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\theta_\alpha = \sum_{t\in T} \varphi(t)\alpha(t).$$

(A θ_α alakú mértékeket *diszkrét mértékeknek* nevezzük az $\mathscr{R}$ halmazgyűrűn.)

b) Tekintsük a következő kijelentést:

(D) Minden $t \in \bigcup_{E \in \mathscr{R}} E$ pontra és $H \subseteq \bigcup_{E \in \mathscr{R}} E$ véges halmazra, ha $t \notin H$, akkor létezik olyan $E \in \mathscr{R}$, hogy $t \in E$ és $E \cap H = \emptyset$.

Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathscr{R}$ halmazgyűrűre teljesül a (D) állítás, akkor fennáll a $|\theta_\alpha| = \theta_{|\alpha|}$ egyenlőség. Mutassuk meg, hogy a (D) feltétel teljesül a T véges részhalmazainak halmazgyűrűjére, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\mathbb{R}^n$ feletti standard halmazgyűrűre is.

(*Útmutatás.* a) Nyilvánvaló, hogy a $\theta_\alpha : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ halmazfüggvény additív, és relatív korlátos is, mert ha $E \in \mathscr{R}$ esetén

$$\sup_{E' \in \mathscr{R},\ E' \subseteq E} |\theta_\alpha(E')| \leq \sup_{E' \in \mathscr{R},\ E' \subseteq E} \sum_{t \in E'} |\alpha(t)| \leq \sum_{t \in E} |\alpha(t)| < +\infty.$$

Ezért θ_α korlátos változású, így a θ_α σ-additivitásának bizonyításához elég azt igazolni, hogy minden $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó, $\mathscr{R}$-ben haladó sorozatra, ha $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \emptyset$, akkor $\lim_{n \to \infty} \theta_\alpha(E_n) = 0$ teljesül. Ez viszont nyilvánvalóan igaz, mert az $E_0 \cap \{t \in T | \alpha(t) \neq 0\}$ halmaz véges, tehát a véges halmazokból álló, monoton fogyó $(E_n \cap \{t \in T | \alpha(t) \neq 0\})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra fennáll a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap \{t \in T | \alpha(t) \neq 0\}) = \emptyset$ egyenlőség, amiből következik olyan $N \in \mathbb{N}$ létezése, hogy minden $n > N$ természetes számra $E_n \cap \{t \in T | \alpha(t) \neq 0\} = \emptyset$, ezért $\theta_\alpha(E_n) := \sum_{t \in E_n} \alpha(t) = 0$.

Ha $E \in \mathscr{R}$ és $(E_i)_{i \in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, hogy $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, akkor

$$\sum_{i \in I} |\theta_\alpha(E_i)| := \sum_{i \in I} \Big| \sum_{t \in E_i} \alpha(t) \Big| \leq \sum_{i \in I} \Big(\sum_{t \in E_i} |\alpha(t)| \Big) = \sum_{t \in E} |\alpha(t)| =: \theta_{|\alpha|}(E),$$

tehát $|\theta_\alpha| \leq \theta_{|\alpha|}$.

Ha $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$, akkor létezik olyan $(E_i)_{i \in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, és olyan $(c_i)_{i \in I}$ rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy $\varphi = \sum_{i \in I} c_i . \chi_{E_i}$; ekkor

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\theta_\alpha = \sum_{i \in I} c_i \theta_\alpha(E_i) = \sum_{i \in I} \Big(c_i \sum_{t \in E_i} \alpha(t) \Big) = \sum_{i \in I} \Big(\sum_{t \in E_i} \varphi(t) \alpha(t) \Big) = \sum_{t \in T} \varphi(t) \alpha(t).$$

b) Tegyük fel, hogy (D) teljesül, és legyen $E \in \mathscr{R}$ rögzített, valamint alkalmazzuk az $[\alpha \neq 0] := \{t \in T | \alpha(t) \neq 0\}$ jelölést. Minden $t \in E \cap [\alpha \neq 0]$ ponthoz és az $(E \cap [\alpha \neq 0]) \setminus \{t\}$ véges halmazhoz a (D) szerint van olyan $E_t \in \mathscr{R}$, hogy $t \in E_t$ és $E_t \cap ((E \cap [\alpha \neq 0]) \setminus \{t\}) = \emptyset$, tehát $E_t \cap E \cap [\alpha \neq 0] = \{t\}$. Kiválasztunk ilyen $(E_t)_{t \in E \cap [\alpha \neq 0]}$ rendszert, amely nem szükségképpen diszjunkt. A felbontási lemma alapján az $(E_t \cap E)_{t \in E \cap [\alpha \neq 0]}$ rendszerhez vehetünk olyan $(E'_i)_{i \in I}$ diszjunkt véges rendszert $\mathscr{R}$-ben, amelyre $\bigcup_{t \in E \cap [\alpha \neq 0]} (E_t \cap E) = \bigcup_{i \in I} E'_i$, és minden $t \in E \cap [\alpha \neq 0]$ ponthoz létezik olyan $I_t \subseteq I$, hogy $E_t \cap E = \bigcup_{i \in I_t} E'_i$. Ha $t \in E \cap [\alpha \neq 0]$, akkor $t \in E_t \cap E$, tehát létezik egyetlen olyan $i_t \in I_t$, hogy $t \in E'_{i_t}$. Nyilvánvaló, hogy $t \in E \cap [\alpha \neq 0]$ esetén $E'_{i_t} \cap [\alpha \neq 0] = E_t \cap E \cap [\alpha \neq 0]$, tehát fennállnak a következő összefüggések

$$|\theta_\alpha|(E) \geq |\theta_\alpha| \Big(\bigcup_{t \in E \cap [\alpha \neq 0]} E'_{i_t} \Big) \geq \sum_{t \in E \cap [\alpha \neq 0]} |\theta_\alpha(E'_{i_t})| = \sum_{t \in E \cap [\alpha \neq 0]} |\alpha(t)| = \sum_{t \in E} |\alpha(t)| = \theta_{|\alpha|}(E),$$

ezért $|\theta_\alpha| \geq \theta_{|\alpha|}$, vagyis $|\theta_\alpha| = \theta_{|\alpha|}$.)

4. Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű. A $\nu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény pontosan akkor σ-additív, ha létezik olyan $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ σ-additív halmazfüggvény, amelyre $\nu \leq \mu$. Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, F normált tér, akkor a $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ korlátos változású additív halmazfüggvény pontosan akkor σ-additív, ha létezik olyan $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ σ-additív halmazfüggvény, amelyre $|\mathbf{m}| \leq \mu$.

5. Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű, F és G normált tér, és $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ σ-additív halmazfüggvény. Ekkor minden $u : F \to G$ folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátorra $u \circ \mathbf{m} : \mathscr{S} \to G$ szintén σ-additív halmazfüggvény.

6. Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű, és F normált tér $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ függvény *skalárisan σ-additív*, ha minden $u \in F'$ funkcionálra $u \circ \mathbf{m} : \mathscr{S} \to \mathbb{K}$ σ-additív halmazfüggvény.

a) Minden $\mathscr{S} \to F$ skalárisan σ-additív halmazfüggvény additív.

b) Minden $\mathscr{S} \to F$ σ-additív halmazfüggvény skalárisan σ-additív.

c) Ha F véges dimenziós, akkor egy $\mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény pontosan akkor σ-additív, ha skalárisan σ-additív.

(Megjegyezzük, hogy van olyan (szükségképpen végtelen dimenziós) F Banach-tér, és $\mathscr{S}$ félgyűrű, hogy létezik $\mathscr{S} \to F$ skalárisan σ-additív, de nem σ-additív halmazfüggvény.)

(*Útmutatás.* a) Ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, hogy $\bigcup_{i\in I} E_i \in \mathscr{S}$, akkor minden $u \in F'$ funkcionálra az $u \circ \mathbf{m} : \mathscr{S} \to \mathbb{K}$ halmazfüggvény additivitása folytán

$$u\Big(\mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big)\Big) = (u \circ \mathbf{m})\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \sum_{i\in I}(u \circ \mathbf{m})(E_i) = \sum_{i\in I} u(\mathbf{m}(E_i)) = u\Big(\sum_{i\in I} \mathbf{m}(E_i)\Big),$$

amiből a Hahn-Banach-tétel alapján következik, hogy

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \sum_{i\in I} \mathbf{m}(E_i),$$

tehát $\mathbf{m} : \mathscr{S} \to F$ additív halmazfüggvény.

c) Ha F véges dimenziós, akkor létezik olyan $(z_i)_{i\in I}$ (véges) algebrai bázis F-ben, és olyan $(u_i)_{i\in I}$ rendszer F'-ben, hogy minden $i, j \in I$ esetén $u_i(z_j) = \delta_{i,j}$. Ekkor minden $z \in F$ esetén

$$z = \sum_{i\in I} u_i(z).z_i.$$

Ha minden $I \ni i$-re az $u_i \circ \mathbf{m} : \mathscr{S} \to \mathbb{K}$ halmazfüggvény σ-additív, és $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{S}$-ben, hogy $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{S}$, akkor az I indexhalmaz végességét kihasználva

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \sum_{i\in I}(u_i \circ \mathbf{m})\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big).z_i = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(u_i \circ \mathbf{m})(E_k).z_i\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{i\in I}(u_i \circ \mathbf{m})(E_k).z_i\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{m}(E_k)$$

adódik, vagyis $\mathbf{m}$ σ-additív.)

7. Ha $\mathscr{R}$ δ-gyűrű (**MES** 1.4.3. gyakorlat), akkor minden $\mathscr{R} \to \mathbb{K}$ σ-additív halmazfüggvény korlátos változású, tehát mérték.

(*Útmutatás.* Elegendő a $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ esetre bizonyítani. Legyen tehát $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ σ-additív halmazfüggvény, és értelmezzük a következő leképezést

$$\mu_1 : \mathscr{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad E \mapsto \sup_{E' \in \mathscr{R},\ E' \subseteq E} \mu(E').$$

Könnyen igazolható, hogy μ_1 abban az értelemben *additív*, hogy minden $E, E' \in \mathscr{R}$ halmazra, ha $E \cap E' = \emptyset$, akkor $\mu_1(E \cup E') = \mu_1(E) + \mu_1(E')$. Ez ugyanúgy bizonyítható, mint a relatív korlátos additív halmazfüggvények pozitív részének additivitása. (Ehhez sem a μ_1 végessége, sem a μ σ-additivitása nem szükséges, és még az sem kell, hogy az $\mathscr{R}$ halmazgyűrű δ-gyűrű legyen.)

Bebizonyítjuk, hogy μ_1 *véges* értékeket vesz fel. Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy $E \in \mathscr{R}$ olyan halmaz, amelyre $\mu_1(E) = +\infty$. Most megmutatjuk egy olyan $\mathscr{R}$-ben haladó monoton fogyó $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat létezését, amelyre $E_0 := E$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mu_1(E_k) = +\infty$, valamint $|\mu(E_k)| \geq k$.

Legyen ugyanis $n \in \mathbb{N}^*$ és $(E_k)_{0\leq k\leq n}$ olyan monoton fogyó rendszer $\mathscr{R}$-ben, hogy $E_0 := E$, és minden $k \leq n$ természetes számra $\mu_1(E_k) = +\infty$, valamint $|\mu(E_k)| \geq k$. A feltevés szerint $\mu_1(E_n) = +\infty$, ezért a μ_1 definíciója alapján létezik olyan $E' \in \mathscr{R}$, hogy $E' \subseteq E_n$ és $\mu(E') > n + 1 + |\mu(E_n)|$. Ha $\mu_1(E') = +\infty$, akkor legyen $E_{n+1} := E'$; ha pedig $\mu_1(E') < +\infty$, akkor legyen $E_{n+1} := E_n \setminus E'$. Mindkét esetben $E_{n+1} \in \mathscr{R}$, és $E_{n+1} \subseteq E_n$, továbbá állítjuk, hogy $\mu_1(E_{n+1}) = +\infty$ és $|\mu(E_{n+1})| \geq n + 1$. Valóban, ha $\mu_1(E') = +\infty$, akkor ez nyilvánvaló. Ha viszont $\mu_1(E') < +\infty$, akkor a μ_1 additivitása miatt $\mu_1(E_{n+1}) + \mu_1(E') = \mu_1(E_n)$, így $\mu_1(E_n) = +\infty$ miatt $\mu_1(E_{n+1}) = +\infty$; továbbá a μ szubtraktivitása folytán $|\mu(E_{n+1})| = |\mu(E_n) - \mu(E')| \geq \mu(E') - \mu(E_n) > n+1+|\mu(E_n)| - \mu(E_n) \geq n+1$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy az $(E_k)_{0\leq k\leq n+1}$ rendszer $\mathscr{R}$-ben halad, monoton fogyó, és minden $k \leq n+1$ természetes számra $\mu_1(E_k) = +\infty$, valamint $|\mu(E_k)| \geq k$. Ezért a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétel alkalmazásával kapjuk olyan $\mathscr{R}$-ben haladó monoton fogyó $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat létezését, amelyre $E_0 := E$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mu_1(E_k) = +\infty$, valamint $|\mu(E_k)| \geq k$.

Legyen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ilyen tulajdonságú halmazsorozat. Az $\mathscr{R}$ halmazgyűrű δ-gyűrű, ezért $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$, így

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (E_k \setminus E_{k+1}) = E \setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R},$$

és természetesen $(E_k \setminus E_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozat $\mathscr{R}$-ben. A μ σ-additivitásából következik, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k \setminus E_{k+1})$ sor konvergens, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k \setminus E_{k+1}) = \mu\Big(E \setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) = \mu(E) - \mu\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big).$$

De minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\sum_{k\in n} \mu(E_k \setminus E_{k+1}) = \sum_{k\in n} (\mu(E_k) - \mu(E_{k+1})) = \mu(E) - \mu(E_n),$$

tehát a $(\mu(E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *konvergens* $\mathbb{R}$-ben, sőt még az is világos, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}E_k\Big).$$

Ez viszont lehetetlen, mert az $(\mu(E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat *nem korlátos*, hiszen minden $\mathbb{N}\ni k$-ra $|\mu(E_k)|\geq k$.

Ez az ellentmondás azt bizonyítja, hogy a μ_1 halmazfüggvény véges értékeket vesz fel, így $\mu_1:\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény. Ekkor a $\mu_2:=\mu_1-\mu:\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ leképezés is pozitív additív halmazfüggvény, és $\mu=\mu_1-\mu_2$. Ezért μ *relatív korlátos*, így korlátos változású is.)

XIV. rész

Integrálelmélet

BEVEZETÉS

Az integrálelmélet a mértékek által generált elemi integrálok speciális tulajdonságú lineáris kiterjesztéseivel, az *integrálokkal* foglalkozik. Ebben a fejezetben a skaláris mértékek szerint integrálható, Banach-térbe érkező függvények tereit fogjuk értelmezni és vizsgálni.

Az első pontban a pozitív mértékek által generált elemi integrálokat kiterjesztjük a pozitív lépcsősfüggvények halmazáról az alaphalmazon értelmezett, $\overline{\mathbb{R}}_+$-ba ható *összes* függvények halmazára; így kapjuk a pozitív mértékek által generált *felső integrálok* fogalmát. Természetesen sokféle kiterjesztést kigondolhatunk; az a kiterjesztés, amit itt értelmezünk a *Lebesgue-féle* kiterjesztés. A gyakorlatok egyikében bemutatjuk a pozitív additív halmazfüggvények *Riemann-féle* kiterjesztését, amelyről kiderül, hogy analitikus szempontból sokkal kedvezőtlenebb tulajdonságú, mint a Lebesgue-féle kiterjesztés.

A második pontban az *eltűnő függvényekről*, a *nullamértékű halmazokról*, és a *majdnem mindenütt teljesülő kijelentésekről* lesz szó. Ezek a fogalmak lépten-nyomon előfordulnak az integrálelméletben, ezért e technikai jellegű fogalmak bevezetése nélkülözhetetlen.

Egy $(T, \mathscr{R}, \theta)$ skaláris mértéktér alaphalmazán értelmezett, F normált térbe érkező függvények terében a θ mérték minden $p \geq 1$ valós számhoz kijelöl két fontos függvényteret: az $\mathscr{F}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $\mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ tereket, továbbá ezeken a függvénytereken meghatároz egy nevezetes félnormát. Ezeket az objektumokat tárgyaljuk a harmadik és negyedik pontban. Ehhez szükségünk lesz a felső integrálok két fontos tulajdonságára; a *Hölder-* és *Minkowski-egyenlőtlenségre*. Megvizsgáljuk az $\mathscr{F}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $\mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ terek közötti elemi kapcsolatokat különböző p exponensek esetében. Mindkét függvénytér-típusra igazoljuk a *Riesz–Fischer-tételt*, ami ezeknek a félnormált tereknek a teljességét mondja ki abban az esetben, amikor F Banach-tér. Értelmezzük továbbá az $\mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ terekhez asszociált $\mathrm{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ normált tereket, és az integrálható függvények $\mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ terén bevezetjük az *integrált*, amikor F Banach-tér.

A valós értékű függvényeket tartalmazó $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ terek kitüntetett szerepet játszanak az integrálelméletben. Ezekkel foglalkozunk az ötödik pontban, és igazoljuk a legfontosabb rájuk vonatkozó állítást: a *Levi-tételt*. Itt vezetjük be az *integrálható halmazok* δ-gyűrűjét, és megadjuk a skaláris mértékek természetes Lebesgue-féle kiterjesztését erre a δ-gyűrűre.

A hatodik pontban a Levi-tétel legfontosabb alkalmazásaként igazoljuk a *Lebesgue-tételt*, amely Banach-térbe ható, p-edik hatványon integrálható függvények majdnem mindenütt pontonként konvergens sorozatára elégséges feltételt mond ki ahhoz, hogy a pontonkénti limeszfüggvény p-edik hatványon integrálható legyen. A Lebesgue-tételt rögtön alkalmazzuk arra, hogy bizonyos paraméteres integrálfüggvények folytonosságára elégséges feltételt származtassunk. A továbbiakban látjuk majd, hogy a Lebesgue-tétel az általános integrálelmélet és a geometriai integrálelmélet minden (általunk tárgyalt) fontos tételének bizonyításában megtalálható. Egyébként ugyanez a helyzet a Riesz–Fischer-tétellel is.

A tenzorszorzat-alakú mértékek szerinti integrálás problémáját vizsgáljuk a hetedik pontban. Ebben a problémakörben a legfontosabb állítás a *Lebesgue-Fubini-tétel*, amely megmutatja, egy tenzorszorzat-alakú mérték szerint integrálható függvény integrálja hogyan számítható ki a mérték-tényezők szerinti paraméteres integrálások szukcesszív alkalmazásával.

A nyolcadik pontban a *mérhető függvényekről* és azok integrálelméleti jelentőségéről lesz szó. Megfogalmazunk egy olyan kritériumot a Banach-térbe ható függvények p-edik hatványon való integrálhatóságára, amely a gyakorlatban nagyon jól használható. E kritérium alkalmazásaként elégséges feltételt adunk ahhoz, hogy bizonyos típusú paraméteres integrálfüggvények differenciálhatóak legyenek, és a differenciálás, valamint a paraméteres integrálás operációk sorrendjét felcserélhessük. A *Fubini–Fatou-tétel* alapján lehetővé válik a Lebesgue–Fubini-tétel élesítése, ami a gyakorlatban jobban használható, mint az eredeti Lebesgue–Fubini-tétel.

Végül, a kilencedik pontban, a *korlátos mértékek* szerinti integrálás speciális tulajdonságaival foglalkozunk. A klasszikus *valószínűségi mértékek* valójában speciális pozitív korlátos mértékek, tehát a korlátos mértékek, és az azok által generált integrálok elmélete a klasszikus valószínűségelmélet matematikai felépítéséhez nélkülözhetetlen.

Ebben a fejezetben kizárólag skaláris mértékterekkel lesz dolgunk, tehát a "$(T, \mathscr{R}, \theta)$ *mértéktér*" kijelentés annak rövidítése lesz, hogy "$(T, \mathscr{R}, \theta)$ *skaláris mértéktér*", vagyis $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ korlátos változású σ-additív halmazfüggvény.

Irodalomjegyzék

[1] N. Bourbaki, **Éléments de mathématique. Intégration**, Hermann, Paris, 1965.

[2] P. R. Halmos, **Mértékelmélet**, Gondolat Kiadó, Budapest, 1984.

[3] А. Н. Колмогоров-С. В. Фомин, **Элементы теории функций и функционального анализа**, Наука, Москва, 1974.

[4] Riesz F.-Szőkefalvi-Nagy B., **Funkcionálanalízis**, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[5] L. Schwartz, **Analyse mathématique**, Hermann, Paris, 1967.

[6] Szőkefalvi-Nagy B., **Valós függvények és függvénysorok**, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

XIV. **INTEGRÁLELMÉLET**

IRODALOMJEGYZÉK

1. fejezet

Pozitív mérték szerinti felső integrál

1.1. Felső integrál az $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ függvényhalmazon

Legyen $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér. A μ által generált elemi integrál az $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$ függvényhalmazon rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

– Ha $\varphi,\psi \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$ és $\varphi \leq \psi$, akkor

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu \leq \int \psi \, \mathrm{d}\mu$$

(*monton növés*).

– Ha $\varphi \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$ és $c \in \mathbb{R}_+^*$, akkor

$$\int c\varphi \, \mathrm{d}\mu = c \int \varphi \, \mathrm{d}\mu$$

(*pozitív homogenitás*).

– Ha $\varphi,\psi \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$, akkor

$$\int (\varphi+\psi) \, \mathrm{d}\mu = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu + \int \psi \, \mathrm{d}\mu$$

(*additivitás*).

– Ha $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, hogy $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$, akkor

$$\int \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n\Big) \, \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n \, \mathrm{d}\mu$$

(*monoton σ-folytonosság*).

Figyeljük meg, hogy az első három tulajdonság tetszőleges μ pozitív additív halmazfüggvényre igaz, akkor is, ha az nem σ-additív. Ugyanakkor a negyedik tulajdonság *ekvivalens* a σ-additivitással, ha μ pozitív additív halmazfüggvény.

Most megmutatjuk, hogy a μ által generált elemi integrál $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ről kiterjeszthető az $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ függvényhalmazra monoton növő, pozitív homogén, *szubadditív*, és monoton σ-folytonos leképezéssé. A kiterjesztés két lépésben történik.

1.1.1. Definíció. *Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ jelöli azon $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvények halmazát, amelyekhez létezik olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, hogy $f = \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$.*

Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett. Tudjuk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{E}(T,\mathscr{R})$ esetén $|\varphi| \in \mathscr{E}(T,\mathscr{R})$, ezért

$$\varphi^+ := \varphi \vee 0 = \frac{1}{2}(\varphi + |\varphi|) \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R}),$$

$$\varphi^- := (-\varphi) \vee 0 = \frac{1}{2}(|\varphi| - \varphi) \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R}),$$

továbbá minden $\varphi, \psi \in \mathscr{E}(T,\mathscr{R})$ esetén

$$\varphi \wedge \psi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi - |\varphi - \psi|) \in \mathscr{E}(T,\mathscr{R}),$$

$$\varphi \vee \psi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi + |\varphi - \psi|) \in \mathscr{E}(T,\mathscr{R}).$$

Ebből kiindulva, az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen belátható, hogy bármely $\mathscr{E}(T,\mathscr{R})$-ben haladó $(\varphi_i)_{i\in I}$ nem üres véges rendszerre $\bigwedge_{i\in I} \varphi_i$ és $\bigvee_{i\in I} \varphi_i$ eleme $\mathscr{E}(T,\mathscr{R})$-nek.

1.1.2. Lemma. (Végtelen disztributivitási formulák) *Legyen L lineárisan rendezett halmaz.*

a) *Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozatok L-ben, hogy $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ és $\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$ léteznek L-ben, akkor $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\min(a_n,b_n))$ is létezik L-ben, és*

$$\min\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\min(a_n,b_n)).$$

b) *Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó sorozatok L-ben, hogy $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ és $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$ léteznek L-ben, akkor $\inf_{n\in\mathbb{N}}(\max(a_n,b_n))$ is létezik L-ben, és*

$$\max\left(\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\max(a_n,b_n)).$$

Bizonyítás. Csak az a) állítást fogjuk igazolni; a b) bizonyítása ehhez nagyon hasonló. Vezessük be az $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ és $b := \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$ jelölést. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\min(a_n,b_n) \leq a_n \leq a$ és $\min(a_n,b_n) \leq b_n \leq b$, így $\min(a_n,b_n) \leq \min(a,b)$, vagyis $\min(a,b)$ *felső korlátja* L-ben az $(\min(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak.

Legyen $c \in L$ tetszőleges felső korlátja L-ben az $(\min(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak; azt kell igazolni, hogy $\min(a,b) \leq c$. Most kihasználjuk az L rendezésének trichotómiáját, tehát $\min(a,b)$ egyenlő az a és b elemek közül a kisebbikkel. A meghatározottság kedvéért legyen $a \leq b$, tehát $\min(a,b) = a$. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $a \leq c$ nem igaz, vagyis $c < a$. Ekkor $c < b$ is teljesül, tehát az a és b elemek definíciója szerint léteznek olyan $i \in \mathbb{N}$ és $j \in \mathbb{N}$ számok, hogy $c < a_i$ és $c < b_j$. Ha $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $i, j \leq k$, akkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok monoton növése miatt $a_i \leq a_k$ és $b_j \leq b_k$, ezért $c < \min(a_k,b_k)$, holott $\min(a_k,b_k) \leq c$, mert c felső korlátja L-ben az $(\min(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak. Ez az ellentmondás azt igazolja, hogy $\min(a,b) = a \leq c$, vagyis $\min(a,b)$ az $(\min(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *legkisebb* felső korlátja L-ben. Ha $b \leq a$, akkor az előző érvelést alkalmazva az a és b elemeket felcserélve; ugyanerre az eredményre jutunk. ■

1.1.3. Állítás. *Legyen T halmaz, valamint $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T halmazon értelmezett valós értékű függvények sorozatai.*

a) *Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő függvénysorozatok, akkor*

$$\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) \wedge \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \Big(f_n \wedge g_n\Big).$$

b) *Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó függvénysorozatok, akkor*

$$\Big(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) \vee \Big(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big) = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \Big(f_n \vee g_n\Big).$$

Bizonyítás. a) Ha $t \in T$, akkor $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ és $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozatok az $\overline{\mathbb{R}}$ lineárisan rendezett halmazban, amelyekre $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ és $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(t)$ létezik $\overline{\mathbb{R}}$-ban, így az előző lemma a) pontja szerint:

$$\Big(\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) \wedge \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big)\Big)(t) := \min\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n(t)), \sup_{n\in\mathbb{N}}(g_n(t))\Big) =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\min(f_n(t), g_n(t))\Big) =: \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \Big(f_n \wedge g_n\Big)\Big)(t).$$

b) Az a) bizonyításához hasonló, csak az előző lemma b) pontját kell alkalmazni. ■

Megjegyezzük, hogy ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton növő* sorozatok $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban, akkor

$$\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n\Big) + \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(a_n + b_n\Big).$$

Legyen ugyanis $a := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ és $b := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_n + b_n$ és $b_n \leq a_n + b_n$, ezért $\max(a,b) \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n)$, amiből következik, hogy ha $a = +\infty$ vagy $b = +\infty$, akkor $a + b = +\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n)$. Ezért feltehetjük, hogy $a, b < +\infty$. Ekkor viszont $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ felülről korlátos, monoton növő, $\mathbb{R}_+$-ban haladó sorozatok, ezért

$$\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n\Big) + \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n\Big) = \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) + \Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(a_n + b_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(a_n + b_n\Big).$$

Ebből következik, hogy ha T halmaz, valamint $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T halmazon értelmezett valós értékű függvények monoton növő sorozatai, akkor

$$\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) + \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (f_n + g_n).$$

1.1.4. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett.*

a) *$\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R}) \subseteq \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$.*

b) *Ha $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ és $c \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $c.f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$.*

c) *Ha $(f_i)_{i\in I}$ nem üres véges rendszer $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, akkor $\bigwedge\limits_{i\in I} f_i \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$.*

d) *Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, akkor $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ eleme $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-nek.*

Bizonyítás. Az a) állítás nyilvánvaló.

Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, hogy $f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$. Ekkor minden $t \in T$ esetén $(c.f)(t) := c \cdot f(t) = c \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(c.\varphi_n(t))$, ami azt jelenti, hogy $c \cdot f = \sup_{n\in\mathbb{N}}(c.\varphi_n)$, és természetesen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $c.\varphi_n \leq c.\varphi_{n+1}$, valamint $c.\varphi_n \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$, tehát $c.f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ teljesül.

Legyenek $f, g \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, és vegyünk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, valamint $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyek monoton növők, és amelyekre $f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$, valamint $g = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \psi_n$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy az $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben haladó $(\varphi_n \bigwedge \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\varphi_n + \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok monoton növők, és

$$f \wedge g := \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n\Big) \wedge \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \psi_n\Big) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \Big(\varphi_n \wedge \psi_n\Big),$$
$$f + g := \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n\Big) + \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \psi_n\Big) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (\varphi_n + \psi_n),$$

ami azt jelenti, hogy $f \wedge g, f + g \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$. Ebből kiindulva, az indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen belátható, hogy *véges* sok $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-beli függvény alsó burkolója és összege eleme $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-nek.

A d) állítás bizonyításához először tegyük fel, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben. A kiválasztási axióma segítségével vehetünk olyan $(\varphi_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ rendszert, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\varphi_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, és $f_n = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \varphi_{n,k}$. Legyen minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\psi_k := \bigvee_{0\leq n\leq k} \varphi_{n,k}$; ekkor $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben haladó sorozat. Megmutatjuk, hogy ez monoton növő, és $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \psi_k$ teljesül, ezért $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$.

Valóban, ha $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\psi_k := \bigvee_{0\leq n\leq k} \varphi_{n,k} \leq \bigvee_{0\leq n\leq k} \varphi_{n,k+1} \leq \bigvee_{0\leq n\leq k+1} \varphi_{n,k+1} := \psi_{k+1},$$

mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $(\varphi_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő. Ez azt mutatja, hogy a $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő.

Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\psi_k := \bigvee_{0\leq n\leq k} \varphi_{n,k} \leq \bigvee_{0\leq n\leq k} \Big(\bigvee_{j\in\mathbb{N}} \varphi_{n,j}\Big) =: \bigvee_{0\leq n\leq k} f_n \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n,$$

ezért $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} \psi_k \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n$. A fordított függvény-egyenlőtlenség bizonyításához legyen $t \in T$ rögzített, és $c \in \mathbb{R}$ olyan szám, amelyre $c < \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $c < f_n(t) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \varphi_{n,k}(t)$, így olyan $k \in \mathbb{N}$ is létezik, amelyre $c < \varphi_{n,k}(t)$. Legyenek $n, k \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $c < \varphi_{n,k}(t)$. Ha $j \in \mathbb{N}$ tetszőleges olyan szám, amelyre $n, k \leq j$, akkor $c < \varphi_{n,k}(t) \leq \varphi_{n,j}(t) \leq \psi_j(t)$, ezért $c < \sup_{m\in\mathbb{N}} \psi_m(t)$. Ebből következik, hogy $t \in T$ esetén $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \psi_m(t)$, tehát fennáll a $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \bigvee_{m\in\mathbb{N}} \psi_m$ egyenlőtlenség is.

Ha $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, akkor minden $J\subseteq\mathbb{N}$ véges halmazra $\sum_{k\in J} f_k\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, ezért

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k := \bigvee_{\substack{J\subseteq\mathbb{N},\\ J\text{ véges}}}\Big(\sum_{k\in J} f_k\Big)\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$$

teljesül. ■

1.1.5. Definíció. *Legyen $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér. Minden $f\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ esetén*

$$\overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R}),\\ \varphi\le f}}\int\varphi\ \mathrm{d}\mu,$$

és ezt az $\overline{\mathbb{R}}_+$-beli elemet az f függvény μ **szerinti felső integráljának** *nevezzük.*

1.1.6. Lemma. *Ha $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér, $f\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben haladó monoton növő sorozat, amelyre $f=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n$, akkor*

$$\overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\varphi_n\ \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\varphi_n\in\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$ olyan függvény, hogy $\varphi_n\le f$, ezért a definíció alapján

$$\int\varphi_n\ \mathrm{d}\mu\le\overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu,$$

következésképpen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\varphi_n\ \mathrm{d}\mu\le\overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu.$$

A fordított egyenlőtlenség bizonyításához legyen $c\in\mathbb{R}$ olyan, hogy

$$c<\overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu.$$

Ekkor a definíció szerint van olyan $\varphi\in\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$ függvény, amelyre $\varphi\le f$, és

$$c<\int\varphi\ \mathrm{d}\mu.$$

Ekkor $(\varphi\wedge\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben haladó monoton növő sorozat, amelyre a végtelen disztributivitási formulák alapján

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\Big(\varphi_n\wedge\varphi\Big)=\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n\Big)\wedge\varphi=f\wedge\varphi=\varphi\in\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R}).$$

A μ mérték σ-additivitásából és monotonitásából következik, hogy ekkor

$$c<\int\varphi\ \mathrm{d}\mu=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int(\varphi_n\wedge\varphi)\ \mathrm{d}\mu\le\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\varphi_n\ \mathrm{d}\mu$$

teljesül. Ebből kapjuk, hogy az

$$\overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu\le\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\varphi_n\ \mathrm{d}\mu$$

egyenlőtlenség is igaz. ■

1.1.7. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitív mértéktér. Ekkor minden $\varphi \in \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$ esetén*

$$\overline{\int} \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu,$$

és az

$$\overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad f \mapsto \overline{\int} f \, \mathrm{d}\mu$$

leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

– **(Monoton növő)** *Ha $f, g \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, és $f \leq g$, akkor*

$$\overline{\int} f \, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} g \, \mathrm{d}\mu.$$

– **(Pozitív homogén)** *Ha $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ és $c \in \mathbb{R}_+^*$, akkor*

$$\overline{\int} (c.f) \, \mathrm{d}\mu = c \overline{\int} f \, \mathrm{d}\mu.$$

– **(Végesen additív)** *Ha $f, g \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, akkor*

$$\overline{\int} (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \overline{\int} f \, \mathrm{d}\mu + \overline{\int} g \, \mathrm{d}\mu.$$

– **(Monoton σ-folytonos)** *Ha $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$-ben, akkor*

$$\overline{\int} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\int} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Ha $\psi \in \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$ olyan, hogy $\psi \leq \varphi$, akkor a μ által generált elemi integrál monoton növése, vagyis a μ additív halmazfüggvény pozitivitása miatt $\int \psi \, \mathrm{d}\mu \leq \int \varphi \, \mathrm{d}\mu$, amiből következik, hogy

$$\overline{\int} \varphi \, \mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{\psi \in \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R}), \\ \psi \leq \varphi}} \int \psi \, \mathrm{d}\mu \leq \int \varphi \, \mathrm{d}\mu,$$

ugyanakkor a fordított egyenlőtlenség a definíció szerint nyilvánvaló.
Ha $f, g \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, $\varphi \in \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$, és $\varphi \leq f$, akkor $f \leq g$ esetén $\varphi \leq g$, tehát

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} g \, \mathrm{d}\mu,$$

amiből következik, hogy

$$\overline{\int} f \, \mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R}), \\ \varphi \leq f}} \int \varphi \, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} g \, \mathrm{d}\mu.$$

Ha $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, $c \in \mathbb{R}_+^*$ és $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre $f = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$, akkor $(c.\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre $c.f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (c.\varphi_n)$, tehát az előző lemma, és az elemi integrál homogenitása szerint

$$\overline{\int}(c.f)\ \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int (c.\varphi_n)\ \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(c. \int \varphi_n\ \mathrm{d}\mu\Big) = c\cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n\ \mathrm{d}\mu = c\cdot \overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu.$$

Ha $f,g \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, valamint $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozatok $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyekre $f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ és $g = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \psi_n$, akkor $(\varphi_n+\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre $f+g = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (\varphi_n+\psi_n)$, tehát az előző lemma, és az elemi integrál additivitása szerint

$$\overline{\int}(f+g)\ \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int(\varphi_n+\psi_n)\ \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\int \varphi_n\ \mathrm{d}\mu + \int \psi_n\ \mathrm{d}\mu\Big) =$$
$$= \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n\ \mathrm{d}\mu\Big) + \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \int \psi_n\ \mathrm{d}\mu\Big) = \overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu + \overline{\int} g\ \mathrm{d}\mu.$$

Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben. A kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $(\varphi_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ rendszert, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $(\varphi_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, és $f_n = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \varphi_{n,k}$. Korábban láttuk, hogy ha minden $k\in\mathbb{N}$ esetén $\psi_k := \bigvee_{0\le n\le k} \varphi_{n,k}$; ekkor $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben haladó monoton növő sorozat, amelyre $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \psi_k$ teljesül. Ezért az előző lemma alapján

$$\overline{\int}\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)\mathrm{d}\mu = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int \psi_k\ \mathrm{d}\mu \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \overline{\int} f_k\ \mathrm{d}\mu,$$

mert $k\in\mathbb{N}$ esetén az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növése miatt $\psi_k := \bigvee_{0\le n\le k} \varphi_{n,k} \le \bigvee_{0\le n\le k} f_n = f_k$. Ugyanakkor $k\in\mathbb{N}$ esetén nyilvánvalóan $f_k \le \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n$, ezért a felső integrál monoton növése miatt

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \overline{\int} f_k\ \mathrm{d}\mu \le \overline{\int}\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)\mathrm{d}\mu$$

teljesül. ■

1.1.8. Következmény. (Az $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ feletti felső integrál σ-additivitása) *Legyen $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér. Ha $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, akkor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\int} f_k\ \mathrm{d}\mu = \overline{\int}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\Big)\ \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Ha $J\subseteq\mathbb{N}$ véges halmaz, akkor van olyan $n\in\mathbb{N}$, hogy minden $k\in J$ esetén $k\le n$, és ekkor $\sum_{k\in J} f_k \le \sum_{k=0}^{n} f_k$. Ebből következik, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} f_k = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} f_k$, és természetesen a $\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, és $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben halad, ezért az $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ feletti felső integrál monoton σ-folytonossága és véges additivitása miatt

$$\overline{\int}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)\,\mathrm{d}\mu = \overline{\int}\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)\,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}}\overline{\int}\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)\,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}\overline{\int} f_k\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{\infty}\overline{\int} f_k\,\mathrm{d}\mu$$

teljesül. ■

1.2. Felső integrál és a Fatou-tétel

1.2.1. Definíció. *Legyen $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér. Minden $f\in\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén*

$$\int^* f\,\mathrm{d}\mu := \inf_{\substack{h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})\\ f\le h}}\overline{\int} h\,\mathrm{d}\mu,$$

ha létezik olyan $h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, amelyre $f\le h$, egyébként

$$\int^* f\,\mathrm{d}\mu := +\infty,$$

és ezt az $\overline{\mathbb{R}}_+$-beli elemet az f függvény μ **szerinti felső integráljának** *nevezzük.*

Könnyen előállítható olyan T halmaz, és olyan $\mathscr{R}$ halmazgyűrű T felett, és olyan $f\in\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ függvény, hogy *nem létezik* olyan $h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, amelyre $f\le h$ (**1.** gyakorlat). Azonban sok esetben még a $T\to\overline{\mathbb{R}}_+$ azonosan $+\infty$ konstansfüggvény is eleme az $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ függvényhalmaznak; ilyenkor *minden* $f\in\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ függvényhez létezik olyan $h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, hogy $f\le h$.

Tehát ha $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér, és $f\in\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ olyan függvény, amelyhez létezik $h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ úgy, hogy $f\le h$, akkor

$$\int^* f\,\mathrm{d}\mu = \inf_{\substack{h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})\\ f\le h}}\Big(\sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})\\ \varphi\le h}}\int\varphi\,\mathrm{d}\mu\Big).$$

Ez lehet a felső integrál definíciója *egy lépésben*, kihagyva az $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ feletti felső integrál értelmezését.

1.2.2. Tétel. (Fatou-tétel) *Legyen $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér. Ekkor minden $f\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ esetén*

$$\int^* f\,\mathrm{d}\mu = \overline{\int} f\,\mathrm{d}\mu,$$

és az

$$\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)\to\overline{\mathbb{R}}_+;\quad f\mapsto\int^* f\,\mathrm{d}\mu$$

leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

– **(Monoton növő)** *Ha $f,g\in\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$, és $f\le g$, akkor*

$$\int^* f\,\mathrm{d}\mu\le\int^* g\,\mathrm{d}\mu.$$

– **(Pozitív homogén)** *Ha* $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ *és* $c \in \mathbb{R}_+^*$, *akkor*

$$\int^* (c.f)\ \mathrm{d}\mu = c\int^* f\ \mathrm{d}\mu.$$

– **(Végesen szubadditív)** *Ha* $f, g \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$, *akkor*

$$\int^* (f+g)\ \mathrm{d}\mu \leq \int^* f\ \mathrm{d}\mu + \int^* g\ \mathrm{d}\mu.$$

– **(Monoton σ-folytonos)** *Ha* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton növő sorozat* $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$*-ben, akkor*

$$\int^* \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)\ \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* f_n\ \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Ha $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, és $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ olyan, hogy $f \leq h$, akkor az $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ feletti felső integrál monoton növése miatt

$$\overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} h\ \mathrm{d}\mu,$$

amiből következik, hogy

$$\overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu \leq \inf_{\substack{h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})\\ f\leq h}} \overline{\int} h\ \mathrm{d}\mu =: \int^* f\ \mathrm{d}\mu.$$

Ugyanakkor $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ és $f \leq f$ miatt természetesen

$$\int^* f\ \mathrm{d}\mu := \inf_{\substack{h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})\\ f\leq h}} \overline{\int} h\ \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\int^* f\ \mathrm{d}\mu = \overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu.$$

Legyenek $f, g \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ olyanok, hogy $f \leq g$. Ha nem létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, amelyre $g \leq h$, akkor

$$\int^* f\ \mathrm{d}\mu \leq +\infty =: \int^* g\ \mathrm{d}\mu.$$

Ha létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, amelyre $g \leq h$, akkor $f \leq h$ is igaz, ezért

$$\int^* f\ \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} h\ \mathrm{d}\mu,$$

így fennáll az

$$\int^* f\ \mathrm{d}\mu \leq \inf_{\substack{h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})\\ g\leq h}} \overline{\int} h\ \mathrm{d}\mu =: \int^* g\ \mathrm{d}\mu$$

egyenlőtlenség is. Ez azt jelenti, hogy a μ szerinti felső integrál monoton növő.

Legyen $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ és $c \in \mathbb{R}_+^*$. Ha $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ olyan, hogy $c.f \leq h$, akkor

$f \leq c^{-1}.h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$. Ez azt jelenti, hogy ha nem létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, amelyre $f \leq h$, akkor $c.f$-hez sem létezik, olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, amelyre $c.f \leq h$, ezért

$$\int^* (c.f)\, \mathrm{d}\mu := +\infty = c \cdot (+\infty) =: c \int^* f\, \mathrm{d}\mu.$$

Tegyük fel, hogy $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ olyan, hogy $f \leq h$. Ekkor $c.f \leq c.h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, tehát az $\overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ feletti felső integrál pozitív homogenitása miatt

$$\int^* (c.f)\, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} (c.h)\, \mathrm{d}\mu = c \overline{\int} h\, \mathrm{d}\mu,$$

vagyis

$$c^{-1} \int^* (c.f)\, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} h\, \mathrm{d}\mu.$$

Ebből következik, hogy

$$c^{-1} \int^* (c.f)\, \mathrm{d}\mu \leq \inf_{\substack{h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R}) \\ f \leq h}} \overline{\int} h\, \mathrm{d}\mu =: \int^* f\, \mathrm{d}\mu,$$

vagyis

$$\int^* (c.f)\, \mathrm{d}\mu \leq c \int^* f\, \mathrm{d}\mu.$$

Megfordítva, ha $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ olyan, hogy $c.f \leq h$, akkor $f \leq c^{-1}.h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, tehát az $\overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ feletti felső integrál pozitív homogenitása miatt

$$\int^* f\, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} (c^{-1}.h)\, \mathrm{d}\mu = c^{-1} \overline{\int} h\, \mathrm{d}\mu,$$

vagyis

$$c \int^* f\, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} h\, \mathrm{d}\mu.$$

Ebből következik, hogy

$$c \int^* f\, \mathrm{d}\mu \leq \inf_{\substack{h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R}) \\ c.f \leq h}} \overline{\int} h\, \mathrm{d}\mu =: \int^* (c.f)\, \mathrm{d}\mu,$$

vagyis

$$c \int^* f\, \mathrm{d}\mu \leq \int^* (c.f)\, \mathrm{d}\mu.$$

Ez azt jelenti, hogy a μ szerinti felső integrál pozitív homogén.

Legyenek $f, g \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$. Ha az f vagy g felső integrálja $+\infty$, akkor a felső integrál monoton növése alapján nyilvánvalóan

$$+\infty = \max\Big(\int^* f\, \mathrm{d}\mu, \int^* g\, \mathrm{d}\mu \Big) \leq \int^* (f+g)\, \mathrm{d}\mu \leq +\infty = \int^* f\, \mathrm{d}\mu + \int^* g\, \mathrm{d}\mu,$$

ezért a felső integrál véges szubadditivitásának bizonyításához feltehetjük, hogy az f és g felső integrálja véges. Ekkor természetesen léteznek olyan $h, h' \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, hogy $f \leq h$, $g \leq h'$, és

$$\overline{\int} h\, \mathrm{d}\mu < +\infty, \quad \overline{\int} h'\, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Továbbá, ha h és h' ilyenek, akkor $f+g \leq h+h' \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, tehát az $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ feletti felső integrál véges additivitása miatt

$$\int^* (f+g)\,\mathrm{d}\mu \leq \overline{\int}(h+h')\,\mathrm{d}\mu = \overline{\int} h\,\mathrm{d}\mu + \overline{\int} h'\,\mathrm{d}\mu.$$

Rögítve h-t, ebből kapjuk, hogy minden $h' \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ esetén, ha $g \leq h'$, akkor

$$\int^* (f+g)\,\mathrm{d}\mu - \overline{\int} h\,\mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} h'\,\mathrm{d}\mu,$$

ezért

$$\int^* (f+g)\,\mathrm{d}\mu - \overline{\int} h\,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{\substack{h' \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R}) \\ g \leq h'}} \overline{\int} h'\,\mathrm{d}\mu =: \int^* g\,\mathrm{d}\mu,$$

vagyis

$$\int^* (f+g)\,\mathrm{d}\mu - \int^* g\,\mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} h\,\mathrm{d}\mu$$

Ebből következik, hogy

$$\int^* (f+g)\,\mathrm{d}\mu - \int^* g\,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{\substack{h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R}) \\ f \leq h}} \overline{\int} h\,\mathrm{d}\mu =: \int^* f\,\mathrm{d}\mu,$$

vagyis

$$\int^* (f+g)\,\mathrm{d}\mu \leq \int^* f\,\mathrm{d}\mu + \int^* g\,\mathrm{d}\mu$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a μ szerinti felső integrál végesen szubadditív.

A μ szerinti felső integrál monoton σ-folytonosságának bizonyításához legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges monoton növő sorozat $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$-ben. A felső integrál monoton növése miatt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* f_n\,\mathrm{d}\mu \leq \int^* \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)\,\mathrm{d}\mu,$$

tehát csak azt kell igazolni, hogy

$$\int^* \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)\,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Ez az egyenlőtlenség triviálisan igaz akkor ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy az f_n μ szerinti felső integrálja $+\infty$, ezért feltehetjük, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re az f_n μ szerinti felső integrálja véges (sőt még azt is feltehetnénk, hogy az $\Big(\int^* f_n\,\mathrm{d}\mu\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathbb{R}_+$-ban *felülről korlátos*).

Először megmutatjuk, hogy bármely $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *szigorúan monoton növő*, $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozathoz létezik olyan $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \leq h_n$, és

$$\overline{\int} h_n\,\mathrm{d}\mu < \int^* f_n\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon_n$$

teljesül.

Az f_0 függvény μ szerinti felső integrálja véges, és $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$, ezért a felső integrál definíciója szerint van olyan $h_0 \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, hogy $f_0 \leq h_0$, és

$$\overline{\int} h_0 \, \mathrm{d}\mu < \int^* f_0 \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon_0.$$

Most tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^*$, és $(h_k)_{k\in n}$ olyan monoton növő rendszer $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre minden $k \in n$ esetén $f_k \leq h_k$, és

$$\overline{\int} h_k \, \mathrm{d}\mu < \int^* f_k \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon_k.$$

Megmutatjuk, hogy létezik olyan $h_n \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, amelyre $h_{n-1} \leq h_n$, $f_n \leq h_n$, és

$$\overline{\int} h_n \, \mathrm{d}\mu < \int^* f_n \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon_n.$$

Az f_n függvény μ szerinti felső integrálja véges, és $\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} \in \mathbb{R}_+^*$, ezért van olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, hogy $f_n \leq h$, és

$$\overline{\int} h \, \mathrm{d}\mu < \int^* f_n \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}.$$

Ekkor $h, h_{n-1} \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ miatt $h \vee h_{n-1}, h \wedge h_{n-1} \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ is igaz, és

$$\Big(h \vee h_{n-1}\Big) + \Big(h \wedge h_{n-1}\Big) = h + h_{n-1}.$$

Ezért az $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ feletti μ szerinti felső integrál véges additivitása miatt

$$\overline{\int}\Big(h \vee h_{n-1}\Big) \, \mathrm{d}\mu + \overline{\int}\Big(h \wedge h_{n-1}\Big) \, \mathrm{d}\mu = \overline{\int} h \, \mathrm{d}\mu + \overline{\int} h_{n-1} \, \mathrm{d}\mu,$$

és világos, hogy mind a négy itt álló $\overline{\mathbb{R}}_+$-beli elem véges. Nyilvánvaló, hogy a $h_n := h \vee h_{n-1} \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ függvény olyan, hogy $f_n \leq h \leq h_n$ és $h_{n-1} \leq h_n$. Továbbá, $f_{n-1} \leq f_n \leq h$ és $f_{n-1} \leq h_{n-1}$, így $f_{n-1} \leq h \wedge h_{n-1} \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$. Ebből következik, hogy

$$\overline{\int}\Big(h \vee h_{n-1}\Big) \, \mathrm{d}\mu + \int^* f_{n-1} \, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} h \, \mathrm{d}\mu + \overline{\int} h_{n-1} \, \mathrm{d}\mu,$$

vagyis

$$\overline{\int} h_n := \overline{\int}\Big(h \vee h_{n-1}\Big) \, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} h \, \mathrm{d}\mu + \overline{\int} h_{n-1} - \int^* f_{n-1} \, \mathrm{d}\mu <$$
$$< \Big(\int^* f_n \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}\Big) + \varepsilon_{n-1} = \int^* f_n \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon_n,$$

ami azt jelenti, hogy h_n olyan függvény, amelynek létezését állítottuk.

Ebből a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tételt alkalmazva kapjuk, hogy bármely $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *szigorúan monoton növő*, $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozathoz létezik olyan $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \leq h_n$, és

$$\overline{\int} h_n \, \mathrm{d}\mu < \int^* f_n \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon_n$$

teljesül.

Legyen most $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton növő sorozatot $\mathbb{R}_+^*$-ben, amelyre $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n \leq \varepsilon$; például legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_n := \varepsilon(1-2^{-(n+1)})$. Vegyünk olyan $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatot $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \leq h_n$, és

$$\overline{\int} h_n \, \mathrm{d}\mu < \int^* f_n \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon_n.$$

Ekkor az $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ feletti felső integrál monoton σ-folytonossága, és a felső integrál monoton növése alapján

$$\int^* \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) \, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int} \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} h_n\Big) \, \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\int} h_n \, \mathrm{d}\mu \leq$$
$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\int^* f_n \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon_n\Big) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* f_n \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon$$

teljesül. Az ε tetszőlegessége folytán ebből következik, hogy

$$\int^* \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) \, \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* f_n \, \mathrm{d}\mu,$$

tehát a μ szerinti felső integrál monoton σ-folytonos. ∎

Azonban vigyázzunk arra, hogy egy pozitív mérték szerinti felső integrál nem szükségképpen végesen additív (**6**. gyakorlat).

1.3. A Fatou-tétel elemi következményei

1.3.1. Állítás. (Fatou-lemma) *Legyen $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$-ben. Ekkor*

$$\int^* \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big) \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int^* f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Az $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozatok, valamint a függvénysorozatok alsó határértékének definíciója, a felső integrál monoton σ-folytonossága, és monoton növése alapján

$$\int^* \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big) \, \mathrm{d}\mu := \int^* \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigwedge_{\substack{k\in\mathbb{N}\\k\geq n}} f_k\Big)\Big) \, \mathrm{d}\mu =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \Big(\bigwedge_{\substack{k\in\mathbb{N}\\k\geq n}} f_k\Big) \, \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\inf_{\substack{k\in\mathbb{N}\\k\geq n}} \int^* f_k \, \mathrm{d}\mu\Big) =: \liminf_{n\to\infty} \int^* f_n \, \mathrm{d}\mu$$

teljesül. ∎

1.3.2. Tétel. (A megszámlálható konvexitás tétele) *Legyen $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér, és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$-ben. Ekkor*

$$\int^* \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big) \, \mathrm{d}\mu \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int^* f_k \, \mathrm{d}\mu$$

teljesül.

Bizonyítás. Az $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban haladó sorok, valamint a függvénysorok összegének definícója, a felső integrál monoton σ-folytonossága, és monoton növése alapján

$$\int^* \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)\, \mathrm{d}\mu := \int^* \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)\Big)\, \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)\, \mathrm{d}\mu \leq$$
$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{n} \int^* f_k\, \mathrm{d}\mu\Big) =: \sum_{k=0}^{\infty} \int^* f_k\, \mathrm{d}\mu$$

teljesül. ■

1.3.3. Definíció. *Ha $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitív mértéktér, akkor minden $E \subseteq T$ halmazra*

$$\mu^*(E) := \int^* \chi_{_E}\, \mathrm{d}\mu,$$

és ezt az $\overline{\mathbb{R}}_+$-beli elemet az E halmaz μ szerinti **Lebesgue-féle külső mértékének**, *vagy egyszerűen* **külső mértékének** *nevezzük.*

1.3.4. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitív mértéktér. Ekkor minden $E \in \mathscr{R}$ esetén*

$$\mu^*(E) = \mu(E),$$

és a

$$\mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad E \mapsto \mu^*(E)$$

leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

– **(Monoton növő)** *Minden $E, E' \subseteq T$ esetén, ha $E \subseteq E'$, akkor $\mu^*(E) \leq \mu^*(E')$.*

– **(Monoton σ-folytonos)** *A T részhalmazainak bármely $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tartalmazás tekintetében monoton növő sorozatára*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n).$$

– **(Megszámlálhatóan szubadditív)** *A T részhalmazainak bármely $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatára*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

Bizonyítás. Ha $E, E' \subseteq T$ és $E \subseteq E'$, akkor $\chi_{_E} \leq \chi_{_{E'}}$, így a felső integrál monoton növése miatt

$$\mu^*(E) := \int^* \chi_{_E}\, \mathrm{d}\mu \leq \int^* \chi_{_{E'}}\, \mathrm{d}\mu =: \mu^*(E').$$

Ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tartalmazás tekintetében monoton növő, $\mathscr{P}(T)$-ben haladó sorozat, akkor az $E := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ halmazra $\chi_{_E} = \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} \chi_{_{E_n}}$ teljesül, és a $\Big(\chi_{_{E_n}}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, ezért a felső integrál monoton σ-folytonosága miatt

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) := \int^* \chi_{_E}\, \mathrm{d}\mu = \int^* \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{_{E_n}}\Big)\, \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \chi_{_{E_n}}\, \mathrm{d}\mu =: \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n).$$

Ha $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a T részhalmazainak tetszőleges sorozata, akkor az $E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ halmazra ismét fennáll a $\chi_{_E} = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \chi_{_{E_k}}$, de a $\left(\chi_{_{E_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat nem szükségképpen monoton növő. Azonban nyilvánvaló, hogy $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} \chi_{_{E_k}} \le \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{_{E_k}}$, ezért a felső integrál monoton növése és a megszámlálható konvexitás tétele alapján

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) := \int^* \chi_{_E}\ \mathrm{d}\mu \le \int^* \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{_{E_k}}\Big)\ \mathrm{d}\mu \le \sum_{k=0}^{\infty} \int^* \chi_{_{E_k}}\ \mathrm{d}\mu =: \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

teljesül. ■

1.4. Diszkrét mérték szerinti felső integrál

1.4.1. Állítás. (**Diszkrét mérték szerinti felső integrál I.**) *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és $\alpha : T \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, amelyre minden $E \in \mathscr{R}$ esetén az $E \cap \{t \in T | \alpha(t) > 0\}$ halmaz véges. Jelölje μ_α az α függvény által meghatározott diszkrét mértéket (***MES** *6.6.3. gyakorlat), tehát*

$$\mu_\alpha : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+; \quad E \mapsto \sum_{t\in E} \alpha(t).$$

a) *Minden $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ esetén*

$$\int^* f\ \mathrm{d}\mu_\alpha = \sum_{t\in T} f(t)\alpha(t).$$

b) *Minden $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén*

$$\int^* f\ \mathrm{d}\mu_\alpha \ge \sum_{t\in T} f(t)\alpha(t).$$

Bizonyítás. a) Tudjuk, hogy ha $\varphi \in \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$, akkor

$$\int^* \varphi\ \mathrm{d}\mu_\alpha = \int \varphi\ \mathrm{d}\mu_\alpha = \sum_{t\in T} \varphi(t)\alpha(t)$$

(VIII. fejezet, 6. pont, **3**. gyakorlat). Legyen $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$. Ekkor

$$\int^* f\ \mathrm{d}\mu_\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n\ \mathrm{d}\mu_\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{t\in T} \varphi_n(t)\alpha(t) \le \sum_{t\in T} f(t)\alpha(t).$$

Ha az f felső integrálja μ_α szerint $+\infty$, akkor ebből azonnal következik az egyenlőség, ezért tegyük fel, hogy az f felső integrálja μ_α szerint véges. Minden $t \in T$ esetén, ha $\alpha(t) > 0$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\varphi_n(t)\alpha(t) \le \sum_{s\in T} \varphi_n(s)\alpha(s) = \int \varphi_n\ \mathrm{d}\mu_\alpha \le \int^* f\ \mathrm{d}\mu_\alpha,$$

vagyis $\varphi_n(t) \leq \alpha(t)^{-1} \int^* f \, \mathrm{d}\mu_\alpha$. Ez azt jelenti, hogy $t \in T$ és $\alpha(t) > 0$ esetén

$$f(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(t) \leq \frac{1}{\alpha(t)} \int^* f \, \mathrm{d}\mu_\alpha < +\infty,$$

tehát $\{t \in T | \alpha(t) > 0\} \subseteq \{t \in T | f(t) < +\infty\}$ teljesül. Legyen most $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és $H \subseteq \{t \in T | \alpha(t) > 0\}$ tetszőleges nem üres véges halmaz. Minden $t \in H$ esetén kiválaszthatunk olyan $N_t \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N_t$, akkor

$$f(t) - \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{s \in H} \alpha(s)} < \varphi_n(t).$$

Legyen $N := \max\limits_{t \in H} N_t$; ekkor minden $n > N$ természetes számra és minden $t \in H$ pontra fennáll az előző egyenlőtlenség, mert a $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő. Ezért $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$\sum_{t \in H} f(t)\alpha(t) - \varepsilon = \sum_{t \in H} \Bigg(f(t) - \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{s \in H} \alpha(s)} \Bigg) \alpha(t) < \sum_{t \in H} \varphi_n(t)\alpha(t) \leq$$

$$\leq \sum_{t \in T} \varphi_n(t)\alpha(t) = \int \varphi_n \, \mathrm{d}\mu_\alpha \leq \int^* f \, \mathrm{d}\mu_\alpha.$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{t \in T} f(t)\alpha(t) \leq \int^* f \, \mathrm{d}\mu_\alpha + \varepsilon,$$

tehát ε tetszőlegessége folytán

$$\sum_{t \in T} f(t)\alpha(t) \leq \int^* f \, \mathrm{d}\mu_\alpha$$

is teljesül.

b) Ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, akkor minden $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ függvényre, $f \leq h$ esetén az a) alapján

$$\int^* h \, \mathrm{d}\mu_\alpha = \sum_{t \in T} h(t)\alpha(t) \geq \sum_{t \in T} f(t)\alpha(t),$$

tehát ha létezik olyan függvény $\overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amely majorálja az f függvényt, akkor

$$\int^* f \, \mathrm{d}\mu_\alpha \geq \sum_{t \in T} f(t)\alpha(t)$$

teljesül. ■

Vigyázzunk arra, hogy előző állítás feltételei mellett előfordulhat az, hogy valamely $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ függvényre $\int^* f \, \mathrm{d}\mu_\alpha = +\infty$, de $\sum\limits_{t \in T} f(t)\alpha(t) = 0$. Ez a helyzet akkor például, ha az $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ függvény olyan, hogy $\Big(T \setminus \bigcup\limits_{E \in \mathscr{R}} E\Big) \cap \{t \in T | \alpha(t) > 0\} \neq \emptyset$.

Legyen ugyanis $\mathfrak{a} \in \Big(T \setminus \bigcup_{E \in \mathscr{R}} E\Big) \cap \{t \in T | \alpha(t) > 0\}$ tetszőleges pont, és $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvény, hogy $f(\mathfrak{a}) > 0$, valamint $\{t \in T | \alpha(t) > 0\} \subseteq \{t \in T | f(t) = 0\}$. Ekkor az **1**. gyakorlat szerint nem létezik olyan függvény $\overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amely az f függvényt majorálja, így f felső integrálja θ_α szerint $+\infty$, ugyanakkor nyilvánvalóan

$$\sum_{t \in T} f(t)\alpha(t) = 0$$

teljesül.

1.4.2. Állítás. (**Számláló mérték szerinti felső integrál.**) *Legyen $\mathscr{R}$ a T halmaz véges részhalmazainak halmazgyűrűje és $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ a számláló mérték T felett, vagyis minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\mu(E) := \mathrm{Card}(E)$. Ekkor minden $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre*

$$\int^* f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{t \in T} f(t),$$

és a μ szerinti felső integrál abban az értelemben teljesen additív, hogy tetszőleges $\mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$-beli $(f_i)_{i \in I}$ rendszerre

$$\int^* \Big(\sum_{i \in I} f_i\Big) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i \in I} \int^* f_i \, \mathrm{d}\mu$$

teljesül, az I indexhalmaz számosságára vonatkozó korlátozás nélkül.

Bizonyítás. Világos, hogy $\mu = \mu_\alpha$, ahol $\alpha : T \to \mathbb{R}$ az azonosan 1 függvény, ezért az előző állítás eredményeit alkalmazva kapjuk, hogy $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ esetén

$$\int^* f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{t \in T} f(t),$$

és tetszőleges $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre

$$\int^* f \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{t \in T} f(t).$$

Ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvény, hogy $\sum_{t \in T} f(t) < +\infty$, akkor $\{t \in T | f(t) \neq 0\}$ megszámlálható halmaz, így $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, tehát

$$\int^* f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{t \in T} f(t).$$

Legyen $(f_i)_{i \in I}$ tetszőleges $\mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$-ben haladó rendszer.
■

1.4.3. Állítás. (**Dirac-mérték szerinti felső integrál.**) *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, $\mathfrak{a} \in T$, és $\delta_\mathfrak{a}$ az $\mathfrak{a}$ pontba koncentrált, $\mathscr{R}$-en értelmezett Dirac-mérték, tehát*

$$\delta_\mathfrak{a} : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+; \quad E \mapsto \chi_{_E}(\mathfrak{a}).$$

a) *Minden* $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ *esetén*

$$\int^* f \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} = f(\mathfrak{a}).$$

b) *Minden* $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ *esetén*

$$\int^* f \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} \geq f(\mathfrak{a}).$$

c) *Jelölje* $\mathbf{e}_{\mathfrak{a}}$ *azt a* $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *függvényt, amelyre* $\mathbf{e}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}) := 1$ *és minden* $t \in T \setminus \{\mathfrak{a}\}$ *esetén* $\mathbf{e}_{\mathfrak{a}}(t) := +\infty$. *Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*
(i) *Minden* $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ *esetén*

$$\int^* f \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} = f(\mathfrak{a}).$$

(ii) $\mathbf{e}_{\mathfrak{a}} \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$.
(iii) *Létezik olyan* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat* $\mathscr{R}$*-ben, hogy* $T = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, *és létezik olyan* $(E'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat* $\mathscr{R}$*-ben, hogy* $\{\mathfrak{a}\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E'_n$.
E feltételek bármelyikéből következik olyan $\mathscr{R}$*-ben haladó* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat létezése, hogy* $T = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, *de konkrét példával igazolható, hogy ez a következtetés nem fordítható meg.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\delta_{\mathfrak{a}} = \mu_\alpha$, ahol $\alpha : T \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\alpha(\mathfrak{a}) := 1$, és minden $t \in T \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén $\alpha(t) = 0$, ezért a **7**. gyakorlat eredményeit alkalmazva kapjuk, hogy $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ esetén

$$\int^* f \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} = \sum_{t\in T} f(t)\alpha(t) = f(t),$$

és tetszőleges $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre

$$\int^* f \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} \geq \sum_{t\in T} f(t)\alpha(t) = f(t).$$

Ez azt jelenti, hogy a) és b) igaz. Most bebizonyítjuk a c) állítást.
(i)⇒(ii) Az (i) alapján d

$$\int^* \mathbf{e}_{\mathfrak{a}} \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} = \mathbf{e}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}) = 1,$$

ezért feltétlenül létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, amelyre $\mathbf{e}_{\mathfrak{a}} \leq h$, és

$$h(\mathfrak{a}) = \int^* h \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} < +\infty.$$

Ha h ilyen függvény, akkor $1 = \mathbf{e}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}) \leq h(\mathfrak{a}) < +\infty$, és minden $t \in T \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra $+\infty = \mathbf{e}_{\mathfrak{a}}(t) \leq h(t)$, vagyis $h(t) = +\infty$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{e}_{\mathfrak{a}} = h(\mathfrak{a})^{-1}.h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$.

(ii)⇒(iii) Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre $\mathbf{e}_{\mathfrak{a}} =$

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$. Ekkor $1 = \mathbf{e}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(\mathfrak{a})$ miatt van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\varphi_n(\mathfrak{a}) > 0$, vagyis $\mathfrak{a} \in \{t \in T | \varphi_n(t) > 0\} \in \mathscr{R}$. Rögzítsünk egy $E \in \mathscr{R}$ halmazt, amelyre $\mathfrak{a} \in E$, továbbá legyen minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $E_n := \{t \in T | \varphi_n(t) > 1\} \in \mathscr{R}$, valamint $E_0 := E$. Világos, hogy ekkor $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Továbbá, ha minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $E'_n := E \setminus E_n$, valamint $E'_0 := E$, akkor $\{\mathfrak{a}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E'_n$.

(iii)⇒(ii) A (iii)-ból következik, olyan *monoton növő* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezése $\mathscr{R}$-ben, hogy $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, és olyan *monoton fogyó* $(E'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezése $\mathscr{R}$-ben, hogy $\{\mathfrak{a}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E'_n$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\psi_n := n\chi_{E_n \setminus E'_n}$. Ekkor $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, hogy a $h := \sup_{n\in\mathbb{N}} \psi_n \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ függvényre $h(\mathfrak{a}) = 0$ és $t \in T \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén $h(t) = +\infty$. Ugyanakkor $(\chi_{E_n})_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, hogy a $1_T := \sup_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n} \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ függvény a $T \to \mathbb{R}$ azonosan 1 függvény. Ezért $\mathbf{e}_{\mathfrak{a}} = h + 1_t \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, tehát (ii) teljesül.

(ii)⇒(i) Legyen $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges olyan függvény, amelyre $f(\mathfrak{a}) < +\infty$. Legyen $c \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $f(\mathfrak{a}) < c$; ekkor a (ii) alapján $c.\mathbf{e}_{\mathfrak{a}} \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, és ez a függvény majorálja az f függvényt, így az a) alkalmazásával

$$\int^* f \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} \leq \int^* (c.\mathbf{e}_{\mathfrak{a}}) \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} = c.\mathbf{e}_{\mathfrak{a}} = c$$

adódik. Ebből következik, hogy

$$\int^* f \, \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} \leq f(\mathfrak{a}),$$

így a b) figyelembe vételével az (i) állítást igazoltuk.

Végül, ha $\mathscr{R} := \{\emptyset, T\}$, akkor nyilvánvalóan létezik olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, de ha T legalább két elemű, akkor semmilyen $\mathfrak{a} \in T$ ponthoz nem létezik olyan $\mathscr{R}$-beli $(E'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre $\{\mathfrak{a}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E'_n$. ■

A c) pont (iii) állításában megfogalmazott tulajdonságokkal rendelkezik minden $n \in \mathbb{N}$ számra a $T := \mathbb{R}^n$ halmaz, és az $\mathscr{R} := \mathscr{R}_{\mathbb{R}^n}$ standard halmazgyűrű, bármely $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$ esetén.

1.4.4. Állítás. (**Diszkrét mérték szerinti felső integrál II.**.) *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és $\alpha : T \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, amelyre minden $E \in \mathscr{R}$ esetén az $E \cap \{t \in T | \alpha(t) > 0\}$ halmaz véges. Tekintsük a*

$$\theta_\alpha : \mathscr{R} \to \mathbb{R}; \quad E \mapsto \sum_{t\in E} \alpha(t)$$

diszkrét pozitív mértéket. Tegyük fel, hogy

a) *létezik olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, és*

b) *minden* $t \in T$ *esetén, ha* $\alpha(t) > 0$*, akkor létezik olyan* $(E'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat* $\mathscr{R}$*-ben, hogy* $\{t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E'_n$.

Ekkor minden $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *függvényre*

$$\int^* f \, \mathrm{d}\theta_\alpha = \sum_{t\in T} f(t)\alpha(t)$$

teljesül.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény, akkor

$$\sum_{t\in T} f(t)\alpha(t) = \sup\Big\{ \int^* f \, \mathrm{d}\theta\chi_{_H}.\alpha | (H \subseteq \{t \in T|\alpha(t) > 0\}) \wedge \text{"}H \text{ véges"}\Big\}.$$

Valóban, ha $H \subseteq \{t \in T|\alpha(t) > 0\}$ véges halmaz, akkor

$$\theta\chi_{_H}.\alpha = \sum_{t\in H} \alpha(t).\delta_t,$$

tehát a **9**. és **10**. gyakorlat eredményeit alkalmazva

$$\int^* f \, \mathrm{d}\theta\chi_{_H}.\alpha = \int^* f \, d\Big(\sum_{t\in H} \alpha(t).\delta_t\Big) = \sum_{t\in H} \alpha(t) \int^* f \, \mathrm{d}\delta_t = \sum_{t\in H} f(t)\alpha(t),$$

és itt az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk az a) és b) tulajdonságokat. Ebből már következik az állítás, mert nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{t\in T} f(t)\alpha(t) = \sup\Big\{ \sum_{t\in H} f(t)\alpha(t) | (H \subseteq \{t \in T|\alpha(t) > 0\}) \wedge \text{"}H \text{ véges"}\Big\}.$$

Most tegyük fel, hogy f korlátos, és van olyan $E \in \mathscr{R}$, amelyre $\{t \in T|f(t) > 0\} \subseteq E$. Ekkor létezik olyan $\varphi \in \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$ függvény, amelyre $f \leq \varphi$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tetszőleges. A diszkrét mértékek és az elemi integrálok definíciója szerint létezik olyan $H \subseteq \{t \in T|f(t) > 0\}$ véges halmaz, hogy

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\theta_\alpha < \varepsilon + \sum_{t\in H} \varphi(t)\alpha(t) = \varepsilon + \int \varphi \, \mathrm{d}\theta\chi_{_H}.\alpha.$$

A $\theta_\alpha = \theta\chi_{_H}.\alpha + (\theta_\alpha - \theta\chi_{_H}.\alpha)$ egyenlőségből a **10**. gyakorlat alapján

$$\int^* f \, \mathrm{d}\theta_\alpha = \int^* f \, \mathrm{d}\theta\chi_{_H}.\alpha + \int^* f \, d(\theta_\alpha - \theta\chi_{_H}.\alpha) \leq$$
$$\leq \int^* f \, \mathrm{d}\theta\chi_{_H}.\alpha + \int \varphi \, d(\theta_\alpha - \theta\chi_{_H}.\alpha) = \int^* f \, \mathrm{d}\theta\chi_{_H}.\alpha + \int \varphi \, \mathrm{d}\theta_\alpha - \int \varphi \, \mathrm{d}\theta\chi_{_H}.\alpha <$$
$$< \int^* f \, \mathrm{d}\theta\chi_{_H}.\alpha + \varepsilon$$

következik. Ebből adódik az

$$\int^* f \, \mathrm{d}\theta_\alpha \leq \sup\Big\{ \int^* f \, \mathrm{d}\theta\chi_{_H}.\alpha | (H \subseteq \{t \in T|\alpha(t) > 0\}) \wedge \text{"}H \text{ véges"}\Big\} = \sum_{t\in T} f(t)\alpha(t)$$

egyenlőtlenség, ugyanakkor a **7**. gyakorlat szerint

$$\sum_{t\in T} f(t)\alpha(t) \leq \int^* f \; \mathrm{d}\theta_\alpha$$

is teljesül.

Végül legyen $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény, és $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $T = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $f_n := \inf(f, n).\chi_{E_n}$ függvény korlátos, és $\{t \in T | f_n(t) > 0\} \subseteq E_n \in \mathscr{R}$, ezért az előzőek szerint

$$\int^* f_n \; \mathrm{d}\theta_\alpha = \sum_{t\in T} f_n(t)\alpha(t).$$

Ugyanakkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, és $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, tehát a felső integrál monoton σ-folytonossága alapján

$$\int^* f \; \mathrm{d}\theta_\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* f_n \; \mathrm{d}\theta_\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{t\in T} f_n(t)\alpha(t) \leq \sum_{t\in T} f(t)\alpha(t).$$

Ebből a **7**. gyakorlat b) pontja szerint következik, hogy fennáll az

$$\int^* f_n \; \mathrm{d}\theta_\alpha = \sum_{t\in T} f_n(t)\alpha(t)$$

egyenlőség. ■

1.5. A mérhető halmazok σ-algebrája és a Carathéodory-féle külső mérték

1.5.1. Definíció. *Legyen T halmaz. Egy*

$$\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

függvényt T feletti **Carathéodory-féle külső mértéknek** *nevezünk, ha teljesülnek rá a következők.*

($\mathrm{C_I}$) $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$.

($\mathrm{C_{II}}$) *Minden $H \subseteq T$ halmazra, és a T részhalmazainak bármely $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatára, ha $H \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n$, akkor fennáll az*

$$\mathfrak{m}\,(H) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(H_n)$$

egyenlőtlenség.

Megjegyezzük, hogy ha T halmaz, akkor nyilvánvaló, hogy az $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény pontosan akkor Carathéodory-féle külső mérték T felett, ha teljesül ($\mathrm{C_I}$) és a következő két állítás.

$(\mathrm{C_{II}})'$ Minden $H, H' \subseteq T$ esetén, ha $H \subseteq H'$, akkor

$$\mathfrak{m}(H) \leq \mathfrak{m}(H')$$

(**monoton növés**).
$(\mathrm{C_{II}})''$ A T részhalmazainak bármely $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatára

$$\mathfrak{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}(H_k)$$

(**megszámlálható szubadditivitás**).

1.5.2. Állítás. *Ha $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitív mértéktér, akkor a*

$$\mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad E \mapsto \mu^*(E)$$

leképezés Carathéodory-féle külső mérték T felett.

Bizonyítás. Az 1.3.4. állítás nyilvánvaló következménye. ■

1.5.3. Definíció. *Legyen T halmaz. Ha $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Carathéodory-féle külső mérték T felett, akkor*

$$\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m}) := \{H \in \mathscr{P}(T) \mid (\forall X \in \mathscr{P}(T)) : \ \mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}(X \setminus H)\},$$

és $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ elemeit **$\mathfrak{m}$-mérhető** *halmazoknak nevezzük.*

1.5.4. Állítás. *Legyen T halmaz és $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Carathéodory-féle külső mérték T felett. Ekkor $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ olyan σ-algebra T felett* (**ALG** 13.6.1.), hogy

$$\{H \subseteq T | \mathfrak{m}(H) = 0\} \subseteq \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m}),$$

továbbá az

$$\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m}) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad H \mapsto \mathfrak{m}(H)$$

függvény **σ-additív**, tehát, ha $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges diszjunkt sorozat $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$-ben, akkor

$$\mathfrak{m}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(H_n).$$

Bizonyítás. Az $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ halmaz zárt a komplementum-képzésre nézve, mert $H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ esetén minden $X \subseteq T$ halmazra

$$\mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}(X \setminus H) = \mathfrak{m}(X \setminus (T \setminus H)) + \mathfrak{m}(X \cap (T \setminus H)),$$

így $T \setminus H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.
Az $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ halmaz zárt a véges unió-képzésre nézve. Valóban, legyenek $H, H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, és $X \subseteq T$ tetszőleges halmaz. Ekkor $H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ miatt

$$\mathfrak{m}(X \cap (H \cup H')) = \mathfrak{m}((X \cap (H \cup H')) \cap H) + \mathfrak{m}((X \cap (H \cup H')) \setminus H) =$$

$$= \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}(X \cap (H' \setminus H)) = \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}((X \setminus H) \cap H'),$$

továbbá $H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ miatt

$$\mathfrak{m}(X \setminus H) = \mathfrak{m}((X \setminus H) \cap H') + \mathfrak{m}((X \setminus H) \setminus H') = \mathfrak{m}((X \setminus H) \cap H') + \mathfrak{m}(X \setminus (H \cup H')),$$

következésképpen

$$\mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}(X \setminus H) = \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}((X \setminus H) \cap H') +$$
$$+\mathfrak{m}(X \setminus (H \cup H')) = \mathfrak{m}(X \cap (H \cup H')) + \mathfrak{m}(X \setminus (H \cup H')),$$

vagyis $H \cup H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.

Az $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ halmaz zárt a halmazkülönbség-képzésre nézve, mert $H, H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ esetén $T \setminus H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, tehát $(T \setminus H) \cup H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, amiből következik, hogy $H \setminus H' = H \cap (T \setminus H') = T \setminus ((T \setminus H) \cup H') \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.

(Figyeljük meg, hogy eddig egyáltalán nem használtuk ki azt, hogy $\mathfrak{m}$ Carathéodory-féle külső mérték T felett. Tehát *bármely* $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre teljesül az, hogy $H, H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ esetén $T \setminus H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, $H \cup H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, valamint $H \setminus H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.)

Ha $\mathfrak{m}$-re $(\mathrm{C_I})$ teljesül, vagyis $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$, akkor nyilvánvaló, hogy $\emptyset, T \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.

Most megmutatjuk, hogy ha $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény, akkor minden $(H_i)_{i \in I}$ *diszjunkt véges* $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$-beli rendszerre és minden $X \subseteq T$ halmazra

$$\mathfrak{m}\Big(X \cap \Big(\bigcup_{i \in I} H_i\Big)\Big) = \sum_{i \in I} \mathfrak{m}(X \cap H_i).$$

Ezt elegendő arra az esetre igazolni, amikor I két elemű, mert ebből az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen kapjuk az általános állítást. Legyenek tehát $H, H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ diszjunkt halmazok, és $X \subseteq T$ tetszőleges. Ekkor $H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ miatt

$$\mathfrak{m}(X \cap (H \cup H')) = \mathfrak{m}((X \cap (H \cup H')) \cap H') +$$
$$+\mathfrak{m}((X \cap (H \cup H')) \setminus H') = \mathfrak{m}(X \cap H') + \mathfrak{m}(X \cap H),$$

hiszen $H \cap H' = \emptyset$ folytán $(X \cap (H \cup H')) \setminus H' = X \cap H$.

A továbbiakban már feltesszük, hogy az $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre $(\mathrm{C_I})$ és $(\mathrm{C_{II}})$ teljesül, tehát $\mathfrak{m}$ Carathéodory-féle külső mérték T felett. Továbbá, ki fogjuk használni azt, hogy ekkor $\mathfrak{m}$ *monoton növő*, tehát $H, H' \subseteq T$ és $H \subseteq H'$ esetén $\mathfrak{m}(H) \leq \mathfrak{m}(H')$. Ez a $(\mathrm{C_{II}})$-ből triviálisan következik.

Megmutatjuk, hogy ha $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diszjunkt sorozat $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$-ben, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, és

$$\mathfrak{m}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(H_n).$$

Valóban, legyen $N \in \mathbb{N}$ és $X \subseteq T$. Ekkor az előzőek alapján $\bigcup_{n=0}^{N} H_n \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, és felhasználva $\mathfrak{m}$ monotonitását:

$$\mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}\left(X \cap \left(\bigcup_{n=0}^{N} H_n\right)\right) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{N} H_n\right) \geq \sum_{n=0}^{N} \mathfrak{m}(X \cap H_n) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right).$$

Ebből és (C_{II})-ből következik, hogy

$$\mathfrak{m}(X) \geq \sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n=0}^{N} \mathfrak{m}(X \cap H_n)\right) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(X \cap H_n) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) \geq$$

$$\geq \mathfrak{m}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(X \cap H_n)\right) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) \geq \mathfrak{m}\left(\left(X \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) \cup \left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right)\right) = \mathfrak{m}(X),$$

tehát $\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, és még az

$$\mathfrak{m}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(X \cap H_n) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right)$$

egyenlőség is teljesül. Ebből az $X := \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$ választással, $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$ alapján kapjuk, hogy

$$\mathfrak{m}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(H_n).$$

Legyen most $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges (nem feltétlenül diszjunkt) sorozat $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$-ben, és legyen $H'_0 := H_0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $H'_n := H_n \setminus H_{n-1}$. Ekkor $(H'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$-ben, amelyre $\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} H'_n$, és az előzőek alapján $\bigcup_{n=0}^{\infty} H'_n \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$. Ezért $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ σ-algebra.

Végül, legyen $H \subseteq T$ olyan halmaz, amelyre $\mathfrak{m}(H) = 0$; megmutatjuk, hogy ekkor $H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$. Valóban, ha $X \subseteq T$ tetszőleges halmaz, akkor $\mathfrak{m}(X \cap H) \leq \mathfrak{m}(H) = 0$, tehát $\mathfrak{m}(X \cap H) = 0$, így

$$\mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}((X \cap H) \cup (X \setminus H)) \leq \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}(X \setminus H) = \mathfrak{m}(X \setminus H) \leq \mathfrak{m}(X),$$

ami azt jelenti, hogy $H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állításban szereplő

$$\{H \subseteq T | \mathfrak{m}(H) = 0\} \subseteq \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m}),$$

összefüggést úgy fejezzük ki, hogy az $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ σ-algebra $\mathfrak{m}$-*teljes.*

1.5.5. Állítás. *Ha* $\mathfrak{m}$ *Carathéodory-féle külső mérték* T *felett, akkor*

$$\mathscr{R}(T, \mathfrak{m}) := \{H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m}) | \mathfrak{m}(H) < +\infty\}$$

δ*-gyűrű* T *felett (VIII. fejezet, 1. pont,* **3**.*gyakorlat), és a*

$$\mu_{\mathfrak{m}} : \mathscr{R}(T, \mathfrak{m}) \to \mathbb{R}; \quad H \mapsto \mathfrak{m}(H)$$

leképezés pozitív mérték, tehát $(T, \mathscr{R}(T, \mathfrak{m}), \mu_{\mathfrak{m}})$ *pozitív mértéktér.* (*Ezt nevezzük az* $\mathfrak{m}$ *Carathéodory-féle külső mérték által meghatározott pozitív mértéktérnek, és az* $\mathscr{R}(T, \mathfrak{m})$ δ*-gyűrű elemeit* **$\mathfrak{m}$-integrálható halmazoknak** *nevezzük.*)

Bizonyítás. Az $\mathfrak{m}$ Carathéodory-féle külső mérték monoton növő, végesen (sőt megszámlálhatóan) szubadditív, és $\mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$ halmazgyűrű T felett, ezért $\mathscr{R}(T,\mathfrak{m})$ szintén halmazgyűrű T felett, és az előző állítás alapján a $\mu_{\mathfrak{m}}$ leképezés pozitív mérték, vagyis $(T,\mathscr{R}(T,\mathfrak{m}),\mathscr{R}(T,\mathfrak{m}))$ pozitív mértéktér. Ugyanakkor $\mathscr{R}(T,\mathfrak{m})$ δ-gyűrű, mert ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathscr{R}(T,\mathfrak{m})$-ben, akkor

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = E_0 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_0 \setminus E_n),$$

amiből az előzőek alapján azonnal kapjuk, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{R}(T,\mathfrak{m})$. ■

1.5.6. Állítás. (**Carathéodory-féle külső mértékek konstrukciója.**) Legyen T halmaz, valamint $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ olyan halmaz, hogy $\emptyset \in \mathfrak{S}$. Legyen $\mathfrak{n} : \mathfrak{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvény, amelyre teljesülnek a következők

(i) $\mathfrak{n}(\emptyset) = 0$,

(ii) minden $E \in \mathfrak{S}$ halmazra, és minden $\mathfrak{S}$-ben haladó $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatra, ha $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, akkor

$$\mathfrak{n}(E) \le \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_k).$$

Értelmezzük az $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt úgy, hogy minden $E \subseteq T$ halmazra $\mathfrak{m}(E)$ a $\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_k)$ alakú összegek *infimuma*, ahol $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ befutja az összes olyan $\mathfrak{S}$-ben haladó sorozatok halmazát, amelyekre $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, ha létezik ilyen sorozat; ellenkező esetben $\mathfrak{m}(E) := +\infty$. Ekkor $\mathfrak{m}$ olyan Carathéodory-féle külső mérték T felett, amely $\mathfrak{n}$-nek kiterjesztése $\mathfrak{S}$-ről $\mathscr{P}(T)$-re. Ha $\mathfrak{m}'$ szintén olyan Carathéodory-féle külső mérték T felett, amely $\mathfrak{n}$-nek kiterjesztése, akkor minden $E \in \mathscr{P}(T)$ esetén $\mathfrak{m}'(E) \le \mathfrak{m}(E)$. Ha $\mathfrak{S}$ halmazgyűrű T felett, és minden $E, E' \in \mathfrak{S}$ halmazra, $E \cap E' = \emptyset$ esetén $\mathfrak{n}(E \cup E') = \mathfrak{n}(E) + \mathfrak{n}(E')$, (vagyis $\mathfrak{n}$ *additív*) akkor $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{m}$, ezért aztán $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$ is igaz. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{m}$-re teljesül a $(\mathrm{C_{II}})$ feltétel. Ehhez legyen $E \subseteq T$ halmaz, és $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a T részhalmazainak olyan sorozata, amelyre $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Feltehetjük, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathfrak{m}(E_k) < +\infty$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{R}_+^*$-ban, amelyre $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \le \varepsilon$. Az $\mathfrak{m}$ definíciója alapján kiválaszthatunk olyan $(E_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ rendszert $\mathfrak{S}$-ből úgy, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $E_k \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_{j,k}$, és

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_{j,k}) < \mathfrak{m}(E_k) + \varepsilon_k.$$

Ha $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció, akkor

$$E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_{j,k} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{\sigma(n)},$$

tehát ismét az $\mathfrak{m}$ definíciója alapján

$$\mathfrak{m}(E) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_{\sigma(n)}) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_{j,k}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_{j,k}) \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}(\mathfrak{m}(E_k) + \varepsilon_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}(E_k) + \varepsilon,$$

amiből következik, hogy

$$\mathfrak{m}(E) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}(E_k),$$

tehát $\mathfrak{m}$ Carathéodory-féle külső mérték T felett. (Láthatóan itt felhasználtuk azt a könnyen igazolható elemi tényt, hogy ha $(c_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ tetszőleges rendszer $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban, akkor fennáll a

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{j,k}$$

egyenlőség.)

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{S}$ halmazgyűrű T felett, és $\mathfrak{n}$ additív; megmutatjuk, hogy $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$. Legyen $E \in \mathfrak{S}$, és $H \subseteq T$ tetszőleges halmaz. Ha $\mathfrak{m}(H) = +\infty$, akkor

$$\mathfrak{m}(H) = \mathfrak{m}((H \cap E) \cup (H \setminus E)) \leq \mathfrak{m}(H \cap E) + \mathfrak{m}(H \setminus E)$$

miatt $\mathfrak{m}(H) = \mathfrak{m}(H \cap E) + \mathfrak{m}(H \setminus E)$ teljesül. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{m}(H) < +\infty$, és legyen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathfrak{S}$-ben, amelyre $H \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Ekkor az $(E_k \cap E)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat minden tagja eleme $\mathfrak{S}$-nek, és $H \cap E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(E_k \cap E)$, tehát az $\mathfrak{m}$ definíciója alapján

$$\mathfrak{m}(H \cap E) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_k \cap E).$$

Továbbá, az $(E_k \setminus E)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat minden tagja eleme $\mathfrak{S}$-nek, és $H \setminus E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(E_k \setminus E)$, tehát az $\mathfrak{m}$ definíciója alapján

$$\mathfrak{m}(H \setminus E) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_k \setminus E).$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből, és az $\mathfrak{n}$ additivitából következik, hogy

$$\mathfrak{m}(H \cap E) + \mathfrak{m}(H \setminus E) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_k \cap E) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_k \setminus E) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(\mathfrak{n}(E_k \cap E) + \mathfrak{n}(E_k \setminus E)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{n}((E_k \cap E) \cup (E_k \setminus E)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_k),$$

tehát az $\mathfrak{m}$ definíciója alapján $\mathfrak{m}(H \cap E) + \mathfrak{m}(H \setminus E) \leq \mathfrak{m}(H)$ teljesül, így $E \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.

Végül, ha $\mathfrak{m}'$ szintén olyan Carathéodory-féle külső mérték T felett, amely $\mathfrak{n}$-nek kiterjesztése, $E \subseteq T$, és $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a T részhalmazainak olyan sorozata, hogy $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, akkor

$$\mathfrak{m}'(E) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}'(E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{n}(E_k),$$

így az $\mathfrak{m}$ függvény definíciója alapján $\mathfrak{m}'(E) \leq \mathfrak{m}(E)$. ■

1.6. Lebesgue–Stieltjes-mérték szerinti felső integrál

3. Legyen $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő, balról folytonos függvény, és jelölje μ_L az L által generált Lebesgue-Stieltjes típusú additív halmazfüggvény additív kiterjesztését az $\mathbb{R}$ standard halmazgyűrűjére; tehát $\mu_L : \mathscr{R}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az az additív halmazfüggvény, amely minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ számra teljesíti a $\mu_L([a, b[) = L(b) - L(a)$ egyenlőséget. A VIII. fejezet, 6. pont, **2**. gyakorlat szerint μ_L pozitív mérték, tehát $(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \mu_L)$ pozitív mértéktér. Ekkor minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ esetén

$$\mu_L^*([a, b]) = L(b + 0) - L(a),$$
$$\mu_L^*(]a, b]) = L(b + 0) - L(a + 0),$$

és ha $a < b$, akkor

$$\mu_L^*(]a, b[) = L(b) - L(a + 0)$$

teljesül, ahol $t \in \mathbb{R}$ esetén $L(t + 0)$ jelöli az L jobboldali határértékét t-ben, ami létezik, mert L *reguláris függvény* (III. fejezet, 1. pont). Ebből látható, hogy $a \in \mathbb{R}$ esetén $\mu_L^*(\{a\}) = \mu_L^*([a, a]) = L(a+0) - L(a)$, tehát a $\mu_L^*(\{a\}) = 0$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy L folytonos a-ban. (Megjegyezzük, hogy ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor egy $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ pozitív mértéket *szórtnak* nevezünk, ha minden $t \in T$ esetén $\mu^*(\{t\}) = 0$. Ha tehát $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő, balról folytonos függvény, akkor a μ_L Lebesgue-Stieltjes-mérték pontosan akkor szórt, ha L folytonos.)

(*Útmutatás.* Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, és vegyünk olyan $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó zérussorozatot $\mathbb{R}_+^*$-ban, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_n < b - a$. Ekkor az $\mathscr{S}_\mathbb{R}$-ben haladó $([a + \varepsilon_n, b[)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növő, és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a + \varepsilon_n, b[=]a, b[$, ezért a külső mérték monoton σ-folytonossága miatt

$$\mu_L^*(]a, b[) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_L^*([a + \varepsilon_n, b[) = \sup_{n*\in\mathbb{N}} \mu_L([a + \varepsilon_n, b[) := \sup_{n\in\mathbb{N}} (L(b) - L(a + \varepsilon_n)) =$$
$$= L(b) - \inf_{n\in\mathbb{N}} L(a + \varepsilon_n) = L(b) - \lim_{n\to\infty} L(a + \varepsilon_n) = L(b) - L(a + 0).$$

Most tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$, és $a \leq b$, tehát nem zárjuk ki az $a = b$ esetet. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges monoton fogyó zérussorozat $\mathbb{R}_+^*$-ban.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[a, b] \subseteq [a, b + \varepsilon_n[$, ezért

$$\mu_L^*([a, b]) \leq \mu_L^*([a, b + \varepsilon_n[) = \mu_L([a, b + \varepsilon_n[) := L(b + \varepsilon_n) - L(a),$$

amiből következik, hogy

$$\mu_L^*([a, b]) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} (L(b + \varepsilon_n) - L(a)) = \left(\inf_{n\in\mathbb{N}} L(b + \varepsilon_n)\right) - L(a) =$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty} L(b + \varepsilon_n)\right) - L(a) = L(b + 0) - L(a).$$

Továbbá, $n \in \mathbb{N}$ esetén $[a, b+\varepsilon_n[= [a,b] \cup]b, b+\varepsilon_n[$, ezért az előzőek szerint

$$L(b+\varepsilon_n) - L(a) =: \mu_L([a, b+\varepsilon_n[) = \mu_L^*([a, b+\varepsilon_n[) = \mu_L^*([a,b] \cup]b, b+\varepsilon_n[) \leq$$
$$\leq \mu_L^*([a,b]) + \mu_L^*(]b, b+\varepsilon_n[) = \mu_L^*([a,b]) + L(b+\varepsilon_n) - L(b+0),$$

következésképpen $L(b+0) - L(a) \leq \mu_L^*([a,b])$. Ez azt jelenti, hogy $\mu_L^*([a,b]) = L(b+0) - L(a)$. Ebből azonnal látható, hogy $\mu_L^*(\{a\}) = \mu_L^*([a,a]) = L(a+0) - L(a)$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $]a,b] \subseteq]a, b+\varepsilon_n[$, ezért

$$\mu_L^*(]a,b]) \leq \mu_L^*(]a, b+\varepsilon_n[) = L(b+\varepsilon_n) - L(a+0),$$

amiből következik, hogy

$$\mu_L^*(]a,b]) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} (L(b+\varepsilon_n) - L(a+0)) = \left(\inf_{n\in\mathbb{N}} L(b+\varepsilon_n)\right) - L(a+0) =$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty} L(b+\varepsilon_n)\right) - L(a+0) = L(b+0) - L(a+0).$$

Továbbá, $[a,b] =]a,b] \cup \{a\}$, ezért az előzőek szerint

$$L(b+0) - L(a) = \mu_L^*([a,b]) = \mu_L^*(]a,b] \cup \{a\}) \leq$$
$$\leq \mu_L^*(]a,b]) + \mu_L^*(\{a\}) = \mu_L^*(]a,b]) + L(a+0) - L(a),$$

következésképpen $L(b+0) - L(a+0) \leq \mu_L^*(]a,b])$. Ez azt jelenti, hogy $\mu_L^*(]a,b]) = L(b+0) - L(a+0)$.)

4. (*Az egydimenziós Lebesgue-mérték transzláció-invarianciája.*) A $\mu_{\mathbb{R}} : \mathscr{R}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ egydimenziós Lebesgue-mérték rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $E \subseteq \mathbb{R}$ halmazra és $t \in \mathbb{R}$ pontra

$$\mu_{\mathbb{R}}^*(E+t) = \mu_{\mathbb{R}}^*(E),$$

ahol $E + t := \{s+t | s \in E\}$. (Ezt a tulajdonságot nevezzük az egydimenziós Lebesgue-mérték *transzláció-invarianciájának.*)

Továbbá, ha $\mu : \mathscr{R}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ olyan pozitív mérték, hogy minden $E \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén $\mu(E+t) = \mu(E)$ teljesül, akkor létezik egyetlen olyan $c \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mu = c.\mu_{\mathbb{R}}$.

(*Útmutatás.* Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén vezessük be a $\sigma_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ s \mapsto s+t$ függvényt.

A $\mu_{\mathbb{R}}$ definíciójából könnyen látszik, hogy minden $E \in \mathscr{R}_{\mathbb{R}}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén $\mu_{\mathbb{R}}^*(E+t) = \mu_{\mathbb{R}}^*(E)$, és ebből azonnal következik, hogy minden $\varphi \in \mathscr{E}_+(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}})$ esetén

$$\int (\varphi \circ \sigma_t)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int \varphi\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ebből egyszerűen kapjuk azt, hogy minden $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}})$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén $f \circ \sigma_t \in \overline{\mathscr{E}}_+(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}})$, valamint

$$\overline{\int} (f \circ \sigma_t)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \overline{\int} f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény, és $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}})$ olyan, hogy $f \leq h$, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $f \circ \sigma_t \leq h \circ \sigma_t \in \overline{\mathscr{E}}_+(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}})$, és

$$\int^* (f \circ \sigma_t)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} \leq \overline{\int} (h \circ \sigma_t)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \overline{\int} h\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}},$$

következésképpen

$$\int^* (f \circ \sigma_t)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} \leq \inf_{h \in \overline{\mathscr{E}}_+(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}),\ f \leq h} \overline{\int} h\ \mathrm{d}\mu =: \int^* f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ez az egyenlőtlenség *minden* $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}; \overline{\mathbb{R}}_+)$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén teljesül. Tehát ha $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}; \overline{\mathbb{R}}_+)$ és $t \in \mathbb{R}$, akkor az előző egyenlőtlenséget alkalmazva az $f \circ \sigma_t \in \mathscr{F}(\mathbb{R}; \overline{\mathbb{R}}_+)$ függvényre és $-t \in \mathbb{R}$ számra kapjuk, hogy

$$\int^* f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int^* ((f \circ \sigma_t) \circ \mathrm{m}_{-t})\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} \leq \int^* (f \circ \sigma_t)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\int^* (f \circ \sigma_t)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int^* f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ezért minden $E \subseteq \mathbb{R}$ halmazra és $t \in \mathbb{R}$ pontra

$$\mu^*_{\mathbb{R}}(E + t) := \int^* \chi_{_{E+t}}\ \mathrm{d}\mu = \int^* \left(\chi_{_E} \circ \sigma_{-t}\right)\ \mathrm{d}\mu = \int^* \chi_{_E}\ \mathrm{d}\mu =: \mu^*_{\mathbb{R}}(E).$$

Most tegyük fel, hogy $\mu : \mathscr{R}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ olyan pozitív mérték, amelyre minden $E \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén $\mu(E + t) = \mu(E)$ teljesül, vagyis μ transzláció-invariáns. A VIII. fejezet, 6. pont, **2**. gyakorlat szerint létezik olyan $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő, balról folytonos függvény, hogy $\mu = \mu_L$. Azt fogjuk igazolni, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}^*_+$ és $d \in \mathbb{R}$, amelyre $L = c.\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + d$; ha ez igaz, akkor nyilvánvalóan $\mu = c.\mu_{\mathbb{R}}$.

Először azt bizonyíjuk be, hogy L folytonos. A **3**. gyakorlat szerint ehhez azt kell megmutatni, hogy minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\mu^*_L(\{a\}) = 0$. Ha $a \in \mathbb{R}$, és $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tetszőleges monoton fogyó zérussorozat $\mathbb{R}^*_+$-ban, akkor a μ_L transzláció-invarianciája és a **3**. gyakorlat eredményei alapján

$$\mu^*_L(\{a\}) = L(a + 0) - L(a) = \lim_{n \to \infty} (L(a + \varepsilon_n) - L(a)) = \lim_{n \to \infty} \mu_L([0, \varepsilon_n[+a) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \mu_L([0, \varepsilon_n[) = \lim_{n \to \infty} (L(\varepsilon_n) - L(0)) = L(0 + 0) - L(0) = \mu^*_L(\{0\}),$$

amiből látható, hogy ha $\mu^*_L(\{0\}) > 0$ teljesülne, akkor L mindenütt szakadásos függvény volna. Azonban L monoton növő, ezért *reguláris* függvény, így a szakadási pontjainak halmaza *megszámlálható* (III. fejezet, 1. pont). Ezért szükségképpen $\mu^*_L(\{0\}) = 0$, tehát $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Legyen most $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \mapsto L(t) - L(0)$; megmutatjuk, hogy u *additív* függvény. Ehhez legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan számok, amelyekre $a \leq b$; igazolni fogjuk, hogy $u(a + b) = u(a) + u(b)$. A következő esetek lehetségesek.

- Ha $0 \leq a$, akkor

$$u(a + b) := L(a + b) - L(0) = \mu_L([0, a + b[) = \mu_L([0, a[\cup [a, a + b[) =$$
$$= \mu_L([0, a[) + \mu_L([a, a + b[) = \mu_L([0, a[) + \mu_L([0, b[+a) = \mu_L([0, a[) + \mu_L([0, b[) =$$
$$= L(a) - L(0) + L(b) - L(0) =: u(a) + u(b).$$

- Ha $a < 0 \leq b$, akkor

$$L(b) - L(a + b) = \mu_L([a + b, b[) = \mu_L([a, 0[+b) = \mu_L([a, 0[) = L(0) - L(a),$$

tehát $L(a + b) = L(a) + L(b) - L(0)$, amiből látható, hogy $u(a + b) = u(a) + u(b)$.

- Ha $b < 0$, akkor

$$\begin{gathered} -u(a+b) := L(0) - L(a+b) = \mu_L([a+b, 0[) = \mu_L([a+b, a[\cup[a, 0[) = \\ = \mu_L([a+b, a[) + \mu_L([a, 0[) = \mu_L([b, 0[+a) + \mu_L([a, 0[) = \mu_L([b, 0[) + \mu_L([a, 0[) = \\ = L(0) - L(b) + L(0) - L(a) = -u(b) - u(a). \end{gathered}$$

Tehát $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos additív függvény, ezért a VI. fejezet, 1. pont, **17**. gyakorlat szerint létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $u = c.\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Ekkor $d := L(0) \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $L = c.\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + d$. A μ mérték pozitivitásából következik, hogy ha $\mu \neq 0$, akkor $c > 0$.)

5. *Nem létezik* olyan $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, amelyre teljesülnek a következők:

a) $0 < \mathfrak{m}([0,1]) < +\infty$;

b) minden $E \subseteq \mathbb{R}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén $\mathfrak{m}(E+t) = \mathfrak{m}(E)$, vagyis $\mathfrak{m}$ transzláció-invariáns;

c) az $\mathbb{R}$ részhalmazainak minden $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozatára

$$\mathfrak{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}(E_k).$$

(*Útmutatás.* Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvény, amelyre a), b) és c) teljesül.

Értelmezzük az $\cong$ relációt a $[-1/2, 1/2]$ intervallum felett úgy, hogy $t, s \in [-1/2, 1/2]$ esetén $s \cong t$ pontosan akkor teljesüljön, ha $s - t \in \mathbb{Q}$. Nyilvánvaló, hogy $\cong$ ekvivalencia-reláció a $[-1/2, 1/2]$ intervallum felett. A kiválasztási axióma alapján létezik olyan $E \subseteq [-1/2, 1/2]$ halmaz, amely az $\cong$ ekvivalencia-relációnak *teljes reprezentánsa*, vagyis minden $s, t \in E$ esetén, ha $s \neq t$, akkor $s \not\cong t$, továbbá minden $t \in [-1/2, 1/2]$ ponthoz van olyan $s \in E$, hogy $s \cong t$.

Legyen $\tau : \mathbb{N} \to [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ tetszőleges olyan bijekció, amelyre $\tau(0) = 0$, vagyis a τ függvény "sorozatba szedi" a $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ megszámlálhatóan végtelen halmazt olymódon, hogy a nulladik elem éppen 0 legyen.

Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen $E_k := E + \tau(k)$, ekkor $E_0 = E$, és $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ az $\mathbb{R}$ részhalmazainak diszjunkt sorozata, mert ha $j, k \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $E_j \cap E_k \neq \emptyset$, és $s \in E_j \cap E_k$, akkor $s - \tau(j), s - \tau(k) \in E$, ugyanakkor $(s - \tau(j)) - (s - \tau(k)) \in \mathbb{Q}$, azaz $s - \tau(j) \cong s - \tau(k)$, így $s - \tau(j) = s - \tau(k)$, tehát a τ injektivitása miatt $j = k$.

Megmutatjuk, hogy $[-1/2, 1/2] \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Legyen ugyanis $s \in [-1/2, 1/2]$, és jelölje t azt az elemet E-ben, amelyre $s \cong t$, vagyis $s - t \in \mathbb{Q}$. Ekkor $s - t \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, tehát egyértelműen létezik olyan $j \in \mathbb{N}$, hogy $s - t = \tau(j)$. Világos, hogy $s = t + (s - t) = t + \tau(j) \in E + \tau(j) =: E_j$, vagyis $s \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Nyilvánvaló, hogy c)-ből következik az $\mathfrak{m}$ *monoton növése*, vagyis az, hogy $H, H' \subseteq \mathbb{R}$ és $H \subseteq H'$ esetén $\mathfrak{m}(H) \leq \mathfrak{m}(H')$. Ezért az a) és b) tulajdonságok alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{gathered} 0 < \mathfrak{m}([0,1]) = \mathfrak{m}([-1/2, 1/2] + (1/2)) = \mathfrak{m}([-1/2, 1/2]) \leq \\ \leq \mathfrak{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}(E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}(E + \tau(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}(E). \end{gathered}$$

Ebből következik, hogy $\mathfrak{m}(E) > 0$, így szükségképpen

$$\mathfrak{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) = +\infty.$$

Megmutatjuk, hogy $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \subseteq [-3/2, 3/2]$. Ehhez legyen $k \in \mathbb{N}$, és $s \in E_k := E + \tau(k)$. Legyen $t \in E$ az a pont, amelyre $s = t + \tau(k)$ teljesül; ekkor $s \in [-3/2, 3/2]$ nyilván igaz, mert $-1/2 \le t \le 1/2$ és $-1 \le \tau(k) \le 1$.

Ezért ismét az $\mathfrak{m}$ monotonitását és b)-t alkalmazva

$$\mathfrak{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \le \mathfrak{m}([-3/2, 3/2]) = \mathfrak{m}([0,3] + (-3/2)) = \mathfrak{m}([0,3])$$

adódik. Ugyanakkor az $\mathfrak{m}$ c)-ből következő véges additivitása, transzláció-invarianciája és monotonitása miatt $\mathfrak{m}([0,3]) = \mathfrak{m}([0,1]\cup]1,2]\cup]2,3]) = \mathfrak{m}([0,1]) + \mathfrak{m}(]1,2]) + \mathfrak{m}(]2,3]) = \mathfrak{m}([0,1]) + \mathfrak{m}(]0,1]+1) + \mathfrak{m}(]0,1]+2) = \mathfrak{m}([0,1]) + \mathfrak{m}(]0,1]) + \mathfrak{m}(]0,1]) \le 3\mathfrak{m}([0,1])$, vagyis

$$\mathfrak{m}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \le 3\mathfrak{m}([0,1]) < +\infty,$$

ami ellentmondás.)

6. Az egydimenziós Lebesgue-mérték szerinti felső integrál *nem additív.*

(*Útmutatás.* Ha a $\mu_{\mathbb{R}}$ szerinti felső integrál additív volna, akkor minden $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$-ben haladó $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatra

$$\int^* \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int^* \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in n} f_k\Big)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \Big(\sum_{k\in n} f_k\Big)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in n} \int^* f_k\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \sum_{k=0}^{\infty} \int^* f_k\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

teljesülne. Ebből a **4**. gyakorlat alapján azonnal következne, hogy az $\mathbf{m} := \mu_{\mathbb{R}}^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ külső mérték eleget tesz az **5**. gyakorlat a), b) és c) feltételeinek, ami lehetetlen.)

1.7. Gyakorlatok

1. a) Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvény, hogy létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$, amelyre $f \le h$. Ekkor létezik olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}$-ben, hogy $\{t \in T | f(t) > 0\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

b) Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és létezik olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}$-ben, hogy $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, akkor a $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ azonosan $+\infty$ konstansfüggvény eleme $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-nek, ezért minden $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény majorálható $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-beli függvénnyel. Ilyen tulajdonságú például a standard halmazgyűrű $\mathbb{R}^n$ felett, ahol $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges.

c) Ha T halmaz, és $\mathscr{R}$ a T véges részhalmazainak halmazgyűrűje, akkor egy $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény pontosan akkor eleme $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-nek, ha a $\{t \in T | f(t) > 0\}$ halmaz *megszámlálható.*

(*Útmutatás.* a) Legyen $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, és $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ olyan, hogy $f \leq h$. Vegyünk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatot $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, hogy $h = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$. Ha $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}_+^*$-ban, akkor

$$\{t \in T | f(t) > 0\} \subseteq \{t \in T | h(t) > 0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{t \in T | h(t) > \varepsilon_m\} =$$
$$= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t \in T | \varphi_n(t) > \varepsilon_m\} \Big),$$

Ugyanakkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és $\varphi \in \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$ esetén $\{t \in T | \varphi(t) > \varepsilon\} \in \mathscr{R}$.)

2. Legyen T halmaz és $\mathscr{R} := \{\emptyset\}$. Ekkor $\overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R}) = \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R}) = \{0\}$, és minden $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre

$$\int^* f \, \mathrm{d}\mu = \begin{cases} 0 & \text{, ha } f = 0, \\ +\infty & \text{, ha } f \neq 0, \end{cases}$$

ahol μ az egyetlen pozitív mérték $\mathscr{R}$ felett.

10. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett.

a) Ha μ és ν pozitív mértékek $\mathscr{R}$ felett, és $\mu \leq \nu$, akkor minden $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre

$$\int^* f \, \mathrm{d}\mu \leq \int^* f \, \mathrm{d}\nu.$$

b) Ha μ pozitív mérték $\mathscr{R}$ felett, és $c \in \mathbb{R}_+^*$, akkor minden $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre

$$\int^* f \, \mathrm{d}(c.\mu) = c \int^* f \, \mathrm{d}\mu.$$

c) Ha $(\mu_i)_{i\in I}$ $\mathscr{R}$ feletti pozitív mértékek tetszőleges véges rendszere, akkor minden $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre

$$\int^* f \, \mathrm{d}\Big(\sum_{i\in I} \mu_i \Big) = \sum_{i\in I} \int^* f \, \mathrm{d}\mu_i.$$

(*Útmutatás.* Az a) és b) állítások könnyen igazolhatók. A c) állítás bizonyításához nyilvánvalóan elég azt megmutatni, hogy ha μ és ν pozitív mértékek $\mathscr{R}$ felett, akkor minden $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre

$$\int^* f \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int^* f \, \mathrm{d}\mu + \int^* f \, \mathrm{d}\nu$$

teljesül, hiszen ebből az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen adódik a c) állítás.

Először arra az esetre igazoljuk ezt az egyenlőséget, amikor $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$. Ekkor vehetünk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatot $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$. Világos, hogy fennállnak a következő egyenlőségek

$$\int^* f \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\int \varphi_n \, \mathrm{d}\mu + \int \varphi_n \, \mathrm{d}\nu \Big) =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n \, \mathrm{d}\mu + \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n \, \mathrm{d}\nu = \int^* f \, \mathrm{d}\mu + \int^* f \, \mathrm{d}\nu,$$

hiszen ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatok $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban, akkor $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ teljesül.

Legyen most $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény. Ha az f függvény μ vagy ν szerinti felső integrálja végtelen, akkor $\mu, \nu \leq \mu + \nu$ és a) miatt az f függvény $\mu + \nu$ szerinti felső integrálja is végtelen, így a bizonyítandó egyenlőség igaz. Ezért feltesszük, hogy az f függvény μ és ν szerinti felső integrálja véges.

Ha $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ olyan, hogy $f \leq h$, akkor az előzőek szerint

$$\int^* f \,\mathrm{d}\mu + \int^* f \,\mathrm{d}\nu \leq \int^* h \,\mathrm{d}\mu + \int^* h \,\mathrm{d}\nu = \int^* h \,\mathrm{d}(\mu + \nu),$$

amiből következik, hogy

$$\int^* f \,\mathrm{d}\mu + \int^* f \,\mathrm{d}\nu \leq \int^* f \,\mathrm{d}(\mu + \nu).$$

Ha $g, h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ olyanok, hogy $f \leq g, h$, akkor $f \leq g \wedge h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, így az előzőek szerint

$$\int^* f \,\mathrm{d}(\mu + \nu) \leq \int^* g \wedge h \,\mathrm{d}(\mu + \nu) = \int^* g \wedge h \,\mathrm{d}\mu + \int^* g \wedge h \,\mathrm{d}\nu \leq \int^* g \,\mathrm{d}\mu + \int^* h \,\mathrm{d}\nu,$$

amiből következik az

$$\int^* f \,\mathrm{d}(\mu + \nu) \leq \int^* f \,\mathrm{d}\mu + \int^* f \,\mathrm{d}\nu$$

egyenlőtlenség.)

11. Legyen $\mathfrak{m}$ Carathéodory-féle külső mérték T felett. Keressünk kapcsolatot a $(\mu_{\mathfrak{m}})^*$ és $\mathfrak{m}$ Carathéodory-féle külső mértékek között! Igaz-e a $(\mu_{\mathfrak{m}})^* = \mathfrak{m}$ egyenlőség?

(*Útmutatás.* Könnyen belátható, hogy ha $\mathfrak{m}$ Carathéodory-féle külső mérték a T halmaz felett, akkor $\mu^*_{\mathfrak{m}}$ és $\mathfrak{m}$ egyenlők az $\mathscr{R}(T, \mathfrak{m})$ által meghatározott σ-gyűrűn (VIII. fejezet, 1. pont, **3**. gyakorlat), de nem szükségképpen egyenlők $\mathscr{P}(T)$-n.)

12. (**Probléma**.) Melyek azok a T halmazok, és T feletti $\mathfrak{m}$ Carathéodory-féle külső mértékek, amelyhez létezik olyan $\mathscr{R}$ halmazgyűrű T felett, és olyan $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ pozitív mérték, hogy $\mathfrak{m} = \mu^*$?

14. Legyen $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitív mértéktér, és jelölje $\tilde{\mathscr{R}}$ a $\mathscr{R}$ által generált δ-gyűrűt. Ekkor létezik egyetlen olyan $\tilde{\mu}$ pozitív mérték $\tilde{\mathscr{R}}$ felett, amely μ-nek kiterjesztése. Milyen kapcsolatban vannak a μ és $\tilde{\mu}$ szerinti felső integrálok (illetve külső mértékek)?

15. Legyen M metrikus tér, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(M)$, és $\zeta : \mathfrak{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény. Minden $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ esetén értelmezzük azt a $\Phi_\delta : \mathscr{P}(M) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt, amelyre minden $E \subseteq M$ esetén $\Phi_\delta(E)$ azon $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \zeta(E_k)$ összegek *infimuma*, amelyekre $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathfrak{S} \cup \{\emptyset\}$-ban haladó sorozat, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$, és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\operatorname{diam}(E_k) < \delta$, ha létezik ilyen

$(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat; egyébként $\Phi_\delta(E) := +\infty$. (Itt ahhoz a konvencióhoz tartjuk magunkat, hogy $\operatorname{diam}(\emptyset) := 0$.) Értelmezzük most az

$$\mathfrak{m}_\zeta : \mathscr{P}(M) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad E \mapsto \sup_{\delta\in\mathbb{R}_+^*} \Phi_\delta(E)$$

függvényt. Ekkor $\mathfrak{m}_\zeta$ Carathéodory-féle külső mérték M felett.

Érdekes speciális esetek a következők.

1) (*m-dimenziós Hausdorff-mérték.*) Legyen $m \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges, $\mathfrak{S}$ az M nem üres részhalmazainak halmaza, és

$$\zeta_m : \mathfrak{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad E \mapsto \frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}(\operatorname{diam}(E))^m.$$

(A *gamma függvény* értelmezése megtalálható **GEO** 3.4.3.-ban.) Az $\mathfrak{m}_{\zeta_m}$ Carathéodory-féle külső mértéket az M metrikus tér *m-dimenziós Hausdorff-mértékének* nevezzük, és $\mathscr{H}^m$-mel jelöljük. Természetesen ez *nem mérték*, a mértékek eredeti definíciója szerint.

Mutassuk meg, hogy $\mathscr{H}^0$ a számláló mérték az M halmaz felett! Továbbá, ha $\mathfrak{S}'$ (illetve $\mathfrak{S}''$) az M nem üres zárt (illetve nyílt) részhalmazainak halmaza, és ζ'_m (illetve ζ''_m) a ζ_m függvény leszűkítése $\mathfrak{S}'$-re (illetve $\mathfrak{S}''$-re), akkor $\mathfrak{m}_{\zeta'_m} = \mathfrak{m}_{\zeta''_m} = \mathfrak{m}_{\zeta_m} = \mathscr{H}^m$.

2) (*m-dimenziós szférikus-mérték.*) Legyen $m \in \mathbb{R}_+$, és $\mathfrak{S}$ az M-beli zárt gömbök halmaza, valamint ζ_m^s az 1)-ben értelmezett ζ_m függvény leszűkítése $\mathfrak{S}$-re. Ekkor az $\mathfrak{m}_{\zeta_m^s}$ Carathéodory-féle külső mértéket az M metrikus tér *m-dimenziós szférikus-mértékének* nevezzük, és $\mathscr{S}^m$-mel jelöljük. Természetesen ez sem *nem mérték*, a mértékek eredeti definíciója szerint.

Mutassuk meg, hogy minden $E \subseteq M$ esetén

$$\mathscr{H}^m(E) \le \mathscr{S}^m(E) \le 2^m \mathscr{H}^m(E)$$

teljesül.

16. (*Pozitív additív halmazfüggvény Riemann-féle kiterjesztése.*) Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ pozitív additív halmazfüggvény. Értelmezzük az az

$$\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad f \mapsto \int^{*R} f \, \mathrm{d}\mu$$

leképezést, amely minden $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ függvényhez az

$$\int^{*R} f \, \mathrm{d}\mu := \inf_{\varphi\in\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R}),\ f\le\varphi} \int \varphi \, \mathrm{d}\mu$$

értéket rendeli, ha létezik olyan $\varphi \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$, hogy $f \le \varphi$; egyébként

$$\int^{*R} f \, \mathrm{d}\mu := +\infty.$$

Ezt a $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ leképezést a μ szerinti *Riemann-féle felső integrálnak* nevezzük.

Mutassuk meg, hogy a μ szerinti Riemann-féle felső integrál a μ szerinti elemi integrálnak kiterjesztése, és *monoton növő*, *pozitív homogén*, és *végesen szubadditív*, azonban még akkor sem szükségképpen monoton σ-folytonos, ha μ σ-additív (vagyis pozitív mérték). Ha μ σ-additív, akkor minden $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén

$$\int^* f \, \mathrm{d}\mu = \int^{*R} f \, \mathrm{d}\mu$$

teljesül.

17. Legyen L lineáris függvényháló a T halmaz felett (VIII. fejezet, 2. pont, **3**. gyakorlat), és jelölje L_+ az L által tartalmazott, pozitív értékű függvények halmazát. Legyen $\overline{L}$ azon $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvények halmaza, amelyekhez van olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő L_+-ban haladó sorozat, hogy $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

a) $L_+ \subseteq \overline{L}_+$.

b) Ha $f \in \overline{L}_+$, és $c \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $c.f \in \overline{L}_+$.

c) Ha $(f_i)_{i\in I}$ nem üres *véges* rendszer $\overline{L}_+$-ban, akkor $\bigwedge\limits_{i\in I} f_i \in \overline{L}_+$.

d) Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\overline{L}_+$-ban, akkor $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \in \overline{L}_+$.

(*Útmutatás.* Ezt az állítást bebizonyítottuk abban a speciális esetben, amikor $\mathscr{R}$ halmazgyűrű T felett és $L := \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$. Figyeljük meg, hogy a bizonyítás csak azt használja ki, hogy $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$ lineáris függvényháló T felett!)

18. Legyen L lineáris függvényháló a T halmaz felett, és $I : L \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre teljesülnek a következők.

(i) Minden $\varphi \in L_+$ esetén $I(\varphi) \in \mathbb{R}_+$ (vagyis I *pozitív* funkcionál).

(ii) Minden L_+-ban haladó, monoton fogyó $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra, ha $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n = 0$, akkor $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} I(\varphi_n) = 0$.

(Az ilyen tulajdonságú funkcionálokat *pozitív integráloknak* nevezzük az L lineáris függvényháló felett.) Értelmezzük az

$$\overline{I} : \overline{L}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad f \mapsto \sup_{\varphi \in \mathbf{L}_+,\ \varphi \leq f} I(\varphi)$$

leképezést. Bizonyítsuk be, hogy minden $\varphi \in L_+$ esetén $\overline{I}(\varphi) = I(\varphi)$, és az $\overline{I} : \overline{L}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

- (*Monoton növő.*) Ha $f, g \in \overline{L}_+$, és $f \leq g$, akkor

$$\overline{I}(f) \leq \overline{I}(g).$$

- (*Pozitív homogén.*) Ha $f \in \overline{L}_+$ és $c \in \mathbb{R}_+^*$, akkor

$$\overline{I}(c.f) = c\overline{I}(f).$$

- (*Végesen additív.*) Ha $f, g \in \overline{L}_+$, akkor

$$\overline{I}(f + g) = \overline{I}(f) + \overline{I}(g).$$

- (*Monoton σ-folytonos.*) Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\overline{L}_+$-ban, akkor

$$\overline{I}\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \overline{I}(f_n).$$

- (*Megszámlálhatóan additív.*) Ha $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\overline{L}_+$-ban, akkor

$$\overline{I}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{I}(f_k).$$

(*Útmutatás.* Ezt az állítást bebizonyítottuk abban a speciális esetben, amikor $\mathscr{R}$ halmazgyűrű T felett, $L := \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$, és I egyenlő egy $\mathscr{R} \to \mathbb{R}$ pozitív mérték szerinti elemi integrállal. Figyeljük meg, hogy a bizonyítás csak a pozitív mérték szerinti elemi integrál tulajdonságait használja ki!)

19. Legyen L lineáris függvényháló a T halmaz felett, és $I : L \to \mathbb{R}$ pozitív integrál L felett. Értelmezzük azt az $I^* : \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ leképezést, amelyre minden $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén

$$I^*(f) := \inf_{h\in\overline{L}_+,\ f\le h} \overline{I}(h),$$

ha létezik olyan $h \in \overline{L}_+$, hogy $f \le h$; egyébként

$$I^*(f) := +\infty.$$

(Ezt az $I^* : \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ leképezést az I pozitív integrál által meghatározott *Lebesgue-féle felső integrálnak* nevezzük.) Bizonyítsuk be, hogy minden $f \in \overline{L}_+$ esetén $I^*(f) = \overline{I}(f)$, és az $I^* : \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

- (*Monoton növő.*) Ha $f, g \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$, és $f \le g$, akkor

$$I^*(f) \le I^*(g).$$

- (*Pozitív homogén.*) Ha $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ és $c \in \mathbb{R}_+^*$, akkor

$$I^*(c.f) = cI^*(f).$$

- (*Végesen szubadditív.*) Ha $f, g \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$, akkor

$$I^*(f + g) \le I^*(f) + I^*(g).$$

- (*Monoton σ-folytonos.*) Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$-ben, akkor

$$I^*\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} I^*(f_n).$$

- (*Megszámlálhatóan szubadditív.*) Ha $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$-ban, akkor

$$I^*\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big) \le \sum_{k=0}^{\infty} I^*(f_k).$$

Továbbá, ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$-ben, akkor

$$I^*\Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big) \leq \liminf_{n\to\infty} I^*(f_n).$$

20. Legyen L lineáris függvényháló a T halmaz felett, és $I : L \to \mathbb{R}$ pozitív integrál L felett. Értelmezzük az

$$\mathfrak{m}_I : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad E \mapsto I^*(\chi_{_E})$$

leképezést. Minden $E \subseteq T$ esetén az $\mathfrak{m}_I(E) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ elemet az E halmaz I szerinti *Lebesgue-féle külső mértékének* (vagy egyszerűen *külső mértékének*) nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy $\mathfrak{m}_I(\emptyset) = 0$, és az $\mathfrak{m}_I : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

(*Monoton növő.*) Minden $E, E' \subseteq T$ esetén, ha $E \subseteq E'$, akkor $\mathfrak{m}_I(E) \leq \mathfrak{m}_I(E')$.

(*Monoton σ-folytonos.*) A T részhalmazainak bármely $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tartalmazás tekintetében monoton növő sorozatára

$$\mathfrak{m}_I\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_I(E_n).$$

(*Megszámlálhatóan szubadditív.*) A T részhalmazainak bármely $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatára

$$\mathfrak{m}_I\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}_I(E_k).$$

Tehát az $\mathfrak{m}_I$ halmazfüggvény Carathéodory-féle külső mérték T felett.

XIV. INTEGRÁLELMÉLET

1. POZITÍV MÉRTÉK SZERINTI FELSŐ INTEGRÁL

2. fejezet

Eltűnő függvények és eltűnő halmazok

2.1. Az eltűnő függvények alaptulajdonságai

2.1.1. Definíció. *Legyen* $(T, \mathscr{R}, \theta)$ $\mathbb{K}$*-mértéktér.*

– *Egy* $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *függvényt* θ**-eltűnőnek** *nevezünk, ha*

$$\int^* f \, \mathrm{d}|\theta| = 0.$$

Ha F *normált tér* $\mathbb{K}$ *felett, akkor egy* $f : T \to F$ *függvényt* θ**-eltűnőnek** *nevezünk, ha*

$$\int^* \|f\| \, \mathrm{d}|\theta| = 0,$$

vagyis az $\|f\| : T \to \mathbb{R}_+$ *függvény* θ*-eltűnő.*

– *Egy* $E \subseteq T$ *halmazt* θ**-eltűnő halmaznak** *nevezünk, ha* $|\theta|^*(E) = 0$*, vagyis a* $\chi_{_E} : T \to \mathbb{R}$ *függvény* θ*-eltűnő.*

– *Ha* $\mathscr{A}(t)$ *kijelentés, akkor azt mondjuk, hogy* θ**-majdnem minden** $t \in T$ **pontra** $\mathscr{A}(t)$ **teljesül**, *vagy* $\mathscr{A}(t)$ **a** T**-n** θ**-majdnem mindenütt teljesül**, *ha a* $\{t \in T | \neg\mathscr{A}(t)\}$ *halmaz* θ*-eltűnő halmaz.*

Vigyázzunk arra, hogy ha $E \in \mathscr{R}$ olyan halmaz, hogy $\theta(E) = 0$, akkor E nem szükségképpen θ-eltűnő halmaz (**2**. gyakorlat), ugyanakkor minden $E \in \mathscr{R}$ θ-eltűnő halmazra $|\theta(E)| \leq |\theta|(E) = |\theta|^*(E) = 0$, így $\theta(E) = 0$.

Különleges jelentősége van a majdnem mindenütt pontonként konvergens függvénysorozatoknak, ezért ezekről külön említést teszünk. Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, M metrikus tér, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek minden tagja $T \to M$ függvény. Ekkor $E \subseteq T$ esetén az "$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat θ-majdnem mindenütt konvergens az E halmazon" állítás azt jelenti, hogy a

$$\{t \in E \mid \text{"az } (f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \text{ sorozat nem konvergens az } M \text{ metrikus térben"}\}$$

halmaz θ-eltűnő halmaz, vagyis $|\theta|^*\Big(E \setminus \mathrm{Dom}\Big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\Big)\Big) = 0$.

2.1.2. Állítás. *Legyen* $(T, \mathscr{R}, \theta)$ *mértéktér.*

a) *Ha* $f, g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *függvények,* $f \leq g$*, és a* g *függvény* θ*-eltűnő, akkor az* f *függvény is* θ*-eltűnő.*

b) *Ha az* $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *függvény* θ*-eltűnő, akkor minden* $c \in \mathbb{R}_+^*$ *esetén a* $c.f$ *függvény is*

θ-eltűnő.

c) *Ha $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ θ-eltűnő függvény, akkor a $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$, $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$, $\bigwedge\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\bigvee\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ és $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ függvények szintén θ-eltűnők. Ha $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a T halmaz részhalmazainak olyan sorozata, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén E_k θ-eltűnő halmaz, akkor $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$ is θ-eltűnő halmaz.*

d) *Ha $F := \overline{\mathbb{R}}_+$ vagy F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor egy $f : T \to F$ függvény pontosan akkor θ-eltűnő, ha θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) = 0$.*

e) *Ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvény, hogy*

$$\int^* f \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

akkor θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) < +\infty$.

f) *Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett (illetve $F := \overline{\mathbb{R}}_+$), és $f : T \to F$ olyan függvény, hogy*

$$\int^* \|f\| \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty \quad \left(\textit{illetve } \int^* f \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty\right),$$

akkor létezik olyan $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre

$$\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k.$$

Bizonyítás. Az a) és b) állítások nyilvánvalóan következnek a $|\theta|$ pozitív mérték által generált felső integrál monotonitásából és pozitív homogenitásából.

c) Ha $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, akkor nyilvánvalóan

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \limsup_{k\to\infty} f_k \leq \bigvee_{k\in\mathbb{N}} f_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_k,$$

ezért az a) alapján elég azt igazolni, hogy ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az f_k függvény θ-eltűnő, akkor a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ függvény is θ-eltűnő. Ez viszont a $|\theta|$ pozitív mérték által generált felső integrál megszámlálható szubaddtivitásából azonnal következik.

Ha $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a T részhalmazainak olyan sorozata, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az E_k halmaz θ-eltűnő halmaz, akkor az $E := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$ halmazra $\chi_E = \bigvee\limits_{k\in\mathbb{N}} \chi_{E_k}$ teljesül, és az előzőek alapján a $\bigvee\limits_{k\in\mathbb{N}} \chi_{E_k}$ függvény θ-eltűnő, így χ_E is θ-eltűnő függvény, vagyis E θ-eltűnő halmaz.

d) Legyen F normált tér $\mathbb{K}$ felett és $f : T \to F$ θ-eltűnő függvény. Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$\chi_{\{t\in T|\|f(t)\|>\varepsilon\}} \leq \frac{\|f\|}{\varepsilon}$$

nyilvánvalóan teljesül, ezért ha f θ-eltűnő, akkor

$$|\theta|^*(\{t \in T|\|f(t)\| > \varepsilon\}) := \int^* \chi_{\{t\in T|\|f(t)\|>\varepsilon\}} \, \mathrm{d}|\theta| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int^* \|f\| \, \mathrm{d}|\theta| = 0,$$

vagyis $\{t \in T | \|f(t)\| > \varepsilon\}$ θ-eltűnő halmaz. Ha $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat, akkor

$$\{t \in T | f(t) \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{t \in T | \|f(t)\| > \varepsilon_k\},$$

tehát a c) alapján $\{t \in T | f(t) \neq 0\}$ θ-eltűnő halmaz, vagyis θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) = 0$.

Megfordítva, ha θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) = 0$, vagyis $\{t \in T | f(t) \neq 0\}$ θ-eltűnő halmaz, akkor nyilvánvalóan

$$\|f\| \leq \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \Big(k.\chi_{\{t\in T|f(t)\neq 0\}}\Big),$$

így a $|\theta|$ által generált felső integrál monoton növése, monoton σ-folytonossága és pozitív homogenitása miatt

$$\int^* \|f\| \,\mathrm{d}|\theta| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big(k \int^* \chi_{\{t\in T|f(t)\neq 0\}} \,\mathrm{d}|\theta|\Big) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big(k|\theta|^*(\{t \in T | f(t) \neq 0\})\Big) = 0,$$

vagyis f θ-eltűnő.

Ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, akkor az előző állítások érvényben maradnak, ha mindenütt a $\|f\|$ függvény helyére f-t írunk.

e) Legyen $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\chi_{\{t\in T|f(t)=+\infty\}} \leq \frac{f}{k},$$

tehát a $|\theta|$ által generált felső integrál monoton növése és pozitív homogenitása miatt

$$|\theta|^*(\{t \in T | f(t) = +\infty\}) := \int^* \chi_{\{t\in T|f(t)=+\infty\}} \,\mathrm{d}|\theta| \leq \frac{1}{k} \int^* f \,\mathrm{d}|\theta|,$$

amiből következik, hogy

$$\int^* f\mathrm{d}|\theta| < +\infty$$

esetén $|\theta|^*(\{t \in T | f(t) = +\infty\}) = 0$, vagyis θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $f(t) < +\infty$.

f) Legyen $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvény, hogy

$$\int^* f\mathrm{d}|\theta| < +\infty.$$

Ekkor van olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, amelyre $f \leq h$, különben a felső integrál definíciója szerint az f függvény $|\theta|$ szerinti felső integrálja $+\infty$ volna. Ha h ilyen függvény, akkor vehetünk olyan $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatot $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre $h = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k$. Világos, hogy

$$\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq \{t \in T | h(t) \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{t \in T | \varphi_k(t) > 0\},$$

és nyilvánvaló, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\{t \in T | \varphi_k(t) > 0\} \in \mathscr{R}$.

Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett és $f : T \to F$ olyan függvény, hogy

$$\int^* \|f\| \mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

akkor az előzőek szerint létezik olyan $\mathscr{R}$-ben haladó $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre

$$\{t \in T | f(t) \neq 0\} = \{t \in T | \|f(t)\| \neq 0\} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$$

teljesül. ■

2.1.3. Következmény. *Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és $f, g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvények, hogy θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) \leq g(t)$ teljesül, akkor*

$$\int^* f \,\mathrm{d}|\theta| \leq \int^* g \,\mathrm{d}|\theta|.$$

Bizonyítás. Legyen $h : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ az a függvény, ami a $\{t \in T | f(t) > g(t)\}$ halmazon a $+\infty$ értéket veszi fel, és a $\{t \in T | f(t) \leq g(t)\}$ halmazon nulla. Ekkor $\{t \in T | h(t) \neq 0\} = \{t \in T | f(t) > g(t)\}$, tehát a feltevés alapján θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $h(t) = 0$, így a h függvény θ-eltűnő. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $f \leq g + h$, így a $|\theta|$ által generált felső integrál monotonitása és szubadditivitása folytán

$$\int^* f \,\mathrm{d}|\theta| \leq \int^* (g + h) \,\mathrm{d}|\theta| \leq \int^* g \,\mathrm{d}|\theta| + \int^* h \,\mathrm{d}|\theta| = \int^* g \,\mathrm{d}|\theta|$$

teljesül. ■

Ebből azonnal következik, hogy ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és $f, g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvények, hogy θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) = g(t)$, akkor

$$\int^* f \,\mathrm{d}|\theta| = \int^* g \,\mathrm{d}|\theta|.$$

2.1.4. Következmény. *Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ $\mathbb{K}$-mértéktér és F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a $T \to F$ θ-eltűnő függvények halmaza olyan lineáris altere az $\mathscr{F}(T; F)$ függvénytérnek, hogy ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebben az altérben haladó, T-n pontonként konvergens sorozat, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ is eleme ennek az altérnek.*

Bizonyítás. Egy $f : T \to F$ függvény pontosan akkor θ-eltűnő, ha az $\|f\| : T \to \mathbb{R}_+$ függvény θ-eltűnő. Továbbá, $f, g \in \mathscr{F}(T; F)$ és $c \in \mathbb{K}$ esetén $\|c.f\| = |c|\|f\|$ és $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, ezért az előzőek alapján a θ-eltűnő $T \to F$ függvények halmaza lineáris altere az $\mathscr{F}(T; F)$ függvénytérnek. Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebben az altérben haladó, T-n pontonként konvergens sorozat, akkor

$$\left\| \lim_{n\to\infty} f_n \right\| \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|,$$

ezért a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvény is θ-eltűnő. ■

2.2. Eltűnő halmazok jellemzése

2.2.1. Állítás. *Legyen* $(T, \mathscr{R}, \theta)$ *mértéktér. Ha* $E \subseteq T$*, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

a) *Az* E *halmaz* θ*-eltűnő halmaz, vagyis* $|\theta|^*(E) = 0$.

b) *Minden* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *esetén van olyan* $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *diszjunkt sorozat* $\mathscr{R}$*-ben, amelyre* $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ *és* $\sum_{k=0}^{\infty} |\theta|(E_k) < \varepsilon$.

c) *Minden* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *esetén van olyan* $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sorozat* $\mathscr{R}$*-ben, amelyre* $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ *és* $\sum_{k=0}^{\infty} |\theta|(E_k) < \varepsilon$.

Bizonyítás. a)⇒b) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, és vegyünk egy $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amit később az ε függvényében konkrétan megválasztunk. Ekkor $|\theta|^*(E) < \varepsilon'$ miatt van olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, hogy $\chi_{_E} \leq h$ és

$$\int^* h \, \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon'.$$

A h-hoz vehetünk olyan $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatot $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre $h = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k$. Legyen $E_0 := \{t \in T | \varphi_0(t) > 1 - \varepsilon'\}$ és minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén $E_k := \{t \in T | \varphi_k(t) > 1 - \varepsilon'\} \setminus \{t \in T | \varphi_{k-1}(t) > 1 - \varepsilon'\}$. Világos, hogy $\varepsilon' < 1$ esetén minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $E_k \in \mathscr{R}$, és természetesen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt halmazsorozat; a továbbiakban feltesszük, hogy $\varepsilon' < 1$. Ha $t \in E$, akkor $1 - \varepsilon' < 1 = \chi_{_E}(t) \leq h(t) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k(t)$, tehát van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $\varphi_k(t) > 1 - \varepsilon'$; így valamelyik $k \in \mathbb{N}$ számra $t \in E_k$. Ez azt mutatja, hogy $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Nyilvánvaló, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\chi_{\{t\in T | \varphi_n(t) > 1-\varepsilon'\}} \leq \frac{\varphi_n}{1 - \varepsilon'},$$

következésképpen a $|\theta|$ pozitív mérték szubtraktivitását alkalmazva kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} |\theta|(E_k) = |\theta|(\{t \in T | \varphi_0(t) > 1 - \varepsilon'\}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \Big(|\theta|(\{t \in T | \varphi_k(t) > 1 - \varepsilon'\}) - |\theta|(\{t \in T | \varphi_{k-1}(t) > 1 - \varepsilon'\}) \Big) =$$

$$= |\theta|(\{t \in T | \varphi_n(t) > 1 - \varepsilon'\}) = \int^* \chi_{\{t\in T | \varphi_n(t) > 1-\varepsilon'\}} \, \mathrm{d}|\theta| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon'} \int \varphi_n \, \mathrm{d}|\theta|.$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\theta|(E_k) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} |\theta|(E_k) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon'} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \varphi_n \, \mathrm{d}|\theta| = \frac{1}{1 - \varepsilon'} \int^* h \, \mathrm{d}|\theta| < \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'},$$

ami azt mutatja, hogy $\varepsilon' < \varepsilon/(1 + \varepsilon)$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} |\theta|(E_k) < \varepsilon$$

is teljesül, tehát egy ilyen ε'-höz megválasztott $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat eleget tesz a követelményeknek.

b)$\Rightarrow$c) Triviális.

c)$\Rightarrow$a) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és a c) alapján vegyünk olyan $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{R}$-ben, amelyre $E \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$ és $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\theta|(E_k) < \varepsilon$. Ekkor a $|\theta|$ pozitív mérték által generált külső mérték monotonitása és megszámlálható szubadditivitása miatt

$$|\theta|^*(E) \leq |\theta|^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\theta|^*(E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} |\theta|(E_k) < \varepsilon,$$

így szükségképpen $|\theta|^*(E) = 0$. ■

2.3. Gyakorlatok

1. Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ kijelentés.

a) A "θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $(\forall\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$" kijelentésből *következik* a "$(\forall\mathbf{x})$(θ-majdem minden $t \in T$ pontra $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$)" kijelentés.

b) Lehetséges az, hogy a "$(\forall\mathbf{x})$(θ-majdem minden $t \in T$ pontra $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$)" kijelentés igaz, de *nem igaz* a "θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $(\forall\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$" kijelentés.

c) Legyen X *megszámlálható* halmaz. Ekkor a "θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $(\forall\mathbf{x} \in X)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$" kijelentés *ekvivalens* a "$(\forall\mathbf{x} \in X)$($\theta$-majdem minden $t \in T$ pontra $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$)" kijelentéssel.

(*Útmutatás.* A "θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $(\forall\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$" kijelentés azzal ekvivalens, hogy

$$|\theta|^*(\{t \in T | \neg(\forall\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\}) = 0.$$

A $\neg(\forall\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ és $(\exists\mathbf{x})\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ formulák logikailag ekvivalensek, továbbá a $\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow (\exists\mathbf{x})\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ formula logikai axióma. Ezért

$$\{t \in T | \neg\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\} \subseteq \{t \in T | (\exists\mathbf{x})\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\} = \{t \in T | \neg(\forall\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\},$$

így a $\{t \in T | \neg\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\}$ halmaz θ-eltűnő halmaz. Ebből az általánosítás szabálya (GEN) alapján következik az a) állítás.

A b) kijelentés konkrét példával könnyen igazolható.

A c) bizonyításához legyen X megszámlálható halmaz, és tegyük fel, hogy a "$(\forall\mathbf{x} \in X)$($\theta$-majdem minden $t \in T$ pontra $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$)" kijelentés igaz. Ekkor $\mathbf{x} \in X$ esetén az $E(\mathbf{x}) := \{t \in T | \neg\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\}$ halmaz θ-eltűnő halmaz, így az X megszámlálhatósága miatt $\bigcup\limits_{\mathbf{x}\in X} E(\mathbf{x})$ is θ-eltűnő halmaz. Nyilvánvaló, hogy

$$\{t \in T | \neg(\forall\mathbf{x} \in X)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\} = \{t \in T | (\exists\mathbf{x} \in X)\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\} = \bigcup_{\mathbf{x}\in X} E(\mathbf{x}),$$

ezért $|\theta|^*(\{t \in T | \neg(\forall\mathbf{x} \in X)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\}) = 0$, vagyis "$\theta$-majdnem minden $t \in T$ pontra $(\forall\mathbf{x} \in X)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$" is igaz.)

2. Legyen T halmaz, $\mathscr{R} := \mathscr{P}(T)$, és $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in T$ különböző pontok. Ha $\mu := \delta_{\mathfrak{a}} - \delta_{\mathfrak{b}}$, akkor minden $E \subseteq T$ halmazra, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ esetén $\mu(E) = 0$, de $|\mu|(E) = 2$, tehát E nem μ-eltűnő halmaz.

3. Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és $E \subseteq T$. A következő állítások ekvivalensek.

(i) Az E halmaz θ-eltűnő halmaz.

(ii) Létezik olyan $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, hogy $E \subseteq \{t \in T | f(t) = +\infty\}$ és

$$\int^* f \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty.$$

(iii) Létezik olyan $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre teljesül az $E \subseteq \{t \in T | \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(t) = +\infty\}$ tartalmazás és

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int \varphi_n \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty.$$

(*Útmutatás.* A (ii) és (iii) kijelentések nyilvánvalóan ekvivalens, ezért elég azt igazolni, hogy (i) és (ii) ekvivalensek.

Tegyük fel, hogy (i) teljesül, és legyen $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor divergens, de a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k^2$ sor konvergens (például minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_k := 1/(k+1)$). A $|\theta|^*(E) = 0$ feltétel alapján kiválaszthatunk olyan $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatot $\overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\chi_E \leq f_k$ és

$$\int^* f_k \, \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon_k.$$

Ekkor $f := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k f_k \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ és természetesen $E \subseteq \{t \in T | f(t) = +\infty\}$, valamint

$$\int^* f \, \mathrm{d}|\theta| = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \int^* f_k \, \mathrm{d}|\theta| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^2 < +\infty.$$

Tegyük fel, hogy (ii) teljesül, és legyen $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ olyan függvény, amelyre $E \subseteq \{t \in T | f(t) = +\infty\}$ és

$$\int^* f \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty.$$

Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, akkor $\varepsilon . f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ és nyilvánvalóan $\chi_E \leq \varepsilon . f$, ezért

$$|\theta|^*(E) = \int^* \chi_E \, \mathrm{d}|\theta| \leq \varepsilon \int^* f \, \mathrm{d}|\theta|,$$

amiből ε-nak 0-hoz tartva kapjuk, hogy $|\theta|^*(E) = 0$.)

3. fejezet

$\mathscr{F}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$-terek

3.1. Általános Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség

Emlékeztetünk arra, hogy ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor az α-adik hatványozás-függvényt a következőképpen értelmezzük:

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^\alpha := \exp(\alpha \log(x)).$$

Ezt a függvényt $\alpha \neq 0$ esetén úgy terjesztjük ki $\overline{\mathbb{R}}_+$-ra, hogy *definíció szerint*

$$0^\alpha := 0, \quad (+\infty)^\alpha := +\infty$$

teljesüljön. Ekkor a $0 \cdot (+\infty) = 0 = (+\infty) \cdot 0$ konvenció alapján kapjuk, hogy a hatványozás szokásos azonosságai érvényben maradnak. Speciálisan, ha $x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan számok, hogy $\alpha + \beta = 1$, akkor érvényes az

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$$

összefüggés, ami a **NUM** 3.10.1. állításban igazolt egyenlőtlenség kiterjesztése.

A következő állítás a korábban bizonyított elemi Hölder-egyenlőtlenség általánosítása (ld. **NUM** 3.10.2. és **1**. gyakorlat).

3.1.1. Állítás. (**Hölder-egyenlőtlenség**) *Legyen T halmaz és*

$$I : \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

olyan leképezés, amely monoton növő, pozitív homogén, és szubadditív. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan számok, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ha $f, g \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$, és az $(I(f), I(g))$ pár nem egyenlő sem a $(0, +\infty)$, sem a $(+\infty, 0)$ párral, akkor

$$I(f^\alpha g^\beta) \leq (I(f))^\alpha (I(g))^\beta$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha $I(f) = +\infty$ vagy $I(g) = +\infty$, akkor $(I(f))^\alpha (I(g))^\beta = +\infty$, tehát az egyenlőtlenség triviálisan igaz; ezért fel fogjuk tenni, hogy $I(f)$ és $I(g)$ mindketten végesek.

Először arra az esetre bizonyítunk, amikor $I(f) > 0$ és $I(g) > 0$. Ekkor

$$\Big(\frac{f}{I(f)}\Big)^\alpha \Big(\frac{g}{I(g)}\Big)^\beta \leq \alpha \frac{f}{I(f)} + \beta \frac{g}{I(g)}$$

teljesül, amiből az I tulajdonságai alapján

$$\frac{I(f^\alpha g^\beta)}{(I(f))^\alpha (I(g))^\beta} = I\Big(\Big(\frac{f}{I(f)}\Big)^\alpha \Big(\frac{g}{I(g)}\Big)^\beta\Big) \leq I\Big(\alpha \frac{f}{I(f)} + \beta \frac{g}{I(g)}\Big) \leq$$
$$\leq \alpha I\Big(\frac{f}{I(f)}\Big) + \beta I\Big(\frac{g}{I(g)}\Big) = \alpha + \beta = 1$$

adódik, tehát $I(f^\alpha g^\beta) \leq (I(f))^\alpha (I(g))^\beta$.
Most tegyük fel, hogy $I(f) = 0$. Tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ esetén

$$\Big(\frac{f}{\varepsilon}\Big)^\alpha g^\beta \leq \alpha \Big(\frac{f}{\varepsilon}\Big) + \beta g$$

teljesül, amiből az I tulajdonságai alapján

$$\frac{I(f^\alpha g^\beta)}{\varepsilon^\alpha} = I\Big(\Big(\frac{f}{\varepsilon}\Big)^\alpha g^\beta\Big) \leq I\Big(\alpha\Big(\frac{f}{\varepsilon}\Big) + \beta g\Big) \leq \alpha I\Big(\frac{f}{\varepsilon}\Big) + \beta I(g) = \beta I(g)$$

adódik, tehát $I(f^\alpha g^\beta) \leq \varepsilon^\alpha \beta I(g)$, így $I(g) < +\infty$ és az $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tetszőlegessége miatt $I(f^\alpha g^\beta) = 0 \leq (I(f))^\alpha (I(g))^\beta$. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha az előző állítás feltételei mellett $I(f) = 0$ és $I(g) = +\infty$, vagy $I(f) = +\infty$ és $I(g) = 0$, akkor lehetséges az, hogy $I(f^\alpha g^\beta) = +\infty$, de a $0 \cdot (+\infty) = 0 = (+\infty) \cdot 0$ konvenció alapján $(I(f))^\alpha (I(g))^\beta = 0$ (**2**. gyakorlat).

3.1.2. Állítás. (Minkowski-egyenlőtlenség) *Legyen T halmaz és*

$$I : \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

olyan leképezés, amely monoton növő, pozitív homogén, és szubadditív. Ha $p \geq 1$ valós szám, és $f, g \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$, akkor

$$\Big(I\Big((f+g)^p\Big)\Big)^{1/p} \leq \Big(I(f^p)\Big)^{1/p} + \Big(I(g^p)\Big)^{1/p}.$$

Ha I még monoton σ-folytonos is, akkor minden $\mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$-ben haladó $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatra és $p \geq 1$ valós számra

$$\Big(I\Big(\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)^p\Big)\Big)^{1/p} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big(I(f_k^p)\Big)^{1/p}.$$

Bizonyítás. Ha $I(f^p) = +\infty$ vagy $I(g^p) = +\infty$, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség nyilvánvalóan igaz, ezért feltehetjük, hogy $I(f^p) < +\infty$ vagy $I(g^p) < +\infty$. Továbbá, $p = 1$ esetén egyszerűen az I függvény szubadditivitásáról van szó, ezért feltehetjük, hogy $p > 1$. Azonkívül világos, hogy $I\Big((f+g)^p\Big) > 0$ is feltehető, különben az állítás igaz.

Először megmutatjuk, hogy ekkor $I\Big((f+g)^p\Big) < +\infty$. Valóban, $p > 1$ miatt az

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*; \quad x \mapsto x^p$$

függvény *konvex*, amiből következik, hogy

$$\Big(\frac{1}{2}.f + \frac{1}{2}.g\Big)^p \le \frac{1}{2}.f^p + \frac{1}{2}.g^p,$$

vagyis $(f+g)^p \le 2^{p-1}.(f^p + g^p)$. Ezért az I monoton növése, pozitív homogenitása és szubadditivitása miatt

$$I\Big((f+g)^p\Big) \le 2^{p-1}I(f^p) + 2^{p-1}I(g^p) < +\infty.$$

Nyilvánvalóan teljesülnek a következő egyenlőségek

$$(f+g)^p = (f+g)^{p-1}(f+g) = (f+g)^{p-1}f + (f+g)^{p-1}g = \Big((f+g)^p\Big)^{1-(1/p)} + \Big((f+g)^p\Big)^{1-(1/p)}.$$

Alkalmazva a Hölder-egyenlőtlenséget az $\alpha := 1/p$ és $\beta := 1/p$ számokra, valamint az $(f+g)^p$ és f^p, továbbá az $(f+g)^p$ és g^p függvényekre, kihasználva az I monoton növését és szubadditivitását kapjuk, hogy

$$I\Big((f+g)^p\Big) \le I\Big((f+g)^p\Big)^{1-(1/p)} I(f^p)^{1/p} + I\Big((f+g)^p\Big)^{1-(1/p)} I(g^p)^{1/p}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget osztva az $I\Big((f+g)^p\Big)^{1-(1/p)}$ számmal, kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

Tegyük most fel, hogy I még monoton σ-folytonos is, és legyen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$-ben haladó sorozat. Az előzőek alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Big(I\Big(\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)^p\Big)\Big)^{1/p} \le \sum_{k=0}^{n} \Big(I(f_k^p)\Big)^{1/p}$$

teljesül, ezért az I monoton σ-folytonossága és monoton növése alapján

$$I\Big(\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)^p\Big) = I\Big(\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)^p\Big) = I\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)^p\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} I\Big(\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)^p\Big) \le$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k=0}^{n}\Big(I\Big(f_k^p\Big)\Big)^{1/p}\Big)^p = \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}\Big(I\Big(f_k^p\Big)\Big)^{1/p}\Big)^p = \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(I\Big(f_k^p\Big)\Big)^{1/p}\Big)^p$$

is igaz, amiből $1/p$-edik hatványozással következik az

$$\Big(I\Big(\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)^p\Big)\Big)^{1/p} \le \sum_{k=0}^{\infty} \Big(I(f_k^p)\Big)^{1/p}$$

egyenlőtlenség. ■

3.1.3. Következmény. *Legyen $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér.*

– *Ha $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan számok, hogy $\alpha+\beta = 1$, és $f,g \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ olyan függvények, hogy az*

$$\Big(\int^* f \,\mathrm{d}\mu, \int^* g \,\mathrm{d}\mu\Big)$$

pár nem egyenlő sem a $(0,+\infty)$, *sem a* $(+\infty,0)$ *párral, akkor*

$$\int^* f^\alpha g^\beta \,\mathrm{d}\mu \le \Big(\int^* f\,\mathrm{d}\mu\Big)^\alpha \Big(\int^* g\,\mathrm{d}\mu\Big)^\beta$$

– *Ha* $p \ge 1$ *valós szám, és* $f,g \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$, *akkor*

$$\Big(\int^* (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \le \Big(\int^* f^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int^* g^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}.$$

– *Ha* $p \ge 1$ *valós szám, és* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$*-ben haladó sorozat, akkor*

$$\Big(\int^* \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \le \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int^* f_k^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}.$$

Bizonyítás. Elegendő a Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenséget alkalmazni I helyett a μ által generált felső integrálra, ami a Fatou-tétel alapján monoton növő, pozitív homogén, szubadditív és monoton σ-folytonos. ■

3.2. $\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-terek

3.2.1. Definíció. *Ha* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér,* F *normált tér és* $p \ge 1$ *valós szám, akkor*

$$\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) := \Big\{ f \in \mathscr{F}(T;F) \Big| \int^* \|f\|^p\,\mathrm{d}|\theta| < +\infty \Big\},$$

és minden $f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ *esetén*

$$\|f\|_{\theta,p} := \Big(\int^* \|f\|^p\,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p}.$$

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy az $\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ függvényhalmaz $\mathscr{R}$-től és θ-tól csak a $|\theta|$ pozitív mérték által generált felső integrálon keresztül függ.

3.2.2. Állítás. *Ha* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér,* F *normált tér és* $p \ge 1$ *valós szám, akkor* $\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ *lineáris altere az* $\mathscr{F}(T;F)$ *függvénytérnek, és az*

$$\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \|f\|_{\theta,p}$$

leképezés olyan félnorma (**LIN** 2.2.2.) $\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ felett, amelyre $f \in \mathscr{F}(T;F)$ esetén az "$f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\|f\|_{\theta,p} = 0$" kijelentés azzal ekvivalens, hogy "θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $f(t) = 0$" (vagyis az f függvény θ-eltűnő).

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $c \in \mathbb{K}$, akkor a $|\theta|$ által generált felső integrál pozitív homogenitása miatt

$$\int^* \|c.f\|^p\,\mathrm{d}|\theta| = \int^* |c|^p\|f\|^p\,\mathrm{d}|\theta| = |c|^p \int^* \|f\|^p\,\mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

amiből következik, hogy $c.f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\|c.f\|_{\theta,p} = |c|\|f\|_{\theta,p}$.

Ha $f, g \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor $\|f+g\|^p \leq (\|f\|+\|g\|)^p$ és a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$\Big(\int^* \|f+g\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} \leq \Big(\int^* (\|f\|+\|g\|)^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} \leq$$
$$\leq \Big(\int^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} + \Big(\int^* \|g\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} < +\infty,$$

amiből következik, hogy $f+g \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\|f+g\|_{\theta,p} \leq \|f\|_{\theta,p} + \|g\|_{\theta,p}$.

Ezzel megmutattuk, hogy $\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ lineáris altere a $\mathscr{F}(T;F)$ függvénytérnek, és az $\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) \to \mathbb{R}_+;\ f \mapsto \|f\|_{\theta,p}$ leképezés félnorma.

Ha $f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\|f\|_{\theta,p} = 0$, akkor

$$\int^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta| = 0,$$

ezért az $\|f\|^p : T \to \mathbb{R}_+$ függvény θ-eltűnő, így $\|f\|$ is θ-eltűnő, vagyis θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $f(t) = 0$.

Megfordítva, ha $f \in \mathscr{F}(T;F)$ olyan, hogy θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $f(t) = 0$, akkor az f függvény θ-eltűnő, így $\|f\|$ és $\|f\|^p$ is θ-eltűnő, amiből következik, hogy $f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\|f\|_{\theta,p} = 0$. ■

Azonban a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma általában nem *nem norma* az $\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ függvénytér felett.

3.3. Elemi kapcsolatok $\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-terek között

3.3.1. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F és G normált tér, $u : F \to G$ folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátor, valamint $p \geq 1$ valós szám. Ekkor minden $f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén $u \circ f \in \mathscr{F}^p_G(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\|u \circ f\|_{\theta,p} \leq \|u\|\|f\|_{\theta,p}$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor $\|u \circ f\| \leq \|u\|\|f\|$, valamint a felső integrál monotonitása és pozitív homogenitása miatt

$$\int^* \|u \circ f\|^p \,\mathrm{d}|\theta| \leq \int^* \|u\|^p \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta| = \|u\|^p \int^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

tehát $u \circ f \in \mathscr{F}^p_G(T,\mathscr{R},\theta)$, továbbá láthatóan

$$\|u \circ f\|_{\theta,p} := \Big(\int^* \|u \circ f\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} \leq \Big(\|u\|^p \int^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} = \|u\|\|f\|_{\theta,p}$$

is teljesül. ■

3.3.2. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ $\mathbb{K}$-mértéktér, F normált tér $\mathbb{K}$ felett, és $p \geq 1$ valós szám. Ha $(f_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{F}^p_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban és $(z_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer F-ben, akkor $\sum_{i\in I} f_i.z_i \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és az F vektortér n-dimenziós, akkor minden $f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén van olyan $(f_i)_{i\in n}$ rendszer $\mathscr{F}^p_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban és olyan $(z_i)_{i\in n}$ rendszer F-ben, hogy $f = \sum_{i\in n} f_i.z_i$.*

Bizonyítás. Ha $(f_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{F}_{\mathbb{K}}^p(T,\mathscr{R},\theta)$-ban és $(z_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer F-ben, akkor $\left\|\sum_{i\in I} f_i.z_i\right\| \leq \sum_{i\in I}|f_i|\|z_i\|$, a felső integrál monotonitása és pozitív homogenitása, valamint a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$\left(\int^* \Big\|\sum_{i\in I} f_i.z_i\Big\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} \leq \left(\int^* \Big(\sum_{i\in I}|f_i|\|z_i\|\Big)^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} \leq$$
$$\leq \sum_{i\in I}\left(\int^* |f_i|^p\|z_i\|^p \mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} = \sum_{i\in I}\left(\|z_i\|^p \int^* |f_i|^p \mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} = \sum_{i\in I}\|z_i\|\|f_i\|_{\theta,p} < +\infty,$$

következésképpen $\sum_{i\in I} f_i.z_i \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$.

Tegyük fel, hogy az F vektortér n dimenziós és $f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$. Legyen $(z_i)_{i\in n}$ algebrai bázis az F vektortérben, és vegyünk olyan $(u_i)_{i\in n}$ rendszert F'-ben, amelyre minden $i,j \in n$ esetén $u_i(z_j) = \delta_{i,j}$ (**ALG** 8.9.10.). Ekkor minden $F \ni z$-re $z = \sum_{i\in n} u_i(z).z_i$, amiből következik, hogy $f = \sum_{i\in n}(u_i \circ f).z_i$. Ugyanakkor az előző állítás szerint minden $i \in n$ esetén $u_i \circ f \in \mathscr{F}_{\mathbb{K}}^p(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

3.3.3. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F, G és H normált terek és $u : F\times G \to H$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris operátor. Legyenek $p, q, r \geq 1$ olyan valós számok, amelyekre*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Ekkor $f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ és $g \in \mathscr{F}_G^q(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén az

$$u(f,g) : T \to H; \quad t \mapsto u(f(t), g(t))$$

leképezés eleme $\mathscr{F}_H^r(T,\mathscr{R},\theta)$-nak és

$$\|u(f,g)\|_{\theta,r} \leq \|u\|\|f\|_{\theta,p}\|g\|_{\theta,q}.$$

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ és $g \in \mathscr{F}_G^q(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor

$$\int^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty, \qquad \int^* \|g\|^q \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

ezért $\|u(f,g)\|^r \leq \|u\|^r\|f\|^r\|g\|^r$ alapján a Hölder-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\int^* \|u(f,g)\|^r \,\mathrm{d}|\theta| \leq \int^* \|u\|^r\|f\|^r\|g\|^r \,\mathrm{d}|\theta| = \|u\|^r \int^* \|f\|^r\|g\|^r \,\mathrm{d}|\theta| =$$
$$= \|u\|^r \int^* (\|f\|^p)^{r/p}(\|g\|^q)^{r/q} \,\mathrm{d}|\theta| \leq \|u\|^r\Big(\int^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{r/p}\Big(\int^* \|g\|^q \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{r/q},$$

amiből következik, hogy $u(f,g) \in \mathscr{F}_H^r(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\|u(f,g)\|_{\theta,r} \leq \|u\|\|f\|_{\theta,p}\|g\|_{\theta,q}$. ■

3.4. Riesz–Fischer-tétel $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$-terekre

3.4.1. Definíció. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér és $p \geq 1$ valós szám. Azt mondjuk, hogy az $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$-ban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat* **Cauchy-sorozat a** $\|\cdot\|_{\theta,p}$

félnorma szerint, *ha minden* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *esetén van olyan* $N \in \mathbb{N}$, *hogy minden* $m, n > N$ *természetes számra* $\|f_m - f_n\|_{\theta,p} < \varepsilon$. *Azt mondjuk, hogy az* $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$*-ban haladó* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat* **konvergál a** $\|\cdot\|_{\theta,p}$ **félnorma szerint** *az* $f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ *függvényhez, ha minden* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *esetén van olyan* $N \in \mathbb{N}$, *hogy minden* $n > N$ *természetes számra* $\|f_n - f\|_{\theta,p} < \varepsilon$ *(vagyis* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\theta,p} = 0$*).*

3.4.2. Lemma. *Legyen* $(c_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *olyan rendszer* $\mathbb{R}_+$*-ban, amelyre minden* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *esetén van olyan* $N \in \mathbb{N}$, *hogy minden* $m, n > N$ *természetes számra* $c_{m,n} < \varepsilon$. *Ekkor minden* $\mathbb{R}_+^*$*-ban haladó* $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sorozathoz létezik olyan* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *szigorúan monoton növő függvény, hogy minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$c_{\sigma(k),\sigma(k+1)} < \varepsilon_k.$$

Bizonyítás. Értelmezzük azt az $\mathscr{N} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyre minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$\mathscr{N}(\varepsilon) := \min\{N \in \mathbb{N} | (\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : (((m > N) \wedge (n > N)) \Rightarrow (c_{m,n} < \varepsilon))\}.$$

Vezessük be továbbá az $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozathoz a

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad (n, m) \mapsto \max(\mathscr{N}(\varepsilon_{n+1}), m) + 1$$

függvényt. Legyen $e \in \mathbb{N}$ olyan rögzített szám, amelyre $e > \mathscr{N}(\varepsilon_0)$, és jelölje σ az e kezdőpont és g függvény által rekurzióval előállított sorozatot. Megmutatjuk, hogy $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, amelynek a létezését állítottuk.

Valóban, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sigma(n+1) = g(n, \sigma(n)) := \max(\mathscr{N}(\varepsilon_{n+1}), \sigma(n)) + 1,$$

amiből látható, hogy $\sigma(n+1) \geq \sigma(n) + 1 > \sigma(n)$, továbbá $\sigma(n+1) \geq \mathscr{N}(\varepsilon_{n+1}) + 1 > \mathscr{N}(\varepsilon_{n+1})$. Tehát a σ sorozat szigorúan monoton növő, és $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+2) > \sigma(n+1) > \mathscr{N}(\varepsilon_{n+1})$, így $c_{\sigma(n+1),\sigma(n+2)} < \varepsilon_{n+1}$. Ez azt jelenti, hogy $k \in \mathbb{N}^*$ esetén $c_{\sigma(k),\sigma(k+1)} < \varepsilon_k$, ugyanakkor $c_{\sigma(0),\sigma(1)} < \varepsilon_0$ is igaz, mert $\sigma(1) > \sigma(0) := e > \mathscr{N}(\varepsilon_0)$. ■

3.4.3. Tétel. (Riesz–Fischer-tétel $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$-terekre) *Legyen* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér,* F *Banach-tér és* $p \geq 1$ *valós szám. Ha* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan sorozat* $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$*-ban, amely Cauchy-sorozat a* $\|\cdot\|_{\theta,p}$ *félnorma szerint, akkor léteznek olyan* $f : T \to F$ *és* $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *függvények, továbbá létezik olyan* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *szigorúan monoton növő függvény, hogy teljesülnek a következők.*

a) $f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ *és az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat konvergál* f*-hez a* $\|\cdot\|_{\theta,p}$ *félnorma szerint.*

b) *Az* $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat a* T *halmazon* θ*-majdnem mindenütt pontonként konvergál* f*-hez.*

c) *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\|f_{\sigma(n)}\| \leq g$, *és* $\int^* g^p \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$.

Bizonyítás. Legyen $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $c_{m,n} := \|f_n - f_m\|_{\theta,p}$. Ekkor az $\mathbb{R}_+$-ban haladó $(c_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ rendszerre teljesül az, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n > N$ természetes számra $c_{m,n} < \varepsilon$, hiszen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_{\theta,p}$

félnorma szerint. Ezért az előző lemma alapján van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\|_{\theta,p} < \varepsilon_k.$$

Értelmezzük most a következő $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt:

$$g := \|f_{\sigma(0)}\| + \sum_{k=0}^{\infty} \|f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\|.$$

Végül, vezessük be azt az $f : T \to F$ függvény, amelyre $t \in T$ esetén

$$f(t) := f_{\sigma(0)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\Big),$$

ha a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \Big(f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\Big)$ vektorsor konvergens F-ben, egyébként $f(t) := 0$.

Igazolni fogjuk, hogy az imént értelmezett σ, g és f függvények eleget tesznek a követelményeknek.

A Minkowski-egyenlőtlenség és a megszámlálható konvexitás tételének általánosítását alkalmazva kapjuk, hogy

$$\Big(\int^* g^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} \leq$$
$$\leq \Big(\int^* \|f_{\sigma(0)}\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} + \Big(\int^* \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\|\Big)^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} \leq$$
$$\leq \Big(\int^* \|f_{\sigma(0)}\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int^* \|f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} =$$
$$= \|f_{\sigma(0)}\|_{\theta,p} + \sum_{k=0}^{\infty} \|f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\|_{\theta,p} \leq \|f_{\sigma(0)}\|_{\theta,p} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty.$$

Ebből az is következik, hogy θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $g(t) < +\infty$, vagyis az $N := \{t \in T | g(t) = +\infty\}$ halmaz θ-eltűnő halmaz. Ha $t \in T \setminus N$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\|$$

számsor konvergens, vagyis a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\Big)$$

vektorsor abszolút konvergens F-ben, tehát a F teljessége miatt konvergens is. Ez azt jelenti, hogy minden $t \in T \setminus N$ esetén

$$f(t) := f_{\sigma(0)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\Big) =$$
$$= f_{\sigma(0)}(t) + \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k\in n} \Big(f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\Big)\Big) =$$
$$= f_{\sigma(0)}(t) + \lim_{n\to\infty} \Big(f_{\sigma(n)}(t) - f_{\sigma(0)}(t)\Big),$$

vagyis az $(f_{\sigma(n)}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, és a határértéke egyenlő $f(t)$-vel. Tehát az $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergens, és $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\|f_{\sigma(n)}\| = \left\|f_{\sigma(0)} + \sum_{k\in n}\Big(f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\Big)\right\| \leq \|f_{\sigma(0)}\| + \sum_{k\in n}\|f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\| \leq g.$$

Ebből azonnal következik, hogy $f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$, hiszen minden $t \in T \setminus N$ esetén

$$\|f(t)\| = \left\|f_{\sigma(0)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\Big)\right\| \leq$$

$$\leq \|f_{\sigma(0)}(t)\| + \sum_{k=0}^{\infty}\|f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\| =: g(t),$$

vagyis θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $\|f(t)\| \leq g(t)$, így

$$\int^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta| \leq \int^* g^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty.$$

Most megmutatjuk, hogy az $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - f_{\sigma(n)}\|_{\theta,p} = 0$. Valóban, ha $t \in T\setminus N$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(t) - f_{\sigma(n)}(t) =$$

$$= \left(f_{\sigma(0)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\Big)\right) - \left(f_{\sigma(0)}(t) + \sum_{k\in n}\Big(f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\Big)\right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\Big(f_{\sigma(k+1)}(t) - f_{\sigma(k)}(t)\Big),$$

következésképpen minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\|f - f_{\sigma(n)}\| \leq \sum_{k=n}^{\infty}\|f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\|$$

teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt, így

$$\|f - f_{\sigma(n)}\|_{\theta,p} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\|f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\|_{\theta,p} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\varepsilon_k.$$

Ugyanakkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\varepsilon_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\varepsilon_k = 0$, így

$$\lim_{n\to\infty}\|f - f_{\sigma(n)}\|_{\theta,p} = 0.$$

Végül megmutatjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - f_n\|_{\theta,p} = 0$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az előzőek alapján van olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $\|f - f_{\sigma(n)}\|_{\theta,p} < \varepsilon/2$. Ugyanakkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint, ezért van olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden

$m,n > N_2$ természetes számra $\|f_m - f_n\|_{\theta,p} < \varepsilon/2$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N_1, N_2)$, akkor $\sigma(n) \geq n > N_2$ miatt $\|f_{\sigma(n)} - f_n\|_{\theta,p} < \varepsilon/2$, valamint $n > N_1$ miatt $\|f - f_{\sigma(n)}\|_{\theta,p} < \varepsilon/2$, így

$$\|f - f_n\|_{\theta,p} \leq \|f - f_{\sigma(n)}\|_{\theta,p} + \|f_{\sigma(n)} - f_n\|_{\theta,p} < \varepsilon$$

teljesül. ■

Tehát ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F Banach-tér és $p \geq 1$ valós szám, akkor a Riesz-Fiscer-tétel alapján az $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ függvénytér a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint *teljes* abban az értelemben, hogy minden $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$-ben haladó, $\|\cdot\|_{\theta,p}$ szerinti Cauchy-sorozathoz van olyan elem $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$-ben, amelyhez a sorozat konvergál a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint.

3.5. $\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$-terek

3.5.1. Definíció. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és értelmezzük a következő függvényt:*

$$N_{\theta,\infty} : \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad f \mapsto \inf\{c \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mid |\theta|^*(\{t \in T | f(t) > c\}) = 0\}.$$

3.5.2. Állítás. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$, akkor θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) \leq N_{\theta,\infty}(f)$.*

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ és $c' \in \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan, hogy $N_{\theta,\infty}(f) < c'$, akkor létezik olyan $c < c'$ valós szám, hogy $|\theta|^*(\{t \in T|f(t) > c\}) = 0$, vagyis $\{t \in T|f(t) > c\}$ θ-eltűnő halmaz; ekkor $\{t \in T|f(t) > c'\} \subseteq \{t \in T|f(t) > c\}$ miatt $\{t \in T|f(t) > c'\}$ is θ-eltűnő halmaz. Tehát ha $H := \{c \in \mathbb{Q}|N_{\theta,\infty}(f) < c\}$, akkor minden $H \ni c$-re $\{t \in T|f(t) > c\}$ θ-eltűnő halmaz, és H megszámlálható, így

$$\{t \in T|f(t) > N_{\theta,\infty}(f)\} = \bigcup_{c \in H} \{t \in T|f(t) > c\}$$

miatt $\{t \in T|f(t) > N_{\theta,\infty}(f)\}$ is θ-eltűnő halmaz, vagyis θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) \leq N_{\theta,\infty}(f)$. ■

3.5.3. Állítás. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és F normált tér, akkor $f,g \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ és $\lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén*

$$N_{\theta,\infty}(\lambda.f) = \lambda N_{\theta,\infty}(f),$$
$$N_{\theta,\infty}(f+g) \leq N_{\theta,\infty}(f) + N_{\theta,\infty}(g),$$

és ha θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) \leq g(t)$, akkor $N_{\theta,\infty}(f) \leq N_{\theta,\infty}(g)$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $N_{\theta,\infty}$ a 0 értékű $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ konstansfüggvényhez a 0 értéket rendeli, ezért a $0 \cdot (+\infty) := 0$ konvenció alapján az $N_{\theta,\infty}(\lambda.f) = 0 = \lambda N_{\theta,\infty}(f)$ egyenlőségek teljesülnek a $\lambda := 0$ számra, minden $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén. Ezért az első egyenlőséget elegendő $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ esetén bizonyítani.

Legyen $c' \in \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan, hogy $N_{\theta,\infty}(\lambda.f) < c'$. Ekkor létezik olyan $c < c'$ valós szám, hogy a $\{t \in T|\lambda f(t) > c\}$ halmaz θ-eltűnő. Azonban $\{t \in T|\lambda f(t) > c\} = \{t \in T|f(t) > c/\lambda\}$, ezért $N_{\theta,\infty}(f) \leq c/\lambda$, vagyis $\lambda N_{\theta,\infty}(f) \leq c < c'$. Ebből következik, hogy $\lambda N_{\theta,\infty}(f) \leq N_{\theta,\infty}(\lambda.f)$. Ez az egyenlőtlenség minden $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ és $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ esetén fennáll, tehát ha $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ és $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, akkor felírva ezt az egyenlőtlenséget f helyére $\lambda.f$-t és λ helyére λ^{-1}-t helyettesítve kapjuk, hogy $\lambda^{-1} N_{\theta,\infty}(\lambda.f) \leq N_{\theta,\infty}(\lambda^{-1}.(\lambda.f))$, vagyis a fordított $N_{\theta,\infty}(\lambda.f) \leq \lambda N_{\theta,\infty}(f)$ egyenlőtlenség is teljesül.

Legyen $c' \in \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan, hogy $N_{\theta,\infty}(f) + N_{\theta,\infty}(f) < c'$. Legyen $c \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy $N_{\theta,\infty}(f) + N_{\theta,\infty}(f) < c < c'$. Ekkor $N_{\theta,\infty}(f) < c - N_{\theta,\infty}(f)$, így vehetünk olyan $c_g \geq 0$ valós számot, amelyre $c_g < c - N_{\theta,\infty}(f)$ és a $\{t \in T | g(t) > c_g\}$ halmaz θ-eltűnő. Ekkor $N_{\theta,\infty}(f) < c - c_g$, tehát vehetünk olyan $c_f \geq 0$ valós számot, amelyre $c_f < c - c_g$ és a $\{t \in T | f(t) > c_f\}$ halmaz θ-eltűnő. Nyilvánvaló, hogy $c > c_f + c_g$ miatt

$$\begin{aligned}\{t \in T | f(t) + g(t) > c\} \subseteq \{t \in T | f(t) + g(t) > c_f + c_g\} \subseteq \\ \subseteq \{t \in T | f(t) > c_f\} \cup \{t \in T | g(t) > c_g\},\end{aligned}$$

és a $\{t \in T | f(t) > c_f\} \cup \{t \in T | g(t) > c_g\}$ halmaz θ-eltűnő. Ezért a $\{t \in T | f(t) + g(t) > c\}$ halmaz is θ-eltűnő, amiből következik, hogy $N_{\theta,\infty}(f+g) \leq c < c'$. Ebből kapjuk, hogy $N_{\theta,\infty}(f+g) \leq N_{\theta,\infty}(f) + N_{\theta,\infty}(g)$.

Tegyük fel, hogy az $f, g \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ függvényekre teljesül az, hogy θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) \leq g(t)$, vagyis a $\{t \in T | f(t) > g(t)\}$ halmaz θ-eltűnő. Legyen $c' \in \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan, hogy $N_{\theta,\infty}(g) < c'$, és vegyünk olyan $c \in \mathbb{R}_+$ számot, amelyre $c < c'$ és a $\{t \in T | g(t) > c\}$ halmaz θ-eltűnő. Nyilvánvaló, hogy $\{t \in T | f(t) > c\} \subseteq \{t \in T | f(t) > g(t)\} \cup \{t \in T | g(t) > c\}$, és itt a jobb oldalon θ-eltűnő halmaz áll, ezért a $\{t \in T | f(t) > c\}$ halmaz is θ-eltűnő. Ebből következik, hogy $N_{\theta,\infty}(f) \leq c < c'$, tehát fennáll az $N_{\theta,\infty}(f) \leq N_{\theta,\infty}(g)$ egyenlőtlenség. ■

3.5.4. Definíció. *Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és F normált tér, akkor*

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta) &:= \{f \in \mathscr{F}(T;F) | N_{\theta,\infty}(\|f\|) < +\infty\}, \\ \|\cdot\|_{\theta,\infty} : \mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta) &\to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto N_{\theta,\infty}(\|f\|).\end{aligned}$$

3.5.5. Állítás. *Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és F normált tér, akkor $\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$ lineáris altere az $\mathscr{F}(T;F)$ függvénytérnek, és a $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ leképezés félnorma a $\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$ vektortér felett. Továbbá, minden $f : T \to F$ korlátos függvény eleme az $\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$ függvénytérnek, és*

$$\|f\|_{\theta,\infty} \leq \sup_{t \in T} \|f(t)\|.$$

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor az előző állítás alapján

$$N_{\theta,\infty}(\|\lambda.f\|) = N_{\theta,\infty}(|\lambda|.\|f\|) = |\lambda| N_{\theta,\infty}(\|f\|) < +\infty$$

tehát $\lambda.f \in \mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$, és látható, hogy

$$\|\lambda.f\|_{\theta,\infty} = N_{\theta,\infty}(\|\lambda.f\|) = |\lambda| N_{\theta,\infty}(\|f\|) = |\lambda| \|f\|_{\theta,\infty}.$$

Legyenek $f, g \in \mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$. Az előző állítás és $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ slapján

$$N_{\theta,\infty}(\|f+g\|) \leq N_{\theta,\infty}(\|f\|) + N_{\theta,\infty}(\|g\|) < +\infty,$$

amiből következik, hogy $f + g \in \mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$, és az is látszik, hogy $\|f+g\|_{\theta,\infty} \leq \|f\|_{\theta,\infty} + \|g\|_{\theta,\infty}$.

Tegyük fel, hogy $f : T \to F$ korlátos függvény és legyen $|||f||| := \sup_{t \in T} \|f(t)\|$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $\{t \in T | \|f(t)\| > |||f|||\} = \emptyset$, tehát ez a halmaz θ-eltűnő, így $N_{\theta,\infty}(\|f\|) \leq |||f||| < +\infty$, vagyis $f \in \mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$, valamint $\|f\|_{\theta,\infty} = N_{\theta,\infty}(\|f\|) \leq |||f|||$ is teljesül. ■

3.5.6. Állítás. *Ha* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér,* F *normált tér, és* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$*-ban haladó sorozat, valamint* $f\in\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$*, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{\theta,\infty}=0$*, amit úgy fejezünk ki, hogy az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergál* f*-hez a* $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ *félnorma szerint.*

(ii) *Létezik olyan* $T'\subseteq T$ *halmaz, hogy az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat egyenletesen konvergál* f*-hez a* T' *halmazon és a* $T\setminus T'$ *halmaz* θ*-eltűnő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{\theta,\infty}=0$, és rögzítsünk egy tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ha $m\in\mathbb{N}$, akkor van olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $n>N$ természetes számra $\|f-f_n\|_{\theta,\infty}<\varepsilon_m$; jelölje N_m a legkisebb ilyen tulajdonságú természetes számot. Ekkor $m,n\in\mathbb{N}$ és $n>N_m$ esetén θ-majdnem minden $t\in T$ pontra $\|f(t)-f_n(t)\|\le\|f-f_n\|_{\theta,\infty}<\varepsilon_m$, vagyis az $E_{m,n}:=\{t\in T|\|f(t)-f_n(t)\|\ge\varepsilon_m\}$ halmaz θ-eltűnő halmaz. Vezessük be az

$$E:=\bigcup_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ n>N_m}E_{m,n}$$

halmazt, ami szintén θ-eltűnő halmaz, továbbá legyen $T':=T\setminus E$. Ha $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, akkor van olyan $m\in\mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_m<\varepsilon$, és ekkor minden $n>N_m$ természetes számra és minden $t\in T'$ pontra $\|f(t)-f_n(t)\|<\varepsilon_m<\varepsilon$, vagyis minden $n>N_m$ természetes számra $\sup\limits_{t\in T'}\|f(t)-f_n(t)\|\le\varepsilon_m<\varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez a T' halmazon.

Megfordítva, legyen $T'\subseteq T$ olyan halmaz, hogy $T\setminus T'$ θ-eltűnő halmaz és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez a T' halmazon. Ha $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, akkor van olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $n>N$ természetes számra és minden $t\in T'$ pontra $\|f(t)-f_n(t)\|\le\varepsilon$, vagyis minden $n>N$ természetes számra $\{t\in T|\|f(t)-f_n(t)\|>\varepsilon\}\subseteq T\setminus T'$, így $\|f-f_n\|_{\theta,\infty}\le\varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ félnorma szerint. ■

3.5.7. Tétel. (**Riesz–Fischer-tétel** $\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$**-terekre**) *Legyen* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér,* F *Banach-tér és* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan* $\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$*-ban haladó sorozat, amelyre minden* $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ *esetén van olyan* $N\in\mathbb{N}$*, hogy minden* $m,n>N$ *természetes számra* $\|f_m-f_n\|_{\theta,\infty}<\varepsilon$ *(vagyis* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy-sorozat a* $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ *félnorma szerint). Ekkor létezik olyan* $f\in\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$*, hogy* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergál* f*-hez a* $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ *félnorma szerint.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$-ban a $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ félnorma szerint. Legyen $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat. Vegyünk olyan $(N_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{N}$-ben, amelyre minden $m\in\mathbb{N}$ esetén minden $j,k>N_m$ természetes számra $\|f_j-f_k\|_{\theta,\infty}<\varepsilon_m$. Ekkor $m,j,k\in\mathbb{N}$ és $j,k>N_m$ esetén az $E_{m,j,k}:=\{t\in T|\|f_j(t)-f_k(t)\|\ge\varepsilon_m\}$ halmaz θ-eltűnő halmaz. Legyen

$$E:=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\Bigg(\bigcup_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ j,k>N_m}E_{m,j,k}\Bigg);$$

ekkor E θ-eltűnő halmaz, és ha $t\in T\setminus E$, akkor minden $m,j,k\in\mathbb{N}$, $j,k>N_m$ esetén $\|f_j(t)-f_k(t)\|<\varepsilon_m$. Legyen minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$g_n:T\to F;\quad t\mapsto\begin{cases}f_n(t) & \text{, ha } t\in T\setminus E,\\ 0 & \text{, ha } t\in E.\end{cases}$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $g_n(t) = f_n(t)$, ezért $N_{\theta,\infty}(f_n - g_n) = 0$, így $g_n \in \mathscr{F}_F^\infty(T, \mathscr{R}, \theta)$. Az előzőek alapján *minden* $t \in T$ esetén a $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat Cauchy-sorozat F-ben, ezért az F teljessége folytán konvergens is, vagyis a $g := \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ pontonkénti limeszfüggvény *mindenütt értelmezett* a T halmazon. Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor minden $k > N_m$ természetes számra és minden $T \ni t$-re

$$\|g(t) - g_k(t)\| = \lim_{j\to\infty} \|g_j(t) - g_k(t)\| \leq \varepsilon_m,$$

tehát a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergens* a T halmazon. A g függvény *korlátos* a $\{t \in T \mid \|f_{N_0+1}(t)\| \leq \|f_{N_0+1}\|_{\theta,\infty}\}$ halmazon, mert ha t eleme ennek a halmaznak, akkor $t \in E$ esetén minden $k > N_0$ számra $\|f_k(t) - f_{N_0+1}(t)\| < \varepsilon_0$, így

$$\|g(t) - f_{N_0+1}(t)\| = \lim_{k\to\infty} \|g_k(t) - f_{N_0+1}(t)\| = \lim_{k\to\infty} \|f_k(t) - f_{N_0+1}(t)\| \leq \varepsilon_0,$$

tehát $\|g(t)\| \leq \|f_{N_0+1}(t)\| + \varepsilon_0 \leq \|f_{N_0+1}\|_{\theta,\infty} + \varepsilon_0$, azaz

$$g\langle\{t \in T \mid \|f_{N_0+1}(t)\| \leq \|f_{N_0+1}\|_{\theta,\infty}\}\rangle \subseteq \overline{\mathrm{B}}_{\|f_{N_0+1}\|_{\theta,\infty}+\varepsilon_0}(0).$$

Tudjuk, hogy a $T \setminus \{t \in T \mid \|f_{N_0+1}(t)\| \leq \|f_{N_0+1}\|_{\theta,\infty}\}$ halmaz θ-eltűnő halmaz, ezért $g \in \mathscr{F}_F^\infty(T, \mathscr{R}, \theta)$. Ugyanakkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál g-hez a T halmazon, ezért az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $T \setminus E$ halmazon egyenletesen konvergál g-hez, így az előző állítás szerint $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál g-hez a $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ félnorma szerint. ■

3.6. Gyakorlatok

1. Legyen T véges halmaz és μ a számláló mérték T felett. A Hölder-egyenlőtlenség szerint, ha $\alpha, \beta \in]0,1[$ olyan valós számok, hogy $\alpha + \beta = 1$, valamint $f, g : T \to \mathbb{R}_+$ függvények, akkor

$$\int^* f^\alpha g^\beta \, \mathrm{d}\mu \leq \Big(\int^* f \, \mathrm{d}\mu\Big)^\alpha \Big(\int^* g \, \mathrm{d}\mu\Big)^\beta.$$

Mutassuk meg, hogy ebből következik az elemi Hölder-egyenlőtlenség!

(*Útmutatás.* A IX. fejezet, 1. pont, **8**. gyakorlat alapján minden $f : T \to \mathbb{R}_+$ függvényre

$$\int^* f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{t\in T} f(t)$$

teljesül.)

2. Legyen T halmaz, és $I : \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ az a függvény, amely minden $T \to \mathbb{R}_+$ korlátos függvényhez 0-t rendel, és minden egyéb $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényhez a $+\infty$ értéket rendeli. Ekkor I monoton növő, pozitív homogén és szubadditív (sőt additív) függvény. Ugyanakkor végtelen T esetén léteznek olyan $\alpha, \beta \in]0,1[$ valós számok, hogy $\alpha + \beta = 1$, valamint léteznek olyan $f, g : T \to \mathbb{R}_+$ függvények, hogy $I(f^\alpha g^\beta) = +\infty$, ugyanakkor $(I(f))^\alpha (I(g))^\beta = 0$. Ez azt mutatja, hogy a Hölder-egyenlőtlenségben lényeges, hogy az $(I(f), I(g))$ pár ne legyen egyenlő sem a $(+\infty, 0)$, sem a $(0, +\infty)$ párral.

3. Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér és $f : T \to F$ függvény. Ekkor a

$$H := \{p \in [1,\to[\ \mid f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)\}$$

halmaz *intervallum* $\mathbb{R}$-ben, továbbá, ha f nem θ-eltűnő, akkor a

$$H \to \mathbb{R}_+^*; \quad p \mapsto p\log(\|f\|_{\theta,p})$$

függvény *konvex*.

(*Útmutatás*. Legyenek $p, q \in H$ olyanok, hogy $p < q$ és legyen $r \in]p, q[$. Ekkor az

$$\alpha := \frac{r-p}{q-p} \in]0,1[$$

számra $r = (1-\alpha)p + \alpha q$ teljesül, így a Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\int^* \|f\|^r \,\mathrm{d}|\theta| = \int^* (\|f\|^p)^{1-\alpha}(\|f\|^q)^\alpha \,\mathrm{d}|\theta| \leq \left(\int^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1-\alpha} \left(\int^* \|f\|^q \,\mathrm{d}|\theta|\right)^\alpha < +\infty,$$

tehát $r \in H$, vagyis H *konvex* halmaz $\mathbb{R}$-ben, így intervallum.

Ha f nem θ-eltűnő, akkor minden $p \in H$ esetén $\|f\|_{\theta,p} > 0$, és ha $p, q \in H$ olyanok, hogy $p < q$, valamint $\alpha \in]0,1[$ tetszőleges valós szám, akkor az $r := p + \alpha(q-p)$ számra $r \in]p, q[$ teljesül, így az előzőek alapján $r \in H$ és

$$\begin{aligned}((1-\alpha)p + \alpha q)\log(\|f\|_{\theta,(1-\alpha)p+\alpha q}) = r\log(\|f\|_{\theta,r}) = \log\left(\int^* \|f\|^r \,\mathrm{d}|\theta|\right) \leq \\ \leq (1-\alpha)\log\left(\int^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right) + \alpha\log\left(\int^* \|f\|^q \,\mathrm{d}|\theta|\right) = \\ = (1-\alpha)p\log(\|f\|_{\theta,p}) + \alpha q\log(\|f\|_{\theta,q}),\end{aligned}$$

vagyis a $H \to \mathbb{R}_+^*;\ p \mapsto p\log(\|f\|_{\theta,p})$ függvény konvex.)

4. fejezet

$\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-terek és integrál az $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$-téren

4.1. $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-terek értelmezése

Először értelmezzük a vektortértékű lépcsősfüggvényeket, és néhány kijelentést igazolunk ezekre.

4.1.1. Definíció. *Legyen $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett és F vektortér. Minden $z \in F$ és $E \in \mathscr{S}$ esetén*

$$\chi_{E}.z : T \to F; \quad t \mapsto \begin{cases} z & , \text{ha } t \in E, \\ 0 & , \text{ha } t \in T \setminus E. \end{cases}$$

Egy $f : T \to F$ függvényt $\mathscr{S}$**-lépcsősfüggvények** *nevezünk, ha létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, és létezik olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy*

$$f = \sum_{i\in I} \chi_{E_i}.z_i.$$

A $T \to F$ $\mathscr{S}$-lépcsősfüggvények halmazát $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{S})$ jelöli.

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, és F vektortér, akkor $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{S})$ lineáris altere az $\mathscr{F}(T;F)$ függvénytérnek. Továbbá, ha $\mathscr{R}$ az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrű, akkor $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{S}) = \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ teljesül, hiszen $E \in \mathscr{R}$ esetén van olyan $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer, hogy $E = \bigcup_{i\in I} E_i$, ezért $z \in F$ esetén $\chi_{E}.z = \sum_{i\in I} \chi_{E_i}.z \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{S})$, így $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{E}_F(T,\mathscr{S})$.

4.1.2. Állítás. *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, és F vektortér, akkor minden $f \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{S})$ függvényhez létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, és olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f = \sum_{i\in I} \chi_{E_i}.z_i$.*

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{S})$, akkor a definíció szerint létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, és olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f = \sum_{i\in I} \chi_{E_i}.z_i$. A felbontási lemma (**MES** 1.3.1.) alkalmazásával vehetünk olyan $(E'_j)_{j\in J}$ diszjunkt véges rendszert $\mathscr{S}$-ben, amelyre $\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup_{j\in J} E'_j$, és minden $I \ni i$-hez létezik olyan $J_i \subseteq J$ halmaz, hogy $E_i = \bigcup_{j\in J_i} E'_j$. Ekkor F összeadásának általános asszociativitását (**ENS** 4.7.3.) alkalmazva:

$$f = \sum_{i\in I} \chi_{E_i}.z_i = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J_i}\chi_{E'_j}\Big).z_i = \sum_{j\in J}\chi_{E'_j}.\Big(\sum_{i\in I,\ j\in J_i} z_i\Big),$$

tehát f előáll a kívánt alakban. ■

4.1.3. Állítás. *Ha $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett, F normált tér, és $f \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{S})$, akkor minden $p \geq 1$ valós számra $\|f\|^p \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{S})$.*

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{S})$, akkor az előző állítás alapján van olyan $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{S}$-ben, és olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f = \sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i$. Ekkor nyilvánvalóan

$$\|f\|^p = \sum_{i\in I}\chi_{E_i}.\|z_i\|^p \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{S})$$

teljesül. ■

4.1.4. Következmény. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és F normált tér, akkor minden $p \geq 1$ valós számra*

$$\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta).$$

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló. ■

4.1.5. Definíció. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér és $p \geq 1$ valós szám. Ekkor*

$$\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) := \{f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) \mid (\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+)(\exists g \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})) : \|f-g\|_{\theta,p} < \varepsilon\},$$

és az $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ függvényhalmaz elemeit T-n értelmezett, F-be ható, θ szerint **p-edik hatványon integrálható** *függvényeknek nevezzük. Az $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ függvényhalmaz elemeit T-n értelmezett, F-be ható, θ szerint* **integrálható** *függvényeknek nevezzük. Ha θ komplex mérték, akkor*

$$\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta) := \{f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R},\theta) | \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}\}.$$

4.2. $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-terek alaptulajdonságai

4.2.1. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér és $p \geq 1$ valós szám. Ha $f : T \to F$ függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *$f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$.*

(ii) *Létezik olyan $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre*

$$\lim_{n\to\infty}\int^* \|f-f_n\|^p \,\mathrm{d}|\theta| = 0.$$

(iii) *Létezik olyan $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-ban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy*

$$\lim_{n\to\infty}\int^* \|f-f_n\|^p \,\mathrm{d}|\theta| = 0.$$

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$, és legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}_+^*$-ban. Ekkor a kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \{g \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R}) \mid \|f-g\|_{\theta,p} < \varepsilon_n\} \neq \emptyset,$$

és ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \|f-f_n\|_{\theta,p} = 0$, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \int^* \|f-f_n\|^p \,\mathrm{d}|\theta| = 0$$

is teljesül.

(ii)⇒(iii) Nyilvánvaló, mert $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$.

(iii)⇒(i) Tegyük fel, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$-ban, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* \|f-f_n\|^p \,\mathrm{d}|\theta| = 0.$$

Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\int^* \|f-f_n\|^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

így a Minkowsi-egyenlőtlenség alapján

$$\left(\int^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} \leq \left(\int^* (\|f-f_n\| + \|f_n\|)^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} \leq$$
$$\leq \left(\int^* \|f-f_n\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} + \|f_n\|_{\theta,p} < +\infty,$$

tehát $f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és (iii) alapján rögzítsünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre

$$\left(\int^* \|f-f_n\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor $f_n \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ miatt vehetünk olyan $g \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ függvényt, amelyre

$$\left(\int^* \|f_n-g\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a Minkowski-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\|f-g\|_{\theta,p} = \left(\int^* \|f-g\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} = \left(\int^* \|(f-f_n)+(f_n-g)\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} \leq$$
$$\leq \left(\int^* \|f-f_n\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} + \left(\int^* \|f_n-g\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

így a definíció szerint $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

4.2.2. Állítás. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér és $p \geq 1$ valós szám, akkor az $\mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ függvényhalmaz lineáris altere az $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ függvénytérnek.*

Bizonyítás. Legyenek $f, g \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőlegesek; tudjuk, hogy ekkor $f + g \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$. Továbbá, a definíció szerint az $\varepsilon/2 \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $f' \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ és $g' \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, amelyre $\|f - f'\|_{\theta,p} < \varepsilon/2$ és $\|g - g'\|_{\theta,p} < \varepsilon/2$; ekkor $\|(f+g) - (f'+g')\|_{\theta,p} \leq \|f - f'\|_{\theta,p} + \|g - g'\|_{\theta,p} < \varepsilon$, és $f' + g' \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, ezért $f + g \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$.

Legyenek $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőlegesek; tudjuk, hogy ekkor $\lambda.f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$. Továbbá, a definíció szerint az $\varepsilon/|\lambda| \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $g \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, amelyre $\|f - g\|_{\theta,p} < \varepsilon/|\lambda|$; ekkor $\|\lambda.f - \lambda.g\|_{\theta,p} = |\lambda|\|f - g\|_{\theta,p} < \varepsilon$, és $\lambda.g \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, ezért $\lambda.f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

Tehát ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér és $p \geq 1$ valós szám, akkor a $\mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ függvénytér az $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ feletti $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma leszűkítésével ellátva félnormált tér; ezt a félnorma-leszűkítést szintén a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ szimbólummal jelöljük.

4.2.3. Állítás. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér és $p \geq 1$ valós szám, akkor minden $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén $\|f\| \in \mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T,\mathscr{R},\theta)$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$; ekkor nyilvánvalóan $\|f\| \in \mathscr{F}_\mathbb{R}^p(T,\mathscr{R},\theta)$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor van olyan $g \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, hogy $\|f - g\|_{\theta,p} < \varepsilon$; ekkor $|\|f\| - \|g\|| \leq \|f - g\|$ miatt $\||\|f\| - \|g\||\|_{\theta,p} \leq \|f - g\|_{\theta,p} < \varepsilon$, és láttuk, hogy $\|g\| \in \mathscr{E}_\mathbb{R}(T,\mathscr{R})$, következésképpen $\|f\| \in \mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

4.2.4. Következmény. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, $p \geq 1$ valós szám, és $(f_i)_{i\in I}$ nem üres véges rendszer $\mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T,\mathscr{R},\theta)$-ban, akkor $\bigwedge_{i\in I} f_i \in \mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\bigvee_{i\in I} f_i \in \mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T,\mathscr{R},\theta)$.*

Bizonyítás. Ha $f, g \in \mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor az előző állítás alapján

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T,\mathscr{R},\theta),$$
$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in \mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T,\mathscr{R},\theta).$$

Ebből az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval következik az állítás. ■

4.3. Elemi kapcsolatok $\mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$-terek között

4.3.1. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F és G normált tér, $u : F \to G$ folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátor, valamint $p \geq 1$ valós szám. Ekkor minden $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén $u \circ f \in \mathscr{L}_G^p(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\|u \circ f\|_{\theta,p} \leq \|u\|\|f\|_{\theta,p}$ teljesül.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy minden $g \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ esetén $u \circ g \in \mathscr{E}_G(T,\mathscr{R})$, hiszen van olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}$-ben és olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, amelyre $g = \sum_{i\in I} \chi_{E_i}.z_i$, így az u operátor $\mathbb{R}$-linearitása folytán $u \circ g = \sum_{i\in I} \chi_{E_i}.u(z_i) \in \mathscr{E}_G(T,\mathscr{R})$.

Legyen $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$; ekkor $f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$, tehát $u \circ f \in \mathscr{F}_G^p(T,\mathscr{R},\theta)$. Ha $g \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, akkor fennáll az $\|u \circ (f - g)\|_{\theta,p} \leq \|u\|\|f - g\|_{\theta,p}$ egyenlőtlenség, ezért ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és a $g \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ függvényt úgy választjuk meg, hogy $\|f - g\|_{\theta,p} < \dfrac{\varepsilon}{\|u\| + 1}$ teljesüljön, akkor fennáll az $\|u \circ f - u \circ g\| < \varepsilon$ egyenlőtlenség is, és az imént láttuk, hogy $u \circ g \in \mathscr{E}_G(T,\mathscr{R})$. Ez azt jelenti, hogy $u \circ f \in \mathscr{L}_G^p(T,\mathscr{R},\theta)$, továbbá az $\|u \circ f\|_{\theta,p} \leq \|u\|\|f\|_{\theta,p}$ összefüggést már arra az esetre is igazoltuk, amikor $f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

4.3.2. Állítás. *Legyen* $(T,\mathscr{R},\theta)$ $\mathbb{K}$*-mértéktér,* F *normált tér* $\mathbb{K}$ *felett, és* $p \geq 1$ *valós szám. Ha* $(f_i)_{i\in I}$ *véges rendszer* $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$*-ban és* $(z_i)_{i\in I}$ *tetszőleges rendszer* F*-ben, akkor* $\sum\limits_{i\in I} f_i.z_i \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$*. Ha* $n \in \mathbb{N}$ *és az* F *vektortér* n*-dimenziós, akkor minden* $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ *esetén van olyan* $(f_i)_{i\in n}$ *rendszer* $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$*-ban és olyan* $(z_i)_{i\in n}$ *rendszer* F*-ben, hogy* $f = \sum\limits_{i\in n} f_i.z_i$*.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy ha $(g_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$-ben és $(z_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer F-ben, akkor $\sum\limits_{i\in I} g_i.z_i \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, Valóban, minden $i \in I$ esetén van olyan $(E_{i,j})_{j\in J_i}$ véges rendszer $\mathscr{R}$-ben és olyan $(c_{i,j})_{j\in J_i}$ rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy $g_i = \sum\limits_{j\in J_i} \chi_{E_{i,j}}.c_{i,j}$, ezért teljesül az, hogy $g_i.z_i = \sum\limits_{j\in J_i} \chi_{E_{i,j}}.(c_{i,j}.z_i) \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, így $\sum\limits_{i\in I} g_i.z_i \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$.

Legyen $(f_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban és $(z_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer F-ben. Ekkor az $(f_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{F}^p_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban halad, következésképpen $\sum\limits_{i\in I} f_i.z_i \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$. Ha $(g_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$-ben, akkor a felső integrál monotonitása és pozitív homogenitása, valamint a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$\Big(\int^* \Big\|\sum_{i\in I} f_i.z_i - \sum_{i\in I} g_i.z_i\Big\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} = \Big(\int^* \Big\|\sum_{i\in I}(f_i - g_i).z_i\Big\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} \leq$$
$$\leq \Big(\int^* \Big(\sum_{i\in I} |f_i - g_i|\|z_i\|\Big)^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} \leq \sum_{i\in I} \Big(\int^* |f_i - g_i|^p \|z_i\|^p \,\mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} =$$
$$= \sum_{i\in I} \|f_i - g_i\|_{\theta,p}\|z_i\|.$$

Tehát ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és minden $I \ni i$-hez a $g_i \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$ lépcsősfüggvényt úgy választjuk meg, hogy $\|f_i - g_i\|_{\theta,p} < \dfrac{\varepsilon}{(\|z_i\|+1)(\mathrm{Card}(I)+1)}$ teljesüljön, akkor fennáll a

$$\Big\|\sum_{i\in I} f_i.z_i - \sum_{i\in I} g_i.z_i\Big\|_{\theta,p} \leq \sum_{i\in I} \|f_i - g_i\|_{\theta,p}\|z_i\| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség, amiből $\sum\limits_{i\in I} g_i.z_i \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ miatt kapjuk, hogy $\sum\limits_{i\in I} f_i.z_i \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$.

Tegyük fel, hogy az F vektortér n dimenziós és $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$. Legyen $(z_i)_{i\in n}$ algebrai bázis az F vektortérben, és vegyünk olyan $(u_i)_{i\in n}$ rendszert F'-ben, amelyre minden $i,j \in n$ esetén $u_i(z_j) = \delta_{i,j}$. Ekkor minden $F \ni z$-re $z = \sum\limits_{i\in n} u_i(z).z_i$, amiből következik, hogy $f = \sum\limits_{i\in n}(u_i \circ f).z_i$. Ugyanakkor az előző állítás szerint minden $i \in n$ esetén $u_i \circ f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

4.3.3. Állítás. *Legyen* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér,* F*,* G *és* H *normált terek, és* $u : F\times G \to H$ *folyonos* $\mathbb{R}$*-bilineáris leképezés. Legyenek* $p,q,r \geq 1$ *olyan valós számok, amelyekre*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Ha $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $g \in \mathscr{L}^q_G(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor az $u(f,g) : T \to H;\ t \mapsto u(f(t),g(t))$ függvényre $u(f,g) \in \mathscr{L}^r_H(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\|u(f,g)\|_{\theta,r} \leq \|u\|\|f\|_{\theta,p}\|g\|_{\theta,q}$ teljesül.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy ha $f \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ és $g \in \mathscr{F}_G(T,\mathscr{R})$, akkor $u(f,g) \in \mathscr{E}_H(T,\mathscr{R})$, mert ha $(A_i)_{i\in I}$ és $(\mathrm{B}_j)_{j\in J}$ tetszőleges olyan véges rendszerek $\mathscr{R}$-ben, valamint $(a_i)_{i\in I}$ tetszőleges olyan F-beli (illetve $(b_j)_{j\in J}$ tetszőleges G-beli) rendszer, hogy $f = \sum_{i\in I} \chi_{_{A_i}}.a_i$ és $g = \sum_{j\in J} \chi_{_{\mathrm{B}_i}}.b_i$, akkor az u leképezés $\mathbb{R}$-bilinearitása miatt

$$\begin{aligned} u(f,g) = u\Big(\sum_{i\in I}\chi_{_{A_i}}.a_i, \sum_{j\in J}\chi_{_{\mathrm{B}_i}}.b_i\Big) &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\chi_{_{A_i}}\chi_{_{\mathrm{B}_i}}.u(a_i,b_j) = \\ &= \sum_{(i,j)\in I\times J}\chi_{_{A_i\times \mathrm{B}_j}}.u(a_i,b_j) \in \mathscr{E}_H(T,\mathscr{R}). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $g \in \mathscr{L}^q_G(T,\mathscr{R},\theta)$. Ekkor $f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $g \in \mathscr{F}^q_G(T,\mathscr{R},\theta)$, amiből következik, hogy $u(f,g) \in \mathscr{F}^r_H(T,\mathscr{R},\theta)$. Ha $f' \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ és $g' \in \mathscr{E}_G(T,\mathscr{R})$ tetszőlegesek, akkor az u leképezés $\mathbb{R}$-bilinearitása miatt

$$u(f',g') - u(f,g) = u(f'-f, g'-g) + u(f'-f, g) + u(f, g'-g),$$

amiből következik, hogy

$$\begin{aligned} \|u(f',g') - u(f,g)\|_{\theta,r} &\leq \|u(f'-f,g'-g)\|_{\theta,r} + \|u(f'-f,g)\|_{\theta,r} + \|u(f,g'-g)\|_{\theta,r} \leq \\ &\leq \|u\|\|f'-f\|_{\theta,p}\|g'-g\|_{\theta,q} + \|u\|\|f'-f\|_{\theta,p}\|g\|_{\theta,q} + \|u\|\|f\|_{\theta,p}\|g'-g\|_{\theta,q}. \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tetszőleges, és $\eta \in \mathbb{R}^*_+$ olyan, hogy $\|u\|(\eta^2 + \eta\|g\|_{\theta,q} + \|f\|_{\theta,p}\eta) < \varepsilon$, továbbá az $f' \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ és $g' \in \mathscr{E}_G(T,\mathscr{R})$ lépcsősfüggvényeket úgy választjuk meg, hogy $\|f'-f\|_{\theta,p} < \eta$ és $\|g'-g\|_{\theta,q} < \eta$ teljesüljön, akkor fennáll az $\|u(f',g') - u(f,g)\|_{\theta,r} < \varepsilon$ egyenlőtlenség, így $u(f',g') \in \mathscr{E}_H(T,\mathscr{R})$ miatt $u(f,g) \in \mathscr{L}^r_H(T,\mathscr{R},\theta)$. Ugyanakkor az $\|u(f,g)\|_{\theta,r} \leq \|u\|\|f\|_{\theta,p}\|g\|_{\theta,q}$ egyenlőtlenséget már abban az esetben is igazoltuk, amikor $f \in \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $g \in \mathscr{F}^q_G(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

4.4. Riesz–Fischer-tétel $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-terekre

4.4.1. Tétel. (Riesz–Fischer-tétel $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-terekre) *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F Banach-tér és $p \geq 1$ valós szám. Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-ban, amely Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint, akkor léteznek olyan $f : T \to F$ és $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvények, továbbá létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy teljesülnek a következők.*

a) *$f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint.*

b) *Az $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál f-hez.*

c) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_{\sigma(n)}\| \leq g$, és $\int^* g^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty$.*

Bizonyítás. Az $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) \subseteq \mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ összefüggés miatt az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-ban halad, és a feltevés szerint Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint. Ezért az $\mathscr{F}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ térre vonatkozó Riesz–Fischer-tétel alapján vehetünk olyan

$f : T \to F$ és $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényeket, valamint olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvényt, hogy teljesül b) és c), valamint az, hogy $f \in \mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint. Tehát elegendő azt igazolni, hogy ekkor $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$, ami viszont nyilvánvalóan következik abból, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint. ■

Előfordulhat az, hogy $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ a $\|\cdot\|_{\mu,1}$ félnorma szerint, ugyanakkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a T halmazon *sehol sem konvergál pontonként*, vagyis minden $t \in T$ esetén az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens $\mathbb{R}$-ben (**1.** gyakorlat). De a Riesz–Fischer-tétel szerint ilyen esetben is létezik $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek olyan *részsorozata*, amely a T halmazon μ-majdnem mindenütt konvergál pontonként a 0-hoz.

4.4.2. Következmény. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F Banach-tér, $p \geq 1$ valós szám, és $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ olyan halmaz, hogy minden $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ függvényhez és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $g \in \mathscr{E}$, hogy $\|f-g\|_{\theta,p} < \varepsilon$ (ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathscr{E}$ sűrű az $\mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ térben a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint). Ekkor minden $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}$-ben és létezik olyan $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, hogy teljesülnek a következők.*

a) *Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint.*

b) *Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a T halmazon θ-majdnem mindenütt.*

c) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_n\| \leq g$ és $\displaystyle\int^* g^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ és $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}^+$-ban. A hipotézis szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\{g \in \mathscr{E} \,|\, \|f-g\|_{\theta,p} < \varepsilon_n\} \neq \emptyset$, ezért a kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \{g \in \mathscr{E} \,|\, \|f-g\|_{\theta,p} < \varepsilon_n\} \neq \emptyset.$$

Legyen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{E}$-ben haladó sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f-g_n\|_{\theta,p} < \varepsilon_n$, tehát $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint. Ekkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat Cauchy-sorozat is a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint, így az $\mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ térre vonatkozó Riesz–Fischer-tétel alapján léteznek olyan $f' : T \to F$ és $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvények, továbbá létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy teljesülnek a következők.

a) $f' \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ és a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f'-höz a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint.

b) A $(g_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál f'-höz.

c) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|g_{\sigma(n)}\| \leq g$ és $\displaystyle\int^* g^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty$.

Ugyanakkor a $(g_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál f-hez is, ezért $f = f'$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} := (g_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat eleget tesz a követelményeknek. ■

Ez az állítás alkalmazható abban az esetben, amikor $\mathscr{E} := \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$.

Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér, és $p \geq 1$ valós szám. Az $\mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$

függvényhalmazban értelmezzük azt a $\approx$ relációt, amelyre $f,g \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén $f \approx g$ pontosan akkor teljesül, ha $f = g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ez *ekvivalencia-reláció* az $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ halmaz felett; jelölje $\mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ az $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)/\approx$ faktorhalmazt, és minden $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén legyen $f^\bullet$ az f ekvivalencia-osztálya az $\approx$ reláció szerint, tehát $f^\bullet$ megegyezik azon $T \to F$ függvények halmazával, amelyek az f-fel θ-majdnem mindenütt egyenlők.

Könnyen belátható, hogy létezik egyetlen olyan

$$\mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) \times \mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) \to \mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta); \quad (\zeta,\eta) \mapsto \zeta + \eta$$

művelet a $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ halmaz felett, amelyre minden $f,g \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén $f^\bullet + g^\bullet = (f+g)^\bullet$ teljesül. Továbbá, létezik egyetlen olyan

$$\mathbb{K} \times \mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) \to \mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta); \quad (c,\zeta) \mapsto c.\zeta$$

leképezés, amelyre minden $c \in \mathbb{K}$ és $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén $c.f^\bullet = (c.f)^\bullet$ teljesül. Az $\mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ halmaz az imént értelmezett $+$ művelettel és a $.$ leképezéssel ellátva olyan *vektortér* $\mathbb{K}$ felett, amelyre az

$$\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) \to \mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta); \quad f \mapsto f^\bullet$$

leképezés lineáris szürjekció. Továbbá, létezik egyetlen olyan

$$\mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) \to \mathbb{R}_+; \quad \zeta \mapsto \|\zeta\|$$

leképezés, amelyre minden $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén $\|f^\bullet\| = \|f\|_{\theta,p}$. Ez a $\|\cdot\|$ függvény norma az imént bevezetett $\mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ vektortér felett. Megjegyezzük, hogy ezt a normát is a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ szimbólummal szokták jelölni.

Vigyázzunk arra, hogy ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér, és $p \geq 1$ valós szám, akkor $\mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ elemei *nem T-n értelmezett függvények*, hanem ilyen típusú függvényekből álló halmazok. Ezért $\zeta \in \mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $t \in T$ esetén, az általános esetben, értelmetlen a $\zeta(t)$ szimbólum. Ha $\zeta \in \mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $f \in \zeta$, akkor már minden $t \in T$ esetén értelmes dolog az $f(t) \in F$ vektorról beszélni, de ez a vektor, az általános esetben, függ az f függvény választásától,

4.4.3. Tétel. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F Banach-tér, és $p \geq 1$ valós szám, akkor $\mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ Banach-tér.*

Bizonyítás. A Riesz–Fischer-tétel és az $\mathrm{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ tér definíciója szerint nyilvánvaló. ■

4.5. Integrál az $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$-tér felett

4.5.1. Lemma. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér, $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}$-ben és $(z_i)_{i\in I}$ F-ben haladó rendszer. Ekkor*

$$\Big\| \sum_{i\in I} \theta(E_i).z_i \Big\| \leq \int \Big\| \sum_{i\in I} \chi_{E_i}.z_i \Big\| \,\mathrm{d}|\theta|.$$

Bizonyítás. A Hahn-Banach-tételből következik, hogy minden $F \ni z$-re

$$\|z\| = \sup_{\substack{u\in F' \\ \|u\|\leq 1}} |u(z)|,$$

ezért elég azt igazolni, hogy minden $u \in F'$ esetén, ha $\|u\| \leq 1$, akkor

$$\Big|u\Big(\sum_{i\in I}\theta(E_i).z_i\Big)\Big| \leq \int \Big\|\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i\Big\| \,\mathrm{d}|\theta|.$$

Legyen tehát $u \in F'$ olyan funkcionál, amelyre $\|u\| \leq 1$. Ekkor

$$\Big|u\Big(\sum_{i\in I}\theta(E_i).z_i\Big)\Big| = \Big|\sum_{i\in I}\theta(E_i)u(z_i)\Big| = \Big|\int\Big(\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.u(z_i)\Big)\mathrm{d}\theta\Big| =$$
$$= \Big|\int u\circ\Big(\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i\Big)\mathrm{d}\theta\Big| \leq \int\Big|u\circ\Big(\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i\Big)\Big|\mathrm{d}|\theta| \leq \int \|u\|\Big\|\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i\Big\|\mathrm{d}|\theta|$$

teljesül, amiből következik az állítás. ■

4.5.2. Tétel. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ $\mathbb{K}$-mértéktér és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor egyértelműen létezik olyan*

$$\mathbf{I} : \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) \to F$$

$\mathbb{K}$-lineáris operátor, amelyre teljesülnek a következők.

a) *Minden $E \in \mathscr{R}$ és $z \in F$ esetén*

$$\mathbf{I}(\chi_E.z) = \theta(E).z.$$

b) *Minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén*

$$\|\mathbf{I}(f)\| \leq \int^* \|f\| \,\mathrm{d}|\theta|.$$

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy ha F (nem feltétlenül teljes) normált tér, akkor létezik egyetlen olyan $\mathbf{I}_0 : \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R}) \to F$ $\mathbb{K}$-lineáris operátor, amelyre teljesül az, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ és $z \in F$ esetén $\mathbf{I}_0(\chi_E.z) = \theta(E).z$. Valóban, legyen $f \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ és legyenek $(E_i)_{i\in I}$ és $(E'_i)_{i\in I'}$ olyan véges rendszerek $\mathscr{R}$-ben, valamint $(z_i)_{i\in I}$ és $(z'_i)_{i\in I'}$ olyan rendszerek F-ben, hogy $f = \sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i = \sum_{i\in I'}\chi_{E'_i}.z'_i$. Ekkor fennáll a $\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i + \sum_{i\in I'}\chi_{E'_i}.(-z'_i) = 0$ egyenlőség, tehát a lemma alapján

$$\Big\|\sum_{i\in I}\theta(E_i).z_i - \sum_{i\in I'}\theta(E').z'_i\Big\| = \Big\|\sum_{i\in I}\theta(E_i).z_i + \sum_{i\in I'}\theta(E').(-z'_i)\Big\| \leq$$
$$\leq \int\Big\|\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i + \sum_{i\in I'}\chi_{E'_i}.(-z'_i)\Big\|\mathrm{d}|\theta| = \int\Big\|\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i - \sum_{i\in I'}\chi_{E'_i}.z'_i\Big\|\mathrm{d}|\theta| = 0$$

egyenlőtlenség, vagyis $\sum_{i\in I}\theta(E_i).z_i = \sum_{i\in I'}\theta(E').z'_i$. Ebből látható az adott tulajdonságú $\mathbf{I}_0$ leképezés egyértelmű létezése. Sőt a lemma alapján az is nyilvánvaló, hogy minden $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R}) \ni f$-re $\|\mathbf{I}_0(f)\| \leq \int \|f\|\mathrm{d}|\theta|$, hiszen ha $f \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, akkor létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}$-ben és olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f = \sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i$, így az $\mathbf{I}_0$ operátor tulajdonságai, valamint az előző lemma szerint

$$\|\mathbf{I}_0(f)\| = \Big\|\sum_{i\in I}\theta(E_i).z_i\Big\| \leq \int\Big\|\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i\Big\| \,\mathrm{d}|\theta| = \int \|f\|\mathrm{d}|\theta|.$$

(II) Legyen most $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ rögzített, és vegyünk olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint. Az (I) alapján minden $\mathbb{N} \ni m.n$-re

$$\|\mathbf{I}_0(f_m) - \mathbf{I}_0(f_n)\| = \|\mathbf{I}_0(f_m - f_n)\| \leq \int \|f_m - f_n\|\mathrm{d}|\theta| = \|f_m - f_n\|_{\theta,1},$$

tehát $(\mathbf{I}_0(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az F Banach-térben, vagyis konvergens. Tegyük fel, hogy $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szintén olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint. Legyen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a függvénysorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_{2k} := f_k$ és $g_{2k+1} := f'_k$, akkor nyilvánvaló, hogy ez is konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint, így az $(\mathbf{I}_0(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat konvergens F-ben, továbbá az $(\mathbf{I}_0(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\mathbf{I}_0(f'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok részsorozatai $(\mathbf{I}_0(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$-nek, így $\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}_0(f_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}_0(f'_n)$. Tehát egyértelműen bevezethető az az $\mathbf{I} : \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) \to F$ leképezés, amelyre minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén $\mathbf{I}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}_0(f_n)$, ahol $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint. Világos, hogy ez az $\mathbf{I}$ leképezés $\mathbf{I}_0$-nak kiterjesztése és $\mathbb{K}$-lineáris. Ebből azonnal kapjuk, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ és $z \in F$ esetén $\mathbf{I}(\chi_E.z) = \mathbf{I}_0(\chi_E.z) = \theta(E).z$. Továbbá, ha $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint, akkor $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\theta,1} = \|f\|_{\theta,1}$ és az (I) alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|\mathbf{I}_0(f_n)\| \leq \|f_n\|_{\theta,1}$, ezért

$$\|\mathbf{I}(f)\| = \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{I}_0(f_n)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\theta,1} = \|f\|_{\theta,1} = \int^* \|f\| \; \mathrm{d}|\theta|.$$

Ezzel megmutattuk az előírt tulajdonságú $\mathbf{I} : \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) \to F$ leképezés *létezését.*

(III) Az előírt tulajdonságú $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) \to F$ leképezés *egyértelműségének* bizonyításához legyenek $\mathbf{I}, \mathbf{I}' : \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) \to F$ olyan $\mathbb{K}$-lineáris operátorok, amelyekre minden $E \in \mathscr{R}$ és $z \in F$ esetén $\mathbf{I}(\chi_E.z) = \theta(E).z = \mathbf{I}'(\chi_E.z)$, valamint minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén $\|\mathbf{I}(f)\| \leq \int^* \|f\| \; \mathrm{d}|\theta|$ és $\|\mathbf{I}'(f)\| \leq \int^* \|f\| \; \mathrm{d}|\theta|$. Ekkor $\mathbf{I} = \mathbf{I}'$ az $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ halmazon, mert ha $f \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, továbbá $(E_i)_{i\in I}$ olyan véges rendszer $\mathscr{R}$-ben és olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f = \sum_{i\in I} \chi_{E_i}.z_i$, akkor $\mathbf{I}(f) = \sum_{i\in I} \theta(E_i).z_i = \mathbf{I}'(f)$. Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|\mathbf{I}(f_n) - \mathbf{I}(f)\| = \|\mathbf{I}(f_n - f)\| \leq \int^* \|f_n - f\| \; \mathrm{d}|\theta| = \|f_n - f\|_{\theta,1},$$

így $\mathbf{I}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}(f_n)$. Ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|\mathbf{I}'(f_n) - \mathbf{I}'(f)\| = \|\mathbf{I}'(f_n - f)\| \leq \int^* \|f_n - f\| \; \mathrm{d}|\theta| = \|f_n - f\|_{\theta,1},$$

így $\mathbf{I}'(f) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}'(f_n)$ is teljesül, tehát $\mathbf{I}(f) = \mathbf{I}(f')$, hiszen az előzőek szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mathbf{I}(f_n) = \mathbf{I}'(f_n)$. ■

4.5.3. Definíció. *Ha* $(T,\mathscr{R},\theta)$ $\mathbb{K}$*-mértéktér és* F *Banach-tér* $\mathbb{K}$ *felett, akkor az előző tételben értelmezett*

$$\mathbf{I} : \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) \to F$$

$\mathbb{K}$-*lineáris operátort az* $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ *tér feletti* θ *szerinti* **integrálnak** *nevezzük. Minden* $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ *esetén az* $\mathbf{I}(f) \in F$ *vektort az* f *függvény* θ *szerinti integráljának nevezzük, és az*

$$\int f\ \mathrm{d}\theta, \quad \int\limits_T f\ \mathrm{d}\theta, \quad \int\limits_T f(t)\ \mathrm{d}\theta(t)$$

szimbólumok valamelyikével jelöljük.

Tehát ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és F Banach-tér, akkor $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén az f függvény θ szerinti integrálját a következőképpen lehet kiszámítani.

– Ha $f \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, akkor ha létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, és létezik olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f = \sum\limits_{i\in I} \chi_{_{E_i}}.z_i$: ekkor

$$\int f\ \mathrm{d}\theta = \sum_{i\in I} \theta(E_i).z_i.$$

Ez a vektor független az $(E_i)_{i\in I}$ és $(z_i)_{i\in I}$ rendszerek választásától.

– Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ tetszőleges, akkor létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint; ekkor az $\left(\int f_n\ \mathrm{d}\theta\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat F-ben Cauchy-sorozat, így az F teljessége folytán konvergens, és

$$\int f\ \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int f_n\ \mathrm{d}\theta.$$

Ez a vektor független az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lépcsősfüggvény-sorozat választásától.

Különösen gyakran alkalmazzuk az integrálok kiszámítására azt, hogy ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és F Banach-tér, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$-ban, amely az $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ függvényhez konvergál a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint, akkor

$$\int f\ \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int f_n\ \mathrm{d}\theta$$

hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \int f\ \mathrm{d}\theta - \int f_n\ \mathrm{d}\theta \right\| = \left\| \int (f - f_n)\ \mathrm{d}\theta \right\| \leq \int^* \|f - f_n\|\ \mathrm{d}\theta = \|f - f_n\|_{\theta,1}.$$

Erre a tulajdonságra a jövőben úgy hivatkozunk, mint az $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ feletti θ szerinti integrál $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerinti *folytonossága*.

Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, akkor $(T,\mathscr{R},|\theta|)$ pozitív mértéktér és $|(|\theta|)| = |\theta|$, ezért a definíció szerint minden F normált térre

$$\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) = \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},|\theta|),$$

és ha F teljes, akkor az $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ téren *két* integrált értelmezhetünk, ti. az

$$\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) \to F; \quad f \mapsto \int f\ \mathrm{d}\theta$$

valamint az

$$\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) \to F; \quad f \mapsto \int f\ \mathrm{d}|\theta|$$

operátorokat. Ezek az integrálok $F \neq \{0\}$ esetén pontosan akkor egyenlők, ha θ pozitív mérték (**2**. gyakorlat).

4.6. Az integrál alaptulajdonságai

4.6.1. Állítás. *Legyen* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér és* F *Banach-tér. Minden* $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ *esetén* $\|f\| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ *és*

$$\Big\|\int f \, \mathrm{d}\theta\Big\| \leq \int \|f\| \, \mathrm{d}|\theta|.$$

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy ha $f \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, akkor $\|f\| \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$ és

$$\Big\|\int f \, \mathrm{d}\theta\Big\| \leq \int \|f\| \, \mathrm{d}|\theta|,$$

hiszen létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ *diszjunkt* véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, és létezik olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f = \sum_{i\in I} \chi_{E_i}.z_i$; ekkor

$$\begin{aligned}\Big\|\int f \, \mathrm{d}\theta\Big\| &= \Big\|\sum_{i\in I} \theta(E_i).z_i\Big\| \leq \sum_{i\in I} |\theta(E_i)|\|z_i\| \leq \sum_{i\in I} |\theta|(E_i)\|z_i\| = \\ &= \int \Big(\sum_{i\in I} \chi_{E_i}\|z_i\|\Big)\mathrm{d}|\theta| = \int \Big\|\sum_{i\in I} \chi_{E_i}.z_i\Big\|\mathrm{d}|\theta| = \int \|f\| \, \mathrm{d}|\theta|\end{aligned}$$

teljesül.

Legyen $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\|f_n\| - \|f\|| \leq \|f_n - f\|$ és a felső integrál monotonitása miatt

$$\int^* |\|f_n\| - \|f\||\mathrm{d}|\theta| \leq \int^* \|f_n - f\|\mathrm{d}|\theta| = \|f_n - f\|_{\theta,1},$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |\|f_n\| - \|f\||\mathrm{d}|\theta| = 0.$$

Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f_n\| \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$, ezért $\|f\| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},|\theta|)$ és a $|\theta|$ szerinti integrál definíciója alapján fennáll az

$$\int \|f\|\mathrm{d}|\theta| = \lim_{n\to\infty} \int \|f_n\|\mathrm{d}|\theta|$$

egyenlőség. A bizonyítás első bekezdése alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Big\|\int f_n \, \mathrm{d}\theta\Big\| \leq \int \|f_n\|\mathrm{d}|\theta|,$$

és a θ szerinti integrál definíciója szerint

$$\int f \, \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\theta.$$

Ebből következik, hogy

$$\Big\|\int f \, \mathrm{d}\theta\Big\| = \lim_{n\to\infty} \Big\|\int f_n \, \mathrm{d}\theta\Big\| \leq \lim_{n\to\infty} \int \|f_n\|\mathrm{d}|\theta| = \int \|f\|\mathrm{d}|\theta|$$

teljesül. ■

4.6.2. Állítás. *Ha* $(T,\mathscr{R},\theta)$ $\mathbb{K}$*-mértéktér,* F *és* G *Banach-terek* $\mathbb{K}$ *felett, valamint* $u{:}F\to G$ *folytonos* $\mathbb{K}$*-lineáris operátor, akkor minden* $f\in\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ *esetén* $u\circ f\in\mathscr{L}^1_G(T,\mathscr{R},\theta)$ *és*

$$\int(u\circ f)\ \mathrm{d}\theta=u\Big(\int f\ \mathrm{d}\theta\Big).$$

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy ha $f\in\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, akkor $u\circ f\in\mathscr{E}_G(T,\mathscr{R})$ és

$$\int(u\circ f)\mathrm{d}\theta=u\Big(\int f\ \mathrm{d}\theta\Big),$$

hiszen létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, és létezik olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f=\sum_{i\in I}\chi_{_{E_i}}.z_i$; ekkor $u\circ f=\sum_{i\in I}\chi_{_{E_i}}.u(z_i)$, ezért

$$\int(u\circ f)\mathrm{d}\theta=\sum_{i\in I}\theta(E_i).u(z_i)=u\Big(\sum_{i\in I}\theta(E_i).z_i\Big)=u\Big(\int f\ \mathrm{d}\theta\Big)$$

teljesül.

Legyen $f\in\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\|u\circ f_n-u\circ f\|\leq\|u\|\|f_n-f\|$ és a felső integrál monotonitása és pozitív homogenitása miatt

$$\int^*\|u\circ f_n-u\circ f\|\mathrm{d}|\theta|\leq\|u\|\int^*\|f_n-f\|\mathrm{d}|\theta|=\|u\|\|f_n-f\|_{\theta,1},$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int^*\|u\circ f_n-u\circ f\|\mathrm{d}|\theta|=0.$$

Ugyanakkor minden $\mathbb{N}\ni n$-re $u\circ f_n\in\mathscr{E}_G(T,\mathscr{R})$, ezért $u\circ f\in\mathscr{L}^1_G(T,\mathscr{R},\theta)$ és a θ szerinti integrál definíciója alapján fennáll az

$$\int(u\circ f)\mathrm{d}\theta=\lim_{n\to\infty}\int(u\circ f_n)\mathrm{d}\theta$$

egyenlőség. A bizonyítás első bekezdése alapján minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\int(u\circ f_n)\mathrm{d}\theta=u\Big(\int f_n\ \mathrm{d}\theta\Big),$$

és a θ szerinti integrál definíciója szerint

$$\int f\ \mathrm{d}\theta=\lim_{n\to\infty}\int f_n\ \mathrm{d}\theta.$$

Ebből az u folytonossága miatt következik, hogy

$$u\Big(\int f\ \mathrm{d}\theta\Big)=\lim_{n\to\infty}u\Big(\int f_n\ \mathrm{d}\theta\Big)=\lim_{n\to\infty}\int(u\circ f_n)\mathrm{d}\theta=\int(u\circ f)\mathrm{d}\theta$$

teljesül. ■

4.6.3. Következmény. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ $\mathbb{K}$-mértéktér, E normált tér és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, valamint $v : T \to \mathscr{L}(E;F)$ θ-integrálható függvény. Ekkor minden $e \in E$ esetén a $T \to F;\ t \mapsto v(t)(e)$ leképezés θ-integrálható, és az $\displaystyle\int v \,\mathrm{d}\theta \in \mathscr{L}(E;F)$ operátorra*

$$\Big(\int v \,\mathrm{d}\theta\Big)(e) = \int v(t)(e)\,\mathrm{d}\theta(t)$$

teljesül.

Bizonyítás. Minden $e \in E$ esetén az $u_e : \mathscr{L}(E;F) \to F;\ w \mapsto w(e)$ leképezés nyilvánvalóan lineáris operátor, és folytonos is, mert $\|e\| \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, amelyre minden $w \in \mathscr{L}(E;F)$ esetén az operátornorma definíciója szerint $\|u_e(w)\| = \|w(e)\| \leq \|e\|\|w\|$. Ezért a 4.6.2. állítást alkalmazva az $f := v$ és $u := u_e$ választással kapjuk, hogy minden $e \in E$ vektorra az $u_e \circ v : T \to F;\ t \mapsto v(t)(e)$ függvény θ-integrálható, és

$$\Big(\int v \,\mathrm{d}\theta\Big)(e) = u_e\Big(\int v \,\mathrm{d}\theta\Big) = \int (u_e \circ v)\,\mathrm{d}\theta = \int v(t)(e)\,\mathrm{d}\theta(t). \blacksquare$$

4.6.4. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és F Banach-tér. Ha $(f_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}^1(T,\mathscr{R},\theta)$-ban és $(z_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer F-ben, akkor $\displaystyle\sum_{i\in I} f_i.z_i \in \mathscr{L}_F^1(T,\mathscr{R},\theta)$ és*

$$\int\Big(\sum_{i\in I} f_i.z_i\Big)\mathrm{d}\theta = \sum_{i\in I}\Big(\int f_i \,\mathrm{d}\theta\Big).z_i.$$

Bizonyítás. Először legyen $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$ és $z \in F$. Vegyünk olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszert $\mathscr{R}$-ben, és olyan $(c_i)_{i\in I}$ rendszert $\mathbb{K}$-ban, hogy $f = \displaystyle\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.c_i$. Ekkor $f.z = \displaystyle\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.(c_i.z) \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, ezért

$$\int (f.z)\mathrm{d}\theta = \sum_{i\in I}\theta(E_i).(c_i.z) = \Big(\sum_{i\in I}\theta(E_i).c_i\Big).z = \Big(\int f\,\mathrm{d}\theta\Big).z.$$

Ebből a θ szerinti integrál linearitása alapján következik, hogy ha $(f_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben és $(z_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer F-ben, akkor

$$\int\Big(\sum_{i\in I} f_i.z_i\Big)\mathrm{d}\theta = \sum_{i\in I}\int (f_i.z_i)\mathrm{d}\theta = \sum_{i\in I}\Big(\int f_i\,\mathrm{d}\theta\Big).z_i.$$

Legyen $(f_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}^1(T,\mathscr{R},\theta)$-ban és $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben. Minden $I \ni i$-hez válasszunk olyan $(f_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$-ben, amely a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint konvergál f_i-hez $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}^1(T,\mathscr{R},\theta)$-ban. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a felső integrál tulajdonságai szerint

$$\int^* \Big\|\sum_{i\in I} f_{i,n}.z_i - \sum_{i\in I} f_i.z_i\Big\|\mathrm{d}|\theta| = \int^* \Big\|\sum_{i\in I}(f_{i,n} - f_i).z_i\Big\|\mathrm{d}|\theta| \leq$$
$$\leq \int^* \Big(\sum_{i\in I}|f_{i,n} - f_i|.\|z_i\|\Big)\mathrm{d}|\theta| \leq \sum_{i\in I}\Big(\int^* |f_{i,n} - f_i|\mathrm{d}|\theta|\Big).\|z_i\|,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int^* \Big\|\sum_{i\in I} f_{i,n}.z_i - \sum_{i\in I} f_i.z_i\Big\| \mathrm{d}|\theta| = 0.$$

Ezért $\sum\limits_{i\in I} f_i.z_i \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$, és a bizonyítás első része alapján

$$\int\Big(\sum_{i\in I} f_i.z_i\Big)\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty}\int\Big(\sum_{i\in I} f_{i,n}.z_i\Big)\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I}\int f_{i,n}.z_i \,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I}\Big(\int f_{i,n}\,\mathrm{d}\theta\Big).z_i = \sum_{i\in I}\lim_{n\to\infty}\Big(\int f_{i,n}\,\mathrm{d}\theta\Big).z_i = \sum_{i\in I}\Big(\int f_i\,\mathrm{d}\theta\Big).z_i,$$

amit bizonyítani kellett. ■

4.6.5. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ $\mathbb{K}$-mértéktér, F, G és H normált terek $\mathbb{K}$ felett, és $u : F\times G \to H$ folyonos $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés. Legyenek $p,q>1$ olyan valós számok, amelyekre*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Ha $f\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $g\in\mathscr{L}^q_G(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor az $u(f,g) : T\to H;\ t\mapsto u(f(t),g(t))$ függvényre $u(f,g)\in\mathscr{L}^1_H(T,\mathscr{R},\theta)$ teljesül, és ha H Banach-tér, akkor

$$\Big\|\int u(f,g)\,\mathrm{d}\theta\Big\| \le \|u\|\|f\|_{\theta,p}\|g\|_{\theta,q}.$$

Bizonyítás. Korábban láttuk, hogy ha $f\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és $g\in\mathscr{L}^q_G(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor $u(f,g)\in\mathscr{L}^1_H(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\|u(f,g)\|_{\theta,1}\le\|u\|\|f\|_{\theta,p}\|g\|_{\theta,q}$. Ha H Banach-tér, akkor képezhető az $\int u(f,g)\,\mathrm{d}\theta\in H$ integrál, és

$$\Big\|\int u(f,g)\,\mathrm{d}\theta\Big\| \le \int^*\|u(f,g)\|\mathrm{d}|\theta| = \|u(f,g)\|_{\theta,1}\le\|u\|\|f\|_{\theta,p}\|g\|_{\theta,q}.\ ■$$

Végül megjegyezzük, hogy az $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ tér feletti θ szerinti integrál értelmezhető abban az esetben is, amikor F nem teljes normált tér, de ilyenkor a θ szerint integrálható $T\to F$ függvények integrálja nem F-nek, hanem az F topologikus biduálisának lesz az eleme (**7**. gyakorlat).

4.7. Gyakorlatok

1. Legyen $T := [0,1[$ és $\mathscr{S} := \{\emptyset\}\cup\{[a,b[\,|(a,b\in[0,1[)\wedge(a<b)\}$; ekkor $\mathscr{S}$ félgyűrű a T halmaz felett. Jelölje $\mathscr{R}$ az $\mathscr{S}$ által generált halmazgyűrűt, és legyen $\mu:\mathscr{R}\to\mathbb{R}$ az az additív halmazfüggvény, amelyre minden $a,b\in[0,1]$, $a\le b$ esetén $\mu([a,b[) := b-a$; ekkor μ pozitív mérték $\mathscr{R}$ felett, tehát $(T,\mathscr{R},\mu)$ pozitív mértéktér. Minden $n\in\mathbb{N}$ számhoz egyértelműen léteznek olyan $s(n)\in\mathbb{N}$ és $r(n)\in[0,2^{s(n)}[$ természetes számok, amelyekre $n = 2^{s(n)}+r(n)$. Legyen minden $n\in\mathbb{N}$ esetén f_n az

$$\Big[\frac{r(n)}{2^{s(n)}},\frac{r(n)+1}{2^{s(n)}}\Big[$$

intervallum karakterisztikus függvénye. Ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amely a 0 függvényhez konvergál a $\|\cdot\|_{\mu,1}$ félnorma szerint, de ez a függvénysorozat a T halmazon *sehol sem konvergens.*

(*Útmutatás.* Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2^{s(n)}},$$

és $n=2^{s(n)}+r(n)<2\cdot 2^{s(n)}$, vagyis $1/2^{s(n)}<2/n$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_{\mu,1}=0$. Ugyanakkor minden $t\in T$ esetén a $\{n\in\mathbb{N}|f_n(t)=0\}$ és $\{n\in\mathbb{N}|f_n(t)=1\}$ halmazok mindketten *végtelenek*, ezért az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat nem lehet konvergens.)

2. Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és F nem nulla dimenziós Banach-tér, akkor az

$$\mathscr{L}_F^1(T,\mathscr{R},\theta)\to F;\quad f\mapsto \int f\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathscr{L}_F^1(T,\mathscr{R},\theta)\to F;\quad f\mapsto \int f\,\mathrm{d}|\theta|$$

integrálok pontosan akkor egyenlők, ha θ pozitív mérték.

(*Útmutatás.* Ha ezek az integrálok egyenlők és $z\in F$, akkor minden $E\in\mathscr{R}$ esetén az integrál definíciója szerint

$$\theta(E).z=\int(\chi_{_E}.z)\,\mathrm{d}\theta=\int(\chi_{_E}.z)\,\mathrm{d}|\theta|=|\theta|(E).z,$$

tehát ha $z\neq 0$, akkor $\theta(E)=|\theta|(E)\in\mathbb{R}_+$.)

3. (*Dirac-mérték szerinti integrál.*) Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, $\mathfrak{a}\in T$, és $\delta_{\mathfrak{a}}$ az $\mathfrak{a}$ pontba koncentrált, $\mathscr{R}$-en értelmezett Dirac-mérték. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(E'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok $\mathscr{R}$-ben, amelyekre

$$T=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n,\quad \{a\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E'_n.$$

Ekkor minden F Banach-térre és $p\geq 1$ valós számra

$$\mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\delta_{\mathfrak{a}})=\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\delta_{\mathfrak{a}})=\mathscr{F}(T;F),$$

és minden $f:T\to F$ függvényre

$$\int f\,\mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}}=f(\mathfrak{a}).$$

(*Útmutatás.* A hipotézisek és a IX. fejezet, 1. pont, **9**. gyakorlat alapján minden $f\in\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén

$$\int^* f\,\mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}}=f(\mathfrak{a}).$$

Ebből azonnal következik, hogy minden F normált térre és $p\geq 1$ valós számra $\mathscr{F}_F^p(T,\mathscr{R},\delta_{\mathfrak{a}})=\mathscr{F}(T;F)$, és minden $f:T\to F$ függvényre

$$\|f\|_{\delta_{\mathfrak{a}},p}:=\left(\int^*\|f\|^p\,\mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}}\right)^{1/p}=\|f(\mathfrak{a})\|.$$

Legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő halmazsorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Ha $f : T \to F$ tetszőleges függvény, akkor a $(\chi_{E_n}.f(\mathfrak{a}))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben halad, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|f - \chi_{E_n}.f(\mathfrak{a})\|_{\delta_{\mathfrak{a}},p} = \|f(\mathfrak{a}) - \chi_{E_n}(\mathfrak{a}).f(\mathfrak{a})\|,$$

tehát ha $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\mathfrak{a} \in E_N$, akkor minden $n > N$ természetes számra $\|f - \chi_{E_n}.f(\mathfrak{a})\|_{\delta_{\mathfrak{a}},p} = 0$, így $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\delta_{\mathfrak{a}})$, és fennáll az

$$\int f \; \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} = \lim_{n\to\infty} \int (\chi_{E_n}.f(\mathfrak{a})) \; \mathrm{d}\delta_{\mathfrak{a}} = \lim_{n\to\infty} \Big(\chi_{E_n}(\mathfrak{a}).f(\mathfrak{a})\Big) = f(\mathfrak{a})$$

egyenlőség.)

4. (*Diszkrét mérték szerinti integrál.*) Legyen $\mathscr{R}_{\mathbb{N}}$ az $\mathbb{N}$ véges részhalmazainak halmazgyűrűje és $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tetszőleges függvény, vagyis α egy $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat. Tekintsük a

$$\theta_\alpha : \mathscr{R}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}; \quad E \mapsto \sum_{k\in E} \alpha(k)$$

diszkrét mértéket. Ekkor minden F Banach-térre és $p \geq 1$ valós számra

$$\mathscr{L}^p_F(\mathbb{N},\mathscr{R}_{\mathbb{N}},\theta_\alpha) = \mathscr{F}^p_F(\mathbb{N},\mathscr{R}_{\mathbb{N}},\theta_\alpha) = \{\mathbf{s} \in \mathscr{F}(\mathbb{N};F) | \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha(k)| \|\mathbf{s}(k)\|^p < +\infty\},$$

és minden $\mathbf{s} \in \mathscr{L}^p_F(\mathbb{N},\mathscr{R}_{\mathbb{N}},\theta_\alpha)$ sorozatra

$$\|\mathbf{s}\|_{\theta_\alpha,p} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha(k)| \|\mathbf{s}(k)\|^p\Big)^{1/p},$$

továbbá minden $\mathbf{s} \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{N},\mathscr{R}_{\mathbb{N}},\theta_\alpha)$ sorozatra a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha(k).\mathbf{s}(k)$ sor abszolút konvergens F-ben és

$$\int \mathbf{s} \; \mathrm{d}\theta_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k).\mathbf{s}(k).$$

Speciálisan, ha $\mu_{\mathbb{N}}$ a számláló mérték $\mathbb{N}$ felett, akkor minden F Banach-térre és $p \geq 1$ valós számra

$$\mathscr{L}^p_F(\mathbb{N},\mathscr{R}_{\mathbb{N}},\mu_{\mathbb{N}}) = \{\mathbf{s} \in \mathscr{F}(\mathbb{N};F) | \text{"a } \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{s}(k) \text{ sor abszolút konvergens"}\},$$

és minden $\mathbf{s} \in \mathscr{L}^p_F(\mathbb{N},\mathscr{R}_{\mathbb{N}},\mu_{\mathbb{N}})$ esetén

$$\|\mathbf{s}\|_{\mu_{\mathbb{N}},p} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{s}(k)\|^p\Big)^{1/p},$$

valamint minden $\mathbf{s} \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{N},\mathscr{R}_{\mathbb{N}},\mu_{\mathbb{N}})$ esetén

$$\int \mathbf{s} \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k).$$

(Tehát egy abszolút konvergens számsor összegzése speciális mérték szerinti integrálást jelent.)

(*Útmutatás.* A VIII. fejezet, 6. pont, **3**. gyakorlat alapján $|\theta_\alpha| = |\theta|_{|\alpha|}$, és a IX. fejezet, 1. pont, **11**. gyakorlat szerint minden $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén

$$\int^* f\ d|\theta_\alpha| = \int^* f\ \mathrm{d}|\theta|_{|\alpha|} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)|\alpha(k)|.$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy

$$\mathscr{F}_F^p(\mathbb{N}, \mathscr{R}_\mathbb{N}, \theta_\alpha) = \{\mathbf{s} \in \mathscr{F}(\mathbb{N}; F) | \text{"a } \sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha(k)| \|\mathbf{s}(k)\|^p \text{ sor konvergens"}\},$$

és minden $\mathbf{s} \in \mathscr{F}_F^p(\mathbb{N}, \mathscr{R}_\mathbb{N}, \theta_\alpha)$ esetén $\|\mathbf{s}\|_{\theta_\alpha,p} = \Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\alpha(k)| \|\mathbf{s}(k)\|^p\Big)^{1/p}$.

Legyen $\mathbf{s} \in \mathscr{F}_F^p(\mathbb{N}, \mathscr{R}_\mathbb{N}, \theta_\alpha)$ rögzített, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}_n$ az az F-ben haladó sorozat, amelyre $k \in \mathbb{N}$, $k < n$ esetén $\mathbf{s}_n(k) = \mathbf{s}(k)$, és $k \geq n$ esetén $\mathbf{s}_n(k) = 0$. Ekkor $(\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{E}_F(\mathbb{N}, \mathscr{R}_\mathbb{N})$-ben haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_n\|_{\theta_\alpha,p} = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha(k)| \|\mathbf{s}(k)\|^p\Big)^{1/p},$$

ugyanakkor

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha(k)| \|\mathbf{s}(k)\|^p\Big)^{1/p} = 0,$$

így $\mathbf{s} \in \mathscr{L}_F^p(\mathbb{N}, \mathscr{R}_\mathbb{N}, \theta_\alpha)$, és ha $p = 1$, akkor

$$\int \mathbf{s}\ \mathrm{d}\theta_\alpha = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{s}_n\ \mathrm{d}\theta_\alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in n} \alpha(k).\mathbf{s}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k).\mathbf{s}(k)$$

teljesül.)

5. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és legyenek $\theta, \theta' : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mértékek. Ha létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy $|\theta| \leq C|\theta'|$, akkor minden F Banach-térre és $p \geq 1$ valós számra

$$\mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta') \subseteq \mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta),$$

és $f \in \mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta')$ esetén $\|f\|_{\theta,p} \leq \mathrm{C}^{1/p} \|f\|_{\theta',p}$.

(*Útmutatás.* Legyen $f \in \mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta')$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben, amely konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta',p}$ félnorma szerint. A IX. fejezet, 1. pont, **10**. gyakorlat a) és b) pontja szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\int^* \|f - f_n\|^p\ \mathrm{d}|\theta| \leq C \int^* \|f - f_n\|^p\ d|\theta'|$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \int^* \|f - f_n\|^p\ \mathrm{d}|\theta| = 0$, így $f \in \mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta')$ teljesül.)

6. Az a módszer, ahogy egy $\mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ függvényterekből előállítjuk az $\mathrm{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ tereket, a következőképpen általánosítható.

Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett és $\|\cdot\|$ félnorma E felett. Értelmezzük az $N := \{x \in E | \|x\| = 0\}$ halmazt, amit a $Ker\|\cdot\|$ szimbólummal is jelölünk, és a $\|\cdot\|$ félnorma *magjának* nevezünk. Ekkor N lineáris altere E-nek; minden $x \in E$ esetén jelölje $x^\bullet$ az

x elem ekvivalencia-osztályát az N által meghatározott ekvivalencia-reláció szerint (IV. fejezet, 1. pont, **3**. gyakorlat). Ekkor létezik egyetlen olyan $\|\cdot\|^\bullet : E/N \to \mathbb{R}_+$ leképezés, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in E$ esetén $\|x^\bullet\|^\bullet = \|x\|$. Ez a $\|\cdot\|^\bullet$ függvény norma az E/N lineáris faktortér felett. Ha az $(E, \|\cdot\|)$ normált tér teljes, akkor az $(E/N, \|\cdot\|^\bullet)$ normált tér is teljes.

7. Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és F normált tér (tehát F nem feltétlenül Banach-tér). Jelölje j_F az $F \to F''$ kanonikus leképezést, amelyről tudjuk, hogy lineáris izometria (**LIN** 2.4.7.).

a) Legyen $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$. Minden $u \in F'$ esetén $u \circ f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ és az

$$F' \to \mathbb{K}; \quad u \mapsto \int (u \circ f)\ \mathrm{d}\theta$$

leképezés olyan lineáris funkcionál F' felett, amely folytonos az F' felett funkcionálnorma szerint, vagyis eleme F''-nek; jelölje $\mathbf{I}(f)$ ezt a funkcionált, tehát $\mathbf{I}(f) \in F''$ olyan, hogy minden $u \in F'$ esetén

$$(\mathbf{I}(f))(u) = \int (u \circ f)\ \mathrm{d}\theta.$$

b) Az a) állítás alapján értelmezhetjük az

$$\mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta) \to F''; \quad f \mapsto \mathbf{I}(f)$$

leképezést, amely olyan lineáris operátor, hogy minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ esetén

$$\|\mathbf{I}(f)\| \leq \|f\|_{\theta,1}.$$

c) Ha $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}$-ben és $(z_i)_{i\in I}$ F-ben haladó rendszer, akkor

$$\mathbf{I}\Big(\sum_{i\in I} \chi_{_{E_i}}.z_i\Big) = j_F\Big(\sum_{i\in I} \theta(E_i).z_i\Big).$$

d) Ha F teljes, akkor minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ esetén

$$\mathbf{I}(f) = j_F\Big(\int f\ \mathrm{d}\theta\Big),$$

tehát ha j_F által azonosítjuk F-t az F'' megfelelő normált alterével (ti. $\mathrm{Im}(j_F)$-fel), akkor $\mathbf{I}(f)$ azonosul az

$$\int f\ \mathrm{d}\theta$$

integrállal.

e) Minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ esetén $j_F \circ f \in \mathscr{L}^1_{F''}(T, \mathscr{R}, \theta)$, és

$$\mathbf{I}(f) = \int (j_F \circ f)\ \mathrm{d}\theta$$

teljesül.)

5. fejezet

$\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$-terek

5.1. Levi-tétel

5.1.1. Állítás. *Ha $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitív mértéktér, akkor minden $f \in \mathscr{L}^1_+(T, \mathscr{R}, \mu)$ esetén*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int^* f \, \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{L}^1_+(T, \mathscr{R}, \mu)$, akkor a μ szerinti integrál definíciója, valamint $f = |f|$ és $\mu = |\mu|$ alapján

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \Big| \int f \, \mathrm{d}\mu \Big| \leq \int^* |f| d|\mu| = \int^* f \, \mathrm{d}\mu.$$

Legyen $f \in \mathscr{L}^1_+(T, \mathscr{R}, \mu)$, és a Riesz–Fischer-tétel alkalmazásával vegyünk olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R})$-ben, amely pontonként μ-majdnem mindenütt konvergál f-hez a T halmazon, és a $\|\cdot\|_{\mu,1}$ félnorma szerint is konvergál f-hez. Ekkor $f = f^+$ miatt minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|f_n^+ - f| = |f_n^+ - f^+| \leq |f_n - f|$, amiből következik, hogy az $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben haladó $(f_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat szintén pontonként μ-majdnem mindenütt konvergál f-hez a T halmazon, és a $\|\cdot\|_{\mu,1}$ félnorma szerint is konvergál f-hez. Ekkor $f = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n^+$ teljesül a T halmazon μ-majdnem mindenütt, így a Fatou-lemma alapján

$$\int^* f \, \mathrm{d}\mu = \int^* \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n^+\Big) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int^* f_n^+ \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n^+ \mathrm{d}\mu =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int f_n^+ \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$$

is teljesül. ■

Az alábbiakban többször felhasználjuk azt az elemi tényt, hogy ha $p \geq 1$ valós szám és $x, y \in \mathbb{R}_+$, akkor $x^p + y^p \leq (x+y)^p$. Valóban, ha $x + y > 0$ (és csak ez az eset érdekes), akkor $\dfrac{x}{x+y}, \dfrac{y}{x+y} \in [0,1]$, így $p \geq 1$ miatt $\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^p \leq \dfrac{x}{x+y}$ és $\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^p \leq \dfrac{y}{x+y}$, ezért elég összeadni ezeket az egyenlőtlenségeket, és a kapott összefüggést átrendezni. Ebből következik, hogy ha $p \geq 1$ valós szám, $a, b \in \mathbb{R}$ és $0 \leq a \leq b$, akkor $(b-a)^p \leq b^p - a^p$, hiszen ehhez elég az $x^p + y^p \leq (x+y)^p$ egyenlőtlenségbe az $x := a$ és $y := b - a$ értékeket helyettesíteni.

5.1.2. Lemma. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és $p \geq 1$ valós szám. Ha $f, g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ olyan függvények, hogy $0 \leq f \leq g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, akkor*

$$\|g - f\|^p_{\theta,p} \leq \|g\|^p_{\theta,p} - \|f\|^p_{\theta,p}.$$

Bizonyítás. (I) Először feltesszük, hogy $f, g \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$ és $0 \le f \le g$ a T halmazon mindenütt. Ekkor $(g-f)^p, f^p, g^p \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$, és a $|\theta|$ szerinti felső integrál egyenlő az elemi integrállal az $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$ függvényhalmazon, továbbá az elemi integrál additív, így a $(g-f)^p + f^p \le ((g-f)+f)^p = g^p$ függvény-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|g-f\|^p_{\theta,p} + \|f\|^p_{\theta,p} = \int^* (g-f)^p \, \mathrm{d}|\theta| + \int^* f^p \, \mathrm{d}|\theta| =$$
$$= \int (g-f)^p \, \mathrm{d}|\theta| + \int f^p \, \mathrm{d}|\theta| = \int \Big((g-f)^p + f^p\Big) \, \mathrm{d}|\theta| =$$
$$= \int^* \Big((g-f)^p + f^p\Big) \, \mathrm{d}|\theta| \le \int^* g^p \, \mathrm{d}|\theta| = \|g\|^p_{\theta,p},$$

tehát $\|g-f\|^p_{\theta,p} \le \|g\|^p_{\theta,p} - \|f\|^p_{\theta,p}$ teljesül.

(II) Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ és $0 \le f \le g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Legyenek $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozatok $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$-ben, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tart f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint, és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tart g-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint; ilyenek az $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$-terek definíciója alapján léteznek. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\tilde{f}_n := f_n^+ \wedge g_n^+, \quad \tilde{g}_n := f_n^+ \vee g_n^+.$$

Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tilde{f}_n, \tilde{g}_n \in \mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$ és $0 \le \tilde{f}_n \le \tilde{g}_n$ a T halmazon mindenütt, ezért az (I) alapján

$$\|\tilde{g}_n - \tilde{f}_n\|^p_{\theta,p} \le \|\tilde{g}_n\|^p_{\theta,p} - \|\tilde{f}_n\|^p_{\theta,p}$$

teljesül. Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re a T halmazon θ-majdnem mindenütt fennállnak a következő függvény-egyenlőtlenségek

$$|\tilde{f}_n - f| := |(f_n^+ \wedge g_n^+) - (f \wedge g)| \le |f_n^+ - f| + |g_n^+ - g| =$$
$$= |f_n^+ - f^+| + |g_n^+ - g^+| \le |f_n - f| + |g_n - g|,$$

amiből a Minkowski-egyenlőtlenség alapján következik, hogy

$$\|\tilde{f}_n - f\|_{\theta,p} := \Big(\int^* |\tilde{f}_n - f|^p \, \mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} \le$$
$$\le \Big(\int^* |f_n - f|^p \, \mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} + \Big(\int^* |g_n - g|^p \, \mathrm{d}|\theta|\Big)^{1/p} =: \|f_n - f\|_{\theta,p} + \|g_n - g\|_{\theta,p}$$

következésképpen az $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint. Hasonlóan kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\tilde{g}_n - g| \le |f_n - f| + |g_n - g|$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, tehát ismét a Minkowski-egyenlőtlenség alapján $\|\tilde{g}_n - g\|_{\theta,p} \le \|f_n - f\|_{\theta,p} + \|g_n - g\|_{\theta,p}$, így a $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál g-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint. Ebből adódik, hogy

$$\|g-f\|^p_{\theta,p} = \lim_{n\to\infty} \|\tilde{g}_n - \tilde{f}_n\|^p_{\theta,p} \le \lim_{n\to\infty} \|\tilde{g}_n\|^p_{\theta,p} - \lim_{n\to\infty} \|\tilde{f}_n\|^p_{\theta,p} = \|g\|^p_{\theta,p} - \|f\|^p_{\theta,p}. \blacksquare$$

5.1.3. Definíció. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és $p \ge 1$ valós szám, akkor*

$$\mathscr{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,\mathscr{R},\theta) := \{f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}) \mid$$
$$\mid (\exists g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)) : \ f = g \text{ a } T \text{ halmazon } \theta\text{-majdnem mindenütt}\}.$$

5.1.4. Tétel. (Levi-tétel) *Legyen* $(T, \mathscr{R}, \theta)$ *mértéktér,* $p \geq 1$ *valós szám, és* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *olyan* $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$*-ban haladó sorozat, amelyre minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ *a* T *halmazon* θ*-majdnem mindenütt. Ekkor* $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathscr{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ *pontosan akkor teljesül, ha*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\theta,p} < +\infty.$$

Továbbá, ha $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathscr{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ *és* $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ *olyan, hogy* $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$ *a* T *halmazon* θ*-majdnem mindenütt, akkor az* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *függvénysorozat konvergál* f*-hez a* $\| \cdot \|_{\theta,p}$ *félnorma szerint.*

Bizonyítás. Legyen $g \in \mathscr{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ olyan függvény, amelyre $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n = g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq f_n \leq g$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt, így $|f_n| = f_n \leq g = |g|$ is igaz a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ebből a $|\theta|$ szerinti felső integrál monotonitása alapján következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|f_n\|_{\theta,p} = \left(\int^* |f_n|^p \, \mathrm{d}|\theta| \right)^{1/p} \leq \left(\int^* |g|^p \, \mathrm{d}|\theta| \right)^{1/p} = \|g\|_{\theta,p},$$

tehát

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\theta,p} \leq \|g\|_{\theta,p} < +\infty.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\theta,p} < +\infty$. A hipotézis szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|f_n| = f_n \leq f_{n+1} = |f_{n+1}|$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt, így a $|\theta|$ szerinti felső integrál monotonitása alapján $\|f_n\|_{\theta,p} \leq \|f_{n+1}\|_{\theta,p}$, vagyis az $(\|f_n\|_{\theta,p})_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton növő és felülről korlátos. Ebből következik, hogy az $(\|f_n\|_{\theta,p})_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat konvergens, így a $(\|f_n\|^p_{\theta,p})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat is konvergens $\mathbb{R}$-ben. Ugyanakkor a lemma alapján minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re, ha $m \leq n$, akkor

$$\|f_n - f_m\|^p_{\theta,p} \leq \|f_n\|^p_{\theta,p} - \|f_m\|^p_{\theta,p},$$

tehát ha $m, n \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek, akkor

$$\|f_n - f_m\|^p_{\theta,p} \leq |\|f_n\|^p_{\theta,p} - \|f_m\|^p_{\theta,p}|.$$

Az $(\|f_n\|^p_{\theta,p})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben, így az iménti egyenlőtlenségből kapjuk, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat Cauchy-sorozat $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$-ban a $\| \cdot \|_{\theta,p}$ félnorma szerint. A Riesz–Fischer-tétel alapján vehetűnk olyan $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ függvényt és olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő leképezést, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\| \cdot \|_{\theta,p}$ félnorma szerint, és az $(f_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ugyanakkor az $(f_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt konvergál a $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ felső burkolóhoz, így $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n = f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, vagyis $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathscr{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R}, \theta)$. Ha $f' \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ tetszőleges olyan függvény, amelyre $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n = f'$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, akkor $f = f'$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, így az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f'-höz is a $\| \cdot \|_{\theta,p}$ félnorma szerint. ■

Speciálisan, a $p=1$ esetben, a Levi-tétel feltételeinek teljesülése mellett, $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ pontosan akkor igaz, ha a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

hiszen minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $f_n = |f_n|$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt, így

$$\|f_n\|_{\theta,1} = \int^* |f_n| \, \mathrm{d}|\theta| = \int |f_n| \, \mathrm{d}|\theta| = \int f_n \, \mathrm{d}|\theta|.$$

Továbbá, ha $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ és $f\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ olyan függvény, hogy $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, akkor

$$\int f \, \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\theta,$$

hiszen az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez is a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint. Ezt az egyenlőséget a kevésbé pontos, de igen kifejező:

$$\int \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) \, \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\theta$$

alakban is szokták írni.

5.1.5. Tétel. (Levi-tétel függvénysorokra) *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, $p\geq 1$ valós szám, és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban haladó sorozat, amelyre minden $k\in\mathbb{N}$ esetén $0\leq f_k$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Vezessük be a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k := \bigvee_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)$ jelölést. Ekkor $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ pontosan akkor teljesül, ha*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{k=0}^{n} f_k \Big\|_{\theta,p} < +\infty.$$

Továbbá, ha $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ olyan függvény, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, akkor $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor konvergens $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint, és az összege egyenlő az f függvénnyel.

Bizonyítás. Elegendő a Levi-tételt alkalmazni az $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ben haladó $\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra. ■

Speciálisan, a $p=1$ esetben, a függvénysorokra vonatkozó Levi-tétel feltételeinek teljesülése mellett $\sum_{k=0}^{\infty} f_k := \bigvee_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k\in n} f_k\Big) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ pontosan akkor igaz, ha a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \int f_k \, \mathrm{d}|\theta|$$

pozitív tagú sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Big\| \sum_{k \in n} f_k \Big\|_{\theta,1} = \int^* \Big(\sum_{k \in n} f_k \Big) \, \mathrm{d}|\theta| = \int \Big(\sum_{k \in n} f_k \Big) \, \mathrm{d}|\theta| = \sum_{k \in n} \int f_k \, \mathrm{d}|\theta|.$$

Továbbá, ha $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ olyan függvény, hogy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k = f$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, akkor

$$\int f \, \mathrm{d}\theta = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in n} \int f_k \, \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\theta.$$

Ezt az egyenlőséget a kevésbé pontos, de igen kifejező:

$$\int \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \Big) \, \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\theta$$

alakban is szokták írni.

5.2. A Levi-tétel elemi következményei

5.2.1. Következmény. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, $p \geq 1$ valós szám, és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$-ban haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \geq f_{n+1} \geq 0$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ekkor $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathscr{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, és ha $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ olyan függvény, hogy $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, akkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\| \cdot \|_{\theta,p}$ félnorma szerint.*

Bizonyítás. Tekintsük az $(f_0 - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatot, amely szintén $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$-ban halad, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $0 \leq f_0 - f_n \leq f_0 - f_{n+1}$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ezért erre a függvénysorozatra alkalmazható a Levi-tétel, tehát $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} (f_0 - f_n) \in \mathscr{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ pontosan akkor teljesül, ha $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_0 - f_n\|_{\theta,p} < +\infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq f_0 - f_n \leq f_0$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, tehát $\|f_0 - f_n\|_{\theta,p} \leq \|f_0\|_{\theta,p}$. Ezért $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_0 - f_n\|_{\theta,p} \leq \|f_0\|_{\theta,p} < +\infty$, vagyis $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} (f_0 - f_n) \in \mathscr{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R}, \theta)$. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} (f_0 - f_n) = f_0 - \bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$, így ha $g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ olyan, hogy $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} (f_0 - f_n) = g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, akkor $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n = f_0 - g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ez azt jelenti, hogy $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathscr{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, továbbá a Levi-tétel alapján az $(f_0 - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál a g függvényhez a $\| \cdot \|_{\theta,p}$ félnorma szerint, vagyis az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $f_0 - g$-hez a $\| \cdot \|_{\theta,p}$ félnorma szerint. Ebből következik, hogy ha $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ olyan függvény, hogy $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, akkor $f_0 - g = f$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, így az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez is a $\| \cdot \|_{\theta,p}$ félnorma szerint. ■

5.2.2. Következmény. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, $p \geq 1$ valós szám, és $(f_i)_{i \in I}$ olyan $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$-ban haladó rendszer, hogy I megszámlálható halmaz, és minden $i \in I$ esetén $f_i \geq 0$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ekkor $\bigwedge\limits_{i \in I} f_i \in \mathscr{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to I$ *szürjekció*, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\tilde{f}_n := \bigwedge_{k\in n} f_{\sigma(k)}$. Ekkor $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amely $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban halad, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \le \tilde{f}_{n+1} \le \tilde{f}_n$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Mivel pedig nyilvánvalóan teljesül az $\bigwedge_{i\in I} f_i = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \tilde{f}_n$ egyenlőség, így az előző állítás szerint $\bigwedge_{i\in I} f_i \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

5.2.3. Következmény. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, $p \ge 1$ valós szám, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban haladó rendszer, hogy I megszámlálható halmaz. Ekkor $\bigvee_{i\in I} f_i \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, amelyre*

$$\int^* g^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

és minden $i \in I$ esetén $f_i \le g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt.

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ olyan, hogy $\bigvee_{i\in I} f_i = f$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, akkor minden $I \ni i$-re $f_i \le f \le |f|$ a T halmazon mindenütt és $\int^* |f|^p \mathrm{d}|\theta| < +\infty$.

Tegyük fel, hogy $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvény, amelyre $\int^* g^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty$, és minden $i \in I$ esetén $f_i \le g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to I$ *szürjekció*, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\tilde{f}_n := \bigvee_{k\in n} f_{\sigma(k)}$. Ekkor az $(\tilde{f}_n + \tilde{f}_0^-)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban halad, és nyilvánvalóan monoton növő, valamint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\tilde{f}_n + \tilde{f}_0^- = \tilde{f}_n + \tilde{f}_0^+ - \tilde{f}_0 \ge \tilde{f}_0^+ \ge 0$ a T halmazon mindenütt. Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \le \tilde{f}_n + \tilde{f}_0^- \le g + \tilde{f}_0^-$, és a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}_n + \tilde{f}_0^-\|_{\theta,p} &= \left(\int^* \left(\tilde{f}_n + \tilde{f}_0^-\right)^p \mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} \le \left(\int^* \left(g + \tilde{f}_0^-\right)^p \mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} \le \\ &\le \left(\int^* g^p \mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} + \left(\int^* (\tilde{f}_0^-)^p \mathrm{d}|\theta|\right)^{1/p} < +\infty,\end{aligned}$$

következésképpen $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\tilde{f}_n + \tilde{f}_0^-\|_{\theta,p} < +\infty$. Ezért a Levi-tétel alapján $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} (\tilde{f}_n + \tilde{f}_0^-) \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$. Ugyanakkor $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} (\tilde{f}_n + \tilde{f}_0^-) = \left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \tilde{f}_n\right) + \tilde{f}_0^- = \left(\bigvee_{i\in I} f_i\right) + \tilde{f}_0^-$, ezért $\bigvee_{i\in I} f_i \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

5.3. Az integrálható halmazok δ-gyűrűje

5.3.1. Definíció. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér. Az $E \subseteq T$ halmazt* θ-**integrálhatónak** *nevezzük, ha $\chi_E \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$, és ekkor a*

$$\hat{\theta}(E) := \int \chi_E \,\mathrm{d}\theta$$

számot az E halmaz θ szerinti **mértékének** *nevezzük. A T halmaz θ-integrálható részhalmazainak halmazát $\mathscr{R}[\theta]$ jelöli.*

5.3.2. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér.*

a) *Az $\mathscr{R}[\theta]$ halmaz olyan δ-gyűrű T felett, amelynek eleme a T halmaz minden θ-eltűnő részhalmaza.*

b) *Ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan rendszer $\mathscr{R}[\theta]$-ban, amelyre I megszámlálható halmaz, akkor $\bigcup_{i\in I} E_i \in \mathscr{R}[\theta]$ pontosan akkor teljesül, ha $|\theta|^*\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) < +\infty$.*

c) *A $\mathscr{R}[\theta] \to \mathbb{K};\ E \mapsto \hat{\theta}(E)$ leképezés mérték, tehát korlátos változású és σ-additív, továbbá $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}[\theta]$ és $\theta \subseteq \hat{\theta}$, vagyis $\hat{\theta}$ a θ kiterjesztése.*

Bizonyítás. a) Ha $(E_i)_{i\in I}$ tetszőleges megszámlálható rendszer $\mathscr{R}[\theta]$-ban, akkor az $E := \bigcap_{i\in I} E_i$ halmazra $\chi_E = \inf_{i\in I} \chi_{E_i}$ teljesül, és minden $i \in I$ esetén $\chi_{E_i} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$. Ezért a Levi-tételből következik, hogy $\chi_E \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, azaz $E \in \mathscr{R}[\theta]$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{R}[\theta]$ zárt a megszámlálható metszet-képzésre nézve.

Ha $E \in \mathscr{R}$, akkor $\chi_E \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, tehát $E \in \mathscr{R}[\theta]$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}[\theta]$. Ha $E, E' \in \mathscr{R}[\theta]$, akkor

$$\chi_{E\setminus E'} = \chi_E - \chi_{E\cap E'} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta),$$
$$\chi_{E\cup E'} = \chi_E + \chi_{E'} - \chi_{E\cap E'} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta),$$

hiszen $\chi_E, \chi_{E'} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$. Ezért $\mathscr{R}[\theta]$ δ-gyűrű a T halmaz felett. Természetesen minden θ-eltűnő halmaz karakterisztikus függvénye θ-majdnem mindenütt nulla, így θ-integrálható függvény. Ezért minden θ-eltűnő halmaz eleme $\mathscr{R}[\theta]$-nak.

b) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ megszámlálható rendszer $\mathscr{R}[\theta]$-ban. Ha $E := \bigcup_{i\in I} E_i \in \mathscr{R}[\theta]$, akkor $\chi_E \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta) \subseteq \mathscr{F}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, tehát $|\theta|^*\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) := \int^* \chi_E \mathrm{d}|\theta| < +\infty$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $|\theta|^*\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) < +\infty$. A $\Big(\chi_{E_i}\Big)_{i\in I}$ megszámlálható függvényrendszer $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$-ban halad, és az $E := \bigcup_{i\in I} E_i$ halmazra $\chi_E = \bigvee_{i\in I} \chi_{E_i}$ teljesül. A hipotézis szerint $\int^* \chi_E \mathrm{d}|\theta| < +\infty$ és természetesen minden $I \ni i$-re $\chi_{E_i} \leq \chi_E$ a T halmazon mindenütt. Ezért a Levi-tételből következik, hogy $\chi_E \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, vagyis $\bigcup_{i\in I} E_i \in \mathscr{R}[\theta]$.

c) Értelmezzük a

$$\hat{\theta} : \mathscr{R}[\theta] \to \mathbb{K}; \quad E \mapsto \int \chi_E \mathrm{d}\theta$$

halmazfüggvényt. Az integrál definíciójából látható, hogy az $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ tér feletti integrál leszűkítése $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$-re egyenlő a θ által generált elemi integrállal, ezért a $\hat{\theta}$ leképezés a θ-nak kiterjesztése.

Ha $E, E' \in \mathscr{R}[\theta]$ és $E \cap E' = \emptyset$, akkor $\chi_{E\cup E'} = \chi_E + \chi_{E'}$, ezért az $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ tér feletti integrál additivitása folytán $\hat{\theta}(E \cup E') = \hat{\theta}(E) + \hat{\theta}(E')$, vagyis $\hat{\theta}$ *additív* halmazfüggvény.

A $\hat{\theta}$ halmazfüggvény σ-additivitásának bizonyításához legyen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{R}[\theta]$-ban, amelyre $E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}[\theta]$. Ekkor $\chi_{_E} = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{_{E_k}} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ teljesül, tehát a Levi-tétel függvénysorokra vonatkozó alakjából kapjuk, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \int \chi_{_{E_k}} \mathrm{d}|\theta|$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, továbbá

$$\hat{\theta}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k) := \int \chi_{_E} \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \int \chi_{_{E_k}} \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\theta}(E_k)$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a $\hat{\theta}$ halmazfüggvény σ-additív.

Azt kell még bizonyítani, hogy a $\hat{\theta}$ halmazfüggvény relatív korlátos. Ha $E \in \mathscr{R}[\theta]$ és $E' \in \mathscr{R}[\theta]$ olyan, hogy $E' \subseteq E$, akkor $\chi_{_{E'}} \leq \chi_{_E}$ miatt $|\hat{\theta}(E')| = \left|\int \chi_{_{E'}} \mathrm{d}\theta\right| \leq \int \chi_{_{E'}} \mathrm{d}|\theta| \leq \int \chi_{_E} \mathrm{d}|\theta|$ teljesül, tehát igaz a $\sup_{E'\in\mathscr{R}[\theta];\ E'\subseteq E} |\hat{\theta}(E')| \leq \int \chi_{_E} \mathrm{d}|\theta| < +\infty$ egyenlőtlenség. ■

5.4. Gyakorlatok

1. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és jelölje $\underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ azon $f : T \to \mathbb{R}_+$ függvények halmazát, amelyekhez létezik olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre $f = \inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$.

a) Teljesül az $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R}) \subseteq \underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ tartalmazás. Ha $f \in \underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ és $c \in \mathbb{R}_+$, akkor $c.f \in \underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$. Ha $(f_i)_{i\in I}$ nem üres véges rendszer $\underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, akkor $\sup_{i\in I} f_i \in \underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$. Ha $(f_i)_{i\in I}$ olyan nem üres véges rendszer $\underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre I megszámlálható halmaz, akkor $\inf_{i\in T} f_i \in \underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$.

b) Minden $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mértékre és $p \geq 1$ valós számra $\underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$.

c) Ha $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték és $p \geq 1$ valós szám, akkor $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ esetén

$$\int^* f^p \ \mathrm{d}|\theta| < +\infty$$

ekvivalens olyan $g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ függvény létezésével, amelyre $f = g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt (vagyis ekvivalens azzal, hogy $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$).

(*Útmutatás.* b) A Levi-tétel második következménye alapján nyilvánvaló.

c) Ha $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, hogy $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$, akkor fennáll az $f^p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n^p$ egyenlőség is, és $(\varphi_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ szintén monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, így a felső integrál monoton σ-folytonossága miatt

$$\int^* f^p \ \mathrm{d}|\theta| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \varphi_n^p \ \mathrm{d}|\theta|.$$

Tehát ha

$$\int^* f^p \ \mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

akkor az f függvény θ-majdnem mindenütt véges, és ha $g : T \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amely minden olyan helyen egyenlő f-fel, ahol f véges, egyébként pedig 0, akkor $g = f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, és a Levi-tétel alapján $g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$.)

2. (*A p-edik hatványon integrálható pozitív függvények jellemzése.*) Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, $p \geq 1$ valós szám, és $f : T \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) \geq 0$. A következő állítások ekvivalensek.

a) $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$.

b) Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ esetén létezik olyan $g \in \underline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ és $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, hogy $g \leq f \leq h$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt és

$$\int^* |h - g|^p \, \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon.$$

c) Létezik olyan $\underline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$-ben haladó $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, és létezik olyan $\overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$-ben haladó $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozat, hogy teljesülnek az alábbiak:

- minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g_n \leq f \leq h_n$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt;
- $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = f = \inf_{n\in\mathbb{N}} h_n$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt;
- fennáll az

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |h_n - g_n|^p \, \mathrm{d}|\theta| = 0$$

egyenlőség.

(*Útmutatás.* a)$\Rightarrow$b) Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tetszőleges valós szám. Ekkor az $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ terek definíciója alapján létezik olyan $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R})$, hogy $\int^* |f - \varphi|^p \mathrm{d}|\theta| < \dfrac{\varepsilon}{2^p}$, és φ-ről áttérve a φ^+ függvényre feltehető, hogy $\varphi \geq 0$ a T halmazon mindenütt. A felső integrál definíciója szerint van olyan $h_0 \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, hogy $|f - \varphi|^p \leq h_0$ és $\int^* h_0 \mathrm{d}|\theta| < \dfrac{\varepsilon}{2^p}$. Ekkor $\varphi - h_0^{1/p} \leq f \leq \varphi + h_0^{1/p}$ és $f \geq 0$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, ezért a $g := \left(\varphi - h_0^{1/p}\right)^+$ és $h := \varphi + h_0^{1/p}$ függvényekre $g \leq f \leq h$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Könnyen látható, hogy $g \in \underline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ és $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$. A h függvény a h_0-lal együtt θ-majdnem mindenütt véges, és azon a halmazon, ahol h_0 véges, fennáll a

$$0 \leq h - g = \left(\varphi + h_0^{1/p}\right) - \left(\varphi - h_0^{1/p}\right)^+ = \left(\varphi - h_0^{1/p}\right) - \left(\varphi - h_0^{1/p}\right)^+ + 2h_0^{1/p} \leq 2h_0^{1/p}$$

egyenlőtlenség, ezért $\int^* |h - g|^p \mathrm{d}|\theta| \leq 2^p \int^* h_0 \mathrm{d}|\theta| < 2^p \dfrac{\varepsilon}{2^p} = \varepsilon$, vagyis g és h olyan függvények, amelyek létezését b)-ben állítottuk.

b)$\Rightarrow$c) Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}^*_+$-ban. A b) feltétel alapján *kiválaszthatunk* olyan $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatokat, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g'_n \in \underline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ és $h'_n \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, valamint $g'_n \leq f \leq h'_n$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, továbbá $\int^* |h'_n - g'_n|^p \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon_n$. Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $g_n := \sup_{k\in n+1} g'_k$ és $h_n := \inf_{k\in n+1} h'_k$. Az **1**. gyakorlat a) pontja szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $g_n \in \underline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, továbbá tudjuk, hogy $h_n \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$. Ezenkívül triviális, hogy a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, és a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton fogyó. Nyilvánvaló az is, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq h_n - g_n \leq h'_n - g'_n$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt, tehát

$$\int^* |h_n - g_n|^p \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* |h'_n - g'_n|^p \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon_n.$$

Ha $g := \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re a T halmazon θ-majdnem mindenütt teljesül, hogy $0 \leq f - g \leq f - g_n \leq h'_n - g'_n$, ezért $\int^* |f-g|^p \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* |h'_n - g'_n|^p \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon_n$. Ebből következik, hogy $f = g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt.

Ha $h := \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re a T halmazon θ-majdnem mindenütt teljesül, hogy $0 \leq h - f \leq h_n - f \leq h'_n - g'_n$, így $\int^* |h-f|^p \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* |h'_n - g'_n|^p \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon_n$. Ebből következik, hogy $h = f$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt.

c)$\Rightarrow$b) Triviális.

b)$\Rightarrow$a) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tetszőleges. A c) alapján vegyünk olyan $g \in \underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ és $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ függvényeket, hogy $g \leq f \leq h$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt és $\int^* |h-g|^p \, \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon$. Ekkor fennáll az $\int^* |f-g|^p \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* |h-g|^p \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon$ egyenlőtlenség is. Az **1**. gyakorlat b) pontja szerint $g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$, tehát van olyan $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$, hogy $\int^* |g - \varphi|^p \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon$. Ebből a Minkowski-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy $\int^* |f - \varphi|^p \mathrm{d}|\theta| < 2^p\varepsilon$. Az $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ terek definíciója szerint ebből következik, hogy $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$.)

3. Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, $p \geq 1$ valós szám, és $f : T \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) \geq 0$. Ekkor $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ pontosan akkor teljesül, ha léteznek olyan $f_1, f_2 \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ függvények, hogy

$$\int^* f_1^p \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty, \quad \int^* f_2^p \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

valamint $f = f_1 - f_2$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt.

(*Útmutatás.* Ha ilyen f_1 és f_2 függvények léteznek, akkor az **1**. gyakorlat c) pontja szerint vannak olyan $g_1, g_2 \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ függvények, hogy $f_1 = g_1$ és $f_2 = g_2$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, így $f = g_1 - g_2$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, tehát $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$.

Megfordítva, legyen $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$, és vegyünk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, amely $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$-ben halad, és a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint konvergál f-hez. Ekkor $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint, ezért ha $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^*_+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens, akkor létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő sorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|\varphi_{\sigma(k+1)} - \varphi_{\sigma(k)}\|_{\theta,p} < \varepsilon_k$. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\psi_k := \begin{cases} \varphi_{\sigma(k)} - \varphi_{\sigma(k+1)} & ; \text{ha } k > 0; \\ \varphi_{\sigma(0)} & ; \text{ha } k = 0. \end{cases}$$

Ugyanúgy, mint a Riesz–Fischer-tétel *bizonyításában* kapjuk, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k$ függvénysor a T halmazon θ-majdnem mindenütt abszolút konvergens, és a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint is abszolút konvergens, valamint $f = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ekkor az $f_1 := \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^+$ és $f_2 := \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^-$ függvények elemei $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-nek, és $f = f_1 - f_2$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Továbbá, a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k$ függvénysor $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerinti abszolút konvergenciája és a megszámlálható konvexitás tétele alapján

$$\int^* f_1^p \mathrm{d}|\theta| = \int^* \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^+\Big)^p \mathrm{d}|\theta| \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|\psi_k^+\|_{\theta,p}\Big)^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|\psi_k\|_{\theta,p}\Big)^p < +\infty,$$

és hasonló okok miatt $\int^* f_2^p \mathrm{d}|\theta| < +\infty$ is teljesül.)

4. (*Integrálható halmazok jellemzése.*) Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor jelölje $\mathscr{R}_{\delta\sigma}$ a megszámlálható sok olyan halmaz uniójaként előálló halmazok halmazát, amelyek előállíthatók megszámlálható sok $\mathscr{R}$-beli halmaz metszeteként. Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és $E \subseteq T$. Az E halmaz pontosan akkor θ-integrálható, ha létezik olyan $H \in \mathscr{R}_{\delta\sigma}$, hogy $|\theta|^*(H) < +\infty$ és az $E\Delta H$ szimmetrikus különbség θ-eltűnő halmaz.

(**Megjegyzés**. Tehát egy $E \subseteq T$ halmaz pontosan akkor θ-integrálható, ha létezik olyan $H \in \mathscr{R}_{\delta\sigma}$ halmaz és olyan $N \subseteq T$ θ-eltűnő halmaz, hogy $|\theta|^*(H) < +\infty$ és $E = H \cup N$.)

(*Útmutatás.* Legyen $E \in \mathscr{R}[\theta]$, vagyis $\chi_E \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$. A **2**. gyakorlat szerint létezik olyan monoton növő $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $g_n \in \underline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ és $\chi_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, vagyis az $N := \{t \in T | \chi_E(t) \neq \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(t)\}$ halmaz θ-eltűnő halmaz. Rögzítsünk tetszőleges $c \in]0,1[$ valós számot, és legyen $H := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [g_n \geq c]$. Ekkor $H \in \mathscr{R}_{\delta\sigma}$, mert ha $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\varphi_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó, $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben haladó függvénysorozat, hogy $g_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \varphi_{n,m}$, akkor $[g_n \geq c] = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} [\varphi_{n,m} \geq c]$, és minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $[\varphi_{n,m} \geq c] \in \mathscr{R}$, mert $c > 0$. Ha $t \in E \setminus N$, akkor $c < 1 = \chi_E(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(t)$, tehát van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $t \in [g_n \geq c]$, vagyis $t \in H$. Ez azt jelenti, hogy $E \setminus N \subseteq H$, tehát $E \setminus H \subseteq N$. Ha $t \in H \setminus N$, akkor $0 < c \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(t) = \chi_E(t)$, tehát $\chi_E(t) = 1$, azaz $t \in E$. Ez azt jelenti, hogy $H \setminus N \subseteq E$, tehát $H \setminus E \subseteq N$. Ezekből a tartalmazásokból következik, hogy $E\Delta H := (E \setminus H) \cup (H \setminus E) \subseteq N$, így $E\Delta H$ θ-eltűnő halmaz. Továbbá, $H = (H \setminus E) \cup (H \cap E) \subseteq N \cup E$, valamint az N és E halmazok $|\theta|$ szerinti külső mértéke véges, ezért $|\theta|^*(H) < +\infty$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $H \in \mathscr{R}_{\delta\sigma}$ olyan halmaz, amelyre $|\theta|^*(H) < +\infty$ és az $E\Delta H$ szimmetrikus különbség θ-eltűnő halmaz. Ekkor $E = (E \setminus H) \cup (E \cap H)$ és $E \setminus H$ θ-eltűnő halmaz, ezért $\chi_E = \chi_{E\cap H}$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ugyanakkor $H = (H \setminus E) \cup (H \cap E)$ és $H \setminus E$ θ-eltűnő halmaz, ezért $\chi_H = \chi_{H\cap E}$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ezért $\chi_E = \chi_H$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt.

Viszont $\mathscr{R}_\delta \subseteq \mathscr{R}[\theta]$, mert $\mathscr{R}[\theta]$ δ-gyűrű, ezért a $H \in \mathscr{R}_{\delta\sigma}$ halmaz előáll megszámlálható sok θ-integrálható halmaz uniójaként, és a feltevés alapján $|\theta|^*(H) < +\infty$, így $H \in \mathscr{R}[\theta]$. Ebből következik, hogy $E \in \mathscr{R}[\theta]$.)

5. Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, és $\theta, \theta' : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ olyan mértékek, amelyek szerint ugyanazok a eltűnő halmazok (ilyenkor azt mondjuk, hogy a θ és θ' mértékek *ekvivalensek*). Ha

$$\{H \in \mathscr{R}_{\delta\sigma} \mid |\theta|^*(H) < +\infty\} = \{H \in \mathscr{R}_{\delta\sigma} \mid |\theta'|^*(H) < +\infty\},$$

akkor $\mathscr{R}[\theta] = \mathscr{R}[\theta']$, vagyis a θ és θ' mértékek szerint integrálható halmazok is ugyanazok. Speciálisan, ha $|\theta|^*(T) < +\infty$, valamint $|\theta'|(T) < +\infty$, akkor $\mathscr{R}[\theta] = \mathscr{R}[\theta']$ teljesül.

(*Útmutatás.* Nyilvánvalóan következik a **4**. gyakorlatból.)

6. Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és $f : T \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, hogy

$$\int^* f \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty.$$

Az f függvény pontosan akkor θ-integrálható, ha minden $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ függvényre, $f \leq h$ esetén

$$\int^* (h-f)\mathrm{d}|\theta| = \int^* h \, \mathrm{d}|\theta| - \int^* f \, \mathrm{d}|\theta|$$

teljesül (*szubtraktivitás-formula*).

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$, és legyen $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ olyan függvény, hogy $f \leq h$. Ha $\int^* h\mathrm{d}|\theta| < +\infty$, akkor az **1**. gyakorlat c) pontja szerint van olyan $h' \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$, hogy $h = h'$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, tehát az integrál additivitása folytán

$$\int^* (h-f)\mathrm{d}|\theta| = \int^* |h'-f|\mathrm{d}|\theta| = \int |h'-f|\mathrm{d}|\theta| = \int (h'-f)\mathrm{d}|\theta|$$
$$= \int h'\mathrm{d}|\theta| - \int f\mathrm{d}|\theta| = \int^* h \, \mathrm{d}|\theta| - \int^* f \, \mathrm{d}|\theta|,$$

hiszen $h - f = |h' - f|$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ha viszont $\int^* h\mathrm{d}|\theta| = +\infty$, akkor a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalán $+\infty$ áll, mert $\int^* f\mathrm{d}|\theta| < +\infty$, továbbá a bal oldalon is $+\infty$ áll, különben a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$\int^* h\mathrm{d}|\theta| \leq \int^* (h-f)\mathrm{d}|\theta| + \int^* f\mathrm{d}|\theta| < +\infty$$

teljesülne.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ függvényre, $f \leq h$ esetén

$$\int^* (h-f)\mathrm{d}|\theta| = \int^* h \, \mathrm{d}|\theta| - \int^* f \, \mathrm{d}|\theta|$$

teljesül. A $\int^* f \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$ feltétel és a felső integrál definíciója alapján van olyan $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f \leq h_n$, $\int^* h_n\mathrm{d}|\theta| < +\infty$ és

$\int^* f\mathrm{d}|\theta| = \lim_{n\to\infty} \int^* h_n \mathrm{d}|\theta|$. A hipotézis szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int^* (h_n - f)\ \mathrm{d}|\theta| = \int^* h_n\ \mathrm{d}|\theta| - \int^* f\ \mathrm{d}|\theta|,$$

ezért $\lim_{n\to\infty} \int^* (h_n - f)\mathrm{d}|\theta| = 0$. Az **1**. gyakorlat c) pontja szerint kiválasztható olyan $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$-ban, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $h_n = h'_n$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ekkor a $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra teljesül az, hogy $\lim_{n\to\infty} \int^* |h'_n - f|\mathrm{d}|\theta| = \lim_{n\to\infty} \int^* (h_n - f)\mathrm{d}|\theta| = 0$, tehát a Riesz–Fischer-tétel alapján $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$.)

7. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, továbbá legyenek μ és ν pozitív mértékek $\mathscr{R}$ felett.

a) Ha F Banach-tér és $p \geq 1$ valós szám, akkor

$$\mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \mu + \nu) \subseteq \mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \mu) \cap \mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \nu).$$

b) Ha F *véges dimenziós* Banach-tér, akkor

$$\mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \mu + \nu) = \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \mu) \cap \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \nu).$$

(*Útmutatás.* a) Nyilvánvalóan következik a IX. fejezet, 4. pont, **5**. gyakorlatból, mert $0 \leq \mu, \nu \leq \mu + \nu$.

b) Elég arra az esetre bizonyítani, amikor $F = \mathbb{R}$ (!). Legyen $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \nu)$, és tegyük fel, hogy $f \geq 0$. Legyen $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ olyan függvény, hogy $f \leq h$. A **6**. gyakorlat eredményét alkalmazva:

$$\int^* (h - f)\ \mathrm{d}\mu = \int^* h\ \mathrm{d}\mu - \int^* f\ \mathrm{d}\mu; \quad \int^* (h - f)\ \mathrm{d}\nu = \int^* h\ \mathrm{d}\nu - \int^* f\ \mathrm{d}\nu.$$

Ebből a IX. fejezet, 1. pont, **10**. gyakorlat eredményének alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\int^* (h - f)\ \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int^* (h - f)\ \mathrm{d}\mu + \int^* (h - f)\ \mathrm{d}\nu =$$
$$= \int^* h\ \mathrm{d}\mu - \int^* f\ \mathrm{d}\mu + \int^* h\ \mathrm{d}\nu - \int^* f\ \mathrm{d}\nu = \int^* h\ \mathrm{d}(\mu + \nu) - \int^* f\ \mathrm{d}(\mu + \nu),$$

tehát ismét a **6**. gyakorlatra hivatkozva $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$ adódik.)

8. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett.

a) Ha $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ valós mérték, F Banach-tér és $p \geq 1$ valós szám, akkor

$$\mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \mu) \subseteq \mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \mu^+) \cap \mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \mu^-),$$

és minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \mu)$ esetén

$$\int_T f\ \mathrm{d}\mu = \int_T f\ \mathrm{d}\mu^+ - \int_T f\ \mathrm{d}\mu^-.$$

Ha F véges dimenziós, akkor

$$\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu) = \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu^+) \cap \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu^-).$$

b) Ha $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ komplex mérték, F komplex Banach-tér és $p \geq 1$ valós szám, akkor

$$\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) = \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Re(\theta)) \cap \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Im(\theta)) \subseteq$$
$$\subseteq \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Re(\theta)^+) \cap \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Re(\theta)^-) \cap \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Im(\theta)^+) \cap \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Im(\theta)^-),$$

és minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén

$$\int_T f \ \mathrm{d}\theta = \int_T f \ \mathrm{d}(\Re(\theta)) + \mathbf{i}\int_T f \ \mathrm{d}(\Im(\theta)) =$$
$$= \int_T f \ \mathrm{d}(\Re(\theta)^+) - \int_T f \ \mathrm{d}(\Re(\theta)^-) + \mathbf{i}\int_T f \ \mathrm{d}(\Im(\theta)^+) - \mathbf{i}\int_T f \ \mathrm{d}(\Im(\theta)^-).$$

Ha F véges dimenziós, akkor

$$\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) = \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\Re(\theta)) \cap \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\Im(\theta)) =$$
$$= \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\Re(\theta)^+) \cap \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\Re(\theta)^-) \cap \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\Im(\theta)^+) \cap \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\Im(\theta)^-).$$

(*Útmutatás.* a) A definíció szerint $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\mu) = \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},|\mu|)$, és a VIII. fejezet, 4. pont, **1**. gyakorlat szerint $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, ezért a **7**. gyakorlat eredményének alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\mu)=\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},|\mu|)=\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\mu^+ + \mu^-) \subseteq \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\mu^+) \cap \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\mu^-).$$

Értelmezzük most a

$$u : \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu) \to F; \quad f \mapsto \int_T f \ \mathrm{d}\mu^+ - \int_T f \ \mathrm{d}\mu^-$$

leképezést. Ez nyilvánvalóan lineáris operátor, és ha $E \in \mathscr{R}$, valamint $z \in F$, akkor $\mu = \mu^+ - \mu^-$ és az integrálok értelmezése alapján

$$u(\chi_E.z) := \int_T (\chi_E.z)\mathrm{d}\mu^+ - \int_T (\chi_E.z)\mathrm{d}\mu^- = \mu^+(E).z - \mu^-(E).z = \mu(E).z = \int (\chi_E.z)\mathrm{d}\mu.$$

Továbbá, ha $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu)$, akkor az integrál definícióját, valamint a IX. fejezet, 1. pont, **10**. gyakorlat c) pontjának állítását alkalmazva

$$\|u(f)\| = \Big\|\int_T f \ \mathrm{d}\mu^+ - \int_T f \ \mathrm{d}\mu^-\Big\| \leq \Big\|\int_T f \ \mathrm{d}\mu^+\Big\| + \Big\|\int_T f \ \mathrm{d}\mu^-\Big\| \leq$$
$$\leq \int^* \|f\|\mathrm{d}\mu^+ + \int^* \|f\|\mathrm{d}\mu^- = \int^* \|f\|\mathrm{d}(\mu^+ + \mu^-) = \int^* \|f\|\mathrm{d}|\mu| = \|f\|_{\mu,1}.$$

Ezért az $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu)$ tér feletti integrál egyenlő u-val, vagyis minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu)$ esetén

$$\int_T f \ \mathrm{d}\mu = \int_T f \ \mathrm{d}\mu^+ - \int_T f \ \mathrm{d}\mu^-.$$

Ha F véges dimenziós, akkor a **7**. gyakorlat b) pontja szerint

$$\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu)=\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},|\mu|)=\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu^+ + \mu^-)=\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu^+)\cap\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\mu^-).$$

b) A definíció szerint $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) = \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},|\theta|)$ és $|\Re(\theta)|, |\Im(\theta)| \leq |\theta| \leq |\Re(\theta)| + |\Im(\theta)|$, ezért a IX. fejezet, 4. pont, **5**. gyakorlat és az előző eredmények alapján

$$\begin{gathered}\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) = \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},|\theta|) \subseteq \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},|\Re(\theta)|)\cap\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},|\Im(\theta)|) = \\ = \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Re(\theta))\cap\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Im(\theta)) \subseteq \\ \subseteq \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Re(\theta)^+)\cap\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Re(\theta)^-)\cap\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Im(\theta)^+)\cap\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\Im(\theta)^-).\end{gathered}$$

Értelmezzük az

$$u_1 : \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) \to F; \quad f \mapsto \int f \,\mathrm{d}(\Re(\theta)) + \mathbf{i}\int f \,\mathrm{d}(\Im(\theta)),$$

valamint az

$$\begin{gathered}u_2 : \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta) \to F; \\ f \mapsto \int f \,\mathrm{d}(\Re(\theta)^+) - \int f \,\mathrm{d}(\Re(\theta)^-) + \mathbf{i}\int f \,\mathrm{d}(\Im(\theta)^+) - \mathbf{i}\int f \,\mathrm{d}(\Im(\theta)^-)\end{gathered}$$

leképezéseket. Ezek nyilvánvalóan $\mathbb{C}$-lineáris operátorok, és könnyen látható, hogy az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$ halmazon megegyeznek a θ által generált elemi integrállal. Az is egyszerűen ellenőrizhető, hogy minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén $\|u_1(f)\| \leq \|f\|_{\theta,1}$ és $\|u_2(f)\| \leq \|f\|_{\theta,1}$, így az $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ tér feletti integrál értelmezése alapján u_1 és u_2 megegyeznek az $\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ tér feletti integrállal.

Ha F véges dimenziós, akkor ismét a **7**. gyakorlat b) pontját alkalmazva kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget.)

6. fejezet

A Lebesgue-tétel és alkalmazásai

6.1. Lebesgue-tétel $\mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$-terekre

6.1.1. Tétel. (Lebesgue-tétel) *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F Banach-tér, $p \geq 1$ valós szám, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$-ban haladó sorozat. Ha $f : T \to F$ olyan függvény, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat θ-majdnem mindenütt tart f-hez, és létezik olyan $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_n\| \leq g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt és $\int^* g^p \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$, akkor $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint is konvergál f-hez.*

Bizonyítás. Rögzítsünk olyan $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_n\| \leq g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt és $\int^* g^p \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$. Legyen $A := \{t \in T | g(t) = +\infty\}$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{B}_n := \{t \in T | \|f_n(t)\| \leq g(t)\}$. A feltevés alapján $\int^* g^p \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$, ezért θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $g(t) < +\infty$, vagyis az A halmaz θ-eltűnő halmaz. Ugyancsak a hipotézis alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f_n\| \leq g$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, vagyis az B_n halmaz θ-eltűnő halmaz. Továbbá, θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$, tehát a $C := \{t \in T | f(t) \neq \lim_{n\to\infty} f_n(t)\}$ halmaz θ-eltűnő halmaz. Ezért az $N := A \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) \cup C$ halmaz is θ-eltűnő halmaz, és minden $t \in T \setminus N$ esetén $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$, valamint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f_n(t)\| \leq g(t) < +\infty$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük a

$$g_n := \bigvee_{\substack{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ j,k>n}} \chi_{_{T\setminus N}} \|f_j - f_k\|$$

függvényt, amely mindenütt véges értéket vesz fel, mert $j,k \in \mathbb{N}$, $j,k > n$ és $t \in T \setminus N$ esetén $\chi_{_{T\setminus N}}(t)\|f_j(t) - f_k(t)\| = \|f_j(t) - f_k(t) \leq \|f_j(t)\| + \|f_k(t)\| \leq 2g(t) < +\infty$, ezért $g_n(t) \leq 2g(t) < +\infty$; míg $t \in N$ esetén $g_n(t) = 0$.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzítve. Minden $j,k \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_j - f_k\| \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}^p(T,\mathscr{R},\theta)$, ezért $\chi_{_{T\setminus N}}\|f_j - f_k\| \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}^p(T,\mathscr{R},\theta)$ is teljesül, hiszen ezek a függvények θ-majdnem mindenütt egyenlők. Az imént láttuk, hogy $g_n \leq 2g$, és természetesen $\int^* (2g)^p \mathrm{d}|\theta| < +\infty$, így a Levi-tételből következik, hogy $g_n \in \mathscr{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^p(T,\mathscr{R},\theta)$, vagyis $g_n \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}^p(T,\mathscr{R},\theta)$, mert g_n értékei $\mathbb{R}$-ben vannak.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy az $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban haladó $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton fogyó, így ismét a Levi-tételből következik, hogy $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} g_n \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$, valamint a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} g_n$-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint, így

$$\Big\| \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} g_n \Big\|_{\theta,p} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_{\theta,p}$$

is teljesül.

Ha $t \in T \setminus N$, akkor az $\mathbb{R}_+$-ban haladó $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat monoton fogyása és az F teljessége miatt fennállnak a következő ekvivalenciák:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} g_n(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+)(\exists n \in \mathbb{N}):\; g_n(t) < \varepsilon \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall (j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}):\; ((j > n) \wedge (k > n)) \Rightarrow \|f_j(t) - f_k(t)\| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-sorozat } F\text{-ben} \Leftrightarrow\; (f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergens sorozat } F\text{-ben.}$$

Az N definíciója szerint minden $t \in T \setminus N$ esetén az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, sőt $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$. Ebből következik, hogy $\inf_{n\in\mathbb{N}} g_n = 0$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, ezért

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_{\theta,p} = 0.$$

Ugyanakkor $n \in \mathbb{N}$, $j,k \in \mathbb{N}$ és $j,k > n$ esetén $\|f_j - f_k\| \leq g_n$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, így $\|f_j - f_k\|_{\theta,p} \leq \|g_n\|_{\theta,p}$. Ezért minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\|g_n\|_{\theta,p} < \varepsilon$, így minden $j,k \in \mathbb{N}$ számra, ha $j,k > n$, akkor $\|f_j - f_k\|_{\theta,p} < \varepsilon$. Ez éppen azt jelenti, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint.

A Riesz–Fischer-tétel alapján létezik olyan $f' \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f'-höz a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint, és létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f'(t) = \lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(t)$. Ugyanakkor θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(t)$ teljesül, ezért $f = f'$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Tehát $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint. ■

Speciálisan, ha $p = 1$, akkor a Lebesgue-tétel feltételeinek teljesülése esetén

$$\int f \,\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\theta$$

is igaz, amit kevésbé pontosan a

$$\int \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) \,\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\theta$$

alakban is írhatunk.

6.1.2. Tétel. (Lebesgue-tétel függvénysorokra) *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F Banach-tér, $p \geq 1$ valós szám, és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-ban haladó sorozat. Ha $f : T \to F$ olyan függvény, amely θ-majdnem mindenütt egyenlő a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k : T \rightarrowtail F$ összegfüggvénnyel, és létezik olyan $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$*

esetén $\Big\|\sum_{k\in n} f_n\Big\| \leq g$ *a* T *halmazon* θ*-majdnem mindenütt és* $\int^* g^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty$*, akkor* $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$ *és a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *függvénysor a* $\|\cdot\|_{\theta,p}$ *félnorma szerint is konvergál* f*-hez.*

Bizonyítás. Elég a Lebesgue-tételt alkalmazni a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysorra, ami – definíció szerint – megegyezik a $\Big(\sum_{k\in n} f_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozattal. ■

Speciálisan, ha $p = 1$, akkor a függvénysorokra vonatkozó Lebesgue-tétel feltételeinek teljesülése esetén

$$\int f \,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\theta$$

is igaz, amit kevésbé pontosan a

$$\int \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big) \,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\theta$$

alakban is írhatunk.

6.2. Paraméteres integrálfüggvény folytonossága

6.2.1. Definíció. *Legyen* M *halmaz,* F *Banach-tér,* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér, és* $(f_t)_{t\in T}$ *olyan rendszer, hogy minden* $t \in T$ *esetén* $f_t : M \to F$ *függvény. Ekkor*

$$\int_T f_t \,\mathrm{d}\theta(t) : M \rightarrowtail F$$

az a függvény, amelyre

$$\mathrm{Dom}\Big(\int_T f_t \,\mathrm{d}\theta(t)\Big) := \{\ x \in M \mid (f_t(x))_{t\in T} \in \mathscr{L}_F^1(T,\mathscr{R},\theta)\ \},$$

és ennek minden x *elemére*

$$\Big(\int_T f_t \,\mathrm{d}\theta(t)\Big)(x) := \int_T f_t(x) \,\mathrm{d}\theta(t).$$

Ezt a függvényt az $(f_t)_{t\in T}$ **függvényrendszer** θ **szerinti integráljának** *nevezzük.*

6.2.2. Állítás. (Paraméteres integrálfüggvény folytonosságának tétele) *Legyen* M *metrikus tér,* F *Banach-tér,* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér, és* $(f_t)_{t\in T}$ *olyan rendszer, hogy minden* $t \in T$ *esetén* $f_t : M \to F$ *függvény. Jelölje* f *az* $(f_t)_{t\in T}$ *függvényrendszer* θ *szerinti integrálját. Ha* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ *olyan pont, amelyre*

a) θ*-majdnem minden* $t \in T$ *esetén* f_t *folytonos az* $\mathfrak{a}$ *pontban, és*

b) *létezik* $\mathfrak{a}$*-nak olyan* U *környezete* M*-ben, és létezik olyan* $h : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *függvény, hogy* $\int^* h \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty$*, és minden* $U \ni x$*-re és* θ*-majdnem minden* $T \ni t$*-re* $\|f_t(x)\| \leq h(t)$*,*

akkor az f *függvény folytonos az* $\mathfrak{a}$ *pontban.*

Bizonyítás. Az átviteli elv miatt elegendő azt igazolni, hogy minden $\mathfrak{a}$-hoz tartó, $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó $(\mathfrak{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra az $(f(\mathfrak{a}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál $f(\mathfrak{a})$-hoz F-ben.

Legyen tehát $(\mathfrak{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathfrak{a}$-hoz konvergáló sorozat $\mathrm{Dom}(f)$-ben, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük az

$$g_n : T \to F; \quad t \mapsto f_t(\mathfrak{a}_n),$$

$$g : T \to F; \quad t \mapsto f_t(\mathfrak{a})$$

függvényeket. A feltevés szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $g_n \in \mathscr{L}_F^1(T, \mathscr{R}, \theta)$. Ugyanakkor, θ-majdnem minden $t \in T$ pontra az $f_t : M \to F$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $g(t) = f_t(\mathfrak{a}) = \lim\limits_{n\to\infty} f_t(\mathfrak{a}_n) =: \lim\limits_{n\to\infty} g_n(t)$. Ez azt jelenti, hogy a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt konvergál a g függvényhez.

Az U környezethez legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathfrak{a}_n \in U$. Tehát az U-ra vonatkozó feltevés alapján minden $n > N$ természetes számra és θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $\|g_n(t)\| = \|f_t(\mathfrak{a})\| \leq h(t)$ teljesül. A Lebesgue-tételt alkalmazva az $\mathscr{L}_F^1(T, \mathscr{R}, \theta)$-ban haladó $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra kapjuk, hogy $g \in \mathscr{L}_F^1(T, \mathscr{R}, \theta)$ (ezt amúgy is tudjuk!), és a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál g-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \mathrm{d}\theta = \int g \mathrm{d}\theta.$$

Ez az egyenlőség pontosan azt jelenti, hogy az $(f(\mathfrak{a}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál $f(\mathfrak{a})$-hoz F-ben, hiszen $\displaystyle\int g \mathrm{d}\theta = \int f_t(\mathfrak{a}) \mathrm{d}\theta(t) = f(\mathfrak{a})$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\displaystyle\int g_n \mathrm{d}\theta = \int f_t(\mathfrak{a}_n) \mathrm{d}\theta(t) = f(\mathfrak{a}_n)$. ■

6.3. Kapcsolatok az $\mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$-terek között

6.3.1. Definíció. *Ha F normált tér és $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, akkor minden $z \in F$ esetén*

$$\|z\|^{\alpha-1}.z := \begin{cases} e^{(\alpha-1)\log(\|z\|)}.z & , \text{ ha } z \neq 0, \\ 0 & , \text{ ha } z = 0. \end{cases}$$

Ha T halmaz, F normált tér, $f : T \to F$ függvény és $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, akkor

$$\|f\|^{\alpha-1}.f : T \to F$$

az a függvény, amelyre minden $t \in T$ esetén

$$\Big(\|f\|^{\alpha-1}.f\Big)(t) := \|f(t)\|^{\alpha-1}.f(t).$$

Könnyen látható, hogy ha F normált tér és $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, akkor az

$$F \to F; \quad z \mapsto \|z\|^{\alpha-1}.z$$

leképezés *folytonos*, mert az $F \setminus \{0\}$ halmazon megegyezik az $F \setminus \{0\} \to \mathbb{R};\ z \mapsto \|z\|^{\alpha-1}$ és $\mathrm{id}_{F\setminus\{0\}}$ folytonos függvények szorzatával, továbbá minden $z \in F$ esetén $\|\|z\|^{\alpha-1}.z\| = \|z\|$, így ez a függvény a 0-ban is folytonos.

6.3.2. Állítás. *Legyen* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér és* F *Banach-tér. Ha* $p,q\geq 1$ *valós számok és* $f:T\to F$ *függvény, akkor teljesül az*

$$f\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)\quad\Leftrightarrow\quad \|f\|^{(p/q)-1}.f\in\mathscr{L}^q_F(T,\mathscr{R},\theta)$$

ekvivalencia.

Bizonyítás. Elég azt megmutatni, hogy adott $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és F Banach-tér esetén *minden* $p,q\geq 1$ valós számra és *minden* $f:T\to F$ függvényre: az $f\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ kijelentésből *következik* az $\|f\|^{(p/q)-1}.f\in\mathscr{L}^q_F(T,\mathscr{R},\theta)$ kijelentés. Valóban, ha ez igaz, és $p,q\geq 1$ valós számok, és $f:T\to F$ olyan függvény, hogy $\|f\|^{(p/q)-1}.f\in\mathscr{L}^q_F(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor a hipotézist alkalmazva p helyett q-ra és q helyett p-re, valamint f helyett az $\|f\|^{(p/q)-1}.f$ függvényre kapjuk, hogy

$$f=\left\|\|f\|^{(p/q)-1}.f\right\|^{(q/p)-1}\left(\|f\|^{(p/q)-1}.f\right)\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta).$$

Legyenek tehát $p,q\geq 1$ valós számok és $f\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$. A Riesz–Fischer-tétel alapján létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, és létezik olyan $g:T\to\overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint és θ-majdnem mindenütt a T halmazon, továbbá $\int^* g^p\ \mathrm{d}|\theta|<+\infty$, valamint minden $\mathbb{N}\ni n$-re $\|f_n\|\leq g$. Ekkor az $\left(\|f_n\|^{(p/q)-1}.f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $\|f\|^{(p/q)-1}.f$-hez a T halmazon θ-majdnem mindenütt, és minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\left\|\|f_n\|^{(p/q)-1}.f_n\right\|=\|f_n\|^{p/q}\leq g^{p/q}.$$

Ugyanakkor $\int^*\left(g^{p/q}\right)^q\ \mathrm{d}|\theta|=\int^* g^p\ \mathrm{d}|\theta|<+\infty$ teljesül, tehát ha minden $\mathbb{N}\ni n$-re $\|f_n\|^{(p/q)-1}.f_n\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ igaz volna, akkor a Lebesgue-tételből következne, hogy $\|f\|^{(p/q)-1}.f\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$.

Ezzel a feladatot visszavezettük a következő problémára: ha $p,q\geq 1$ valós számok és $f\in\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$, akkor igaz-e, hogy $\|f\|^{(p/q)-1}.f\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$? Erre a kérdésre nyilvánvalóan igenlő válasz adható, mert f-hez létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges diszjunkt rendszer $\mathscr{R}$-ben és olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f=\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.z_i$, es ekkor bármely $\alpha\in\mathbb{R}^*_+$ esetén $\|f\|^{\alpha-1}.f=\sum_{i\in I}\chi_{E_i}.\left(\|z_i\|^{\alpha-1}.z_i\right)\in\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$. ■

6.3.3. Következmény. *Legyen* $(T,\mathscr{R},\theta)$ *mértéktér,* F *Banach-tér és* $p\geq 1$ *valós szám.*

a) *Ha* $f:T\to F$ *függvény, akkor*

$$f\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)\quad\Leftrightarrow\quad\|f\|^{p-1}.f\in\mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta).$$

b) *Ha* $f:T\to F$ *függvény, akkor* $f\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ *esetén* $\|f\|^p\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$.

c) *Ha* $f:T\to\mathbb{R}_+$ *függvény, akkor*

$$f\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)\ \Leftrightarrow\ f^p\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta).$$

Bizonyítás. a) Az előző állítás speciális esetéről van szó, amikor $q:=1$.

b) Ha $f\in\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor $\|f\|\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$, tehát az a) állítás alapján $\|f\|^p=\|f\|^{p-1}.\|f\|\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$.

c) Ha $f:T\to\mathbb{R}_+$ függvény, akkor $|f|^{p-1}.f=f^p$, ezért elég az a)-ra hivatkozni. ■

6.4. Mérték függvény által létesített képe és szorzata függvénnyel I.

6.4.1. Definíció. *Legyen* $\mathscr{R}$ *(illetve* $\mathscr{R}'$*) halmazgyűrű a* T *(illetve* T'*) halmaz felett és* $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ *mérték. Ha* $\pi : T \to T'$ *és* $g : T \to \mathbb{K}$ *függvények, akkor azt mondjuk, hogy a* (π, g) *pár* θ-**adaptált** *az* $\mathscr{R}'$ *halmazgyűrű szerint, ha teljesül a következő állítás.*

(AD) *Minden* $E' \in \mathscr{R}'$ *esetén* $\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$.

6.4.2. Állítás. *Legyen* $\mathscr{R}$ *(illetve* $\mathscr{R}'$*) halmazgyűrű a* T *(illetve* T'*) halmaz felett és* $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ *mérték. Ha* $\pi : T \to T'$ *és* $g : T \to \mathbb{K}$ *olyan függvények, hogy a* (π, g) *pár* θ*-adaptált az* $\mathscr{R}'$ *halmazgyűrű szerint, akkor a* $(\pi, |g|)$ *pár* $|\theta|$*-adaptált az* $\mathscr{R}'$ *halmazgyűrű szerint, és a*

$$\theta' : \mathscr{R}' \to \mathbb{K}; \quad E' \mapsto \int\limits_T \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.g \, \mathrm{d}\theta$$

leképezés mérték.

Bizonyítás. Ha a (π, g) pár θ-adaptált az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, ezért minden $E' \in \mathscr{R}'$ esetén $\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, tehát $\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.|g| = \left|\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.g\right| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta) = \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, |\theta|)$, vagyis a $(\pi, |g|)$ pár $|\theta|$-adaptált az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint. A bizonyítás hátralevő részében feltesszük, hogy a (π, g) pár θ-adaptált az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint.
A $\theta' : \mathscr{R}' \to \mathbb{K}$ halmazfüggvény additív, mert ha $E', E'' \in \mathscr{R}'$ diszjunkt halmazok, akkor

$$\theta'(E' \cup E'') = \int\limits_T \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E' \cup E''\rangle}.g \, \mathrm{d}\theta = \int\limits_T \Big(\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle} + \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E''\rangle}\Big).g \, \mathrm{d}\theta =$$
$$= \int\limits_T \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.g \, \mathrm{d}\theta + \int\limits_T \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E''\rangle}.g \, \mathrm{d}\theta = \theta'(E') + \theta'(E'').$$

A $\theta' : \mathscr{R}' \to \mathbb{K}$ halmazfüggvény σ-additivitásának bizonyításához legyen $(E'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt rendszer $\mathscr{R}'$-ben, amelyre $E' := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E'_k \in \mathscr{R}'$. Ekkor $\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'_k\rangle}.g$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'_k\rangle}.g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, valamint minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'_k\rangle}.g\Big| \le \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.|g| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, |\theta|),$$

ezért a Lebesgue-tétel függvénysorokra vonatkozó alakjából következik, hogy $\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ (ezt eddig is tudtuk!), és fennáll a következő egyenlőség

$$\theta'\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E'_k\Big) = \theta'(E') = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_T \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'_k\rangle}.g \, \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \theta'(E'_k),$$

vagyis a θ' halmazfüggvény σ-additív.

Megmutatjuk, hogy a θ' halmazfüggvény korlátos változású. Ehhez legyen $E' \in \mathscr{R}'$ és $(E'_i)_{i\in I}$ olyan véges diszjunkt rendszer $\mathscr{R}'$-ben, amelyre $E' = \bigcup\limits_{i\in I} E'_i$. Ekkor

$$\sum_{i\in I} |\theta'(E'_i)| = \sum_{i\in I} \Big|\int\limits_T \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'_i\rangle}.g \, \mathrm{d}\theta\Big| \le \sum_{i\in I} \int\limits_T \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'_i\rangle}.|g| \, \mathrm{d}|\theta| = \int\limits_T \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.|g| \, \mathrm{d}|\theta|,$$

így θ' korlátos változású. ■

6.4.3. Jelölés. *Legyen $\mathscr{R}$ (illetve $\mathscr{R}'$) halmazgyűrű a T (illetve T') halmaz felett és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték. Ha $\pi : T \to T'$ és $g : T \to \mathbb{K}$ olyan függvények, hogy a (π, g) pár θ-adaptált az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, akkor a*

$$\mathscr{R}' \to \mathbb{K}; \quad E' \mapsto \int\limits_T \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.g \, \mathrm{d}\theta$$

mértéket a $\pi[g.\theta]$ szimbólummal jelöljük.

Az előző állítás bizonyításának legutolsó részéből látható, hogy fennáll a

$$|\pi[g.\theta]| \leq \pi[|g|.|\theta|]$$

mérték-egyenlőtlenség.

6.4.4. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ (illetve $\mathscr{R}'$) halmazgyűrű a T (illetve T') halmaz felett és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték. Legyenek $\pi : T \to T'$ és $g : T \to \mathbb{K}$ olyan függvények, hogy a (π, g) pár θ-adaptált az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint.*

a) *Minden $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T', \mathscr{R}')$ esetén $(\varphi \circ \pi).g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ és*

$$\int\limits_T (\varphi \circ \pi).g \, \mathrm{d}\theta = \int\limits_T \varphi \, \mathrm{d}(\pi[g.\theta]).$$

b) *Minden $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}')$ esetén*

$$\int^* (f \circ \pi).|g| \, \mathrm{d}|\theta| = \int^* f \, \mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]).$$

c) *Minden $f \in \mathscr{F}(T'; \overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén*

$$\int^* (f \circ \pi).|g| \, \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* f \, \mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]).$$

Bizonyítás. a) Ha $(E'_i)_{i \in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}'$-ben, és $(c_i)_{i \in I}$ ugyanolyan indexhalmazú rendszer $\mathbb{K}$-ban, akkor a (π, g) pár θ-adaptáltsága szerint minden $i \in I$ esetén $\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'_i\rangle}.g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, ezért

$$\left(\left(\sum_{i \in I} c_i.\chi_{E'_i}\right) \circ \pi\right).g = \sum_{i \in I} c_i.\left(\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'_i\rangle}.g\right) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta),$$

és fennáll az

$$\int\limits_T \left(\left(\sum_{i \in I} c_i.\chi_{E'_i}\right) \circ \pi\right).g \, \mathrm{d}\theta = \sum_{i \in I} c_i. \int\limits_T \left(\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'_i\rangle}.g\right) \mathrm{d}\theta =$$

$$= \sum_{i \in I} c_i \cdot \pi[g.\theta](E'_i) = \int\limits_{T'} \left(\sum_{i \in I} c_i.\chi_{E'_i}\right) \mathrm{d}(\pi[g.\theta])$$

egyenlőség.

b) Legyen $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}')$ és $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T', \mathscr{R}')$-ben, hogy

$f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$. Ekkor a) alapján $((\varphi_n \circ \pi).|g|)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$-ban, hogy $(f \circ \pi).|g| = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (\varphi_n \circ \pi).|g|$. Ezért a felső integrál monoton σ-folytonossága és a) alapján

$$\int^* (f\circ\pi).|g| \; \mathrm{d}|\theta| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* (\varphi_n \circ \pi).|g| \; \mathrm{d}|\theta| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_T (\varphi_n \circ \pi).|g| \; \mathrm{d}|\theta| =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_T \varphi_n \; \mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]) = \int^* f \; \mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]).$$

c) Legyen $f \in \mathscr{F}(T';\overline{\mathbb{R}}_+)$ tetszőleges függvény. Ha nem létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T',\mathscr{R}')$, hogy $f \leq h$, akkor természetesen

$$\int^* (f\circ\pi).|g| \; \mathrm{d}|\theta| \leq +\infty = \int^* f \; \mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]).$$

Ha viszont $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T',\mathscr{R}')$ olyan, hogy $f \leq h$, akkor $(f\circ\pi).|g| \leq (h\circ\pi).|g|$, tehát a b) állítás alapján

$$\int^* (f\circ\pi).|g| \; \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* (h\circ\pi).|g| \; \mathrm{d}|\theta| = \int^* h \; \mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]),$$

ezért a felső integrál értelmezése szerint $\displaystyle\int^* (f\circ\pi).|g| \; \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* f \; \mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|])$. ■

6.4.5. Következmény. *Legyen $\mathscr{R}$ (illetve $\mathscr{R}'$) halmazgyűrű a T (illetve T') halmaz felett és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték. Legyenek $\pi : T \to T'$ és $g : T \to \mathbb{K}$ olyan függvények, hogy a (π, g) pár θ-adaptált az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint. Ha az $E' \subseteq T'$ halmaz $\pi[|g|.|\theta|]$-eltűnő, akkor θ-majdnem minden $t \in \overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle$ esetén $g(t) = 0$.*

Bizonyítás. Ha az $E' \subseteq T'$ halmaz $\pi[|g|.|\theta|]$-eltűnő, akkor a 6.4.4. állítás c) pontja alapján

$$\int^* \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}.|g| \; \mathrm{d}|\theta| = \int^* \left(\chi_{E'} \circ \pi\right).|g| \; \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* \chi_{E'} \; \mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]) = 0,$$

ezért θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}(t)|g(t)| = 0$, ami azzal ekvivalens, hogy θ-majdnem minden $\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle \ni t$-re $g(t) = 0$. ■

6.4.6. Tétel. *Legyen $\mathscr{R}$ (illetve $\mathscr{R}'$) halmazgyűrű a T (illetve T') halmaz felett és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték. Legyenek $\pi : T \to T'$ és $g : T \to \mathbb{K}$ olyan függvények, hogy a (π, g) pár θ-adaptált az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint. Ha F Banach-tér, és $f \in \mathscr{L}^1_F(T',\mathscr{R}',\pi[|g|.|\theta|])$, akkor $f \in \mathscr{L}^1_F(T',\mathscr{R}',\pi[g.\theta])$ és $(f\circ\pi).g \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$, továbbá*

$$\int_T (f\circ\pi).g \; \mathrm{d}\theta = \int_{T'} f \; \mathrm{d}(\pi[g.\theta]).$$

Bizonyítás. Az állítás igaz akkor, ha $f \in \mathscr{E}_F(T',\mathscr{R}')$, hiszen ekkor létezik olyan $(E'_i)_{i\in I}$ véges diszjunkt rendszer $\mathscr{R}'$-ben és olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f = \sum_{i\in I} \chi_{E'_i}.z_i$, tehát

$$(f\circ\pi).g = \sum_{i\in I} \left(\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'_i\rangle}.g\right).z_i \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta),$$

hiszen minden $I \ni i$-re $\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E_i'\rangle}.g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$, továbbá

$$\int\limits_T (f\circ\pi).g \ \mathrm{d}\theta = \sum_{i\in I}\Big(\int\limits_T \Big(\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E_i'\rangle}.g\Big)\ \mathrm{d}\theta\Big).z_i = \sum_{i\in I}\Big(\pi[g.\theta]\Big)(E_i').z_i = \int\limits_{T'} f \ \mathrm{d}(\pi[g.\theta]).$$

Legyen $f \in \mathscr{L}^1_F(T',\mathscr{R}',\pi[|g|.|\theta|])$ tetszőleges függvény. A Riesz–Fischer-tétel alapján vehetünk olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_F(T',\mathscr{R}')$-ben, és olyan $h : T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt, hogy $\int^* h \ \mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]) < +\infty$, és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál f-hez a T' halmazon $\pi[|g|.|\theta|]$-majdnem mindenütt és konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\pi[|g|\cdot|\theta|],1}$ félnorma szerint, valamint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f_n\| \leq h$ a T' halmazon mindenütt. Legyen E' azon $t' \in T'$ pontok halmaza, amelyekre az $(f_n(t'))_{n\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat nem konvergál $f(t')$-höz F-ben. Ez a halmaz $\pi[|g|.|\theta|]$-eltűnő, ezért 6.4.5. szerint az

$$E := \{t \in T | (g(t) \neq 0) \wedge (t \in \overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle)\}$$

halmaz θ-eltűnő. Ha $t \in T \setminus E$, akkor $g(t) = 0$, vagy $g(t) \neq 0$ és $\pi(t) \notin E'$, tehát bármelyik esetben az $(f_n(\pi(t)).g(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál F-ben $f(\pi(t)).g(t)$-hez. Ez azt jelenti, hogy az $((f_n\circ\pi).g)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt konvergál az $(f\circ\pi).g$ függvényhez. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|(f_n\circ\pi).g\| \leq (h\circ\pi).|g|$ teljesül, és c) alapján

$$\int^* (h\circ\pi).|g| \ \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* h \ \mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]) < +\infty.$$

Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n \in \mathscr{E}_F(T',\mathscr{R}')$, ezért $(f_n\circ\pi).g \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és

$$\int\limits_{T'} f_n \ \mathrm{d}(\pi[g.\theta]) = \int\limits_T (f_n\circ\pi).g \ \mathrm{d}\theta.$$

Ezért a Lebesgue-tételből következik, hogy $(f\circ\pi).g \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$ és

$$\int\limits_T (f\circ\pi).g \ \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty}\int\limits_T (f_n\circ\pi).g \ \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{T'} f_n \ \mathrm{d}(\pi[g.\theta]).$$

Ugyanakkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\pi[|g|\cdot|\theta|],1}$ félnorma szerint, így $|\pi[g.\theta]| \leq \pi[|g|.|\theta|]$ miatt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\pi[g.\theta],1}$ félnorma szerint is, így

$$\int\limits_{T'} f \ \mathrm{d}(\pi[g.\theta]) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{T'} f_n \ \mathrm{d}(\pi[g.\theta]),$$

amiből következik az

$$\int\limits_T (f\circ\pi).g \ \mathrm{d}\theta = \int\limits_{T'} f \ \mathrm{d}(\pi[g.\theta])$$

egyenlőség. ■

6.4.7. Definíció. *Legyen $\mathscr{R}$ (illetve $\mathscr{R}'$) halmazgyűrű a T (illetve T') halmaz felett és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték. Azt mondjuk, hogy a $\pi : T \to T'$ függvény θ-***valódi*** *az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, ha a $(\pi, 1_T)$ pár θ-adaptált az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, ahol 1_T a $T \to \mathbb{K}$ azonosan 1 függvény. Ha a $\pi : T \to T'$ függvény θ-valódi az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, akkor*

$$\pi(\theta) := \pi[1_T.\theta],$$

és ezt a mértéket **a θ mérték π függvény által létesített képének** *nevezzük.*

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha $\mathscr{R}$ (illetve $\mathscr{R}'$) halmazgyűrű a T (illetve T') halmaz felett, és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték, akkor a $\pi : T \to T'$ függvény pontosan akkor θ-valódi az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, ha minden $E' \in \mathscr{R}'$ esetén $\chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, és ha a $\pi : T \to T'$ függvény θ-valódi az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, akkor minden $E' \in \mathscr{R}'$ esetén

$$\pi(\theta)(E') = \int_T \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle}\ \mathrm{d}\theta = \theta(\overset{-1}{\pi}\langle E'\rangle).$$

6.4.8. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ (illetve $\mathscr{R}'$) halmazgyűrű a T (illetve T') halmaz felett, $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték és $\pi : T \to T'$ függvény.*

a) *A π függvény pontosan akkor θ-valódi az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, ha a π függvény $|\theta|$-valódi az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, és ha a π függvény θ-valódi az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, akkor*

$$|\pi(\theta)| \leq \pi(|\theta|).$$

b) *Ha a π függvény θ-valódi az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, akkor minden $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}')$ esetén*

$$\int^* (f \circ \pi)\ \mathrm{d}|\theta| = \int^* f\ \mathrm{d}(\pi(|\theta|)),$$

és minden $f \in \mathscr{F}(T'; \overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén

$$\int^* (f \circ \pi)\ \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* f\ \mathrm{d}(\pi(|\theta|)).$$

c) *Ha a π függvény θ-valódi az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint és F Banach-tér, akkor minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T', \mathscr{R}', \pi(|\theta|))$ esetén $f \in \mathscr{L}^1_F(T', \mathscr{R}', \pi(\theta))$ és $f \circ \pi \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, továbbá*

$$\int_T (f \circ \pi)\ \mathrm{d}\theta = \int_{T'} f\ \mathrm{d}(\pi(\theta)).$$

Bizonyítás. A 6.4.6. tétel és a θ-valódi függvények értelmezése alapján triviális. ∎

Az előző állítás b) és a) pontjához megjegyezzük, hogy létezhet olyan $f \in \mathscr{F}(T'; \overline{\mathbb{R}}_+)$ függvény, amelyre

$$\int^* (f \circ \pi)\ \mathrm{d}|\theta| = 0 < +\infty = \int^* f\ \mathrm{d}(\pi(|\theta|)),$$

továbbá az is lehetséges, hogy $\pi(\theta) = 0 \neq \pi(|\theta|)$, ezért

$$|\pi(\theta)| \neq \pi(|\theta|).$$

6.4.9. Következmény. (**A függvény által létesített kép asszociativitása**) *Legyen $\mathscr{R}$ (illetve $\mathscr{R}'$, illetve $\mathscr{R}''$) halmazgyűrű a T (illetve T', illetve T'') halmaz felett és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték. Ha a $\pi : T \to T'$ függvény θ-valódi az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint, és a $\pi' : T' \to T''$ függvény $\pi(|\theta|)$-valódi az $\mathscr{R}''$ halmazgyűrű szerint, akkor a $\pi' \circ \pi : T \to T''$ függvény θ-valódi az $\mathscr{R}''$ halmazgyűrű szerint és*

$$(\pi' \circ \pi)(\theta) = \pi'(\pi(\theta)).$$

Bizonyítás. Legyen $E'' \in \mathscr{R}''$. A $\pi' : T' \to T''$ függvény $\pi(|\theta|)$-valódi az $\mathscr{R}''$ halmazgyűrű szerint, ezért $\chi_{\overset{-1}{\pi'}\langle E''\rangle} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T', \mathscr{R}', \pi(|\theta|))$. A $|\pi(\theta)| \leq \pi(|\theta|)$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T', \mathscr{R}', \pi(|\theta|)) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T', \mathscr{R}', |\pi(\theta)|) = \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T', \mathscr{R}', \pi(\theta))$, ezért $\chi_{\overset{-1}{\pi'}\langle E''\rangle} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T', \mathscr{R}', \pi(\theta))$. Ez azt jelenti, hogy a $\pi' : T' \to T''$ függvény $\pi(\theta)$-valódi, ezért a 6.4.8. állítás c) pontja szerint $\chi_{\overset{-1}{\pi'}\langle E''\rangle} \circ \pi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, és

$$\int_T (\chi_{\overset{-1}{\pi'}\langle E''\rangle} \circ \pi)\ \mathrm{d}\theta = \int_{T'} \chi_{\overset{-1}{\pi'}\langle E''\rangle}\ \mathrm{d}(\pi(\theta)) = (\pi'(\pi(\theta)))(E'').$$

is teljesül. Ugyanakkor $(\overset{-1}{\pi' \circ \pi})\langle E''\rangle = \overset{-1}{\pi}\langle \overset{-1}{\pi'}\langle E''\rangle\rangle$, ezért

$$\chi_{(\overset{-1}{\pi' \circ \pi})\langle E''\rangle} = \chi_{\overset{-1}{\pi}\langle \overset{-1}{\pi'}\langle E''\rangle\rangle} = \chi_{\overset{-1}{\pi'}\langle E''\rangle} \circ \pi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta).$$

Ebből következik, hogy a $\pi' \circ \pi : T \to T''$ függvény θ-valódi az $\mathscr{R}''$ halmazgyűrű szerint és

$$((\pi' \circ \pi)(\theta))(E'') = \int_T \chi_{(\overset{-1}{\pi' \circ \pi})\langle E''\rangle}\ \mathrm{d}\theta = (\pi'(\pi(\theta)))(E''),$$

vagyis $(\pi' \circ \pi)(\theta) = \pi'(\pi(\theta))$. ■

Vegyük észre, hogy az előző állításban nem azt követeltük meg, hogy a $\pi' : T' \to T''$ függvény $\pi(\theta)$-valódi legyen az $\mathscr{R}''$ halmazgyűrű szerint, hanem ennél határozottan *erősebb* feltételt írtunk elő, nevezetesen azt, hogy a $\pi' : T' \to T''$ függvény $\pi(|\theta|)$-valódi legyen az $\mathscr{R}''$ halmazgyűrű szerint.

6.4.10. Definíció. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér. Azt mondjuk, hogy a $g : T \to \mathbb{K}$ függvény* **lokálisan θ-integrálható**, *ha az (id_T, g) pár θ-adaptált az $\mathscr{R}$ halmazgyűrű szerint. Ha a $g : T \to \mathbb{K}$ függvény lokálisan θ-integrálható, akkor*

$$g.\theta := \mathrm{id}_T[g.\theta],$$

és ezt az $\mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mértéket **a θ mérték g függvénnyel vett szorzatának** *nevezzük. A $T \to \mathbb{K}$ lokálisan θ-integrálható függvények halmazát $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K},\mathrm{loc}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ jelöli.*

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, akkor a $g : T \to \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor lokálisan θ-integrálható, ha minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\chi_E . g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, és ha g lokálisan θ-integrálható, akkor minden $E \in \mathscr{R}$ esetén

$$(g.\theta)(E) = \int_T \chi_E . g\ \mathrm{d}\theta.$$

6.4.11. Lemma. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$.*

a) *Minden $\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ lépcsősfüggvényre $\psi.f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$.*

b) *Fennáll az*

$$\int_T |f|\ \mathrm{d}|\theta| = \sup_{\substack{\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}), \\ |\psi| \leq 1}} \left| \int_T \psi.f\ \mathrm{d}\theta \right|$$

egyenlőség.

Bizonyítás. a) Nyilvánvaló, hogy ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty}\int^* |f-f_n|\ \mathrm{d}|\theta| = 0$ egyenlőség, akkor $(\psi f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$-ben, amelyre minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $|\psi f-\psi f_n| \leq |||\psi\ |||\ \cdot|f-f_n|$, következésképpen $\lim\limits_{n\to\infty}\int^* |\psi f-\psi f_n|\ \mathrm{d}|\theta| = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\psi.f\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$.

b) Azt igazoljuk, hogy a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán álló szám kisebb-egyenlő a jobb oldalon álló számnál. Először feltesszük, hogy $f\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$. Ekkor $|f|\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$, és a VIII. fejezet, 4. pont, **3**. gyakorlat szerint tudjuk, hogy

$$\int_T |f|\ \mathrm{d}|\theta| = \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\varphi|\leq|f|}} \left|\int_T \varphi\ \mathrm{d}\theta\right|.$$

Ha $\varphi\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$ és $|\varphi|\leq|f|$, akkor van olyan $\psi'\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$, hogy $|\psi'|\leq 1$ és $\varphi=\psi' f$ (VIII. fejezet, 2. pont, **2**. gyakorlat), ezért

$$\int_T |f|\ \mathrm{d}|\theta| \leq \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\psi|\leq 1}} \left|\int_T \psi.f\ \mathrm{d}\theta\right|.$$

Legyen most $f\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$ és $\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+$ tetszőleges. Létezik olyan $h\in\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$, hogy $\int^* |f-h|\ \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon$; ekkor

$$\int_T |f|\ \mathrm{d}|\theta| < \varepsilon + \int |h|\ \mathrm{d}|\theta| = \varepsilon + \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\psi|\leq 1}} \left|\int_T \psi.h\ \mathrm{d}\theta\right| =$$

$$= \varepsilon + \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\psi|\leq 1}} \left|\int_T \psi.(h-f)\ \mathrm{d}\theta + \int_T \psi.f\ \mathrm{d}\theta\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \int^* |h-f|\ \mathrm{d}|\theta| + \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\psi|\leq 1}} \left|\int_T \psi.f\ \mathrm{d}\theta\right| < 2\varepsilon + \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\psi|\leq 1}} \left|\int_T \psi.f\ \mathrm{d}\theta\right|,$$

amiből következik az $\int_T |f|\ \mathrm{d}|\theta| \leq \sup\limits_{\substack{\psi\in\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\psi|\leq 1}} \left|\int_T \psi.f\ \mathrm{d}\theta\right|$ egyenlőtlenség. ■

6.4.12. Állítás. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és $g: T\to\mathbb{K}$ lokálisan θ-integrálható függvény, akkor*

$$\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{K},\mathrm{loc}}(T,\mathscr{R},\theta).$$

Bizonyítás. Az előző lemma a) pontjából nyilvánvalóan következik. ■

Természetesen az előző állításban szereplő tartalmazás nem cserélhető fel egyenlőségre, hiszen minden $T\to\mathbb{K}$ konstansfüggvény triviálisan lokálisan θ-integrálható, de nem szükségképpen θ-integrálható.

6.4.13. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és $g: T\to\mathbb{K}$ lokálisan θ-integrálható függvény.*

a) *A $|g|$ függvény lokálisan $|\theta|$-integrálható, és*

$$|g.\theta| = |g|.|\theta|.$$

b) *Minden* $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}')$ *esetén*

$$\int^* f.|g| \ \mathrm{d}|\theta| = \int^* f \ \mathrm{d}(|g|.|\theta|),$$

és minden $f \in \mathscr{F}(T'; \overline{\mathbb{R}}_+)$ *esetén*

$$\int^* f.|g| \ \mathrm{d}|\theta| \leq \int^* f \ \mathrm{d}(|g|.|\theta|).$$

c) *Ha* F *Banach-tér, és* $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, g.\theta)$*, akkor* $f.g \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$*, továbbá*

$$\int_T f.g \ \mathrm{d}\theta = \int_T f \ \mathrm{d}(g.\theta).$$

Bizonyítás. a) Csak azt kell igazolni, hogy $|g.\theta| \geq |g|.|\theta|$. Legyen $E \in \mathscr{R}$ rögzített. Ekkor $\chi_E.g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, tehát az előző lemma alapján

$$(|g|.|\theta|)(E) = \int_T \chi_E.|g| \ \mathrm{d}|\theta| = \int_T \left|\chi_E.g\right| \ \mathrm{d}|\theta| = \sup_{\substack{\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\psi| \leq 1}} \left| \int_T \psi.\chi_E.g \ \mathrm{d}\theta \right| =$$

$$= \sup_{\substack{\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\psi| \leq 1}} \left| \int_T \psi.\chi_E \ \mathrm{d}(g.\theta) \right| \leq \sup_{\substack{\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R}),\\ |\psi| \leq 1}} \int_T \left|\psi.\chi_E\right| \ \mathrm{d}|g.\theta| \leq \int_T \chi_E \ \mathrm{d}|g.\theta| = |g.\theta|(E).$$

b) A 6.4.6. tétel b) pontja és a lokálisan θ-integrálható függvények értelmezése alapján nyilvánvaló.

c) A definíció szerint $\mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, g.\theta) := \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, |g.\theta|)$, és a) alapján $\mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, |g.\theta|) = \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, |g|.|\theta|)$. Ezért $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, g.\theta)$ esetén $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, |g|.|\theta|)$, így a 6.4.6. tétel e) pontjának feltétele teljesül, a $T' := T$, $\mathscr{R}' := \mathscr{R}$ és $\pi := \mathrm{id}_T$ választással. ■

Azonban vigyázzunk arra, hogy ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, $g : T \to \mathbb{K}$ lokálisan θ-integrálható függvény, F Banach-tér és $f : T \to F$ olyan függvény, hogy $f.g \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, akkor egyáltalán nem szükségképpen teljesül az, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, g.\theta)$, mert az f függvénnyel "mérhetőségi" problémák lehetnek. A mérhető függvényekkel foglalkozó pontban visszatérünk erre.

6.4.14. Következmény. (**A függvénnyel vett szorzás asszociativitása**) *Legyen* $(T, \mathscr{R}, \theta)$ *mértéktér,* $g : T \to \mathbb{K}$ *lokálisan* θ*-integrálható függvény és* $g' : T \to \mathbb{K}$ *lokálisan* $g.\theta$*-integrálható függvény. Ekkor a* $g'.g : T \to \mathbb{K}$ *függvény lokálisan* θ*-integrálható, és*

$$(g'.g).\theta = g'.(g.\theta).$$

Bizonyítás. Legyen $E \in \mathscr{R}$ rögzítve. A g' függvény lokálisan $g.\theta$-integrálható, ezért $\chi_E.g' \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, g.\theta)$. Ebből az előző tétel alkalmazásával kapjuk, hogy $(\chi_E.g').g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, és

$$\int_T (\chi_E.g').g \ \mathrm{d}\theta = \int_T (\chi_E.g') \ \mathrm{d}(g.\theta) = (g'.(g.\theta))(E).$$

Ez azt jelenti, hogy a $g'.g : T \to \mathbb{K}$ függvény lokálisan θ-integrálható, és

$$((g'.g).\theta)(E) = \int_T \chi_E.(g'.g) \ \mathrm{d}\theta = (g'.(g.\theta))(E),$$

vagyis $(g'.g).\theta = g'.(g.\theta)$. ■

Még egy fontos állítást bizonyíthatunk az előzőek alkalmazásával lokálisan integrálható függvényekre. Ehhez bevezetjük a lokálisan eltűnő halmazok és függvények, valamint a lokálisan majdnem mindenütt teljesülő kijelentések fogalmát.

6.4.15. Definíció. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ $\mathbb{K}$-mértéktér.*

– *Egy $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt* **lokálisan θ-eltűnőnek** *nevezünk, ha minden $E \in \mathscr{R}$ esetén*

$$\int^* \chi_E.f \ \mathrm{d}|\theta| = 0,$$

vagyis minden $E \in \mathscr{R}$ esetén a $\chi_E.f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény θ-eltűnő.

– *Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor egy $f : T \to F$ függvényt* **lokálisan θ-eltűnőnek** *nevezünk, ha minden $E \in \mathscr{R}$ esetén*

$$\int^* \chi_E \|f\| \ \mathrm{d}|\theta| = 0,$$

vagyis az $\|f\| : T \to \mathbb{R}_+$ függvény lokálisan lokálisan θ-eltűnő.

– *Egy $H \subseteq T$ halmazt* **lokálisan θ-eltűnő halmaznak** *nevezünk, ha a $\chi_H : T \to \mathbb{R}$ függvény lokálisan θ-eltűnő, vagyis minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $|\theta|^*(H \cap E) = 0$.*

– *Ha $\mathscr{A}(t)$ kijelentés, akkor azt mondjuk, hogy* **lokálisan θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $\mathscr{A}(t)$ teljesül**, *vagy* **$\mathscr{A}(t)$ a T-n lokálisan θ-majdnem mindenütt teljesül**, *ha a $\{t \in T | \neg \mathscr{A}(t)\}$ halmaz lokálisan θ-eltűnő halmaz.*

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden θ-eltűnő függvény vagy halmaz lokálisan is θ-eltűnő, azonban lokálisan θ-eltűnő függvény vagy halmaz nem szükségképpen θ-eltűnő.

6.4.16. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, és legyenek g, $g' : T \to \mathbb{K}$ lokálisan θ-integrálható függvények. Ekkor $g.\theta = g'.\theta$ pontosan akkor teljesül, ha lokálisan θ-majdnem minden $t \in T$ pontra $g(t) = g'(t)$ teljesül.*

Bizonyítás. (I) Először igazoljuk az állítás következő speciális esetét: Ha $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitív mértéktér és $f : T \to \mathbb{R}$ pozitív lokálisan μ-integrálható függvény, akkor

$$f.\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{"Lokálisan } \mu\text{-majdnem minden } t \in T \text{ pontra } f(t) = 0."$$

Tegyük fel, hogy $f.\mu = 0$ és legyen $[f \neq 0] := \{t \in T | f(t) \neq 0\}$. Ha $E \in \mathscr{R}$, akkor $0 = (f.\mu)(E) = \int\limits_T \chi_E.f \ \mathrm{d}\mu$, ezért a $\chi_E.f$ függvény μ-eltűnő, ami azzal ekvivalens, hogy a $\{t \in T | \Big(\chi_E.f\Big)(t) \neq 0\}$ halmaz μ-eltűnő. Mivel $\{t \in T | \Big(\chi_E.f\Big)(t) \neq 0\} = [f \neq 0] \cap E$, ez azt jelenti, hogy $[f \neq 0]$ lokálisan μ-eltűnő, vagyis lokálisan μ-majdnem minden $t \in T$ pontra $f(t) = 0$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy lokálisan μ-majdnem minden $t \in T$ pontra $f(t) = 0$, vagyis minden $E \in \mathscr{R}$ esetén az $[f \neq 0] \cap E$ halmaz μ-eltűnő. Ekkor minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\{t \in T | \Big(\chi_E.f\Big)(t) \neq 0\} = [f \neq 0] \cap E$ miatt a $\chi_E.f$ függvény μ-eltűnő, ezért $(f.\mu)(E) = \int\limits_T \chi_E.f \ \mathrm{d}\mu = 0$, vagyis $f.\mu = 0$.

(II) Áttérve az általános esetre: teljesül a következő ekvivalencia-lánc:

$$g.\theta = g'.\theta \Leftrightarrow (g - g').\theta = 0 \Leftrightarrow |(g - g').\theta| = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |(g - g')|.|\theta| = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \text{"Lokálisan } |\theta|\text{-majdnem minden } t \in T \text{ pontra } |g - g'|(t) = 0.\text{"} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{"Lokálisan } \theta\text{-majdnem minden } t \in T \text{ pontra } g(t) = g'(t).\text{"},$$

ahol a $\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ ekvivalenciánál felhasználtuk azt, hogy $|(g - g').\theta| = |(g - g')|.|\theta|$, és az $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ ekvivalenciánál az (I) állítást alkalmaztuk a $\mu := |\theta|$ és $f := |g - g'|$ választással. ■

6.5. Mérték leszűkítése és kiterjesztése I.

6.5.1. Definíció. *Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett és $T' \subseteq T$, akkor*

$$\mathscr{R}|T' := \{\ E \in \mathscr{R} \mid E \subseteq T'\},$$

és az $\mathscr{R}|T'$ halmazt az $\mathscr{R}$ halmazgyűrű T'-re vett **megszorításának** *nevezzük.*

6.5.2. Állítás. *Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett és $T' \subseteq T$, akkor $\mathscr{R}|T'$ halmazgyűrű a T' halmaz felett, és a $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték leszűkítése az $\mathscr{R}|T'$ halmazgyűrűre mérték, vagyis a $(T', \mathscr{R}|T', \theta|_{\mathscr{R}|T'})$ hármas mértéktér, továbbá fennáll a $|\theta|_{\mathscr{R}|T'}| = (|\theta|)|_{\mathscr{R}|T'}$ mérték-egyenlőség.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{R}|T'$ halmazgyűrű, és a $\theta|_{\mathscr{R}|T'} : \mathscr{R}|T' \to \mathbb{K}$ halmazfüggvény σ-additív. Ha $E \in \mathscr{R}|T'$ és $(E_i)_{i\in I}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}|T'$-ben, hogy $E = \bigcup\limits_{i\in I} E_i$, akkor

$$\sum_{i\in I} \left|\theta|_{\mathscr{R}|T'}(E_i)\right| = \sum_{i\in I} |\theta(E_i)| \leq |\theta|(E) = (|\theta|)|_{\mathscr{R}|T'}(E),$$

tehát $\theta|_{\mathscr{R}|T'}$ korlátos változású és $\left|\theta|_{\mathscr{R}|T'}\right| \leq (|\theta|)|_{\mathscr{R}|T'}$. Ha $E \in \mathscr{R}|T'$, $c \in \mathbb{R}$ és $c < (|\theta|)|_{\mathscr{R}|T'}(E) = |\theta|(E)$, akkor létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, hogy $E = \bigcup\limits_{i\in I} E_i$ és $c < \sum\limits_{i\in I} |\theta(E_i)|$. Ekkor minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq E \subseteq T'$ miatt $E_i \in \mathscr{R}|T'$, tehát

$$c < \sum_{i\in I} |\theta(E_i)| = \sum_{i\in I} \left|\theta|_{\mathscr{R}|T'}(E_i)\right| \leq \left|\theta|_{\mathscr{R}|T'}\right|(E),$$

vagyis $(|\theta|)|_{\mathscr{R}|T'}(E) \leq (|\theta_{\mathscr{R}|T'}|)(E)$, amiből következik, hogy $(|\theta|)|_{\mathscr{R}|T'} \leq \left|\theta|_{\mathscr{R}|T'}\right|$. ■

6.5.3. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitív mértéktér és $T' \subseteq T$. Minden $f : T' \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényre jelölje f° az f függvény 0-val vett kiterjesztését T-re.*

a) *Ha $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T', \mathscr{R}|T')$, akkor $\varphi^\circ \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R})$ és*

$$\int\limits_T \varphi^\circ \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{T'} \varphi \, \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}).$$

b) *Ha* $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}|T')$, *akkor* $f^\circ \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ *és*

$$\int_{T'}^{*} f \; \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}) = \int_{T}^{*} f^\circ \; \mathrm{d}\mu,$$

és ha $f \in \mathscr{F}(T'; \overline{\mathbb{R}}_+)$ *tetszőleges, akkor*

$$\int_{T}^{*} f^\circ \; \mathrm{d}\mu \le \int_{T'}^{*} f \; \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}).$$

c) *Ha létezik olyan* $\mathscr{R}$*-ben haladó* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat és olyan* $N \subseteq T$ $\mu|_{\mathscr{R}|T'}$*-eltűnő halmaz, hogy* $T' = N \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)$, *akkor minden* $f \in \mathscr{F}(T'; \overline{\mathbb{R}}_+)$ *esetén*

$$\int_{T'}^{*} f \; \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}) = \int_{T}^{*} f^\circ \; \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. a) Ha $E \in \mathscr{R}|T'$, akkor nyilvánvalóan $\chi_{_E}^\circ \in \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$. Ebből következik, hogy ha $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}$-ben és $(c_i)_{i\in I}$ ugyanolyan indexhalmazú rendszer $\mathbb{R}$-ban, akkor

$$\Big(\sum_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}}\Big)^\circ = \sum_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}}^\circ \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}),$$

továbbá

$$\int_{T} \Big(\sum_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}}\Big)^\circ \mathrm{d}\mu = \int_{T} \Big(\sum_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}}^\circ\Big) \mathrm{d}\mu = \sum_{i\in I} c_i \mu(E_i) =$$
$$= \sum_{i\in I} c_i (\mu|_{\mathscr{R}|T'})(E_i) = \int_{T'} \Big(\sum_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}}\Big) \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}).$$

b) Legyen $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}|T')$ és vegyünk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő függvénysorozatot $\mathscr{E}_+(T', \mathscr{R}|T')$-ben, amelyre $f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$. Ekkor a $(\varphi_n^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő függvénysorozat a) miatt $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben halad és $f^\circ = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n^\circ$, ezért $f^\circ \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ és

$$\int_{T}^{*} f^\circ \; \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T} \varphi_n^\circ \; \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T'} \varphi_n \; \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}) = \int_{T'}^{*} f \; \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}).$$

Legyen $f \in \mathscr{F}(T'; \overline{\mathbb{R}}_+)$ tetszőleges. Ha nem létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}|T')$, amelyre $f \le h$, akkor

$$\int_{T}^{*} f^\circ \; \mathrm{d}\mu \le +\infty = \int_{T'}^{*} f \; \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}).$$

Ha $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}|T')$ olyan, hogy $f \le h$, akkor $f^\circ \le h^\circ$ és $h^\circ \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, tehát

$$\int_{T}^{*} f^\circ \; \mathrm{d}\mu \le \int_{T}^{*} h^\circ \; \mathrm{d}\mu = \int_{T'}^{*} h \; \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}),$$

amiből következik, hogy

$$\int_T^* f^\circ \, \mathrm{d}\mu \leq \inf_{\substack{h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}|T') \\ f \leq h}} \int_{T'}^* h \, \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}) = \int_{T'}^* f \, \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}).$$

c) Legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{R}$-ben haladó sorozat és $N \subseteq T$ olyan $\mu|_{\mathscr{R}|T'}$-eltűnő halmaz, hogy $T' = N \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)$. Az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat megválasztható úgy, hogy tartalmazás tekintetében monoton növő legyen.

Először megmutatjuk, hogy minden $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ esetén létezik olyan $h' \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}|T')$, hogy $h|_{T'} = h'$ a $\subseteq T' \setminus N$ halmazon. Legyen ugyanis $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat $\mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre $h = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$; ekkor $h|_{T'} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (\varphi_n|_{T'})$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\varphi_n|_{T'} = \bigvee_{m\in\mathbb{N}} (\chi_{E_m}.\varphi_n)|_{T'}$ teljesül a $T' \setminus N$ halmazon, és triviális az, hogy minden $\mathbb{N} \ni m$-re $(\chi_{E_m}.\varphi_n)|_{T'} \in \mathscr{E}_+(T', \mathscr{R}|T')$. Ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $h'_n := \bigvee_{m\in\mathbb{N}} (\chi_{E_m}.\varphi_n)|_{T'} \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}|T')$, így $h' := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} h'_n \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}|T')$, és $h|_{T'} = h'$ a $T' \setminus N$ halmazon.

Legyen $f \in \mathscr{F}(T'; \overline{\mathbb{R}}_+)$ tetszőleges. Ha nem létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, hogy $f^\circ \leq h$, akkor

$$\int_{T'}^* f \, \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}) \leq +\infty = \int_T^* f^\circ \, \mathrm{d}\mu.$$

Legyen $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ olyan, hogy $f^\circ \leq h$, és vegyünk olyan $h' \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}|T')$ függvényt, hogy $h|_{T'} = h'$ a $T' \setminus N$ halmazon, tehát $\mu|_{\mathscr{R}|T'}$-majdnem mindenütt. Ekkor $h' \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}|T')$ és $f = f^\circ|_{T'} \leq h|_{T'}$, tehát b) alapján

$$\int_{T'}^* f \, \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}) \leq \int_{T'}^* h|_{T'} \, \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}) = \int_{T'}^* h' \, \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}) = \int_T^* (h')^\circ \, \mathrm{d}\mu.$$

Ugyanakkor $(h')^\circ = (h|_{T'})^\circ$ nyilvánvalóan teljesül $T \setminus N$-en és b) alapján az $N \subseteq T$ halmaz μ-eltűnő, mert

$$\mu^*(N) = \int_T^* \chi_N^\circ \mathrm{d}\mu \leq \int_{T'}^* \chi_N \, \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}) = (\mu|_{\mathscr{R}|T'})^*(N) = 0.$$

Ebből és a $(h|_{T'})^\circ \leq h$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\int_T^* (h')^\circ \, \mathrm{d}\mu = \int_T^* (h|_{T'})^\circ \, \mathrm{d}\mu \leq \int_T^* h \, \mathrm{d}\mu.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\int_{T'}^* f \, \mathrm{d}(\mu|_{\mathscr{R}|T'}) \leq \inf_{\substack{h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R}) \\ f^\circ \leq h}} \int_T^* h \, \mathrm{d}\mu = \int_T^* f^\circ \, \mathrm{d}\mu. \blacksquare$$

6.5.4. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, $T' \subseteq T$, valamint F Banach-tér. Minden $f : T' \to F$ függvényre jelölje f° az f függvény 0-val vett kiterjesztését T-re. Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(T', \mathscr{R}|T', \theta|_{\mathscr{R}|T'})$, akkor $f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ és*

$$\int_{T'} f \, \mathrm{d}(\theta|_{\mathscr{R}|T'}) = \int_T f^\circ \, \mathrm{d}\theta.$$

Ha létezik megszámlálható sok $\mathscr{R}$-beli halmaz, amelyek uniójaként T' előáll (vagyis $T' \in \mathscr{R}_\sigma$), akkor minden $f : T' \to F$ függvényre

$$f \in \mathscr{L}^1_F(T', \mathscr{R}|T', \theta|_{\mathscr{R}|T'}) \ \Leftrightarrow\ f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta).$$

Bizonyítás. Ha $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}|T'$-ben és $(z_i)_{i\in I}$ ugyanolyan indexhalmazú rendszer F-ben, akkor az előző állítás a) pontja szerint

$$\Big(\sum_{i\in I} z_i.\chi_{E_i}\Big)^\circ = \sum_{i\in I} z_i.\chi^\circ_{E_i} \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}),$$

továbbá

$$\int_T \Big(\sum_{i\in I} z_i.\chi_{E_i}\Big)^\circ \,\mathrm{d}\theta = \int_T \Big(\sum_{i\in I} z_i.\chi^\circ_{E_i}\Big)\mathrm{d}\theta = \sum_{i\in I} z_i.\theta(E_i) =$$
$$= \sum_{i\in I} z_i.(\theta|_{\mathscr{R}|T'})(E_i) = \int_{T'} \Big(\sum_{i\in I} z_i.\chi_{E_i}\Big)\mathrm{d}(\theta|_{\mathscr{R}|T'}).$$

Tehát minden $f \in \mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}|T')$ esetén $f^\circ \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$ és

$$\int_{T'} f \ \mathrm{d}(\theta|_{\mathscr{R}|T'}) = \int_T f^\circ \ \mathrm{d}\theta.$$

Legyen $f \in \mathscr{L}^1_F(T', \mathscr{R}|T', \theta|_{\mathscr{R}|T'})$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}|T')$-ben, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^*_{T'} \|f_n - f\| \ d\Big|\theta|_{\mathscr{R}|T'}\Big| = 0.$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f^\circ_n \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$ és $\int_T f^\circ_n \ \mathrm{d}\theta = \int_{T'} f_n \ \mathrm{d}(\theta|_{\mathscr{R}|T'})$, így

$$\int^*_{T'} \|f_n - f\| \ d\Big|\theta|_{\mathscr{R}|T'}\Big| = \int^*_{T'} \|f_n - f\| \ d(|\theta|)|_{\mathscr{R}|T'} \geq$$
$$\geq \int^*_T \|f^\circ_n - f^\circ\| \ d(|\theta|)|_{\mathscr{R}|T'} = \int^*_T \|f^\circ_n - f^\circ\| \ d\Big|\theta|_{\mathscr{R}|T'}\Big|,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \int^*_T \|f^\circ_n - f^\circ\| \ d\Big|\theta|_{\mathscr{R}|T'}\Big| = 0,$$

vagyis $f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, T)$ és

$$\int_T f^\circ \ \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_T f^\circ_n \ \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_{T'} f_n \ \mathrm{d}(\theta|_{\mathscr{R}|T'}) = \int_{T'} f \ \mathrm{d}(\theta|_{\mathscr{R}|T'}).$$

Most tegyük fel, hogy létezik megszámlálható sok $\mathscr{R}$-beli halmaz, amelyek uniójaként T' előáll. Legyen $f : T' \to F$ olyan függvény, hogy $f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, és vegyünk olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^*_T \|f_n - f^\circ\| \ \mathrm{d}|\theta| = 0.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_n|_{T'} - f\|^\circ = \|(f_n|_{T'})^\circ - f^\circ\| \leq \|f_n - f^\circ\|$, ezért az előző állítás c) pontját alkalmazva a $\mu := |\theta|$ mértékre:

$$\int_{T'}^{*} \|f_n|_{T'} - f\| \, d\Big|\theta|_{\mathscr{R}|T'}\Big| = \int_{T'}^{*} \|f_n|_{T'} - f\| \, d(|\theta|)|_{\mathscr{R}|T'} =$$

$$= \int_{T}^{*} \|f_n|_{T'} - f\|^\circ \, \mathrm{d}|\theta| \leq \int_{T}^{*} \|f_n - f^\circ\| \, \mathrm{d}|\theta|,$$

ami azt jelenti, hogy az $f \in \mathscr{L}_F^1(T', \mathscr{R}|T', \theta_{\mathscr{R}|T'})$ összefüggés bizonyításához elég azt megmutatni, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n|_{T'} \in \mathscr{L}_F^1(T', \mathscr{R}|T', \theta|_{\mathscr{R}|T'})$. Ez viszont így van, mert ha $n \in \mathbb{N}$ és $(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$ olyan monoton növő halmazsorozat, hogy $T' = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} E_m$ és minden $\mathbb{N} \ni m$-re $E_m \in \mathscr{R}$, akkor $f_n|_{T'} = \lim\limits_{m \to \infty} \chi_{E_m}.(f_n|_{T'})$ és minden $\mathbb{N} \ni m$-re nyilvánvalóan $\chi_{E_m}.(f_n|_{T'}) \in \mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}|T')$, valamint $\|\chi_{E_m}.(f_n|_{T'})\| \leq \|f_n|_{T'}\|$ és

$$\int_{T'}^{*} \|f_n|_{T'}\| \, \mathrm{d}|\theta|_{\mathscr{R}|T'}| = \int_{T}^{*} \|f_n|_{T'}\|^\circ \, \mathrm{d}|\theta| \leq \int_{T}^{*} \|f_n\| \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty,$$

így a Lebesgue-tétel alapján $f_n|_{T'} \in \mathscr{L}_F^1(T', \mathscr{R}|T', \theta|_{\mathscr{R}|T'})$. ■

6.6. Gyakorlatok

1. Legyen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n := c_n.\chi_{\left[\frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{n+1}\right[}.$$

Ekkor az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekből álló $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $\mathbb{R}$-en pontonként mindenütt 0-hoz konvergál (*bármilyen* is legyen a $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat!), azonban $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ megválasztható úgy, hogy az

$$\left(\int f_n \, \mathrm{d}\mu_1 \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

sorozat *divergens* legyen $\mathbb{R}$-ben, és úgy is, hogy konvergens, de

$$\int \left(\lim_{n \to \infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu_1 = 0 \neq \lim_{n \to \infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu_1$$

teljesüljön.

2. Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és $p \geq 1$ valós szám.

a) Ha $f \in \mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $c \in \mathbb{R}_+$, akkor $f \wedge c \in \mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T, \mathscr{R}, \theta)$.

b) Ha $f \in \mathscr{L}_\mathbb{R}^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $c \in \mathbb{R}_+^*$, akkor a $\{t \in T | f(t) > c\}$ halmaz θ-integrálható, és fennáll a

$$|\theta|(\{t \in T | f(t) > c\}) \leq \frac{\|f\|_{\theta,p}^p}{c^p}$$

összefüggés (*Csebisev-egyenlőtlenség*).

(*Útmutatás.* a) A VIII. fejezet, 2. pont, **5**. gyakorlat szerint $c \in \mathbb{R}_+$ esetén minden

$\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R}) \ni f$-re $\inf(f,c) \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$, Tehát ha $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R})$-ben, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - f_n|^p \, \mathrm{d}|\theta| = 0,$$

akkor a nyilvánvaló $|\inf(f,c) - \inf(f_n,c)| \leq |f - f_n|$ egyenlőtlenség alapján

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |(f \wedge c) - (f_n \wedge c)|^p \, \mathrm{d}|\theta| = 0$$

is teljesül, tehát $f \wedge c \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$.

b) Legyen $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ és $c \in \mathbb{R}^*_+$. Jelölje $[f > c]$ az $\{t \in T | f(t) > c\}$ halmazt, és legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$f_n := 1_T \wedge (n(f - (f \wedge c))).$$

Az a) állítás alapján $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja eleme $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$-nak, továbbá világos, hogy ez monoton növő függvénysorozat, és fennáll a $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n = \chi_{[f>c]}$ egyenlőség. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $\chi_{[f>c]} \leq \dfrac{|f|^p}{c^p}$, ezért a Levi-tétel alapján $\chi_{[f>c]} \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$. Ebből következik, hogy $\chi_{[f>c]} = \chi^p_{[f>c]} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$, vagyis az $[f > c]$ halmaz θ-integrálható. Ugyanakkor az $\chi_{[f>c]} \leq \dfrac{|f|^p}{c^p}$ függvény-egyenlőtlenségből azonnal kapjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget.)

9. Konkrét példákkal igazoljuk a következő állításokat.

a) Létezik olyan $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, $g : T \to \mathbb{K}$ lokálisan θ-integrálható függvény, F Banach-tér és $f : T \to F$ függvény, hogy $f.g \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$, de $f \notin \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},g.\theta)$.

b) Létezik olyan $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű egy T' halmaz felett, $\pi : T \to T'$ θ-valódi függvény (az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint), F Banach-tér és $f : T' \to F$ függvény, hogy $f \circ \pi \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$, de $f \notin \mathscr{L}^1_F(T',\mathscr{R}',\pi(\theta))$.

7. fejezet

Integrálás szorzatmérték szerint

7.1. Pozitív mértékek szorzata szerinti felső integrál

7.1.1. Lemma. *Legyenek* $(T, \mathscr{R}, \theta)$ *és* $(T', \mathscr{R}', \theta')$ *mértékterek, valamint* F *Banach-tér. Ha* $f \in \mathscr{E}_F(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$*, akkor minden* $t \in T$ *és* $t' \in T'$ *esetén* $f(t, \cdot) \in \mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}')$ *és* $f(\cdot, t') \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$*, továbbá a*

$$T \to F; \quad t \mapsto \int_{T'} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta'(t')$$

függvény eleme $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$*-nek és a*

$$T' \to F; \quad t' \mapsto \int_{T} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta(t)$$

függvény eleme $\mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}')$*-nek, valamint teljesülnek az*

$$\int_T \Big(\int_{T'} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta'(t') \Big) \mathrm{d}\theta(t) = \int_{T'} \Big(\int_T f(t,t')\ \mathrm{d}\theta(t) \Big) \mathrm{d}\theta'(t') = \int_{T \times T'} f(t,t')\ \mathrm{d}(\theta \otimes \theta')(t,t')$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathscr{E}_F(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$, és vegyünk olyan $(E_i)_{i \in I}$ véges rendszert $\mathscr{R}$-ben, és $(E'_i)_{i \in I}$ rendszert $\mathscr{R}'$-ben, valamint $(z_i)_{i \in I}$ rendszert F-ben, amelyekre

$$f = \sum_{i \in I} \chi_{_{E_i \times E'_i}} . z_i .$$

Ekkor minden $t \in T$ és $t' \in T'$ esetén nyilvánvalóan

$$f(t, \cdot) = \sum_{i \in I} \chi_{_{E'_i}} . \Big(\chi_{_{E_i}}(t) . z_i \Big) \in \mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}'),$$

$$f(\cdot, t') = \sum_{i \in I} \chi_{_{E_i}} . \Big(\chi_{_{E'_i}}(t') . z_i \Big) \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}),$$

továbbá

$$\int_{T'} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta'(t') = \sum_{i \in I} \theta'(E'_i) . \Big(\chi_{_{E_i}}(t) . z_i \Big) = \Big(\sum_{i \in I} \chi_{_{E_i}} . (\theta'(E'_i) . z_i) \Big)(t),$$

$$\int_{T} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta(t) = \sum_{i \in I} \theta(E_i) . \Big(\chi_{_{E'_i}}(t') . z_i \Big) = \Big(\sum_{i \in I} \chi_{_{E'_i}} . (\theta(E_i) . z_i) \Big)(t').$$

Ebből látható, hogy a

$$T \to F; \quad t \mapsto \int\limits_{T'} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta'(t')$$

függvény eleme $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-nek és a

$$T' \to F; \quad t' \mapsto \int\limits_{T} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta(t)$$

függvény eleme $\mathscr{E}_F(T',\mathscr{R}')$-nek, továbbá fennállnak az

$$\int\limits_T \Big(\int\limits_{T'} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta'(t')\Big)\mathrm{d}\theta(t) = \sum_{i\in I} \theta(E_i).(\theta'(E_i').z_i) = \sum_{i\in I} (\theta\otimes\theta')(E_i\times E_i').z_i,$$

$$\int\limits_{T'} \Big(\int\limits_{T} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta(t)\Big)\mathrm{d}\theta'(t') = \sum_{i\in I} \theta'(E_i').(\theta(E_i).z_i) = \sum_{i\in I} (\theta\otimes\theta')(E_i\times E_i').z_i,$$

$$\int\limits_{T\times T'} f(t,t')\ \mathrm{d}(\theta\otimes\theta')(t,t') = \sum_{i\in I} (\theta\otimes\theta')(E_i\times E_i').z_i$$

egyenlőségek, amivel az állítást igazoltuk. ■

7.1.2. Állítás. *Legyenek $(T,\mathscr{R},\mu)$ és $(T',\mathscr{R}',\mu')$ pozitív mértékterek.*
a) *Ha $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T\times T',\mathscr{R}\otimes\mathscr{R}')$, akkor minden $t\in T$ és $t'\in T'$ esetén $f(t,\cdot) \in \overline{\mathscr{E}}_+(T',\mathscr{R}')$ és $f(\cdot,t') \in \overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$), továbbá a*

$$T \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad t \mapsto \int\limits_{T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t')$$

függvény eleme $\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$-nek és a

$$T' \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad t' \mapsto \int\limits_{T}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu(t)$$

függvény eleme $\overline{\mathscr{E}}_+(T',\mathscr{R}')$-nek), valamint teljesülnek az

$$\int\limits_T^{*} \Big(\int\limits_{T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) = \int\limits_{T'}^{*} \Big(\int\limits_{T}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t') = \int\limits_{T\times T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t')$$

egyenlőségek.
b) *Ha $f : T\times T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény, akkor teljesülnek az*

$$\int\limits_T^{*} \Big(\int\limits_{T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) \le \int\limits_{T\times T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t'),$$

$$\int\limits_{T'}^{*} \Big(\int\limits_{T}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t') \le \int\limits_{T\times T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t')$$

egyenlőtlenségek.

Bizonyítás. a) Legyen $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$ és vegyünk olyan $\mathscr{E}_+(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatot, amelyre $f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Ha $t \in T$, akkor nyilvánvalóan $f(t,\cdot) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n(t,\cdot)$, és az előző lemma szerint az $(f_n(t,\cdot)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{E}_+(T', \mathscr{R}')$-ben halad és persze monoton növő, így $f(t,\cdot) \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}')$. Ebből az is látszik, hogy minden $t \in T$ esetén

$$\int_{T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t') = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T'}^{*} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t') = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T'} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t').$$

Tehát ha bevezetjük a

$$g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad t \mapsto \int_{T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t')$$

függvényt, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük a

$$g_n : T \to \mathbb{R}_+; \quad t \mapsto \int_{T'} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t')$$

függvényt, akkor írható, hogy $g = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} g_n$, és az előző lemma szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $g_n \in \mathscr{E}_+(T, \mathscr{R})$, továbbá nyilvánvaló, hogy a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő. Ezért $g \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, és az előző lemmában igazolt integrál-egyenlőséget alkalmazva látható, hogy

$$\int_{T}^{*} \Big(\int_{T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T}^{*} \Big(\int_{T'} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T} \Big(\int_{T'} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T\times T'}^{*} f_n(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t') =$$
$$= \int_{T\times T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t').$$

Teljesen hasonló meggondolásokkal kapjuk, hogy minden $t' \in T'$ esetén $f(\cdot,t') \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$, és a

$$T' \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad t' \mapsto \int_{T}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu(t)$$

függvény eleme $\overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}')$-nek, valamint teljesül az

$$\int_{T'}^{*} \Big(\int_{T}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t') = \int_{T\times T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t')$$

egyenlőség.

b) Legyen $f : T \times T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény. Ha nem létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$, hogy $f \leq h$, akkor a felső integrál definíciója szerint

$$\int_{T\times T'}^{*} f(t,t')\ d(\mu\otimes\mu')(t,t') := +\infty,$$

tehát a bizonyítandó egyenlőtlenségek triviálisak.

Tegyük fel, hogy létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$, hogy $f \leq h$, és vegyünk egy ilyen h függvényt. Ha $t \in T$, akkor $f(t, \cdot) \leq h(t, \cdot)$, tehát a μ' szerinti felső integrál monotonitása miatt

$$\int_{T'}^{*} f(t,t')\mathrm{d}\mu'(t') \leq \int_{T'}^{*} h(t,t')\mathrm{d}\mu'(t').$$

Ezért a μ szerinti felső integrál monotonitása folytán

$$\int_{T}^{*}\Big(\int_{T'}^{*} f(t,t')\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) \leq \int_{T}^{*}\Big(\int_{T'}^{*} h(t,t')\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) = \int_{T\times T'}^{*} h(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t'),$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$ miatt az a) alapján

$$\int_{T}^{*}\Big(\int_{T'}^{*} h(t,t')\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) = \int_{T\times T'}^{*} h(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t').$$

Ebből a felső integrál értelmezése szerint azonnal következik az

$$\int_{T}^{*}\Big(\int_{T'}^{*} f(t,t')\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) \leq \inf_{\substack{h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T\times T', \mathscr{R}\otimes\mathscr{R}') \\ f\leq h}} \int_{T\times T'}^{*} h(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t') =$$

$$= \int_{T\times T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t')$$

egyenlőtlenség. Teljesen hasonló meggondolásokkal kapjuk, hogy

$$\int_{T'}^{*}\Big(\int_{T}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t') \leq \int_{T\times T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t'). \ \blacksquare$$

De vigyázzunk arra, hogy az előző állítás feltételei mellett, *tetszőleges* $f : T\times T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény esetében az

$$\int_{T'}^{*}\Big(\int_{T}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t'), \qquad \int_{T}^{*}\Big(\int_{T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t)$$

számok *egymással való* kapcsolatára semmit nem állíthatunk, és lehetséges az, hogy

$$\int_{T'}^{*}\Big(\int_{T}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t') < \int_{T\times T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t'),$$

$$\int_{T}^{*}\Big(\int_{T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) < \int_{T\times T'}^{*} f(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t')$$

(**1**. gyakorlat).

7.1.3. Következmény. *Legyenek* $(T, \mathscr{R}, \theta)$ *és* $(T', \mathscr{R}', \theta')$ *mértékterek.*

a) *Ha* F *normált tér vagy* $F := \overline{\mathbb{R}}_+$*, és az* $f : T \times T' \to F$ *függvény* $\theta \otimes \theta'$*-eltűnő, akkor* θ*-majdnem minden* $t \in T$ *esetén az* $f(t, \cdot) : T' \to F$ *parciális függvény* θ'*-eltűnő, és*

θ'-majdnem minden $t' \in T'$ esetén az $f(\cdot, t') : T \to F$ parciális függvény θ-eltűnő.

b) *Jelölje pr_T (illetve $\mathrm{pr}_{T'}$) a $T \times T' \to T$; $(t, t') \mapsto t$ (illetve $T \times T' \to T'$; $(t, t') \mapsto t'$) kanonikus projekciót. Ha a $H \subseteq T \times T'$ halmaz $\theta \otimes \theta'$-eltűnő halmaz, akkor θ-majdnem minden $t \in T$ pontra a $\mathrm{pr}_{T'}\langle(\{t\} \times T') \cap H\rangle \subseteq T'$ halmaz θ'-eltűnő halmaz, és θ'-majdnem minden $t' \in T'$ pontra a $\mathrm{pr}_T\langle(T \times \{t'\}) \cap H\rangle \subseteq T$ halmaz θ-eltűnő halmaz.*

Bizonyítás. a) Legyen $f : T \times T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvény, amely $\theta \otimes \theta'$-eltűnő. Ekkor $|\theta \otimes \theta'| = |\theta| \otimes |\theta'|$ és az előző állítás b) pontja szerint

$$0 = \int\limits_{T \times T'}^{\quad *} f(t, t') \,\mathrm{d}|\theta \otimes \theta'|(t, t') = \int\limits_{T \times T'}^{\quad *} f(t, t') \,\mathrm{d}(|\theta| \otimes |\theta'|)(t, t') \geq$$

$$\geq \int\limits_T^* \Big(\int\limits_{T'}^* f(t, t') \,\mathrm{d}|\theta'|(t') \Big) \mathrm{d}|\theta|(t) \geq 0,$$

vagyis

$$\int\limits_T^* \Big(\int\limits_{T'}^* f(t, t') \,\mathrm{d}|\theta'|(t') \Big) \mathrm{d}|\theta|(t) = 0.$$

Ebből következik, hogy θ-majdnem minden $t \in T$ esetén

$$\int\limits_{T'}^* f(t, t') \,\mathrm{d}|\theta'|(t') = 0,$$

vagyis θ-majdnem minden $t \in T$ esetén az $f(t, \cdot)$ függvény θ'-eltűnő. Hasonlóan, a

$$\int\limits_{T \times T'}^{\quad *} f(t, t') \,\mathrm{d}|\theta \otimes \theta'|(t, t') \geq \int\limits_{T'}^* \Big(\int\limits_T^* f(t, t') \,\mathrm{d}|\theta|(t) \Big) \,\mathrm{d}|\theta'|(t')$$

egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy θ'-majdnem minden $t' \in T'$ esetén az $f(\cdot, t') : T \to F$ függvény θ-eltűnő.

Ha F normált tér, és $f : T \times T' \to F$ függvény, akkor az előző eredményt alkalmazva az $\|f\| : T \times T' \to \mathbb{R}_+$ függvényre kapjuk, hogy θ-majdnem minden $t \in T$ esetén az $f(t, \cdot) : T' \to F$ függvény θ'-eltűnő, és θ'-majdnem minden $t' \in T'$ esetén az $f(\cdot, t') : T \to F$ függvény θ-eltűnő.

b) Ha $H \subseteq T \times T'$, akkor minden $t \in T$ és $t' \in T'$ esetén

$$\chi_H(t, \cdot) = \chi_{\mathrm{pr}_{T'}\langle(\{t\} \times T') \cap H\rangle},$$

$$\chi_H(\cdot, t') = \chi_{\mathrm{pr}_T\langle(T \times \{t'\}) \cap H\rangle}.$$

Ezért az a) eredményeit alkalmazva a $\chi_H : T \times T' \to \mathbb{R}_+$ függvényre azonnal kapjuk az állítást. ∎

7.1.4. Jelölés. *Ha T és T' halmazok, $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ és $f' : T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvények, akkor*

$$f \otimes f' : T \times T' \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad (t, t') \mapsto f(t) f'(t').$$

Ha T és T' halmazok, K test, valamint $f : T \to K$ és $f' : T' \to K$ függvények, akkor

$$f \otimes f' : T \times T' \to K; \quad (t, t') \mapsto f(t) \cdot f'(t').$$

Megjegyezzük, hogy ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $(T', \mathscr{R}', \theta')$ mindketten $\mathbb{K}$-mértékterek és $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$, $f' \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T', \mathscr{R}')$, akkor

$$\int\limits_{T\times T'} (f \otimes f')\ \mathrm{d}(\theta \otimes \theta') = \Big(\int\limits_{T} f\ \mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int\limits_{T'} f'\ \mathrm{d}\theta'\Big).$$

Legyen ugyanis $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}$-ben és $(c_i)_{i\in I}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszer úgy, hogy $f = \sum\limits_{i\in I} c_i.\chi_{_{E_i}}$. Legyen továbbá $(E'_j)_{j\in J}$ véges rendszer $\mathscr{R}'$-ben és $(c'_j)_{j\in J}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszer úgy, hogy $f' = \sum\limits_{j\in J} c'_j.\chi_{_{E'_j}}$. Ekkor a definíció szerint

$$f \otimes f' = \sum_{(i,j)\in I\times J} (c_i c'_j).\chi_{_{E_i}} \otimes \chi_{_{E'_j}} = \sum_{(i,j)\in I\times J} (c_i c'_j)\chi_{_{E_i\times E'_j}},$$

következésképpen

$$\int\limits_{T\times T'} (f \otimes f')\ \mathrm{d}(\theta \otimes \theta') = \sum_{(i,j)\in I\times J} c_i c'_j (\theta\otimes\theta')(E_i \times E'_j) = \sum_{(i,j)\in I\times J} c_i c'_j \mathrm{d}\theta(E_i)\theta'(E'_j) =$$

$$= \Big(\sum_{i\in I} c_i\theta(E_i)\Big)\Big(\sum_{j\in J} c'_j\theta(E'_j)\Big) = \Big(\int\limits_{T} f\ \mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int\limits_{T'} f'\ \mathrm{d}\theta'\Big).$$

A következő állítás bizonyításában felhasználjuk azt, hogy ha $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitiv mértéktér és $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény, akkor

$$\int\limits_{T}^{*} (+\infty).f\ \mathrm{d}\mu = (+\infty)\cdot \int\limits_{T}^{*} f\ \mathrm{d}\mu$$

(természetesen a $(+\infty).0 := 0$ konvencióval). Ez azonnal következik a felső integrál pozitív homogenitásából és monoton σ-folytonosságából, figyelembe véve azt, hogy $(+\infty).f = \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} (n.f)$, hiszen

$$\int\limits_{T}^{*} (+\infty).f\ \mathrm{d}\mu = \int\limits_{T}^{*} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (n.f)\ \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(n.\int\limits_{T}^{*} f\ \mathrm{d}\mu\Big) = (+\infty)\cdot\int\limits_{T}^{*} f\ \mathrm{d}\mu.$$

7.1.5. Állítás. *Legyenek $(T, \mathscr{R}, \mu)$ és $(T', \mathscr{R}', \mu')$ pozitív mértékterek.*

a) *Ha $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(T, \mathscr{R})$ és $f' \in \overline{\mathscr{E}}_+(T', \mathscr{R}')$, akkor*

$$\Big(\int\limits_{T}^{*} f\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int\limits_{T'}^{*} f'\ \mathrm{d}\mu'\Big) = \int\limits_{T\times T'}^{*} (f \otimes f')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu').$$

b) *Ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $f' : T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvények, akkor*

$$\Big(\int\limits_{T}^{*} f\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int\limits_{T'}^{*} f'\ \mathrm{d}\mu'\Big) \leq \int\limits_{T\times T'}^{*} (f \otimes f')\ d(\mu\otimes\mu'),$$

és ha az

$$\Big(\int\limits_{T}^{*} f\ \mathrm{d}\mu, \int\limits_{T'}^{*} f'\ \mathrm{d}\mu'\Big)$$

pár nem egyenlő a $(0,+\infty)$ vagy $(+\infty,0)$ párral, akkor

$$\Big(\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'\Big) = \int_{T\times T'}^* (f\otimes f')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu').$$

Bizonyítás. a) Legyen $f\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ és $f'\in\overline{\mathscr{E}}_+(T',\mathscr{R}')$, és vegyünk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő függvénysorozatot $\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben, hogy $f=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n$, valamint olyan $(\varphi'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő függvénysorozatot $\mathscr{E}_+(T',\mathscr{R}')$-ben, hogy $f'=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\varphi'_n$. Ekkor $(\varphi_n\otimes\varphi'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő függvénysorozat $\mathscr{E}_+(T\times T',\mathscr{R}\otimes\mathscr{R}')$-ben, amelyre $f\otimes f'=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(\varphi_n\otimes\varphi'_n)$. Ezért

$$\Big(\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'\Big) = \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_T \varphi_n\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{T'}\varphi'_n\ \mathrm{d}\mu'\Big) =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\Big(\int_T \varphi_n\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_T \varphi'_n\ \mathrm{d}\mu'\Big)\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{T\times T'}(\varphi_n\otimes\varphi'_n)\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu') =$$
$$= \int_{T\times T'}^* (f\otimes f')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu').$$

b) Ha $f: T\to\overline{\mathbb{R}}_+$, $f': T'\to\overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvények, akkor

$$\int_T^*\Big(\int_{T'}^*(f\otimes f')(t,t')\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) \le \int_{T\times T'}^*(f\otimes f')(t,t')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t'),$$

és világos, hogy

$$\int_T^*\Big(\int_{T'}^*(f\otimes f')(t,t')\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) = \int_T^*\Big(\int_{T'}^* f(t)f'(t')\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) =$$
$$= \int_T^* f(t)\Big(\int_{T'}^* f'(t')\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) = \Big(\int_T^* f(t)\ \mathrm{d}\mu(t)\Big)\Big(\int_{T'}^* f'(t')\ \mathrm{d}\mu'(t')\Big),$$

következésképpen

$$\Big(\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'\Big) \le \int_{T\times T'}^* (f\otimes f')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu').$$

Most tegyük fel, hogy az

$$\Big(\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu, \int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'\Big)$$

pár nem egyenlő a $(0,+\infty)$ vagy $(+\infty,0)$ párral. Ha az $\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu$ és $\int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'$ valamelyike $+\infty$, akkor a hipotézis szerint a másik 0-nál nagyobb elem $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban, ezért

$$\Big(\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'\Big) := +\infty,$$

így az imént bizonyított egyenlőtlenség alapján

$$\Big(\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'\Big) = \int_{T\times T'}^* (f\otimes f')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu') = +\infty.$$

Ezért feltehető, hogy $\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu$ és $\int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'$ *mindketten* végesek. Legyenek $h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})$ és $h'\in\overline{\mathscr{E}}_+(T',\mathscr{R}')$ olyan függvények, hogy $f\leq h$ és $f'\leq h'$. Ekkor $f\otimes f'\leq h\otimes h'$, ezért az a) alapján

$$\int_{T\times T'}^* (f\otimes f')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu') \leq \int_{T\times T'}^* (h\otimes h')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu') = \Big(\int_T^* h\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_{T'}^* h'\ \mathrm{d}\mu'\Big),$$

amiből következik, hogy

$$\int_{T\times T'}^* (f\otimes f')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu') \leq \inf_{\substack{(h,h')\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R})\times\overline{\mathscr{E}}_+(T',\mathscr{R}')\\ f\leq h, f'\leq h'}} \Big(\int_T^* h\mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_{T'}^* h'\mathrm{d}\mu'\Big)$$
$$= \Big(\inf_{h\in\overline{\mathscr{E}}_+(T,\mathscr{R});\ f\leq h} \int_T^* h\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\inf_{h'\in\overline{\mathscr{E}}_+(T',\mathscr{R}');\ f'\leq h'} \int_{T'}^* h'\ \mathrm{d}\mu'\Big) = \Big(\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'\Big)$$

is teljesül. ■

Azonban előfordulhat, hogy az $\Big(\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu, \int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'\Big)$ pár egyenlő a $(0,+\infty)$ párral, de $\int_{T\times T'}^* (f\otimes f')\ \mathrm{d}(\mu\otimes\mu') = +\infty$, ugyanakkor a $0\cdot(+\infty) := 0$ konvenció alapján $\Big(\int_T^* f\ \mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_{T'}^* f'\ \mathrm{d}\mu'\Big) = 0$ (**1**. gyakorlat).

7.1.6. Következmény. *Legyenek $(T,\mathscr{R},\mu)$ és $(T',\mathscr{R}',\mu')$ pozitív mértékterek. Ha $E\subseteq T$ és $E'\subseteq T'$ olyan halmazok, hogy a $(\mu^*(E),\mu'^*(E'))$ pár nem egyenlő a $(0,+\infty)$ vagy $(+\infty,0)$ párral, akkor*

$$\Big(\mu\otimes\mu'^*\Big)(E\times E') = \mu^*(E)\cdot\mu'^*(E').$$

Bizonyítás. Elég az iménti állítást alkalmazni a $\chi_{E\times E'} = \chi_E\otimes\chi_{E'}$ függvényre. ■

7.1.7. Állítás. *Legyenek $(T,\mathscr{R},\theta)$ és $(T',\mathscr{R}',\theta')$ mértékterek. Ha $f\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$ és $f'\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T',\mathscr{R}',\theta')$, akkor $f\otimes f'\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T\times T',\mathscr{R}\otimes\mathscr{R}',\theta\otimes\theta')$ és*

$$\int_{T\times T'} (f\otimes f')\ \mathrm{d}(\theta\otimes\theta') = \Big(\int_T f\ \mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_{T'} f'\ \mathrm{d}\theta'\Big).$$

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R})$-ben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\int_T^* |f_n - f|\ \mathrm{d}|\theta| = 0$, és legyen $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T',\mathscr{R}')$-ben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\int_T^* |f'_n - f'|\ \mathrm{d}|\theta'| = 0$. Minden

$n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \otimes f_n' \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$ és

$$\int_{T\times T'} (f_n \otimes f_n')\ \mathrm{d}(\theta \otimes \theta) = \Big(\int_T f_n\ \mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_{T'} f_n'\ \mathrm{d}\theta'\Big),$$

ezért

$$\Big(\int_T f\ \mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_{T'} f'\ \mathrm{d}\theta'\Big) = \Big(\lim_{n\to\infty}\int_T f_n\ \mathrm{d}\theta\Big)\Big(\lim_{n\to\infty}\int_{T'} f_n'\ \mathrm{d}\theta'\Big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\int_T f_n\ \mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_{T'} f_n'\ \mathrm{d}\theta'\Big) = \lim_{n\to\infty}\int_{T\times T'} (f_n \otimes f_n')\ \mathrm{d}(\theta \otimes \theta).$$

Tehát elég azt igazolni, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{T\times T'} |f_n \otimes f_n' - f \otimes f'|\ \mathrm{d}|\theta \otimes \theta'| = 0.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $f_n \otimes f_n' - f \otimes f' = (f_n - f) \otimes (f_n' - f') + (f_n - f) \otimes f' + f \otimes (f_n' - f')$ miatt fennáll az

$$|f_n \otimes f_n' - f \otimes f'| \leq |f_n - f| \otimes |f_n' - f'| + |f_n - f| \otimes |f'| + |f| \otimes |f_n' - f'|$$

egyenlőtlenség, ezért $|\theta \otimes \theta'| = |\theta| \otimes |\theta'|$ alapján írható, hogy

$$\int_{T\times T'}^{*} |f_n \otimes f_n' - f \otimes f'|\ \mathrm{d}|\theta \otimes \theta'| = \int_{T\times T'}^{*} |f_n \otimes f_n' - f \otimes f'|\ \mathrm{d}(|\theta| \otimes |\theta'|) \leq$$
$$\leq \int_{T\times T'}^{*} (|f_n - f| \otimes |f_n' - f'|)\ \mathrm{d}(|\theta| \otimes |\theta'|) + \int_{T\times T'}^{*} (|f_n - f| \otimes |f'|)\ \mathrm{d}(|\theta| \otimes |\theta'|) +$$
$$+ \int_{T\times T'}^{*} (|f| \otimes |f_n' - f'|)\ \mathrm{d}(|\theta| \otimes |\theta'|) = \Big(\int_T^{*} |f_n - f|\ \mathrm{d}|\theta|\Big)\Big(\int_{T'}^{*} |f_n' - f'|\ \mathrm{d}|\theta'|\Big) +$$
$$+ \Big(\int_T^{*} |f_n - f|\ \mathrm{d}|\theta|\Big)\Big(\int_{T'}^{*} |f'|\ \mathrm{d}|\theta'|\Big) + \Big(\int_T^{*} |f|\ \mathrm{d}|\theta|\Big)\Big(\int_{T'}^{*} |f_n' - f'|\ \mathrm{d}|\theta'|\Big),$$

hiszen az $\int_T^{*} |f_n - f|\ \mathrm{d}|\theta|$, $\int_{T'}^{*} |f'|\ \mathrm{d}|\theta'|$, $\int_{T'}^{*} |f'|\ \mathrm{d}|\theta'|$ és $\int_T^{*} |f|\ \mathrm{d}|\theta|$ felső integrálok mind *végesek*. Ebből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{T\times T'} |f_n \otimes f_n' - f \otimes f'|\ \mathrm{d}|\theta \otimes \theta'| = 0$. ■

7.2. Lebesgue–Fubini-tétel

7.2.1. Tétel. (Lebesgue–Fubini-tétel) *Legyenek $(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $(T', \mathscr{R}', \theta')$ mértékterek, F Banach-tér, valamint $f \in \mathscr{L}_F^1(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}', \theta \otimes \theta')$.*

a) θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t, \cdot) \in \mathscr{L}_F^1(T', \mathscr{R}', \theta')$, és ha h jelöli azt a $T \to F$ függvényt, amelyre $t \in T$ esetén

$$h(t) := \begin{cases} \displaystyle\int_{T'} f(t, t')\ \mathrm{d}\theta'(t') & , \text{ ha } f(t, \cdot) \in \mathscr{L}_F^1(T', \mathscr{R}', \theta'), \\ 0 & , \text{ ha } f(t, \cdot) \notin \mathscr{L}_F^1(T', \mathscr{R}', \theta'), \end{cases}$$

akkor $h \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ *és*

$$\int_T h \, \mathrm{d}\theta = \int_{T \times T'} f \, \mathrm{d}(\theta \otimes \theta').$$

b) θ'*-majdnem minden* $t' \in T'$ *esetén* $f(\cdot, t') \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$*, és ha* h' *jelöli azt a* $T' \to F$ *függvényt, amelyre* $t' \in T'$ *esetén*

$$h'(t') := \begin{cases} \displaystyle\int_T f(t, t') \, \mathrm{d}\theta(t) & , \text{ ha } f(\cdot, t') \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta), \\ 0 & , \text{ ha } f(\cdot, t') \notin \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta), \end{cases}$$

akkor $h' \in \mathscr{L}^1_F(T', \mathscr{R}', \theta')$ *és*

$$\int_{T'} h' \, \mathrm{d}\theta' = \int_{T \times T'} f \, \mathrm{d}(\theta \otimes \theta').$$

Bizonyítás. Az állítást már bizonyítottuk arra az esetre, amikor az $f : T \times T' \to F$ leképezés $\mathscr{R} \otimes \mathscr{R}'$-lépcsősfüggvény; sőt még azt is láttuk, hogy ebben az esetben minden $(t, t') \in T \times T'$ esetén $f(t, \cdot) \in \mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}')$ és $f(\cdot, t') \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$, valamint az állításban bevezetett h és h' függvényekre $h \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$ és $h' \in \mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}')$ teljesül.

Legyen $f \in \mathscr{L}^1_F(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}', \theta \otimes \theta')$ tetszőleges, és a Riesz–Fischer-tétel alkalmazásával vegyünk olyan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_F(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$-ben, valamint olyan $g : T \times T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $T \times T'$ halmazon $\theta \otimes \theta'$-majdnem mindenütt és a $\| \cdot \|_{\theta \otimes \theta', 1}$ félnorma szerint is, valamint $\displaystyle\int^*_{T \times T'} g \, \mathrm{d}|\theta \otimes \theta'| < +\infty$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f_n\| \leq g$ a $T \times T'$ halmazon mindenütt. Ekkor $\displaystyle\int^*_{T \times T'} g \, \mathrm{d}|\theta \otimes \theta'| < +\infty$ és $|\theta \otimes \theta'| = |\theta| \otimes |\theta'|$ miatt

$$\int^*_T \Big(\int^*_{T'} g(t, t') \, \mathrm{d}|\theta'|(t') \Big) \, \mathrm{d}|\theta|(t) < +\infty,$$
$$\int^*_{T'} \Big(\int^*_{T} g(t, t') \, \mathrm{d}|\theta|(t) \Big) \, \mathrm{d}|\theta'|(t') < +\infty,$$

is teljesül, ezért az

$$A := \Big\{ t \in T \;\Big|\; \int^*_{T'} g(t, t') \, \mathrm{d}|\theta'|(t') = +\infty \Big\}$$
$$A' := \Big\{ t' \in T' \;\Big|\; \int^*_{T} g(t, t') \, \mathrm{d}|\theta|(t) = +\infty \Big\}$$

halmazok olyanok, hogy $|\theta|^*(A) = 0$ és $|\theta'|^*(A') = 0$. Továbbá, ha H jelöli azon $(t, t') \in T \times T'$ pontok halmazát, amelyekre az $(f_n(t, t'))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat nem konvergál $f(t, t')$-höz F-ben, akkor a hipotézis szerint a H halmaz $\theta \otimes \theta'$-eltűnő halmaz, így a

$$B := \{ t \in T \mid |\theta'|^*(\mathrm{pr}_{T'} \langle H \cap (\{t\} \times T') \rangle) \neq 0 \}$$
$$B' := \{ t' \in T' \mid |\theta|^*(\mathrm{pr}_{T} \langle H \cap (T \times \{t'\}) \rangle) \neq 0 \}$$

halmazok olyanok, hogy $|\theta|^*(B) = 0$ és $|\theta'|^*(B') = 0$.

Ha $t \in T \setminus (A \cup B)$, akkor a $g(t, \cdot) : T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre $\int\limits_{T'}^{*} g(t,t')\ \mathrm{d}|\theta'|(t') < +\infty$ teljesül, és a

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_{T'}\langle H \cap (\{t\} \times T')\rangle &= \{t' \in T' \mid (t,t') \in H\} = \\ &= \{t' \in T' \mid (f_n(t,t'))_{n\in\mathbb{N}} \text{ nem konvergál } f(t,t')\text{-höz } F\text{-ben}\}\end{aligned}$$

halmaz θ'-eltűnő halmaz, vagyis ekkor az $\mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}')$-ben haladó $(f_n(t,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat θ'-majdnem mindenütt konvergál az $f(t,\cdot)$ parciális függvényhez. Ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_n(t,\cdot)\| \leq g(t,\cdot)$ a T' halmazon mindenütt teljesül. Ezért a Lebesgue-tétel alapján kapjuk, hogy minden $t \in T \setminus (A \cup B)$ pontra $f(t,\cdot) \in \mathscr{L}^1_F(T', \mathscr{R}', \theta')$, és az $(f_n(t,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $f(t,\cdot)$-hoz a $\|\cdot\|_{\theta',1}$ félnorma szerint is, ezért

$$\int\limits_{T'} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta'(t') = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{T'} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\theta'(t').$$

Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy ha $t \in T' \setminus (A' \cup B')$, akkor $f(\cdot,t') \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, és az $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben haladó $(f_n(\cdot,t'))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $f(\cdot,t')$-höz a T halmazon θ-majdnem mindenütt és a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint is, ezért

$$\int\limits_{T} f(t,t')\ \mathrm{d}\theta(t) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{T} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\theta(t).$$

Legyenek most minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$h_n : T \to F; \quad t \mapsto \int\limits_{T'} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\theta'(t'),$$

$$h'_n : T' \to F; \quad t' \mapsto \int\limits_{T} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\theta(t).$$

Tudjuk, hogy a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja eleme $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-nek, és a $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja eleme $\mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}')$-nek. Továbbá, a h és h' függvények értelmezése és az iménti integrál-egyenlőségek alapján mondható, hogy $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontonként konvergál h-hoz a $T\setminus(A\cup B)$ halmazon, tehát θ-majdnem mindenütt, valamint $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontonként konvergál h'-höz a $T'\setminus(A'\cup B')$ halmazon, tehát θ'-majdnem mindenütt. Ugyanakkor minden $t \in T$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|h_n(t)\| = \Big\| \int\limits_{T'} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\theta'(t') \Big\| \leq \int\limits_{T'}^{*} \|f_n(t,t')\|\ \mathrm{d}|\theta'|(t') \leq \int\limits_{T'}^{*} g(t,t')\ \mathrm{d}|\theta'|(t'),$$

és hasonlóan; $t' \in T'$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|h'_n(t')\| = \Big\| \int\limits_{T} f_n(t,t')\ \mathrm{d}\theta(t) \Big\| \leq \int\limits_{T}^{*} \|f_n(t,t')\| \mathrm{d}|\theta|(t) \leq \int\limits_{T}^{*} g(t,t')\ \mathrm{d}|\theta|(t).$$

Ugyanakkor

$$\int\limits_{T}^{*} \Big(\int\limits_{T'}^{*} g(t,t')\ \mathrm{d}|\theta'|(t') \Big) \mathrm{d}|\theta|(t) < +\infty,$$

$$\int\limits_{T'}^{*} \Big(\int\limits_{T}^{*} g(t,t')\ \mathrm{d}|\theta|(t) \Big)\ \mathrm{d}|\theta'|(t') < +\infty$$

teljesül, ezért ismét a Lebesgue-tételt alkalmazva kapjuk, hogy $h \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $h' \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}', \theta')$, továbbá a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál h-hoz a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint, és a $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál h'-höz a $\|\cdot\|_{\theta',1}$ félnorma szerint, tehát

$$\int\limits_T h \,\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int\limits_T h_n \,\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int\limits_T \Big(\int\limits_{T'} f_n(t,t') \,\mathrm{d}\theta'(t') \Big) \mathrm{d}\theta(t),$$
$$\int\limits_{T'} h' \,\mathrm{d}\theta' = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{T'} h'_n \,\mathrm{d}\theta' = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{T'} \Big(\int\limits_{T} f_n(t,t') \,\mathrm{d}\theta(t) \Big) \mathrm{d}\theta'(t').$$

De láttuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int\limits_T \Big(\int\limits_{T'} f_n(t,t') \,\mathrm{d}\theta'(t') \Big) \mathrm{d}\theta(t) = \int\limits_{T\times T'} f_n \,\mathrm{d}(\theta\otimes\theta') = \int\limits_{T'} \Big(\int\limits_{T} f_n(t,t') \,\mathrm{d}\theta(t) \Big) \mathrm{d}\theta'(t'),$$

továbbá fennáll az

$$\int\limits_{T\times T'} f \,\mathrm{d}(\theta\otimes\theta') = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{T\times T'} f_n \,\mathrm{d}(\theta\otimes\theta')$$

egyenlőség, mert az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta\otimes\theta',1}$ félnorma szerint. Ezért

$$\int\limits_T h \,\mathrm{d}\theta = \int\limits_{T\times T'} f \,\mathrm{d}(\theta\otimes\theta') = \int\limits_{T'} h' \,\mathrm{d}\theta',$$

és ezt kellett bizonyítani. ■

Megjegyezzük, hogy a tételben bevezetett h és h' függvény integráljait gyakran a kevésbé pontos

$$\int\limits_T h \,\mathrm{d}\theta = \int\limits_T \Big(\int\limits_{T'} f(t,t') \,\mathrm{d}\theta'(t') \Big) \,\mathrm{d}\theta(t),$$
$$\int\limits_{T'} h' \,\mathrm{d}\theta' = \int\limits_{T'} \Big(\int\limits_{T} f(t,t') \,\mathrm{d}\theta(t) \Big) \,\mathrm{d}\theta'(t')$$

szimbólumokkal jelöljük, és az f függvény *kettős integráljainak* nevezzük. Tehát ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $(T', \mathscr{R}', \theta')$ mértékterek, F Banach-tér, és $f \in \mathscr{L}^1_F(T\times T', \mathscr{R}\otimes\mathscr{R}', \theta\otimes\theta')$, akkor azt mondhatjuk, hogy f-nek *léteznek* a kettős integráljai, és azt írhatjuk, hogy

$$\int\limits_T \Big(\int\limits_{T'} f(t,t') \,\mathrm{d}\theta'(t') \Big) \,\mathrm{d}\theta(t) = \int\limits_{T'} \Big(\int\limits_{T} f(t,t') \,\mathrm{d}\theta(t) \Big) \,\mathrm{d}\theta'(t') = \int\limits_{T\times T'} f(t,t') \,\mathrm{d}(\theta\otimes\theta')(t,t').$$

Ebből az is látható, hogy ha $f : T\times T' \to F$ olyan függvény, amelynek nem létezik valamelyik kettős integrálja, vagy létezik mindkét kettős integrálja, de azok nem egyenlők, akkor f nem lehet integrálható a szorzatmérték szerint. Ugyanakkor előfordulhat az, hogy f-nek mindkét kettős integrálja létezik, és azok egyenlők, de f nem integrálható a szorzatmérték szerint (**2**. gyakorlat).

7.3. Gyakorlatok

1. Legyen $T := T' := \mathbb{R}$, $\mathscr{R} := \mathscr{R}_{\mathbb{R}}$ és $\mathscr{R}'$ az $\mathbb{R}$ véges részhalmazainak halmazgyűrűje. Jelölje μ a Lebesgue-mértéket $\mathbb{R}$ felett, és μ' az $\mathbb{R}$ halmaz számláló-mértékét. Ekkor minden $t \in T$ esetén a $\{t\}$ halmaz μ-eltűnő halmaz, de $(\mu \otimes \mu')^*(\{t\} \times T') = +\infty$, vagyis

$$0 =: 0 \cdot (+\infty) = \Big(\int^* \chi_{\{t\}} \, \mathrm{d}\mu \Big) \Big(\int^* \chi_{T'} \, \mathrm{d}\mu' \Big) < \int^* \Big(\chi_{\{t\}} \otimes \chi_{T'} \Big) \, \mathrm{d}(\mu \otimes \mu') = +\infty.$$

(*Útmutatás.* Ha $t \in T$, akkor *nem létezik* olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}', \mu \otimes \mu')$, amelyre $\chi_{\{t\}} \otimes \chi_{T'} \leq h$.)

2. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük a következő halmazokat:

$$A'_n := \Big[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}} \Big[, \quad A''_n := \Big[\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}} \Big[,$$
$$B'_n := A'_n \times A'_n, \quad \mathrm{B}''_n := A''_n \times A''_n, \quad C'_n := A'_n \times A''_n, \quad C''_n := A''_n \times A'_n.$$

Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $(t, t') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esetén

$$f(t, t') := \begin{cases} 4^{n+1} & , \text{ha } (t, t') \in \mathrm{B}'_n \times \mathrm{B}''_n, \\ -4^{n+1} & , \text{ha } (t, t') \in C'_n \times C''_n, \\ 0 & , \text{egyébként.} \end{cases}$$

Jelölje $\mathscr{R}$ a standard halmazgyűrűt $\mathbb{R}$ felett, és legyen μ az egydimenziós Lebesgue-mérték. Ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ és $t' \in \mathbb{R}$ esetén $f(t, \cdot), f(\cdot, t') \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}, \mu)$. Továbbá, minden $\mathbb{R} \ni t$-re $\int\limits_{\mathbb{R}} f(t, t') \, \mathrm{d}\mu(t') = 0$, és minden $\mathbb{R} \ni t'$-re $\int\limits_{\mathbb{R}} f(t, t') \, \mathrm{d}\mu(t) = 0$, tehát fennáll az

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} f(t, t') \, \mathrm{d}\mu(t') \Big) \, \mathrm{d}\mu(t) = 0 = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} f(t, t') \, \mathrm{d}\mu(t) \Big) \, \mathrm{d}\mu(t')$$

egyenlőség, azonban $f \notin \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}, \mu \otimes \mu)$.
(*Útmutatás.* Ha $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}, \mu \otimes \mu)$ teljesülne, akkor

$$|f| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}, \mu \otimes \mu)$$

is igaz volna, ugyanakkor könnyen kiszámítható, hogy

$$\int^*_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f| \, \mathrm{d}(\mu \otimes \mu) = +\infty,$$

ezért $f \notin \mathscr{F}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}, \mu \otimes \mu)$.)

3. Legyenek $(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $(T', \mathscr{R}', \theta')$ mértékterek, F, G, H Banach-terek és $u : F \times G \to H$ folytonos bilineáris operátor. Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $f' \in \mathscr{L}^1_G(T', \mathscr{R}', \theta')$, akkor az

$$u \circ (f \times f') : T \times T' \to H; \quad (t, t') \mapsto u(f(t), f'(t'))$$

függvényre $u \circ (f \times f') \in \mathscr{L}^1_H(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}', \theta \otimes \theta')$ és

$$\int\limits_{T \times T'} \Big(u \circ (f \times f')\Big) \, \mathrm{d}(\theta \otimes \theta') = u\Big(\int\limits_T f \, \mathrm{d}\theta, \int\limits_{T'} f' \, \mathrm{d}\theta'\Big)$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Értelemszerű módosításokkal másoljuk le az analóg állítás (7.1.7.) bizonyítását abban az esetben, amikor $F := G := H := \mathbb{K}$ és u a szorzás $\mathbb{K}$-ban, amikor nyilvánvalóan $u \circ (f \times f') = f \otimes f'$.)

4. Legyenek $(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $(T', \mathscr{R}', \theta')$ mértékterek, F Banach-tér, $p \geq 1$ valós szám, valamint $f \in \mathscr{L}^p_F(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}', \theta \otimes \theta')$. Ekkor θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t, \cdot) \in \mathscr{L}^p_F(T', \mathscr{R}', \theta')$, és θ'-majdnem minden $t' \in T'$ esetén $f(\cdot, t') \in \mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$.

(*Útmutatás.* A Riesz–Fischer-tétel alkalmazásával vegyünk olyan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_F(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$-ben, valamint olyan $g : T \times T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $T \times T'$ halmazon $\theta \otimes \theta'$-majdnem mindenütt és a $\| \cdot \|_{\theta \otimes \theta', p}$ félnorma szerint is, valamint $\int\limits_{T \times T'}^{*} g^p \, \mathrm{d}|\theta \otimes \theta'| < +\infty$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f_n\| \leq g$ a $T \times T'$ halmazon mindenütt. Ugyanúgy. mint a Lebesgue-Fubini tétel bizonyításában kapjuk, hogy θ-majdnem minden $t \in T$ esetén az $\mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}')$-ben haladó $(f_n(t, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat a T' halmazon pontonként θ'-majdnem mindenütt konvergál az $f(t, \cdot)$ pariciális függvényhez, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f_n(t, \cdot)\| \leq g(t, \cdot)$ a T' halmazon mindenütt, valamint $\int\limits_{T'}^{*} g^p(t, t') \, \mathrm{d}|\theta'|(t') < +\infty$. Ezért a Lebesgue-tétel alapján θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t, \cdot) \in \mathscr{L}^p_F(T', \mathscr{R}', \theta')$.)

8. fejezet

Mérhető függvények és az integrálhatóság kritériuma

8.1. Mérhető függvények alaptulajdonságai

8.1.1. Definíció. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér. Ha F normált tér, akkor egy $f : T \to F$ függvényt θ-**mérhetőnek** nevezünk, ha létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Egy $E \subseteq T$ halmazt θ-**mérhetőnek** mondunk, ha a $\chi_E : T \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvény θ-mérhető.*

Példák mérhető függvényekre.

1) Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett és F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor természetesen minden $T \to F$ $\mathscr{R}$-lépcsősfüggvény θ-mérhető, minden $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték esetében.

2) Ha $n \in \mathbb{N}$ és F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor minden $f : \mathbb{R}^n \to F$ *folytonos végtelenben eltűnő* függvényhez létezik olyan $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_{\mathbb{R}^n})$-ben, amely *egyenletesen konvergál* f-hez $\mathbb{R}^n$-en (**MES** 5.2.3.), ezért *minden* $\theta : \mathscr{R}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{K}$ mértékre az f függvény θ-mérhető. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \to F$ függvény *univerzálisan mérhető*. Később megmutatjuk, hogy minden $\mathbb{R}^n \to F$ *folytonos függvény* univerzálisan mérhető, még akkor is ha nem végtelenben eltűnő (**GEO** 1.1.4.).

3) Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és F Banach-tér. A Riesz–Fischer-tételből (3.4.3.) következik, hogy minden $p \geq 1$ valós számra, az $\mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ függvénytér minden eleme θ-mérhető függvény. Speciálisan, a T halmaz minden θ-integrálható részhalmaza θ-mérhető.

4) Legyen T halmaz és $\mathscr{R} := \{\emptyset\}$. Ekkor bármely F normált térre $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}) = \{0\}$ és minden $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mértékre egy $E \subseteq T$ halmaz pontosan akkor θ-eltűnő halmaz, ha $E = \emptyset$. Ezért minden F normált térre és minden $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mértékre csak a $T \to F$ azonosan 0 függvény θ-mérhető.

8.1.2. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér.*

a) *Ha F normált tér, akkor a $T \to F$ θ-mérhető függvények halmaza lineáris altere az $\mathscr{F}(T; F)$ függvénytérnek.*

b) *Ha F normált tér és az $f : T \to F$ függvény θ-mérhető, akkor az $\|f\| : T \to \mathbb{R}$ függvény is θ-mérhető.*

c) *Ha F és G normált terek, $u : F \to G$ folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátor és az $f : T \to F$ függvény θ-mérhető, akkor az $u \circ f : T \to G$ függvény is θ-mérhető.*

d) *Ha F, G, H normált terek és $u : F \times G \to H$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris operátor, akkor* *minden $f : T \to F$ és $g : T \to G$ θ-mérhető függvényre az $u(f,g) : T \to H$; $t \mapsto u(f(t), g(t))$ függvény θ-mérhető.*

Bizonyítás. a) Legyenek az $f, g : T \to F$ függvények θ-mérhetők és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (illetve $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$) olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely f-hez (illetve g-hez) konvergál a T halmazon pontonként θ-majdnem mindenütt, akkor az $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben haladó $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál az $f+g$ függvényhez, mert két θ-eltűnő halmaz uniója θ-eltűnő halmaz, továbbá az $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben haladó $(\lambda.f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál a $\lambda.f$ függvényhez; ezért $f+g$ és $\lambda.f$ θ-mérhető függvények.

b) Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben haladó függvénysorozat, amely a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál az $f : T \to F$ függvényhez, akkor az $\mathscr{E}_\mathbb{R}(T,\mathscr{R})$-ben haladó $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál az $\|f\| : T \to \mathbb{R}$ függvényhez, hiszen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|\|f_n\| - \|f\|| \leq \|f_n - f\|$. Ezért ha $f : T \to F$ θ-mérhető függvény, akkor $\|f\| : T \to \mathbb{R}$ is θ-mérhető függvény.

c) Ha az $f : T \to F$ függvény θ-mérhető és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál f-hez, akkor az $\mathscr{E}_G(T,\mathscr{R})$-ben haladó $(u\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál $u\circ f$-hez, mert minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|u\circ f_n - u\circ f\| \leq \|u\|\|f_n - f\|$.

d) Legyenek az $f : T \to F$ és $g : T \to G$ függvények θ-mérhetők. Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (illetve $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$) olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben (illetve $\mathscr{E}_G(T,\mathscr{R})$-ben), amely f-hez (illetve g-hez) konvergál a T halmazon pontonként θ-majdnem mindenütt, akkor az $\mathscr{E}_H(T,\mathscr{R})$-ben haladó $(u(f_n,g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az $u(f,g) : T \to H$ függvényhez konvergál a T halmazon pontonként θ-majdnem mindenütt, mert minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\|u(f_n,g_n) - u(f,g)\| \leq \|u\|\|f_n - f\|\|g_n - g\| + \|u\|\|f_n - f\|\|g\| + \|u\|\|f\|\|g_n - g\|$$

teljesül; ezért az $u(f,g) : T \to H$ függvény θ-mérhető. ■

Speciálisan, ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér, valamint $f : T \to F$ és $g : T \to \mathbb{K}$ θ-mérhető függvények, akkor a $g.f : T \to F$; $t \mapsto g(t).f(t)$ függvény is θ-mérhető, mert a $\mathbb{K}\times F \to F$; $(\lambda, z) \mapsto \lambda.z$ függvény folytonos bilineáris operátor. Továbbá, ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ komplex mértéktér és $f : T \to \mathbb{C}$ θ-mérhető függvény, akkor az $\overline{f} : T \to \mathbb{C}$ konjugált-függvény is θ-mérhető, mert a komplex konjugálás $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátor.

8.1.3. Állítás. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, F normált tér és $f : T \to F$ tetszőleges θ-mérhető függvény, akkor létezik olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (tartalmazás tekintetében) monoton növő halmazsorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben haladó sorozat, amely θ-majdnem mindenütt konvergál f-hez, és legyen N azon $t \in T$ pontok halmaza, amelyekre az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem konvergál $f(t)$-hez F-ben. Ekkor a N halmaz θ-eltűnő, ezért van olyan $(E'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E'_n$ (2.2.1.). Ha $t \in T \setminus N$, akkor $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$, ezért $f(t) \neq 0$ esetén van $n \in \mathbb{N}$, hogy $f_n(t) \neq 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\{t \in T | f(t) \neq 0\} \setminus N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t \in T | f_n(t) \neq 0\},$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{t \in T | f_n(t) \neq 0\} \in \mathscr{R}$. Ebből következik, hogy

$$\{t \in T | f(t) \neq 0\} = (\{t \in T | f(t) \neq 0\} \setminus N) \cup (\{t \in T | f(t) \neq 0\} \cap N) \subseteq$$
$$\subseteq \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{t \in T | f_n(t) \neq 0\}\Big) \cup \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E'_n\Big).$$

Tehát van olyan $(E''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E''_n$. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ számra $E_n := \bigcup\limits_{k=0}^{n} E''_k$, akkor $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan monoton növő halmazsorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$. ■

8.2. A p-edik hatványon integrálhatóság kritériuma

8.2.1. Lemma. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és $f : T \to \mathbb{R}$ θ-mérhető függvény. Ha $r \in \mathbb{R}$ és $E \subseteq T$ θ-integrálható halmaz, akkor az $E \cap \{t \in T | f(t) \leq r\}$ halmaz θ-integrálható.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R})$, valamint $c \in \mathbb{R}$ és $E \in \mathscr{R}[\theta]$, akkor

$$E \cap \{t \in T | \varphi(t) < c\} \in \mathscr{R}[\theta].$$

Valóban, ha $\varphi = 0$, akkor $c \leq 0$ esetén $E \cap \{t \in T | \varphi(t) < c\} = \emptyset \in \mathscr{R}[\theta]$, míg $c > 0$ esetén $E \cap \{t \in T | \varphi(t) < c\} = E \cap T = E \in \mathscr{R}[\theta]$. Ezért feltehető, hogy $\varphi \neq 0$. Ekkor létezik olyan $(E_i)_{i \in I}$ diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben és olyan $(c_i)_{i \in I}$ rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $I \ni i$-re $E_i \neq \emptyset$ és $c_i \neq 0$, valamint $\varphi = \sum\limits_{i \in I} c_i . \chi_{E_i}$. Ekkor

$$E \cap \{t \in T | \varphi(t) < c\} \cap \{t \in T | \varphi(t) \neq 0\} = E \cap \bigcup_{i \in I;\ c_i < c} E_i \in \mathscr{R}[\theta],$$

továbbá $c \leq 0$ esetén $E \cap \{t \in T | \varphi(t) < c\} \cap \{t \in T | \varphi(t) = 0\} = \emptyset \in \mathscr{R}[\theta]$, míg $c > 0$ esetén

$$E \cap \{t \in T | \varphi(t) < c\} \cap \{t \in T | \varphi(t) = 0\} = E \cap \{t \in T | \varphi(t) = 0\} = E \setminus \bigcup_{i \in I} E_i \in \mathscr{R}[\theta],$$

amiből következik, hogy

$$E \cap \{t \in T | \varphi(t) < c\} = \Big(E \cap \{t \in T | \varphi(t) < c\} \cap \{t \in T | \varphi(t) \neq 0\}\Big) \cup$$
$$\cup \Big(E \cap \{t \in T | \varphi(t) < c\} \cap \{t \in T | \varphi(t) = 0\}\Big) \in \mathscr{R}[\theta].$$

Legyen $f : T \to \mathbb{R}$ θ-mérhető függvény, $r \in \mathbb{R}$ és $E \in \mathscr{R}[\theta]$. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R})$-ben, amely a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál f-hez, továbbá legyen $T' := \{t \in T | f(t) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)\}$. Legyen $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}^*_+$-ban. Ha $t \in T'$, akkor teljesülnek a következő ekvivalenciák:

$$f(t) \leq r \ \Leftrightarrow\ \lim_{n \to \infty} f_n(t) \leq r \Leftrightarrow \liminf_{n \to \infty} f_n(t) \leq r \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : \inf_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} f_k(t) \leq r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) : \inf_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} f_k(t) < r + \varepsilon_m \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : (k \geq n) \wedge (f_k(t) < r + \varepsilon_k).$$

5

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : (k \geq n) \wedge (f_k(t) < r + \varepsilon_k).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$T' \cap E \cap \{t \in T | f(t) \leq r\} = T' \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} \Big(E \cap \{t \in T | f_k(t) < r + \varepsilon_m\} \Big),$$

tehát a T halmazon θ-majdnem mindenütt teljesül a

$$\chi_{_{E \cap \{t \in T | f(t) \leq r\}}} = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} \chi_{_{E \cap \{t \in T | f_k(t) < r + \varepsilon_m\}}}$$

függvény-egyenlőség. Láttuk, hogy minden $k, m \in \mathbb{N}$ esetén $E \cap \{t \in T | f_k(t) < r + \varepsilon_m\} \in \mathscr{R}[\theta]$, azaz $\chi_{_{E \cap \{t \in T | f_k(t) < r + \varepsilon_m\}}} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, továbbá $\chi_{_{E \cap \{t \in T | f_k(t) < r + \varepsilon_m\}}} \leq \chi_{_E}$ és $\displaystyle\int_T^* \chi_{_E} \mathrm{d}|\theta| < +\infty$. Ezért a Levi-tételből következik, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $\displaystyle\bigvee_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} \chi_{_{E \cap \{t \in T | f_k(t) < r + \varepsilon_m\}}} \in \mathscr{L}^1_{+}(T, \mathscr{R}, \theta)$. Ebből ismét a Levi-tétel alapján arra következtethetünk, hogy $\displaystyle\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} \chi_{_{E \cap \{t \in T | f_k(t) < r + \varepsilon_m\}}} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, következésképpen $E \cap \{t \in T | f(t) \leq r\} \in \mathscr{R}[\theta]$. ■

8.2.2. Lemma. *Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, F Banach-tér és $f : T \to F$ olyan θ-mérhető függvény, amely korlátos és amelyhez van olyan $E \in \mathscr{R}$, hogy $\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq E$, akkor minden $p \geq 1$ valós számra $f \in \mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben, amely az f-hez konvergál a T halmazon pontonként θ-majdnem mindenütt. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen $(E_{n,i})_{i \in I_n}$ olyan diszjunkt véges rendszer $\mathscr{R}$-ben, és legyen $(z_{n,i})_{i \in I_n}$ olyan rendszer F-ben, hogy $f_n = \displaystyle\sum_{i \in I_n} \chi_{_{E_{n,i}}} . z_{n,i}$. Legyen $M > 0$ olyan valós szám, hogy minden $t \in T$ esetén $\|f(t)\| < M$. (Itt fontos lesz a szigorú egyenlőtlenség!) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük a következő függvényt:

$$f'_n := \sum_{\substack{i \in I_n \\ \|z_{n,i}\| \leq M}} \chi_{_{E \cap E_{n,i}}} . z_{n,i} + \sum_{\substack{i \in I_n \\ \|z_{n,i}\| > M}} \chi_{_{E \cap E_{n,i}}} . \Big(\frac{M}{\|z_{n,i}\|} z_{n,i} \Big).$$

Nyilvánvaló, hogy az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja eleme $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-nek. Megmutatjuk, hogy ez a függvénysorozat az f-hez konvergál a T halmazon pontonként θ-majdnem mindenütt. Valóban, ha $t \in E$ olyan pont, hogy $f(t) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)$, akkor az $M - \|f(t)\| > 0$ valós számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\|f_n(t) - f(t)\| < M - \|f(t)\|$, tehát $\|f_n(t)\| < M$, vagyis $f'_n(t) = f_n(t)$. Ez azt jelenti, hogy ha $t \in E$ és $f(t) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)$, akkor $f(t) = \lim\limits_{n \to \infty} f'_n(t)$. Ha viszont $t \in T \setminus E$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f'_n(t) = 0$, és az E választása szerint $f(t) = 0$, tehát ismét $f(t) = \lim\limits_{n \to \infty} f'_n(t)$. Ezért az $f(t) = \lim\limits_{n \to \infty} f'_n(t)$ egyenlőség teljesül az T azon pontjainak halmazán, amelyen $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$, vagyis θ-majdnem mindenütt.

Tehát $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben haladó sorozat, amely a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál f-hez. Nyilvánvaló, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f'_n\| \leq M\chi_{_E}$, és természetesen $M\chi_{_E} \in \mathscr{E}_{+}(T, \mathscr{R})$, ezért a Lebesgue-tétel alapján minden $p \geq 1$ valós számra $f \in \mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, hiszen $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R}) \subseteq \mathscr{L}^p_F(T, \mathscr{R}, \theta)$. ■

8.2.3. Lemma. *Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, F Banach-tér és $f : T \to F$ tetszőleges θ-mérhető függvény, akkor létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $p \geq 1$ valós számra $f_n \in \mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_n\| \leq \|f\|$, valamint $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a T halmazon mindenüttt.*

Bizonyítás. Legyen $f : T \to F$ tetszőleges θ-mérhető függvény és vegyünk olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatot $\mathscr{R}$-ben, amelyre $\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ (8.1.3.). Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n := \chi_{E_n \cap \{t\in T | \|f(t)\| \leq n\}} . f.$$

Minden $\mathbb{N} \ni n$-re a 8.2.1. lemma szerint az $E_n \cap \{t \in T | \|f(t)\| \leq n\}$ halmaz θ-integrálható, hiszen f-fel együtt az $\|f\| : T \to \mathbb{R}$ függvény is θ-mérhető. Ezért minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $\chi_{E_n \cap \{t\in T | \|f(t)\| \leq n\}} : T \to \mathbb{R}$ függvény θ-integrálható, így θ-mérhető is, következésképpen az $f_n : T \to F$ függvény θ-mérhető. Ugyanakkor $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_n\| \leq n$, tehát f_n korlátos, valamint a definíció szerint $\{t \in T | f_n(t) \neq 0\} \subseteq E_n \in \mathscr{R}$. Ezért a 8.2.2. lemma alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén minden $p \geq 1$ valós számra $f_n \in \mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$. Ugyanakkor világos, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat f-hez konvergál pontonként a T halmazon *mindenütt* és természetesen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f_n\| \leq \|f\|$. ■

8.2.4. Tétel. (A p-edik hatványon integrálhatóság kritériuma) *Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, F Banach-tér és $p \geq 1$ valós szám, akkor minden $f : T \to F$ függvényre: $f \in \mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ pontosan akkor teljesül, ha $f \in \mathscr{F}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ és az f függvény θ-mérhető.*

Bizonyítás. A Riesz–Fischer-tétel alapján az $\mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ tér minden eleme θ-mérhető. Megfordítva, ha $f \in \mathscr{F}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ és az f függvény θ-mérhető, akkor a 8.2.3. lemma szerint van olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in \mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$, és $\|f_n\| \leq \|f\|$, valamint $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a T halmazon mindenütt, így a Lebesgue-tétel szerint $f \in \mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$. ■

Megjegyzés (*a p-edik hatványon integrálhatóság kritériumának gyakorlati alkalmazásáról*).

Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, F Banach-tér, $p \geq 1$ valós szám és $f : T \to F$ függvény. Azt szeretnénk eldönteni, hogy igaz-e az $f \in \mathscr{L}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ kijelentés. Az előző tétel alapján azt kell ellenőrizni, hogy az f függvény θ-mérhető és $\int^* \|f\|^p \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$. Az $\int^* \|f\|^p \, \mathrm{d}|\theta|$ felső integrál pontos értékének meghatározása lehet nagyon nehéz feladat, de szerencsére nincs szükségünk a pontos számértékre. Elegendő olyan $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt találnunk, amelyre az $\int^* g^p \, \mathrm{d}|\theta|$ felső integrál *könnyen kiszámítható*, véges, és $\|f\| \leq g$ teljesül a T halmazon θ-majdnem mindenütt; ha ez így van, akkor természtesen $\int^* \|f\|^p \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$ is igaz. Bizonyítani kell még az f függvény θ-mérhetőségét. Ehhez – a definíció szerint – elegendő olyan sorozatot találni $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben, amely f-hez konvergál a T halmazon pontonként θ-majdnem mindenütt. Előfordulhat, hogy nem könnyű ilyen *lépcsősfüggvény-sorozatot* találni, de szerencsére erre sincs feltétlenül szükség. Ha megmutatjuk, hogy létezik $T \to F$ *θ-mérhető* függvényeknek olyan sorozata, amely f-hez konvergál a T halmazon pontonként θ-majdnem mindenütt, akkor a később bizonyítandó *Jegorov-tétel* (8.7.2.) szerint f is θ-mérhető.

A következőkben megmutatjuk a p-edik hatványon való integrálhatóság kritériumának két fontos nem triviális alkalmazását.

8.3. Paraméteres integrálfüggvény differenciálhatósága

8.3.1. Állítás. (Paraméteres integrálfüggvény differenciálhatósága) *Legyen E normált tér, F Banach-tér, $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, és $(f_t)_{t\in T}$ olyan rendszer, hogy minden $t \in T$ esetén $f_t : E \rightarrowtail F$ függvény. Legyen $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}\Big(\int\limits_T f_t \, \mathrm{d}\theta(t)\Big)$ olyan pont, amelyre teljesülnek a következők:*

a) *létezik az $\mathfrak{a}$ pontnak olyan V környezete és létezik olyan $g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény, hogy $V \subseteq \mathrm{Dom}\Big(\int\limits_T f_t \, \mathrm{d}\theta(t)\Big)$, továbbá $\int^* g(t) \, \mathrm{d}|\theta|(t) < +\infty$, és θ-majdnem minden $t \in T$ esetén f_t differenciálható a V halmaz minden pontjában, és θ-majdnem minden $t \in T$ esetén, minden $V \ni x$-re $\|(\mathrm{D}f_t)(x)\| \leq g(t)$;*

b) *a következő leképezés θ-mérhető:*

$$T \to \mathscr{L}(E;F); \quad t \mapsto \begin{cases} (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a}) & , \textit{ha } f_t \textit{ differenciálható } \mathfrak{a}\textit{-ban;} \\ 0 & , \textit{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor a b)*-ben értelmezett függvény θ-integrálható és az $\int\limits_T f_t \, \mathrm{d}\theta(t) : E \rightarrowtail F$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, továbbá*

$$\Big(\mathrm{D}\Big(\int\limits_T f_t \, \mathrm{d}\theta(t)\Big)\Big)(\mathfrak{a}) = \int\limits_T (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a}) \, \mathrm{d}\theta(t).$$

Bizonyítás. A feltevés alapján vehetünk olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq V$, tehát θ-majdnem minden $t \in T$ esetén az f_t függvény minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ pontban differenciálható, és $\|(\mathrm{D}f_t)(x)\| \leq g(t)$ teljesül. Ekkor θ-majdnem minden $t \in T$ esetén az f_t függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban és $\|(\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})\| \leq g(t)$, továbbá $\int^* g \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$, így a mérhetőségi hipotézis és az integrálhatóság kritériuma alapján a

$$T \to \mathscr{L}(E;F); \quad t \mapsto \begin{cases} (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a}) & , \text{ha } f_t \text{ differenciálható } \mathfrak{a}\text{-ban;} \\ 0 & , \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény θ-integrálható. Ezért elkészíthető az

$$\int\limits_T (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a}) \, \mathrm{d}\theta(t) \in \mathscr{L}(E;F)$$

operátor. Meg fogjuk mutatni, hogy

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{\Big(\int\limits_T f_t \, \mathrm{d}\theta(t)\Big)(x) - \Big(\int\limits_T f_t \, \mathrm{d}\theta(t)\Big)(\mathfrak{a}) - \Big(\int\limits_T (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a}) \, \mathrm{d}\theta(t)\Big)(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|} = 0,$$

ami az állítást bizonyítja.

Ehhez először megjegyezzük, hogy minden $e \in E$ esetén a

$$T \to \mathscr{L}(E;F); \quad t \mapsto \begin{cases} (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})e & \text{, ha } f_t \text{ differenciálható } \mathfrak{a}\text{-ban;} \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

függvény θ-integrálható és

$$\Big(\int_T (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})\ \mathrm{d}\theta(t)\Big)e = \int_T (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})e\ \mathrm{d}\theta(t).$$

Ennek az az oka, hogy az $\mathscr{L}(E;F) \to F;\ u \mapsto u(e)$ leképezés folytonos lineáris operátor, továbbá az integrálás és a folytonos lineáris operátor hatása felcserélhető.

Ezért $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$ esetén

$$\Big(\int_T f_t\ \mathrm{d}\theta(t)\Big)(x) - \Big(\int_T f_t\ \mathrm{d}\theta(t)\Big)(\mathfrak{a}) - \Big(\int_T (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})\ \mathrm{d}\theta(t)\Big)(x-\mathfrak{a}) =$$
$$= \int_T \Big(f_t(x) - f_t(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})(x-a)\Big)\ \mathrm{d}\theta(t).$$

A feltevés szerint θ-majdnem minden $T \ni t$-re és minden $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \ni x$-re az f_t függvény differenciálható az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ szakasz minden pontjában, tehát a véges növekmények formulája szerint

$$\|f_t(x) - f_t(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})(x-a)\| \leq \Big(\sup_{z \in]\!]\mathfrak{a},x[\![} \|(\mathrm{D}f_t)(z) - (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})\|\Big)\|x-\mathfrak{a}\| \leq 2g(t)\|x-\mathfrak{a}\|.$$

Legyen most $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat $\mathrm{Dom}\Big(\int_T f_t\ \mathrm{d}\theta(t)\Big)$-ben, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathfrak{a}$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \neq \mathfrak{a}$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $x_n \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$. Ekkor θ-majdnem minden $T \ni t$-re

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_t(x_n) - f_t(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})(x_n - \mathfrak{a})}{\|x_n - \mathfrak{a}\|} = 0,$$

hiszen az átviteli elv alapján ez igaz minden olyan $T \ni t$-re, amelyre f_t differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ez azt jelenti, hogy ha minden $n > N$ természetes számra értelmezzük a

$$g_n : T \to F; \quad t \mapsto \frac{f_t(x_n) - f_t(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})(x_n - \mathfrak{a})}{\|x_n - \mathfrak{a}\|}$$

függvényt, és $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$ esetén $g_n := 0$, akkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$-ban halad, és pontonként konvergál 0-hoz a T halmazon θ-majdnem mindenütt. Ugyanakkor θ-majdnem minden $T \ni t$-re és minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\Big\|\frac{f_t(x_n) - f_t(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})(x_n - \mathfrak{a})}{\|x_n - \mathfrak{a}\|}\Big\| \leq 2g(t)$$

teljesül és $\int^* g\ \mathrm{d}|\theta| < +\infty$. Ezért a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \int_T \Big(\frac{f_t(x_n) - f_t(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})(x_n - \mathfrak{a})}{\|x_n - \mathfrak{a}\|}\Big)\ \mathrm{d}\theta(t) = 0$$

is igaz, vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Big(\int\limits_T f_t \,\mathrm{d}\theta(t)\Big)(x_n)-\Big(\int\limits_T f_t \,\mathrm{d}\theta(t)\Big)(\mathfrak{a})-\Big(\int\limits_T (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})\,\mathrm{d}\theta(t)\Big)(x_n-\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}=0,$$

amit bizonyítani kellett. ■

Megjegyezzük, hogy ha az E normált tér *véges dimenziós*, akkor a tétel feltételei között *felesleges* előírni a

$$T\to\mathscr{L}(E;F);\quad t\mapsto\begin{cases}(\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a}) & \text{, ha } f_t \text{ differenciálható } \mathfrak{a}\text{-ban;}\\ 0 & \text{, egyébként.}\end{cases}$$

függvény θ-mérhetőségét, mert az automatikusan teljesül (**6**. gyakorlat).

8.4. Lebesgue–Fubini–Fatou-tétel

8.4.1. Lemma. (Fubini–Fatou-lemma) *Legyenek $(T,\mathscr{R},\mu)$ és $(T',\mathscr{R}',\mu')$ pozitív mértékterek. Ha $f:T\times T'\to\mathbb{R}_+$ olyan függvény, amely $\mu\otimes\mu'$-mérhető, akkor*

$$\int\limits_T^*\Big(\int\limits_{T'}^* f(t,t')\,\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t)=\int\limits_{T'}^*\Big(\int\limits_T^* f(t,t')\,\mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t')=\int\limits_{T\times T'}^* f(t,t')\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu')(t,t').$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{H}$ azon $f:T\times T'\to\overline{\mathbb{R}}_+$ függvények halmazát, amelyekre

$$\int\limits_T^*\Big(\int\limits_{T'}^* f(t,t')\,\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t)=\int\limits_{T'}^*\Big(\int\limits_T^* f(t,t')\,\mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t')=\int\limits_{T\times T'}^* f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu').$$

függvényhalmazt. Azt kell igazolni, hogy a $\mu\otimes\mu'$-mérhető $T\times T'\to\mathbb{R}_+$ függvények elemei $\mathscr{H}$-nak.

Ha $g\in\mathscr{H}$ és $f:T\times T'\to\overline{\mathbb{R}}_+$ olyan függvény, hogy $f=g$ a $T\times T'$ halmazon $\mu\otimes\mu'$-majdnem mindenütt, akkor $f\in\mathscr{H}$ is teljesül, mert ekkor az $E:=\{(t,t')\in T\times T'|f(t,t')\neq g(t,t')\}$ halmaz $\mu\otimes\mu'$-eltűnő halmaz, ezért μ-majdnem minden $t\in T$ esetén $f(t,\cdot)=g(t,\cdot)$ a T' halmazon μ'-majdnem mindenütt, ezért

$$\int\limits_{T'}^* f(t,t')\,\mathrm{d}\mu'(t')=\int\limits_{T'}^* g(t,t')\,\mathrm{d}\mu'(t'),$$

így fennáll az

$$\int\limits_T^*\Big(\int\limits_{T'}^* f(t,t')\,\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t)=\int\limits_T^*\Big(\int\limits_{T'}^* g(t,t')\,\mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t)$$

egyenlőség is, és hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int\limits_{T'}^*\Big(\int\limits_T^* f(t,t')\,\mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t')=\int\limits_{T'}^*\Big(\int\limits_T^* g(t,t')\,\mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t'),$$

ugyanakkor

$$\int_{T\times T'}^{*} f \; \mathrm{d}(\mu\otimes\mu') = \int_{T\times T'}^{*} g \; \mathrm{d}(\mu\otimes\mu')$$

is teljesül, így $f \in \mathscr{H}$.

Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{H}$-ban, akkor az $f := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n : T\times T' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvény is eleme $\mathscr{H}$-nak. Valóban; $t\in T$ esetén az $(f_n(t,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő és $f(t,\cdot) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n(t,\cdot)$, tehát a μ' szerinti felső integrál monoton σ-folytonossága miatt

$$\int_{T'}^{*} f(t,t') \; \mathrm{d}\mu'(t') = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T'}^{*} f_n(t,t') \; \mathrm{d}\mu'(t'),$$

és ha minden $\mathbb{N}\ni n$-re

$$g_n : T \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad t \mapsto \int_{T'}^{*} f_n(t,t') \; \mathrm{d}\mu'(t'),$$

akkor a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is monoton növő és az előzőek szerint a $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} g_n$ felső burkoló egyenlő a

$$T \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad t \mapsto \int_{T'}^{*} f(t,t') \; \mathrm{d}\mu'(t')$$

függvénnyel, így a μ szerinti felső integrál monoton σ-folytonossága miatt

$$\int_{T}^{*}\Big(\int_{T'}^{*} f(t,t') \; \mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) = \int_{T}^{*}\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} g_n(t)\Big)\mathrm{d}\mu(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T}^{*} g_n(t)\mathrm{d}\mu(t) =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T}^{*}\Big(\int_{T'}^{*} f_n(t,t') \; \mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t).$$

Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int_{T'}^{*}\Big(\int_{T}^{*} f(t,t') \; \mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t') = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T'}^{*}\Big(\int_{T}^{*} f_n(t,t') \; \mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t').$$

Továbbá, a $\mu\otimes\mu'$ szerinti felső integrál monoton σ-folytonossága miatt

$$\int_{T\times T'}^{*} f \; \mathrm{d}(\mu\otimes\mu') = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{T\times T'}^{*} f_n \; \mathrm{d}(\mu\otimes\mu').$$

Ugyanakkor minden $\mathbb{N}\ni n$-re $f_n\in\mathscr{H}$, vagyis

$$\int_{T}^{*}\Big(\int_{T'}^{*} f_n(t,t') \; \mathrm{d}\mu'(t')\Big)\mathrm{d}\mu(t) = \int_{T'}^{*}\Big(\int_{T}^{*} f_n(t,t') \; \mathrm{d}\mu(t)\Big)\mathrm{d}\mu'(t') = \int_{T\times T'}^{*} f_n \; \mathrm{d}(\mu\otimes\mu'),$$

amiből az iménti egyenlőségek alapján sup-képzéssel következik, hogy $f\in\mathscr{H}$.

A Lebesgue–Fubini-tétel alapján $\mathscr{L}^1_+(T\times T', \mathscr{R}\otimes\mathscr{R}', \mu\otimes\mu') \subseteq \mathscr{H}$, hiszen pozitív integrálható függvény integrálja megegyezik a felső integráljával.

Legyen most $f : T \times T' \to \mathbb{R}_+$ tetszőleges $\mu \otimes \mu'$-mérhető függvény, és vegyünk olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_+(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$-ben, amely a $T \times T'$ halmazon $\mu \otimes \mu'$-majdnem mindenütt pontonként konvergál f-hez. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re a Levi-tétel alapján az $\bigwedge\limits_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq n}} f_k$ függvény $\mu\otimes\mu'$-integrálható, így $\mathscr{H}$-nak eleme, ezért a $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n := \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} \big(\bigwedge\limits_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq n}} f_k\big)$ függvény eleme $\mathscr{H}$-nak. Ugyanakkor $f = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ a $T\times T'$ halmazon $\mu\otimes\mu'$-majdnem mindenütt, így $f \in \mathscr{H}$. ■

8.4.2. Tétel. (Lebesgue–Fubini–Fatou-tétel) *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $(T', \mathscr{R}', \theta')$ mértéktér, és F Banach-tér. Ha az $f : T \times T' \to F$ függvény $\theta \otimes \theta'$-mérhető, akkor*

$$\int_T^* \Big(\int_{T'}^* \|f(t,t')\| \,\mathrm{d}|\theta'|(t')\Big)\mathrm{d}|\theta|(t) = \int_{T'}^* \Big(\int_T^* \|f(t,t')\| \,\mathrm{d}|\theta|(t)\Big)d|\theta'|(t') =$$

$$= \int_{T\times T'}^* \|f(t,t')\| \,\mathrm{d}|\theta\otimes\theta'|(t,t'),$$

és ha ez a szám véges, akkor $f \in \mathscr{L}^1_F(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}', \theta \otimes \theta')$.

Bizonyítás. A feltevés szerint az $\|f\| : T \times T' \to \mathbb{R}_+$ függvény $\theta \otimes \theta'$-mérhető, ezért a Fubini–Fatou-tétel alapján

$$\int_T^* \Big(\int_{T'}^* \|f(t,t')\| \,\mathrm{d}|\theta'|(t')\Big)\mathrm{d}|\theta|(t) = \int_{T'}^* \Big(\int_T^* \|f(t,t')\| \,\mathrm{d}|\theta|(t)\Big)d|\theta'|(t') =$$

$$= \int_{T\times T'}^* \|f(t,t')\| \,\mathrm{d}|\theta\otimes\theta'|(t,t'),$$

teljesül. Világos, hogy ha ez a szám véges, akkor $f \in \mathscr{F}^1_F(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}', \theta \otimes \theta')$ és az f függvény $\theta \otimes \theta'$-mérhető, amiből az integrálhatóság kriteriuma alapján kapjuk, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}', \theta \otimes \theta')$. ■

8.4.3. Következmény. *Legyenek $(T, \mathscr{R}, \mu)$ és $(T, \mathscr{R}', \mu')$ pozitív mértékterek, és $f : T \times T' \to \mathbb{R}_+$ tetszőleges $\mu \otimes \mu'$-mérhető függvény. Ha μ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t, \cdot) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T', \mathscr{R}', \mu')$, és a*

$$T \to \mathbb{R}_+; \quad t \mapsto \begin{cases} \displaystyle\int_{T'} f(t,t') \,\mathrm{d}\mu'(t') & , \textit{ha } f(t,\cdot) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T', \mathscr{R}', \mu'), \\ 0 & , \textit{egyébként} \end{cases}$$

függvény μ-integrálható, akkor $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T\times T', \mathscr{R}\otimes\mathscr{R}', \mu\otimes\mu')$, ezért μ'-majdnem minden $t' \in T'$ esetén $f(\cdot, t') \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu)$, és a

$$T' \to \mathbb{R}_+; \quad t' \mapsto \begin{cases} \displaystyle\int_T f(t,t') \,\mathrm{d}\mu(t) & , \textit{ha } f(\cdot,t') \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu), \\ 0 & , \textit{egyébként} \end{cases}$$

függvény μ'-integrálható, valamint

$$\int_T \Big(\int_{T'} f(t,t') \,\mathrm{d}\mu'(t')\Big) \,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{T'} \Big(\int_T f(t,t') \,\mathrm{d}\mu(t)\Big) \,\mathrm{d}\mu'(t')$$

teljesül.

Bizonyítás. A feltevés mellett

$$\int_T^* \Big(\int_{T'}^* f(t,t')\ \mathrm{d}\mu'(t') \Big) \mathrm{d}\mu(t) < +\infty,$$

ezért elegendő f-re alkalmazni a Lebesgue–Fubini–Fatou-tételt. ■

8.4.4. Következmény. *Legyenek $(T, \mathscr{R}, \mu)$ és $(T, \mathscr{R}', \mu')$ pozitív mértékterek. Ha $E \subseteq T$ μ-mérhető halmaz és $E' \subseteq T'$ μ'-mérhető halmaz, akkor az $E \times E'$ halmaz $\mu \otimes \mu'$-mérhető és*

$$(\mu \otimes \mu')^*(E \times E') = \mu^*(E) \cdot \mu'^*(E').$$

(Még akkor is, ha a $(\mu^*(E), \mu'^*(E'))$ pár egyenlő a $(+\infty, 0)$ vagy $(0, +\infty)$ párral; természetesen a $(+\infty) \cdot 0 := 0$ és $0 \cdot (+\infty) := 0$ konvenciót alkalmazva.)

Bizonyítás. Az $E \times E'$ halmaz $\mu \otimes \mu'$-mérhető, mert ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R})$-ben, amely χ_E-hez μ-majdnem mindenütt konvergál T-n, és $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T', \mathscr{R}')$-ben, amely $\chi_{E'}$-hez μ'-majdnem mindenütt konvergál T'-n, akkor az $(f_n \otimes f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(T \times T', \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}')$-ben halad és $\mu \otimes \mu'$-majdnem mindenütt konvergál a $\chi_E \otimes \chi_{E'} = \chi_{E\times E'}$ függvényhez $T \times T'$-n. ■

8.5. Mérték függvény által létesített képe és szorzata függvénnyel II.

8.5.1. Tétel. *Legyen $\mathscr{R}$ (illetve $\mathscr{R}'$) halmazgyűrű a T (illetve T') halmaz felett, és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mérték. Legyenek $\pi : T \to T'$ és $g : T \to \mathbb{K}$ olyan függvények, hogy a (π, g) pár θ-adaptált az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint (6.4.1.). Ha F Banach-tér és az $f : T' \to F$ függvény $\pi[|g|.|\theta|]$-mérhető, akkor teljesül az*

$$f \in \mathscr{L}^1_F(T', \mathscr{R}', \pi[|g|.|\theta|]) \Leftrightarrow (f \circ \pi).g \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$$

ekvivalencia, és ha $(f \circ \pi).g \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, akkor

$$\int_T (f \circ \pi).g\ \mathrm{d}\theta = \int_{T'} f\ \mathrm{d}(\pi[g.\theta]).$$

Bizonyítás. A 6.4.6. tétel alapján elég azt igazolni, hogy ha az $f : T' \to F$ függvény $\pi[|g|.|\theta|]$-mérhető és $(f \circ \pi).g \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, akkor $f \in \mathscr{L}^1_F(T', \mathscr{R}', \pi[|g|.|\theta|])$.

Alkalmazva az 8.2.3. lemmát, vegyünk olyan $\mathscr{L}^1_F(T', \mathscr{R}', \pi[|g|.|\theta|])$-ban haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely pontonként konvergál f-hez a T' halmazon $\pi[|g|.|\theta|]$-majdnem mindenütt, és amelyre teljesül az, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|f_n\| \leq \|f\|$ a T' halmazon $\pi[|g|.|\theta|]$-majdnem mindenütt. Ekkor 6.4.6. szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(f_n \circ \pi).g \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, és $\|(f_n \circ \pi).g\| = (\|f_n\| \circ \pi).|g| \leq (\|f\| \circ \pi).|g| = \|(f \circ \pi).g\|$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt, továbbá az $((f_n \circ \pi).g)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál $(f \circ \pi).g$-hez a T halmazon θ-majdnem mindenütt. A hipotézis szerint $(f \circ \pi).g \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, ezért

$$\int_T^* \|(f \circ \pi).g\|\ \mathrm{d}|\theta| < +\infty.$$

Ebből a Lebesgue-tétel alapján következik, hogy az $((f_n \circ \pi).g)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál az $(f \circ \pi).g$ függvényhez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint is, így ez a függvénysorozat

Cauchy-sorozat is a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint. Ha $m,n \in \mathbb{N}$, akkor $\|f_m - f_n\| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T',\mathscr{R}',\pi[|g|.|\theta|])$, tehát a 6.4.6. tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|f_m - f_n\|_{\pi[|g|.|\theta|],1} &= \int_T^* \|f_m - f_n\| \,\mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]) = \int_T \|f_m - f_n\| \,\mathrm{d}(\pi[|g|.|\theta|]) = \\ &= \int_T \Big(\|f_m - f_n\| \circ \pi\Big).|g| \,\mathrm{d}|\theta| = \int_{T'} \|(f_m \circ \pi).g - (f_n \circ \pi).g\| \,\mathrm{d}|\theta| = \\ &= \int_{T'}^* \|(f_m \circ \pi).g - (f_n \circ \pi).g\| \,\mathrm{d}|\theta| = \|(f_m \circ \pi).g - (f_n \circ \pi).g\|_{\theta,1},\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az $\mathscr{L}^1_F(T',\mathscr{R}',\pi[|g|.|\theta|])$ függvénytérben a $\|\cdot\|_{\pi[|g|.|\theta|],1}$ félnorma szerint. A Riesz–Fischer-tétel alapján létezik olyan $f' \in \mathscr{L}^1_F(T',\mathscr{R}',\pi[|g|.|\theta|])$, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f'-höz a $\|\cdot\|_{\pi[|g|.|\theta|],1}$ félnorma szerint, és van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy az $(f_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál f'-höz a T' halmazon $\pi[|g|.|\theta|]$-majdnem mindenütt. Ugyanakkor az $(f_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál az f függvényhez is a T' halmazon $\pi[|g|.|\theta|]$-majdnem mindenütt, így $f = f'$ $\pi[|g|.|\theta|]$-majdnem mindenütt. Ezért $f \in \mathscr{L}^1_F(T',\mathscr{R}',\pi[|g|.|\theta|])$ is teljesül. ■

8.5.2. Következmény. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és $g : T \to \mathbb{K}$ lokálisan θ-integrálható függvény (6.4.10.). Ha F Banach-tér és az $f : T \to F$ függvény $g.\theta$-mérhető, akkor teljesül az*

$$f \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},g.\theta) \;\Leftrightarrow\; f.g \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$$

ekvivalencia, és ha $f.g \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor

$$\int_T f.g \,\mathrm{d}\theta = \int_T f \; d(g.\theta).$$

Bizonyítás. A 6.4.10. definíció, a 6.4.13. állítás a) pontja és a 8.5.1. tétel nyilvánvaló következménye, hiszen függvény $g.\theta$-mérhetősége ekvivalens a $|g.\theta|$-mérhetőségével. ■

8.5.3. Következmény. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű a T' halmaz felett, és $\pi : T \to T'$ olyan függvény, amely θ-valódi az $\mathscr{R}'$ halmazgyűrű szerint (6.4.7.). Ha F Banach-tér és az $f : T' \to F$ függvény $\pi(|\theta|)$-mérhető, akkor teljesül az*

$$f \in \mathscr{L}^1_F(T',\mathscr{R}',\pi(\theta)) \Leftrightarrow (f\circ\pi) \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$$

ekvivalencia, és ha $f\circ\pi \in \mathscr{L}^1_F(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor $f \in \mathscr{L}^1_F(T',\mathscr{R}',\pi(\theta))$ és

$$\int_{T'} f \; d\pi(\theta) = \int_T (f\circ\pi) \,\mathrm{d}\theta.$$

Bizonyítás. A 6.4.7. definíció és a 8.5.1. tétel nyilvánvaló következménye. ■

Vigyázzunk arra, hogy az előző állításban *nem elegendő* azt feltenni, hogy az f függvény $\pi(\theta)$-mérhető, mert általánosan $|\pi(\theta)| = \pi(|\theta|)$ *nem igaz.*

8.5.4. Definíció. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, $p \geq 1$ valós szám és F normált tér. Azt mondjuk, hogy a $g : T \to F$ függvény* p**-edik hatványon lokálisan** θ**-integrálható**, *ha minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\chi_E.g \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$. A p-edik hatványon lokálisan θ-integrálható $T \to F$ függvények halmazát $\mathscr{L}^p_{F,\mathrm{loc}}(T,\mathscr{R},\theta)$ jelöli.*

8.6. Mérték leszűkítése és kiterjesztése II.

8.6.1. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, F normált tér, $T' \subseteq T$ és $f : T' \to F$ függvény. Ha az f függvény $\theta_{\mathscr{R}|T'}$-mérhető, akkor az $f^\circ : T \to F$ függvény θ-mérhető. Megfordítva, ha F Banach-tér, és létezik megszámlálható sok $\mathscr{R}$-beli halmaz, amelyek uniójaként T' előáll, és az $f^\circ : T \to F$ függvény θ-mérhető, akkor az f függvény $\theta_{\mathscr{R}|T'}$-mérhető; vagyis $T' \in \mathscr{R}_\sigma$ esetén minden $f : T' \to F$ függvényre fennáll a*

$$\text{"az } f \text{ függvény } \theta_{\mathscr{R}|T'}\text{-mérhető"} \Leftrightarrow \text{"az } f^\circ \text{ függvény } \theta\text{-mérhető"}$$

ekvivalencia.

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, F normált tér, $T' \subseteq T$ és $f : T' \to F$ függvény.

Ha az f függvény $\theta_{\mathscr{R}|T'}$-mérhető, akkor van olyan $N \subseteq T'$ $\theta_{\mathscr{R}|T'}$-eltűnő halmaz és olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(T', \mathscr{R}|T')$-ben, amelyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ a $T' \setminus N$ halmazon. Ekkor $f^\circ = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^\circ$ a $T \setminus N$ halmazon, és nyilvánvaló, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n^\circ \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$. Továbbá az N halmaz θ-eltűnő halmaz is, mert a b) és c) alapján

$$|\theta|^*(N) = \int_T^* \chi_{N,T} \, \mathrm{d}|\theta| = \int_T^* \chi_{N,T'}^\circ \, \mathrm{d}|\theta| \leq \int_{T'}^* \chi_{N,T'} \, \mathrm{d}(|\theta|_{\mathscr{R}|T'}) =$$

$$= \int_{T'}^* \chi_{N,T'} \, \mathrm{d}\left|\theta_{\mathscr{R}|T'}\right| = \left|\theta_{\mathscr{R}|T'}\right|^*(N) = 0,$$

ahol $\chi_{N,T'}$ (illetve $\chi_{N,T}$) jelöli az $N \subseteq T'$ halmaz T'-re (illetve T-re) vonatkozó karakterisztikus függvényét. Ezért az $f^\circ : T \to F$ függvény θ-mérhető.

Tegyük fel, hogy F Banach-tér, és létezik megszámlálható sok $\mathscr{R}$-beli halmaz, amelyek uniójaként T' előáll. Legyen az f° függvény θ-mérhető, és vegyünk olyan $N \subseteq T$ θ-eltűnő halmazt, valamint olyan $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben haladó sorozatot, amelyre $f^\circ = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ a $T \setminus N$ halmazon. Világos, hogy ekkor $f = (f^\circ)|_{T'} = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n|_{T'})$ a $T' \setminus (T' \cap N)$ halmazon. Természetesen $T' \cap N$ is θ-eltűnő halmaz és része T'-nek, ezért a d) alapján $\theta_{\mathscr{R}|T'}$-eltűnő halmaz is. Ezért a **3**. gyakorlat alapján az f függvény $\theta_{\mathscr{R}|T'}$-mérhetőségéhez elég azt igazolni, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re az $f_n|_{T'}$ függvény $\theta_{\mathscr{R}|T'}$-mérhető. Ehhez elég azt belátni, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ esetén a $\chi_E|_{T'} : T' \to \mathbb{R}$ függvény $\theta_{\mathscr{R}|T'}$-mérhető. Ez viszont így van, mert ha $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő halmazsorozat, hogy $T' = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} E_m$ és minden $\mathbb{N} \ni m$-re $E_m \in \mathscr{R}$, akkor $E \in \mathscr{R}$ esetén $\chi_E|_{T'} = \lim\limits_{m\to\infty} \chi_{E\cap E_m}$ a T' halmazon mindenütt és minden $\mathbb{N} \ni m$-re $E \cap E_m \in \mathscr{R}|T'$. ■

8.7. Mérhető függvények pontonkénti limeszei – Jegorov-tétel

8.7.1. Lemma. *Ha T halmaz, $\mathscr{R}$ halmazgyűrű T felett, és létezik olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}$-ben, hogy $T = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, akkor minden $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mértékhez van olyan $g : T \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ és minden $t \in T$ esetén $g(t) > 0$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű T felett és tegyük fel, hogy $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{R}$-ben, hogy $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen $H_k := \left(\bigcup_{j=0}^{k} E_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} E_j\right)$ és $H_0 := E_0$. Ekkor $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozat $\mathscr{R}$-ben és $T = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k$. Legyen $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ tetszőleges mérték, és vegyünk olyan $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{R}_+^*$-ban, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k|\theta|(H_k)$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, például lehet minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $c_k := \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{1+|\theta|(H_k)}\right)$. Ekkor a

$$g := \sum_{k=0}^{\infty} c_k.\chi_{_{H_k}} : T \to \mathbb{R}$$

függvény jól értelmezett és minden $T \ni t$-re $g(t) > 0$. Ugyanakkor a Levi-tétel alapján $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ teljesül. ■

8.7.2. Tétel. (**Jegorov-tétel**) *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és F Banach-tér. Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja $T \to F$ θ-mérhető függvény, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T halmazon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál az $f : T \to F$ függvényhez, akkor f is θ-mérhető.*

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy a tétel igaz akkor, ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ olyan mértéktér, hogy létezik $g : T \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ és minden $t \in T$ esetén $g(t) > 0$.

Valóban, ekkor értelmezzük az

$$f' := \frac{g.f}{g + \|f\|} : T \to F$$

függvényt, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen

$$f'_n := \frac{g.f_n}{g + \|f_n\|} : T \to F.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f'_n függvény θ-mérhető, továbbá

$$\|f'_n\| = \frac{g.\|f_n\|}{g + \|f_n\|} \leq g,$$

és a feltétel szerint $\int^* g \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$, ezért az integrálhatóság kritériuma szerint $f'_n \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$. Nyilvánvaló, hogy az $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f'-höz a T halmazon pontonként θ-majdnem mindenütt. Ezért a Lebesgue-tétel alapján $f' \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, ugyanakkor minden $t \in T$ esetén $\|f'(t)\| < g(t)$, így az

$$f = \frac{g.f'}{g - \|f'\|}$$

függvény θ-mérhető.

(II) A feltevés szerint kiválasztható olyan $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat és olyan $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben haladó $(f_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ rendszer, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $N_n \subseteq T$ θ-eltűnő halmaz és $f_n = \lim_{m\to\infty} f_{n,m}$ a $T \setminus N_n$ halmazon. Ugyanakkor létezik olyan $N \subseteq T$ θ-eltűnő halmaz, amelyre $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a $T \setminus N$ halmazon. Ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor $\{t \in T | f_{n,m}(t) \neq 0\} \in \mathscr{R}$, és 2.2.1. szerint az N-hez és minden $\mathbb{N} \ni n$-re az N_n halmazhoz is létezik azt tartalmazó, megszámlálható sok $\mathscr{R}$-beli halmaz uniójaként előálló halmaz T-ben. Ezért van olyan $T' \subseteq T$ halmaz, amely előáll megszámlálható sok $\mathscr{R}$-beli halmaz uniójaként és

$$\Big(\bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \{t \in T | f_{n,m}(t) \neq 0\}\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\Big) \cup N \subseteq T'.$$

Tekintsük a $(T', \mathscr{R}|T', \theta|_{\mathscr{R}|T'})$ mértékteret (6.5.2.). Világos, hogy $f|_{T'} = \lim_{n\to\infty} f_n|_{T'}$ a $T' \setminus N$ halmazon, és az $N \subseteq T'$ halmaz θ-eltűnő halmaz, valamint T' előáll megszámlálható sok $\mathscr{R}$-beli halmaz uniójaként, tehát a **4.** gyakorlat b) és d) pontjai szerint az N halmaz $\theta|_{\mathscr{R}|T'}$-eltűnő halmaz. Ez azt jelenti, hogy a $T' \to F$ függvényekből álló $\left(f_n|_{T'}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\theta|_{\mathscr{R}|T'}$-majdnem mindenütt pontonként konvergál a T' halmazon az $f|_{T'}$ függvényhez. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $f_n : T \to F$ függvény θ -mérhető, ezért a **4.** gyakorlat e) pontja szerint az $f_n|_{T'} : T' \to F$ függvény $\theta|_{\mathscr{R}|T'}$-mérhető. Ezért a **3.** gyakorlat alapján az $f|_{T'} : T' \to F$ függvény is $\theta|_{\mathscr{R}|T'}$-mérhető, tehát ismét a **4.** gyakorlat e) pontjára hivatkozva kapjuk, hogy az $(f|_{T'})^\circ$ függvény θ-mérhető, és $\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq T'$ miatt $(f|_{T'})^\circ = f$. ■

8.8. $\mathscr{L}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$-terek

8.8.1. Definíció. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és F normált tér. Ekkor*

$$\mathscr{L}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta) := \{\, f \in \mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta) \mid \text{"az } f \text{ függvény } \theta\text{-mérhető"} \,\}.$$

Megállapodunk abban, hogy az $\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$ feletti $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ félnorma $\mathscr{L}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$-ra vett leszűkítését szintén $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$-nel jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és F normált tér, akkor $\mathscr{L}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$ lineáris altere $\mathscr{F}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$-nek, mert $T \to F$ θ-mérhető függvények lineáris kombinációi szintén θ-mérhetőek; továbbá $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ félnorma az $\mathscr{L}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$ függvénytér felett.

Megjegyezzük, hogy ha $\mathscr{R}_\mathbb{N}$ az $\mathbb{N}$ véges részhalmazainak halmaza és $\mu_\mathbb{N}$ a számláló mérték $\mathbb{N}$ felett, akkor $\mathscr{L}_\mathbb{K}^\infty(T,\mathscr{R},\theta) = \mathscr{F}_\mathbb{K}^\infty(T,\mathscr{R},\theta) = l_\mathbb{K}^\infty$ (a $\mathbb{K}$-ban haladó korlátos sorozatok halmaza), és $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ egyenlő $\|\cdot\|_\infty$-nel (vagyis az $l_\mathbb{K}^\infty$ sorozattér feletti sup-normával).

8.8.2. Állítás. *Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és F Banach-tér, akkor az $\mathscr{L}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$ függvénytér teljes a $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ félnorma szerint.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{L}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$-ban, amely Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ félnorma szerint, akkor létezik olyan $f \in \mathscr{L}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ félnorma szerint, és létezik olyan $N \subseteq T$ θ-eltűnő halmaz, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* f-hez a $T \setminus N$ halmazon.

A IX. fejezet, 3. pont, **4.** gyakorlat d) és e) pontjai, valamint az **5.** gyakorlat alapján nyilvánvaló. ■

8.8.3. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér. Ha F végtelen dimenziós Banach-tér és létezik T-ben θ-integrálható halmazoknak olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozata, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|\theta|^*(E_n) > 0$, akkor $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ nem sűrű az $\mathscr{L}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$ térben a $\|\cdot\|_{\theta,\infty}$ félnorma szerint.*

Bizonyítás. Az F végtelen dimenziós Banach-tér egységgömbjének felülete *nem teljesen korlátos* halmaz, különben a kompaktság metrikus jellemzése (**MET** 9.4.1. Tétel) miatt kompakt volna, hiszen zárt lévén teljes és teljesen korlátos, így a **MET** 8.1.3. Állítás szerint a zárt egységgömb is kompakt lenne, amiből a **MET** 9.5.4. állítás alapján következne, hogy F véges dimenziós. Ezért létezik olyan $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat F-ben és olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|z_n\| = 1$ és a $(\mathrm{B}_\varepsilon(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gömb-rendszer diszjunkt. Legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θ-integrálható halmazoknak olyan diszjunkt sorozata, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\theta|^*(E_n) > 0$, és értelmezzük az $f := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \chi_{E_k}.z_k$ függvényt. Ekkor $f \in \mathscr{L}_F^\infty(T,\mathscr{R},\theta)$, és ha $g : T \to F$ olyan függvény, amelyhez létezik $N \subseteq T$ θ-eltűnő halmaz, amelyre $\sup\limits_{t\in T\setminus N} \|f(t) - g(t)\| < \varepsilon$, akkor g értékkészlete szükségképpen *végtelen* halmaz, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E_n \setminus N \neq \emptyset$, és ha $t \in E_n \setminus N$, akkor $\|z_n - g(t)\| = \|f(t) - g(t)\| < \varepsilon$, vagyis $g(t) \in \mathrm{B}_\varepsilon(z_n)$, így $\mathrm{Im}(g)$ végtelen. Ha létezne olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\theta,\infty} = 0$, akkor 3.5.6. szerint létezne olyan $N \subseteq T$ θ-eltűnő halmaz, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergálna a $T \setminus N$ halmazon. Ekkor létezne olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\sup\limits_{t\in T\setminus N} \|f(t) - f_n(t)\| < \varepsilon$, tehát a fentiek szerint f_n értékkészlete végtelen volna, holott az véges. ■

8.9. Gyakorlatok

1. Legyenek E és F normált terek $\mathbb{K}$ felett, és minden $u \in E'$, $f \in F$ esetén legyen

$$u \otimes f : E \to F; \quad e \mapsto u(e).f.$$

a) Ha $u \in E'$ és $f \in F$, akkor $u \otimes f \in \mathscr{L}(E;F)$ és $\|u \otimes f\| \leq \|u\|\|f\|$. Továbbá, az $E' \times F \to \mathscr{L}(E;F)$; $(u,f) \mapsto u \otimes f$ leképezés folytonos bilineáris operátor.

b) Ha $v \in \mathscr{L}(E;F)$, akkor $\mathrm{Im}(v)$ pontosan akkor *véges dimenziós* lineáris altér F-ben, ha létezik olyan $(u_i)_{i\in I}$ véges rendszer E'-ben és létezik olyan $(f_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, amelyre $v = \sum\limits_{i\in I} u_i \otimes f_i$ teljesül.

c) Ha $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér és az $u : T \to E'$ függvény θ-mérhető, valamint az $f : T \to F$ függvény is θ-mérhető, akkor a

$$T \to \mathscr{L}(E;F); \quad t \mapsto u(t) \otimes f(t)$$

függvény θ-mérhető.

d) Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér. Ha a $v : T \to \mathscr{L}(E;F)$ függvény θ-mérhető, akkor minden $e \in E$ esetén a $T \to F$; $t \mapsto v(t)(e)$ függvény is θ-mérhető. Ha E *véges dimenziós*, akkor egy $v : T \to \mathscr{L}(E;F)$ függvény pontosan akkor θ-mérhető, ha az E vektortér bármely $(e_i)_{i\in I}$ algebrai bázisára teljesül az, hogy minden $i \in I$ esetén a $T \to F$; $t \mapsto v(t)(e_i)$ függvény θ-mérhető.

(*Útmutatás.* d) Legyen E véges dimenziós és $(e_i)_{i\in I}$ olyan algebrai bázis E-ben, amelyre $i \in I$ esetén a $T \to F$; $t \mapsto v(t)(e_i)$ függvény θ-mérhető. Legyen $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer E'-ben, hogy minden $I \ni j,k$-ra $u_j(e_k) = \delta_{j,k}$. Ekkor $i \in I$ esetén a c) alapján a

$$T \to \mathscr{L}(E;F); \quad t \mapsto u_i \otimes (v(t)(e_i))$$

függvény θ-mérhető, ezért e függvények I-re vett összege is θ-mérhető, és ez az összegfüggvény egyenlő v-vel, hiszen minden $t \in T$ és $e \in E$ esetén

$$\Big(\sum_{i\in I} u_i \otimes (v(t)(e_i)\Big)(e) = \sum_{i\in I} u_i(e).v(t)(e_i) = v(t)\Big(\sum_{i\in I} u_i(e).e_i\Big) = v(t)(e)$$

teljesül.)

2. Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, F, G, H Banach-terek és $u : F \times G \to H$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris operátor. Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ és a $g : T \to G$ függvény *korlátos* és *θ-mérhető*, akkor az

$$u(f, g) : T \to H; \quad t \mapsto u(f(t), g(t))$$

is függvény θ-integrálható.

(*Útmutatás.* Az $u(f, g) : T \to H$ függvény θ-mérhető és $\|u(f, g)\| \leq C\|u\|\|f\|$, ahol $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, amelyre $\sup\limits_{t\in T} \|g(t)\| \leq C$. A $\displaystyle\int^* \|f\| \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\displaystyle\int^* \|u(f, g)\| \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty$, tehát az integrálhatóság kritériuma alapján $u(f, g) \in \mathscr{L}^1_H(T, \mathscr{R}, \theta)$.)

6. Legyen E *véges dimenziós* normált tér, F Banach-tér, $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és $(f_t)_{t\in T}$ olyan rendszer, hogy minden $t \in T$ esetén $f_t : E \rightarrowtail F$ függvény. Ha $\mathfrak{a}$ olyan belső pontja a $\mathrm{Dom}\Big(\displaystyle\int_T f_t \,\mathrm{d}\theta(t)\Big)$ halmaznak, hogy θ-majdnem minden $T \ni t$-re az f_t függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor a

$$T \to \mathscr{L}(E; F); \quad t \mapsto \begin{cases} (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a}) & \text{, ha } f_t \text{ differenciálható } \mathfrak{a}\text{-ban;} \\ \quad 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

függvény θ-mérhető.

(*Útmutatás.* Az **1**. gyakorlat szerint elég azt igazolni, hogy minden $e \in E$ esetén a

$$T \to F; \quad t \mapsto \begin{cases} (\mathrm{D}f_t)(\mathfrak{a})e & \text{, ha } f_t \text{ differenciálható } \mathfrak{a}\text{-ban;} \\ \quad 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

függvény θ-mérhető.

Ennek bizonyításához legyen $r \in \mathbb{R}^*_+$ olyan, hogy $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}\Big(\displaystyle\int_T f_t \,\mathrm{d}\theta(t)\Big)$ és rögzítsünk olyan $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{R}^*_+$-ban, amely 0-hoz konvergál, és amelyre minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varepsilon_n\|e\| < r$ teljesül. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$h_n : T \to F; \quad t \mapsto \frac{f_t(\mathfrak{a} + \varepsilon_n.e) - f_t(\mathfrak{a})}{\varepsilon_n}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathfrak{a} + \varepsilon_n.e \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Dom}\Big(\displaystyle\int_T f_t \,\mathrm{d}\theta(t)\Big)$, ezért a $T \to F;\ t \mapsto f_t(\mathfrak{a} + \varepsilon_n.e)$ és $T \to F;\ t \mapsto f_t(\mathfrak{a})$ függvények θ-integrálhatók, így θ-mérhetők, tehát a h_n függvény is θ-mérhető. A hipotézis szerint θ-majdnem minden $t \in T$ esetén $h(t) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(t)$, hiszen ez minden olyan $t \in T$ pontban igaz, amelyben f_t differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. Ezért a Jegorov-tétel (8.7.2.) szerint a h függvény θ-mérhető.)

8. Mutassuk meg, hogy a kettős sorozatokra vonatkozó diszkrét Lebesgue–Fubini-tétel (**DIF** 10.4.1.) a Lebesgue-Fubini–Fatou-tételnek speciális esete!
(*Útmutatás.* Legyen F Banach-tér és $f := (z_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ olyan F-ben haladó *kettős sorozat*, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum_{j\in\mathbb{N}} z_{j,k}$ sor abszolút konvergens és a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|z_{j,k}\| \Big)$ számsor konvergens. Jelölje $\mu_{\mathbb{N}}$ a számláló mértéket $\mathbb{N}$ felett. A feltevés szerint $k \in \mathbb{N}$ esetén az $f(\cdot, k) : \mathbb{N} \to F$ függvény $\mu_{\mathbb{N}}$-integrálható és a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \|f(\cdot,k)\| \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Ezért fennáll a

$$\int_{\mathbb{N}}^{*} \Big(\int_{\mathbb{N}}^{*} \|f(j,k)\| \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(j) \Big) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} \|f(\cdot,k)\| \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}} < +\infty$$

egyenlőtlenség. Könnyen látható, hogy *minden* $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to F$ függvény $\mu_{\mathbb{N}} \otimes \mu_{\mathbb{N}}$-mérhető, így f is az. Tehát a Lebesgue-Fubini–Fatou-tétel alapján

$$\int_{\mathbb{N}}^{*} \Big(\int_{\mathbb{N}}^{*} \|f(j,k)\| \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(k) \Big) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(j) == \int_{\mathbb{N}}^{*} \Big(\int_{\mathbb{N}}^{*} \|f(j,k)\| \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(j) \Big) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(k) < +\infty,$$

ami azt jelenti, hogy minden $\mathbb{N} \ni j$-re a $\sum_{k\in\mathbb{N}} z_{j,k}$ sor abszolút konvergens, továbbá a $\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} \Big)$ és $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k} \Big)$ sorok abszolút konvergensek, és fennáll a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} \Big) = \int_{\mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{N}} f(j,k) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(k) \Big) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(j) =$$
$$= \int_{\mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{N}} f(j,k) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(j) \Big) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k} \Big)$$

egyenlőség.)

13. Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T részhalmazainak olyan diszjunkt sorozata, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re az E_n halmaz θ-mérhető, akkor

$$|\theta|^{*}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} |\theta|^{*}(E_n).$$

(*Útmutatás.* Ha a bizonyítandó egyenlőség bal oldala véges, akkor a Jegorov-tétel (8.7.2.) és az integrálhatóság kritériuma alapján az $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ halmaz θ-integrálható, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re az E_n halmaz is θ-integrálható, tehát teljesül az egyenlőség. Ha viszont a bal oldal értéke $+\infty$, akkor a jobb oldalé is az a külső mértékek megszámlálható szubadditivitása miatt.)

14. Létezik olyan részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, amely *nem mérhető* az egy dimenziós Lebesgue-mérték szerint.

(*Útmutatás.* Ha $\mathbb{R}$ minden részhalmaza Lebesgue-mérhető volna, akkor a **13**. gyakorlat szerint az egy dimenziós Lebesgue-mérték által generált *külső mérték* σ-additív lenne, holott a IX. fejezet, 1. pont, **6**. gyakorlat szerint ez nem igaz.)

9. fejezet

Integrálás korlátos mérték szerint

9.1. Korlátos mértékek jellemzése

Emlékeztetünk arra, hogy ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor minden $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ korlátos additív függvény relatív korlátos, így korlátos változású (4.1.4.), ezért egy $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor *korlátos mérték*, ha korlátos σ-additív halmazfüggvény.

9.1.1. Definíció. *Legyen T halmaz és $\mathscr{R}$ halmazgyűrű T felett. $\mathscr{R}_\sigma$ jelöli azon $E \subseteq T$ halmazok halmazát, amelyekhez van olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Azt mondjuk, hogy a T halmaz* σ**-véges** $\mathscr{R}$ **szerint**, *ha $T \in \mathscr{R}_\sigma$, vagyis létezik olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.*

Példák. 1) Legyen T halmaz és $\mathscr{R} := \{\emptyset\}$. A T halmaz pontosan akkor σ-véges $\mathscr{R}$ szerint, ha $T = \emptyset$.

2) Legyen T halmaz és $\mathscr{R}$ a T véges részhalmazainak halmazgyűrűje. A T halmaz pontosan akkor σ-véges $\mathscr{R}$ szerint, ha T megszámlálható, hiszen megszámlálható sok véges halmaz uniója megszámlálható.

3) Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $\mathbb{R}^n$ halmaz σ-véges az $\mathscr{R}_n$ standard halmazgyűrű szerint, hiszen ha $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ felülről nem korlátos sorozat $\mathbb{R}_+^*$-ban, akkor $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [-c_k, c_k[^n$ és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $[-c_k, c_k[^n \in \mathscr{R}_n$.

9.1.2. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, és tekintsük a következő állításokat.*

(i) $1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, *vagyis a T halmaz θ-integrálható.*

(ii) $1_T \in \mathscr{F}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, *vagyis $|\theta|^*(T) < +\infty$.*

(iii) *θ korlátos mérték.*

Ekkor (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) *teljesül, és ha a T halmaz σ-véges $\mathscr{R}$ szerint, akkor* (iii)$\Rightarrow$(i) *is igaz, tehát a három állítás ekvivalens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a T halmaz σ-véges $\mathscr{R}$ szerint, és legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő halmazsorozat, hogy $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $E_n \in \mathscr{R}$. Ekkor az

$\mathscr{E}_+(T,\mathscr{R})$-ben haladó $(\chi_{E_n})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő és $1_T = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}$. Ha a θ mérték korlátos, akkor

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\chi_{E_n}\|_{\theta,1} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\theta|(E_n) \leq \sup_{E\in\mathscr{R}} |\theta|(E) < +\infty,$$

tehát a Levi-tétel alapján $1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

Ha azonban T nem σ-véges $\mathscr{R}$ szerint, akkor a $\mathscr{R} \to \mathbb{K}$ azonosan nulla függvény olyan korlátos mérték, amely szerint az 1_T függvény nem integrálható.

9.1.3. Állítás. *Ha T halmaz, $\mathscr{R}$ halmazgyűrű T felett és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ korlátos mérték, akkor $\mathscr{R}_\sigma \subseteq \mathscr{R}[\theta]$.*

Bizonyítás. A Levi-tételből következik, hogy ha $E \in \mathscr{R}_\sigma$ és $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, akkor $E \in \mathscr{R}[\theta]$ pontosan akkor teljesül, ha $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\theta|(E_n) < +\infty$. Ez utóbbi egyenlőtlenség viszont nyilvánvalóan igaz, ha θ korlátos. ■

9.2. Korlátos mértékek szerinti $\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$-terek tulajdonságai

9.2.1. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, és tegyük fel, a θ mérték korlátos. Ha F Banach-tér és $f : T \to F$ korlátos θ-mérhető függvény, akkor minden $p \geq 1$ valós számra $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, és legyen $N \subseteq T$ olyan θ-eltűnő halmaz, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál f-hez a $T \setminus N$ halmazon. Ekkor van olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}$-ben, hogy $N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Nyilvánvaló, hogy $E := \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t \in T | f_n(t) \neq 0\}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \in \mathscr{R}_\sigma$, és $\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq E$. Ha $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy minden $t \in T$ esetén $\|f(t)\| \leq C$, akkor $\|f\| \leq C\chi_E$ teljesül, és minden $p \geq 1$ valós számra

$$\int^* (C\chi_E)^p \, \mathrm{d}|\theta| = \mathrm{C}^p |\theta|^*(E) < +\infty,$$

hiszen az előző állítás szerint $E \in \mathscr{R}[\theta]$. Ezért a p-edik hatványon integrálhatóság kritériuma szerint minden $p \geq 1$ valós számra $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$. ■

9.2.2. Állítás. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, és tegyük fel, hogy a θ mérték korlátos. Ha F Banach-tér és $p \geq q \geq 1$ valós számok, akkor*

$$\mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta) \subseteq \mathscr{L}^q_F(T,\mathscr{R},\theta),$$

és minden $f \in \mathscr{L}^p_F(T,\mathscr{R},\theta)$ esetén

$$\|f\|_{\theta,q} \leq \left(|\theta|^*(T)\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|f\|_{\theta,p}.$$

Bizonyítás. Legyen F Banach-tér, és tegyük fel, hogy $p > q \geq 1$ (csak ez az eset érdekes). Legyen p' az a valós szám, amelyre $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{q}$ (vagyis $p' := \dfrac{qp}{p-q}$). Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$. Ekkor $\displaystyle\int_T^* \|f\|^p \,\mathrm{d}|\theta| < +\infty$ miatt létezik olyan $E \in \mathscr{R}_\sigma$, amelyre $\{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq E$. Világos, hogy $\chi_{_E} : T \to \mathbb{K}$ korlátos θ-mérhető függvény, ezért az előző állítás szerint $\chi_{_E} \in \mathscr{L}_F^{p'}(T,\mathscr{R},\theta)$, így $f = \chi_{_E}.f \in \mathscr{L}_F^q(T,\mathscr{R},\theta)$ és

$$\|f\|_{\theta,q} \leq \|\chi_{_E}\|_{\theta,p'} \|f\|_{\theta,p} = (|\theta|^*(E))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|f\|_{\theta,p} \leq (|\theta|^*(T))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|f\|_{\theta,p},$$

amit bizonyítani kellett. ■

Vegyük észre, hogy ha T nem σ-véges $\mathscr{R}$ szerint és $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ korlátos mérték, akkor $|\theta|^*(T) = +\infty$, ezért az iménti állításban felírt egyenlőtlenség semmitmondó (bár igaz). Z

9.2.3. Tétel. *Legyen $(T,\mathscr{R},\theta)$ mértéktér, és tegyük fel, hogy a θ mérték korlátos. Ekkor minden F Banach-térre és $p \geq 1$ valós számra*

$$\widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta),$$

továbbá a $\widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R})$ feletti θ szerinti egyszerű Riemann-integrál (**MES** 5.3.2.) *egyenlő az $\mathscr{L}_F^1(T,\mathscr{R},\theta)$ feletti integrál $\widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R})$-re vett leszűkítésével.*

Bizonyítás. A $T \to F$ $\mathscr{R}$-egyszerű függvények θ-mérhetőek és korlátosak, így az előző állítás szerint minden $p \geq 1$ valós számra $\widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{L}_F^p(T,\mathscr{R},\theta)$.

Legyen $\varphi \in \widehat{\mathscr{E}}_F(T,\mathscr{R})$ és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely egyenletesen konvergál φ-hez a T halmazon. Létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re és $T \ni t$-re $\|\varphi_n(t)\| \leq C$. Világos, hogy $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t \in T | \varphi_n(t) \neq 0\} \in \mathscr{R}_\sigma$ és $\{t \in T | \varphi(t) \neq 0\} \subseteq E$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|\varphi_n\| \leq C.\chi_{_E}$, és $E \in \mathscr{R}[\theta]$, ezért a Lebesgue-tétel szerint a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál φ-hez a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint, így

$$\int_T \varphi \,\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_T \varphi_n \,\mathrm{d}\theta.$$

Ugyanakkor a φ függvény θ szerinti egyszerű Riemann-integrálja egyenlő a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_T \varphi_n \,\mathrm{d}\theta$ vektorral (**MES** 5.3.2.), hiszen az egyszerű Riemann-integrál sup-normában folytonos. ■

10. fejezet

Alkalmazás: A klasszikus valószínűségelmélet elemei

10.1. Valószínűségi mezők

10.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *hármas (Kolmogorov-féle)* **való-színűségi mező***, ha* $\mathscr{A}$ σ*-algebra az* Ω *halmaz felett és* $P : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ *olyan pozitív mérték, amelyre* $P(\Omega) = 1$.

10.2. Mérhető-terek és mérhető-függvények

10.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $(M, \mathscr{B})$ *pár* **mérhető-tér***, ha* $\mathscr{B}$ σ*-algebra az* M *halmaz felett. Ha* $(\Omega, \mathscr{A})$ *és* $(M, \mathscr{B})$ *mérhető-terek, akkor azt mondjuk, hogy az* $f : \Omega \to M$ *leképezés* $\mathscr{A}$*-*$\mathscr{B}$ **mérhető-függvény***, ha minden* $B \in \mathscr{B}$ *esetén* $\overset{-1}{f}\langle B \rangle \in \mathscr{A}$.

10.2.2. Állítás. *Ha* $(\Omega, \mathscr{A})$ *mérhető-tér és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *A* ξ *függvény* $\mathscr{A}$*-*$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *mérhető-függvény, ahol* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *az* $\mathbb{R}$ *Borel-féle* σ*-algebrája.*

(ii) *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, x[\rangle \in \mathscr{A}$.

(iii) *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, x]\rangle \in \mathscr{A}$.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Triviális, mert minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $]\leftarrow, x[$ intervallum nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, tehát eleme $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-nek.

(ii)⇒(iii) Ha $x \in \mathbb{R}$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós számsorozat, hogy $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $x < x_n$, akkor nyilvánvaló, hogy $]\leftarrow, x] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}]\leftarrow, x_n[$, ezért $\overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, x]\rangle = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, x_n[\rangle$, és itt az egyenlőség jobb oldalán álló halmaz eleme $\mathscr{A}$-nak, mert (ii) alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, x_n[\rangle \in \mathscr{A}$ és $\mathscr{A}$ zárt a megszámlálható metszetképzésre nézve.

(iii)⇒(i) Ha $x \in \mathbb{R}$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós számsorozat, hogy $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $x_n < x$, akkor nyilvánvaló, hogy $]\leftarrow, x[= \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}]\leftarrow, x_n]$, ezért $\overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, x[\rangle =$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, x_n]\rangle$, és itt az egyenlőség jobb oldalán álló halmaz eleme $\mathscr{A}$-nak, mert (iii) alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, x_n]\rangle \in \mathscr{A}$ és $\mathscr{A}$ zárt a megszámlálható unióképzésre nézve.

Tehát ekkor minden $b \in \mathbb{R}$ pontra $\overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, b[\rangle \in \mathscr{A}$, ugyanakkor minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\overset{-1}{\xi}\langle]a, \rightarrow [\rangle = \Omega \setminus \overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, a]\rangle \in \mathscr{A}$, ezért $\overset{-1}{\xi}\langle]a, b[\rangle = \overset{-1}{\xi}\langle]a, \rightarrow [\rangle \cap \overset{-1}{\xi}\langle]\leftarrow, b[\rangle \in \mathscr{A}$. Mivel $\mathbb{R}$ minden nyílt részhalmaza előáll megszámlálható sok korlátos nyílt intervallum uniójaként, ebből következik, hogy $\mathbb{R}$ minden nyílt részhalmazának ξ által létesített inverz képe eleme $\mathscr{A}$-nak. Ez azt jelenti, hogy a $\mathscr{B} := \{E \subseteq \mathbb{R} | \overset{-1}{\xi}\langle E\rangle \in \mathscr{A}\}$ halmaz tartalmazza $\mathbb{R}$ nyílt részhalmazait, és mivel $\mathscr{B}$ σ-algebra $\mathbb{R}$-felett, így $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{B}$. Tehát a ξ függvényre (i) teljesül. ■

10.3. Valószínűségi mértékek $\mathbb{R}$ felett

10.4. Valószínűségi változók és momentumok

10.5. Valószínűségi eloszlások

10.5.1. Definíció. *Ha $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ valószínűségi mező és $(M, \mathscr{B})$ mérhető tér, akkor a $\xi : \Omega \to M$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$ mérhető függvény P* **szerinti eloszlásának** *nevezzük a*

$$\mathscr{B} \to [0, 1]; \quad B \mapsto P(\overset{-1}{\xi}\langle B\rangle)$$

leképezést.

10.5.2. Állítás. *Ha $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ valószínűségi mező és $(M, \mathscr{B})$ mérhető tér, akkor a $\xi : \Omega \to M$ $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$ mérhető függvény P szerinti eloszlása valószínűségi mérték az $(M, \mathscr{B})$ mérhető tér felett.*

Bizonyítás. ■

10.5.3. Definíció. *Ha $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ valószínűségi mező és ξ valós valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, akkor ξ P* **szerinti eloszlásfüggvényének** *nevezzük az*

$$\mathbb{R} \to [0, 1]; \quad x \mapsto P(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \le x\})$$

leképezést.

10.5.4. Állítás. *Legyen ξ valós valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ valószínűségi mező felett és jelölje F a ξ eloszlásfüggvényét P szerint. Ekkor az $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvényre teljesülnek a következők.*

a) *F monoton növő és balról folytonos.*

b) $\lim_{-\infty} F = 0$ *és* $\lim_{+\infty} F = 1$.

Bizonyítás. ■

10.5.5. Állítás. *Legyen* $(x_i)_{i\in I}$ *tetszőleges* $\mathbb{R}$*-ben haladó nem üres, véges rendszer. Ekkor az*

$$F:\mathbb{R}\to[0,1];\quad x\mapsto\frac{\mathrm{Card}(\{i\in I|x_i\leq x\})}{\mathrm{Card}(I)}$$

leképezésre teljesülnek az előző állítás a) *és* b) *feltételei.*

Bizonyítás. ∎

10.5.6. Definíció. *Ha* $a,b\in\mathbb{R}$ *és* $a<b$*, akkor* $\mathrm{F}_{a,b}$ *jelöli azt az* $\mathbb{R}\to[0,1]$ *függvényt, amelyre minden* $x\in\mathbb{R}$ *esetén*

$$\mathbb{F}_{a,b}(x):=\begin{cases}0 & ,\text{ ha } x\leq a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & ,\text{ ha } a<x<b,\\ 1 & ,\text{ ha } b\leq x.\end{cases}$$

10.5.7. Definíció. *Ha* $(\Omega,\mathscr{A},P)$ *valószínűségi mező és* ξ *valós valószínűségi változó az* $(\Omega,\mathscr{A})$ *mérhető tér felett, akkor azt mondjuk, hogy* ξ **egyenletes eloszlású az** $[a,b]$ **intervallumban** P **szerint**, *ha* ξ *eloszlásfüggvénye* P *szerint egyenlő* $\mathbb{F}_{a,b}$*-vel, vagyis minden* $x\in\mathbb{R}$ *esetén*

$$P(\{\omega\in\Omega|\xi(\omega)\leq x\})=\mathbb{F}_{a,b}(x).$$

10.5.8. Lemma. *Legyen* $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ *monoton növő, folytonos függvény. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $]0,1[\subseteq\mathrm{Im}(F)$,

(ii) $\lim\limits_{-\infty}F=0$ *és* $\lim\limits_{+\infty}F=1$.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $\varepsilon\in]0,1[$ tetszőleges. Mivel $]0,1[\subseteq\mathrm{Im}(F)$, így $]0,\varepsilon[\subseteq\mathrm{Im}(F)$ és $]1-\varepsilon,1[\subseteq\mathrm{Im}(F)$, tehát léteznek olyan $x_-\in\mathbb{R}$ és $x_+\in\mathbb{R}$ számok, hogy $F(x_-)<\varepsilon$ és $F(x_+)>1-\varepsilon$. Az F függvény monoton növése miatt minden $x<x_-$ valós számra $-\varepsilon<0\leq F(x)\leq F(x_-)<\varepsilon$, vagyis $F\langle]\leftarrow,x_-[\rangle\subseteq]-\varepsilon,\varepsilon[$, valamint minden $x>x_+$ valós számra $1+\varepsilon>1\geq F(x)\geq F(x_+)>1-\varepsilon$, vagyis $F\langle]x_+,\to[\rangle\subseteq]1-\varepsilon,1+\varepsilon[$. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy (ii) teljesül (**ANA** 1.6.1.).

(ii)⇒(i) Legyen $u\in]0,1[$. Mivel $\lim\limits_{-\infty}F=0<y$, így a $-\infty$-ben vett határérték definíciója (**ANA** 1.6.1.) szerint létezik olyan $x_-\in\mathbb{R}$, hogy $F(x_-)<u$. Mivel $\lim\limits_{+\infty}F=1$, így a $+\infty$-ben vett határérték definíciója (**ANA** 1.6.1.) szerint létezik olyan $x_+\in\mathbb{R}$, hogy $F(x_+)>u$. Ha $x_-\geq x_+$ teljesülne, akkor F monoton növése folytán $u>F(x_-)\geq F(x_+)>u$ is igaz lenne, ami lehetetlen. Ezért $x_-<x_+$ és az F függvény folytonos az $[x_-,x_+]$ intervallum minden pontjában, így a Bolzano-tétel (**ANA** 2.7.2.) szerint van olyan $x\in[x_-,x_+]$, hogy $F(x)=u$. Ez azt jelenti, hogy $]0,1[\subseteq\mathrm{Im}(F)$. ∎

10.5.9. Lemma. *Legyen* $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ *monoton növő, folytonos függvény. Ha* $]0,1[\subseteq\mathrm{Im}(F)$*, akkor minden* $u\in]0,1[$ *esetén az* $\{x\in\mathbb{R}|F(x)=u\}$ *halmaz nem üres, korlátos és zárt intervallum, és ha* $G:]0,1[\to\mathbb{R}$ *tetszőleges jobbinverze* F*-nek (vagyis* $F\circ G=\mathrm{id}_{]0,1[}$*), akkor* G *szigorúan monoton növő és minden* $u\in]0,1[$ *pontra fennáll a* $G(u)\in\{x\in\mathbb{R}|F(x)=u\}$ *összefüggés.*

Bizonyítás. Legyen $u\in]0,1[$. Ekkor $\{x\in\mathbb{R}|F(x)=u\}=\overset{-1}{F}\langle\{u\}\rangle$, és az egyenlőség jobb oldalán álló halmaz zárt, mert $\{u\}$ zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben és F folytonos (**MET** 7.8.1.).

Az (i) feltétel szerint $\{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\} \neq \emptyset$. Ha $\{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\}$ nem lenne korlátos alulról, akkor létezne olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (**NUM** 3.10.8.) és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F(x_n) = u$. Ekkor $\lim_{-\infty} F = 0$ és F monoton növése miatt $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0$, ugyanakkor $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = u > 0$, ami lehetetlen. Ha $\{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\}$ nem lenne korlátos felülről, akkor létezne olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (**NUM** 3.10.8.) és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F(x_n) = u$. Ekkor $\lim_{+\infty} F = 1$ és F monoton növése miatt $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 1$, ugyanakkor $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = u < 1$, ami lehetetlen. Tehát az $\{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\}$ halmaz nem üres, korlátos és zárt. Ez a halmaz intervallum is, mert ha $x', x'' \in \{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\}$ olyanok, hogy $x' \leq x''$, akkor minden $z \in [x', x'']$ pontra F monoton növése miatt $u = F(x') \leq F(z) \leq F(x'') = u$, vagyis $F(z) = u$, ami azt jelenti, hogy $[x', x''] \subseteq \{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\}$.

Ha $G :]0,1[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $F \circ G = \mathrm{id}_{]0,1[}$, akkor minden $u \in]0,1[$ esetén $F(G(u)) = u$, tehát $G(u) \in \{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\}$ nyilvánvalóan teljesül.

Végül, legyen $G :]0,1[\to \mathbb{R}$ tetszőleges jobbinverze F-nek, és vegyünk olyan $u, u' \in]0,1[$ pontokat, amelyekre $u < u'$. Ha $G(u) \geq G(u')$ teljesülne, akkor F monoton növése miatt $u = F(G(u)) \geq F(G(u')) = u'$, holott $u < u'$. Ezért $G(u) < G(u')$, vagyis G szigorúan monoton növő. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állítás feltételei mellett F-nek *létezik* jobbinverze (**ENS** 2.8.1.), továbbá minden $u \in]0,1[$ esetén az $\{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\}$ nem üres kompakt intervallumnak létezik legkisebb és legnagyobb eleme, így F-nek létezik két kitüntetett $]0,1[$ intervallumon értelmezett jobbinverze, éspedig az

$$F_-^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}; \quad u \mapsto \min\left(\{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\}\right),$$

$$F_+^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}; \quad u \mapsto \max\left(\{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\}\right)$$

függvények. Világos, hogy F bármely $]0,1[$ intervallumon értelmezett G jobbinverzére teljesül az, hogy minden $u \in]0,1[$ esetén $F_-^{-1}(u) \leq G(u) \leq F_+^{-1}(u)$, hiszen $G(u) \in \{x \in \mathbb{R} | F(x) = u\}$.

Azonban $\mathbb{R} \to [0,1]$ monoton növő, folytonos függvény még akkor sem szükségképpen injektív, ha ráképez $]0,1[$-re, ezért lehetséges az, hogy nem létezik balinverze (**ENS** 2.4.10.).

10.5.10. Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *valószínűségi mező és* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *olyan folytonos, monoton növő függvény, hogy* $\mathrm{Im}(F) =]0,1[$.

a) *Ha* η *tetszőleges olyan valószínűségi változó az* $(\Omega, \mathscr{A})$ *mérhető tér felett, hogy* $\mathrm{Im}(\eta) \subseteq]0,1[$ *és* η *eloszlásfüggvénye* P *szerint egyenlő az* $\mathbb{F}_{0,1}$ *függvénnyel, akkor* $F_-^{-1} \circ \eta$ *olyan valószínűségi változó az* $(\Omega, \mathscr{A})$ *mérhető tér felett, hogy* $F_-^{-1} \circ \eta$ *eloszlásfüggvénye* P *szerint egyenlő* F*-fel.*

b) *Ha* ξ *tetszőleges olyan valószínűségi változó az* $(\Omega, \mathscr{A})$ *mérhető tér felett, amelynek* P *szerinti eloszlásfüggvénye egyenlő* F*-fel, akkor az* $F \circ \xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény olyan valószínűségi változó az* $(\Omega, \mathscr{A})$ *mérhető tér felett, amelyre* $\mathrm{Im}(F \circ \xi) \subseteq]0,1[$ *és amelynek* P *szerinti eloszlásfüggvénye egyenlő az* $\mathbb{F}_{0,1}$ *függvénnyel.*

Bizonyítás. a) Először megmutatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega \mid (F_-^{-1} \circ \eta)(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \leq F(x)\}. \tag{1}$$

Legyen $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $(F_-^{-1} \circ \eta)(\omega) \leq x$. Ekkor F monoton növése folytán $F\left((F_-^{-1} \circ \eta)(\omega)\right) \leq F(x)$, ugyanakkor $F \circ F_-^{-1} = \mathrm{id}_{]0,1[}$ miatt $F\left((F_-^{-1} \circ \eta)(\omega)\right) = \eta(\omega)$.

Ezért $\{\omega \in \Omega \mid (F_-^{-1} \circ \eta)(\omega) \leq x\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \leq F(x)\}$.

Legyen $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $\eta(\omega) \leq F(x)$. Mivel az $F_-^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$ jobbinverz (szigorúan) monoton növő, így $F_-^{-1}(\eta(\omega)) \leq F_-^{-1}(F(x))$. Az F_-^{-1} függvény definíciója szerint $F_-^{-1}(F(x)) = \min(\{x' \in \mathbb{R} | F(x') = F(x)\})$, és mivel nyilvánvalóan $x \in \{x' \in \mathbb{R} | F(x') = F(x)\}$, így $\min(\{x' \in \mathbb{R} | F(x') = F(x)\}) \leq x$, következésképpen $F_-^{-1}(\eta(\omega)) \leq x$. Ezért $\{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \leq F(x)\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid (F_-^{-1} \circ \eta)(\omega) \leq x\}$, amivel az (1) egyenlőséget igazoltuk.

Mivel η valószínűségi változó, így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az (1) egyenlőség jobb oldalán $\mathscr{A}$-beli halmaz áll. Ezért az (1) egyenlőségből következik, hogy az $F_-^{-1} \circ \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezés $\mathscr{A}$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mérhető függvény, vagyis valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett (**INT** 34.2.2.).

Az (1) egyenlőségből az is következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P\left(\{\omega \in \Omega \mid (F_-^{-1} \circ \eta)(\omega) \leq x\}\right) = P\left(\{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \leq F(x)\}\right) = \mathbb{F}_{0,1}(F(x)) = F(x),$$

ahol a második egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy η eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő $\mathbb{F}_{0,1}$-gyel, továbbá $F(x) \in]0,1[$ és $\mathbb{F}_{0,1}$ definíciója szerint $\mathbb{F}_{0,1} = \mathrm{id}_{]0,1[}$ a $]0,1[$ intervallumon. Tehát $F_-^{-1} \circ \eta$ eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő F-fel.

b) Az $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, tehát $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mérhető függvény, ahol $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$ Borel-féle σ-algebrája. Ugyanakkor a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény $\mathscr{A}$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mérhető függvény, ezért az $F \circ \xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény szintén $\mathscr{A}$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mérhető függvény, vagyis valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett. (Tehát azt használtuk fel, hogy a folytonos függvények mérhető függvények és mérhető függvények kompozíciója mérhető függvény.)

Az $F \circ \xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó P szerinti eloszlásának meghatározásához először megmutatjuk, hogy minden $u \in]0,1[$ esetén

$$\{\omega \in \Omega \mid (F \circ \xi)(\omega) \leq u\} = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leq F_+^{-1}(u)\}. \tag{2}$$

Legyen $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $(F \circ \xi)(\omega) \leq u$. Vezessük be az $u_0 := (F \circ \xi)(\omega)$ jelölést. Ekkor $\xi(\omega) \in \{x \in \mathbb{R} | F(x) = u_0\}$, és a definíció szerint $F_+^{-1}(u_0)$ a legnagyobb eleme az $\{x \in \mathbb{R} | F(x) = u_0\}$ halmaznak, így $\xi(\omega) \leq F_+^{-1}(u_0)$. Ugyanakkor $F_+^{-1} : [0,1[\to \mathbb{R}$ (szigorúan) monoton növő, ezért $u_0 \leq u$ miatt $F_+^{-1}(u_0) \leq F_+^{-1}(u)$, vagyis $\xi(\omega) \leq F_+^{-1}(u)$. Ezért $\{\omega \in \Omega \mid (F \circ \xi)(\omega) \leq u\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leq F_+^{-1}(u)\}$ teljesül.

Megfordítva, legyen $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $\xi(\omega) \leq F_+^{-1}(u)$. Ekkor F monoton növése miatt $F(\xi(\omega)) \leq F\left(F_+^{-1}(u)\right) = \left(F \circ F_+^{-1}\right)(u) = u$, ahol felhasználtuk azt, hogy $F \circ F_+^{-1} = \mathrm{id}_{]0,1[}$. Ezért $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leq F_+^{-1}(u)\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid (F \circ \xi)(\omega) \leq u\}$ teljesül, amivel az (2) egyenlőséget igazoltuk.

Legyen $u \in]0,1[$. Ekkor alkalmazva a (2) egyenlőséget és felhasználva azt, hogy ξ eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő F-fel kapjuk, hogy

$$P\left(\{\omega \in \Omega | (F \circ \xi)(\omega) \leq u\}\right) = P\left(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \leq F_+^{-1}(u)\}\right) = F\left(F_+^{-1}(u)\right) = u = \mathbb{F}_{0,1}(u),$$

és az egyenlőség lánc első tagja egyenlő az $F \circ \xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó P szerinti eloszlásfüggvényének u helyen felvett értékével. Tehát $F \circ \xi$ eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő $\mathbb{F}_{0,1}$-gyel a $]0,1[$ intervallumon.

Ha $u \in \mathbb{R}$ és $u \leq 0$, akkor $\{\omega \in \Omega | (F \circ \xi)(\omega) \leq u\} = \emptyset$, mert ha $\omega \in \Omega$ olyan volna, hogy $(F \circ \xi)(\omega) \leq u \leq 0$, akkor $F(\xi(\omega)) = 0$ teljesülne, holott $0 \notin]0,1[= \mathrm{Im}(F)$. Ezért $u \in \mathbb{R}$ és $u \leq 0$ esetén $P\left(\{\omega \in \Omega | (F \circ \xi)(\omega) \leq u\}\right) = P(\emptyset) = 0 = \mathbb{F}_{0,1}(u)$. Tehát $F \circ \xi$

eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő $\mathbb{F}_{0,1}$-gyel a $]\leftarrow, 0[$ intervallumon.

Ha $u \in \mathbb{R}$ és $u \geq 1$, akkor $\{\omega \in \Omega | (F \circ \xi)(\omega) \leq u\} = \Omega$, ezért $P(\{\omega \in \Omega | (F \circ \xi)(\omega) \leq u\}) = P(\Omega)1 = \mathrm{F}_{0,1}(u)$. Tehát $F \circ \xi$ eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő $\mathrm{F}_{0,1}$-gyel a $]1, \rightarrow[$ intervallumon.

Ezzel megmutattuk, hogy az $F \circ \xi$ valószínűségi változó P szerinti eloszlásfüggvénye egyenlő $\mathbb{F}_{0,1}$-gyel (vagyis egyenletes a $]0,1[$ intervallumon). ∎

Vegyük észre, hogy az előző tétel bizonyításának a) pontjában az F_-^{-1} jobbinverz semmiféle simasági tulajdonságát nem használtuk ki, mert nem volt rá szükség. E helyett az (1) egyenlőségből azonnal kijött, hogy az $F_-^{-1} \circ \eta$ leképezés $\mathscr{A}$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mérhető függvény, tehát valószínűségi változó.

Figyeljük meg, hogy az előző tétel bizonyításának b) pontjában az F_+^{-1} jobbinverzet használtuk F_-^{-1} helyett. Csak ezzel jött ki a kulcsfontosságú (2) egyenlőség. A b) állítás szempontjából meg mindegy, hogy a bizonyításához melyik jobbinverzet alkalmazzuk, mert az állításban semmiféle jobbinverz nem szerepel, szemben az a) állítással, ahol lényeges az, hogy F_-^{-1} szerepeljen.

10.5.11. Következmény. *Legyen $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ valószínűségi mező, és $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ olyan folytonos, monoton növő függvény, hogy $\mathrm{Im}(F) =]0,1[$.*

a) *Ha η tetszőleges olyan valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, hogy $\mathrm{Im}(\eta) \subseteq]0,1[$ és η eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő az $\mathrm{F}_{0,1}$ függvénnyel, akkor létezik olyan ξ valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, amelynek P szerinti eloszlásfüggvénye egyenlő F-fel és $\eta = F \circ \xi$.*

b) *Ha F szigorúan monoton növő, és ξ tetszőleges olyan valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, amelynek P szerinti eloszlásfüggvénye egyenlő F-fel, akkor létezik egyetlen olyan η valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, hogy $\mathrm{Im}(\eta) \subseteq]0,1[$ és η eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő az $\mathrm{F}_{0,1}$ függvénnyel és $\xi = F^{-1} \circ \eta$.*

Bizonyítás. a) Legyen η olyan valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, hogy $\mathrm{Im}(\eta) \subseteq]0,1[$ és η eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő az $\mathrm{F}_{0,1}$ függvénnyel. A 10.5.10. tétel a) pontja szerint $\xi := F_-^{-1} \circ \eta$ olyan valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, amelynek eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő F-fel, továbbá

$$F \circ \xi = F \circ (F_-^{-1} \circ \eta) = (F \circ F_-^{-1}) \circ \eta = \mathrm{id}_{]0,1[} \circ \eta = \eta,$$

hiszen F_-^{-1} jobbinverze F-nek. Tehát ξ olyan valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, amelynek a létezését állítottuk.

b) Tegyük fel, hogy F szigorúan monoton növő, és ξ olyan valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, amelynek P szerinti eloszlásfüggvénye egyenlő F-fel. A 10.5.10. tétel b) pontja szerint $\eta := F \circ \xi$ olyan valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, hogy $\mathrm{Im}(\eta) \subseteq]0,1[$ és amelynek eloszlásfüggvénye P szerint egyenlő az $\mathrm{F}_{0,1}$ függvénnyel, továbbá

$$F^{-1} \circ \eta = F^{-1} \circ (F \circ \xi) = (F^{-1} \circ F) \circ \xi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ \xi = \xi.$$

Tehát η olyan valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A})$ mérhető tér felett, amelynek a létezését állítottuk. Az η valószínűségi változót ez az egyenlőség egértelműen meghatározza, mert ha $F^{-1} \circ \eta = \xi$, akkor

$$\eta = \mathrm{id}_{]0,1[} \circ \eta = (F \circ F^{-1}) \circ \eta = F \circ (F^{-1} \circ \eta) = F \circ \xi. \blacksquare$$

10.6. Nagy számok törvényei

10.7. Határértéktételek

10.8. Sztochasztikus folyamatok

10.9. Az általános valószínűségelmélet elemei

XV. rész

A geometriai integrálelmélet alapjai

BEVETEZÉS

Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és F Banach-tér, akkor beszélhetünk a $T \to F$ függvények θ mérték szerinti *integrálhatóságáról*, de az általános esetben értelmetlen ilyen típusú függvények *folytonosságáról*, vagy *differenciálhatóságáról* beszélni, hacsak nem jelölünk ki T felett egy metrikát, vagy ha T nem részhalmaza egy normált térnek. Ugyanakkor, ha E és F normált terek, akkor értelmes az $E \rightarrowtail F$ függvények *differenciálhatóságát* vizsgálni, de ezek *integrálhatósága* mindaddig értelmetlen, amíg ki nem jelölünk egy olyan mértéket, amelynek definíciós tartománya halmazgyűrű E felett. Ezért eddig a differenciálás és az integrálás elméletét egymástól függetlenül kellett tárgyalnunk.

Azonban létezik olyan függvénytípus, amelyre mind az integrálhatóság, mind a differenciálhatóság értelmes tulajdonság. Ez az $\mathbb{R}^n$-ben értelmezett, Banach-térbe ható függvények típusa.

A *geometriai integrálelmélet*, szűkebb értelemben, az $\mathbb{R}^n$ aritmetikai terek standard halmazgyűrűjén értelmezett mértékek szerinti integrálelméletnek és az $\mathbb{R}^n$-ben értelmezett, Banach-térbe ható függvények differenciálelméletének kapcsolatait vizsgálja. A geometriai integrálelmélet, tágabb értelemben, a véges dimenziós valós vagy komplex differenciálható sokaságokban értelmezhető mértékek szerinti integrálok differenciális tulajdonságait tárgyalja. Ilymódon a vektor- és tenzoranalízis (Stokes-tételkör), a közönséges és parciális differenciálegyenletek elmélete, a variációszámítás, és a többváltozós komplex differenciálható (holomorf) függvények analízise szintén a tágabb értelemben vett geometriai integrálelmélet részének tekinthető, vagy legalábbis létezik ezeknek az elméleteknek olyan lényeges része, amely a geometriai integrálelmélethez tartozik.

Az első pontban igazoljuk az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett, Banach-térbe ható folytonos kompakt tartójú függvények integrálhatóságát $\mathscr{R}_n$ standard halmazgyűrűn értelmezett skaláris mértékek szerint, majd ennek a ténynek a nevezetes következményeit tárgyaljuk. Itt bizonyítjuk be a *Dieudonné-féle egységfelosztás-tételt*, amely az analízis több területén rendkívül jól használható arra, hogy lokális természetű tulajdonságokból globális tulajdonságokra következtethessünk. Itt vezetjük be a mértékek *tartójának* fogalmát.

A második pontban a geometriai integrálelmélet egyik legnevezetesebb tételéről, a *Newton–Leibniz-tételről* lesz szó. Ennek a tételnek komoly gyakorlati jelentősége van, mert segítségével lehetővé válik az egydimenziós Lebesgue-mérték szerinti integrálok *értékeinek* gyors kiszámítása; ezt a gyakorlatok jól érzékeltetik. A Newton–Leibniz-tételből következik az *egydimenziós helyettesítéses integrálás* alapformája, a *parciális integrálás* elemi alakja, valamint az *integrálmaradéktagos Taylor-formula.* Itt vezetjük be az *improprius Lebesgue-integrál* fogalmát, és megvizsgáljuk annak kapcsolatát a Lebesgue-integrállal, az egydimenziós esetben.

A harmadik pontban a *többdimenziós helyettesítéses integrálás* tételét igazoljuk. Ez a geometriai integrálelmélet egyik legtipikusabb, egyben legfontosabb tétele. A bizonyítás felhasználja a Newton–Leibniz-tételt, a Lebesgue–Fubini-tételt, az inverzfüggvény-tételt, a Riesz–Fischer-tételt és a Lebesgue-tételt. A többdimenziós Lebesgue-integrálok kiszámítása rendszerint a helyettesítéses integrálás tételének és a Lebesgue–Fubini-tételnek szukcesszív alkalmazásával történik. Pontosabban: először az integrandus definíciós tartományát alkalmasan választott C^1-diffeomorfizmussal "téglára transzformáljuk" és a helyettesítéses integrálás formulájának megfelelően átírjuk az integrandust, majd a Lebesgue–Fubini-tételt alkalmazva a problémát visszavezetjük egydimenziós paraméteres integrálok egymás utáni kiszámítására. A helyettesítéses integrálás tétele megmutatja, hogy a többdimenziós Lebesgue-mértéknek milyen *transzformációs tulajdonságai* vannak. Továbbá, ennek a tételnek lesz a következménye a Riemann-sokaságok *felületi mértékének* létezése, amit később, a XIII. fejezetben részletezünk.

Végül, a negyedik pontban a közönséges differenciálegyenletekkel kapcsolatos Cauchy-feladatok megoldásának *Cauchy-féle egzisztencia- és unicitástélét* igazoljuk. Itt nem célunk a Cauchy-feladatok egészen szerteágazó, terjedelmes elméletének részletes kifejtése. Csak az alaptételt tárgyaljuk, és annak azt a következményét, amely szerint a (közönséges) lineáris differenciálegyenleteknek mindig létezik *alaprendszere*. Az ebben a pontban foglaltak mindössze a Banach-féle fixponttétellel (V. fejezet, 9. pont) kombinált Newton–Leibniz-tétel nem triviális alkalmazhatóságát illusztrálják.

Ebben a fejezetben a következő konvencióhoz tartjuk magunkat.

– Az n szimbólum mindenütt rögzített természetes számot jelöl, amelyre – a triviális problémák kizárása végett – feltesszük, hogy nem nulla.

– Az $\mathbb{R}^n$ halmaz standard félgyűrűjét $\mathscr{S}_n$, az $\mathbb{R}^n$ standard halmazgyűrűjét $\mathscr{R}_n$, és a $\mathscr{R}_n$-en értelmezett n-dimenziós Lebesgue-mértéket μ_n jelöli. A μ_1 szimbólum helyett gyakran a $\mu_{\mathbb{R}}$ jelet alkalmazzuk.

– Ha F vektortér és $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail F$ tetszőleges függvény, akkor f° jelöli az f függvény 0-val vett kiterjesztését $\mathbb{R}^n$-re, vagyis a definíció szerint:

$$f^\circ : \mathbb{R}^n \to F; \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{, ha } x \in \mathrm{Dom}(f), \\ 0 & \text{, ha } x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Dom}(f). \end{cases}$$

– Ha F normált tér, $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail F$ függvény és $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mérték, akkor azt mondjuk, hogy f *integrálható az* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *halmazon*, ha $\chi_{_E}.f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$. Ha F teljes és f integrálható az $E \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazon, akkor az

$$\int\limits_E f \, \mathrm{d}\theta := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{_E}.f^\circ \, \mathrm{d}\theta$$

definíciót és jelölést alkalmazzuk. Természetesen f pontosan akkor integrálható az $E \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazon a θ mérték szerint, ha f integrálható az $E \cap \mathrm{Dom}(f)$ halmazon a θ mérték szerint, továbbá, ha $\int\limits_E f \, \mathrm{d}\theta$ értelmezve van, akkor fennáll az

$$\int\limits_E f \, \mathrm{d}\theta = \int\limits_{E \cap \mathrm{Dom}(f)} f \, \mathrm{d}\theta$$

egyenlőség.

Irodalomjegyzék

[1] N. Bourbaki, **Éléments de mathématique. Intégration**, Hermann, Paris

[2] L. Schwartz, **Analyse mathématique**, Hermann, Paris, 1967.

[3] P. R. Halmos, **Mértékelmélet**, Gondolat Kiadó, Budapest, 1984.

[4] Szőkefalvi-Nagy B., **Valós függvények és függvénysorok**, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[5] Riesz F.-Szőkefalvi-Nagy B., **Funkcionálanalízis**, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[6] А. Н. Колмогоров-С. В. Фомин, **Элементы теории функций и функционального анализа**, Наука, Москва, 1974.

IRODALOMJEGYZÉK

1. fejezet

Folytonos kompakt tartójú függvények integrálhatósága

1.1. Folytonos függvények integrális approximációja sima függvényekkel

1.1.1. Jelölés. *Ha M metrikus tér és F normált tér, akkor $\mathscr{K}(M;F)$ jelöli az $M \to F$* **kompakt tartójú** *folytonos függvények halmazát. Ha F normált tér, akkor $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;F)$ jelöli az $\mathbb{R}^n \to F$* **kompakt tartójú és C^∞-osztályú** *függvények halmazát.*

Most megvizsgáljuk a $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n;F)$ alakú függvényterek jelentőségét az $\mathbb{R}^n$ standard halmazgyűrűjén értelmezett mértékek szerinti integrálelmélet szempontjából.

Először emlékeztetünk két elemi topológiai tényre a metrikus terek elméletéből. Metrikus tér minden zárt részhalmaza előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként, és minden nyílt részhalmaza előáll megszámlálható sok zárt halmaz uniójaként; ezt az V. fejezet 8. ponjában igazoltuk. Továbbá, ha M olyan metrikus tér, amelynek alaphalmaza előáll megszámlálható sok *kompakt* halmaz uniójaként (ilyenkor azt mondjuk, hogy a metrikus tér *σ-kompakt*), akkor az M minden nyílt részhalmaza előáll megszámlálható sok kompakt halmaz uniójaként. Valóban, ha $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ az M kompakt részhalmazainak olyan sorozata, amelyre $M = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} K_j$, továbbá $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz, akkor vehetjük az M zárt részhalmazainak olyan $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatát, hogy $\Omega = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k$; ekkor nyilvánvaló, hogy $(K_j \cap F_k)_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ az M kompakt részhalmazainak olyan megszámlálható rendszere, amelyre $\Omega = \bigcup\limits_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (K_j \cap F_k)$. Speciálisan, az $\mathbb{R}^n$ halmaz, bármely normából származtatható metrikával ellátva σ-kompakt metrikus tér, ezért az $\mathbb{R}^n$ minden nyílt részhalmaza előáll kompakt halmazok sorozatának uniójaként.

1.1.2. Lemma. *Minden $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmazhoz és $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazhoz, $K \subseteq \Omega$ esetén van olyan $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos kompakt tartójú függvény, hogy $0 \leq \varphi \leq 1$, $K \subseteq [\varphi = 1]$ és $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$.*

Bizonyítás. Vegyünk olyan d metrikát $\mathbb{R}^n$ felett, amely normából származtatható. Minden $x \in K$ esetén van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\overline{\mathrm{B}}_r(x;d) \subseteq \Omega$, ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával képezhetünk olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(r(x))_{x\in K}$ rendszert, hogy minden

$K \ni x$-re $\overline{\mathrm{B}}_{r(x)}(x;d) \subseteq \Omega$. Ekkor $(\mathrm{B}_{r(x)}(x;d))_{x\in K}$ nyílt befedése a K kompakt halmaznak, ezért van olyan $S \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x\in S} \mathrm{B}_{r(x)}(x;d)$. Ekkor

$$K \subseteq \overline{\bigcup_{x\in S} \mathrm{B}_{r(x)}(x;d)} = \bigcup_{x\in S} \overline{\mathrm{B}}_{r(x)}(x;d) \subseteq \Omega,$$

tehát a $C := \bigcup_{x\in S} \overline{\mathrm{B}}_{r(x)}(x;d)$ halmazra $K \subseteq \mathrm{Int}(C) \subseteq C \subseteq \Omega$ teljesül. Minden $x \in S$ esetén $\overline{\mathrm{B}}_{r(x)}(x;d)$ kompakt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, mert korlátos és zárt; ezért C kompakt halmaz. A metrikus terekre vonatkozó Uriszon-tétel (**MET** 7.14.5.) szerint létezik olyan $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $0 \leq \varphi \leq 1$, $K \subseteq [\varphi = 1]$ és $[\varphi \neq 0] \subseteq \mathrm{Int}(C)$. Ekkor $\mathrm{supp}(\varphi) := \overline{[\varphi \neq 0]} \subseteq \overline{\mathrm{Int}(C)} \subseteq C \subseteq \Omega$, tehát $\mathrm{supp}(\varphi)$ kompakt halmaz. ■

1.1.3. Állítás. *Legyen F normált tér és $f : \mathbb{R}^n \to F$ folytonos kompakt tartójú függvény. Ekkor létezik olyan $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n)$-ben, amelyre teljesül az, hogy minden $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mértékre és $p \geq 1$ valós számra*

$$\lim_{k\to\infty} \int^* \|f_k - f\|^p \,\mathrm{d}|\theta| = 0.$$

Minden $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mértékre és $p \geq 1$ valós számra $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n; F) \subseteq \mathscr{L}^p_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$.

Bizonyítás. Legyen $(\tilde{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n)$-ben, amely az $\mathbb{R}^n$ halmazon *egyenletesen konvergál* f-hez (**MES** 5.2.3.). Egy ilyen függvénysorozat *egyenletesen korlátos*, tehát van olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $\mathbb{R}^n \ni x$-re és $\mathbb{N} \ni k$-ra $\|\tilde{f}_k(x)\| \leq C$. Vegyünk olyan $E \in \mathscr{R}_n$ halmazt, amelyre $\mathrm{supp}(f) \subseteq E$. Ekkor a $(\chi_E \tilde{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat szintén $\mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n)$-ben halad, és egyenletesen konvergál az f függvényhez, továbbá minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|\chi_E \tilde{f}_k\| \leq C\chi_E \in \mathscr{E}_+(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n)$. Ezért a Lebesgue-tétel alapján minden $p \geq 1$ valós számra és minden $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mértékre $f \in \mathscr{L}^p_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$, és az $(\chi_E \tilde{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint. ■

1.1.4. Következmény. *Legyen F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(f)$ *nyílt halmaz. Ekkor minden $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mértékre az f° függvény θ-mérhető.*

Bizonyítás. Legyen $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ az $\mathbb{R}^n$ kompakt részhalmazainak olyan monoton növő sorozata, amelyre $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m = \mathrm{Dom}(f)$. Válasszunk ki olyan $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_m \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $0 \leq \varphi_m \leq 1$, $\mathrm{supp}(\varphi_m) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és $K_m \subseteq [\varphi_m = 1]$. Minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $(\varphi_m.f)^\circ \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n; F)$, tehát a $(\varphi_m.f)^\circ$ függvény univerzálisan mérhető. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $f^\circ = \lim_{m\to\infty} (\varphi_m.f)^\circ$, így a Jegorov-tétel (**INT** 8.7.2.) szerint f° is univerzálisan mérhető. ■

1.1.5. Következmény. *$\mathbb{R}^n$ minden kompakt részhalmaza, valamint minden relatív kompakt nyílt részhalmaza integrálható minden $\mathscr{R}_n$ feletti mérték szerint.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz. Van olyan $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $\Omega_{k+1} \subseteq \Omega_k$, valamint $K = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$. A kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $K \subseteq [\varphi_k = 1]$

és $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subseteq \Omega_k$. Nyilvánvaló, hogy $\chi_K = \inf_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k$, és az előző állítás szerint minden $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mértékre $\varphi_k \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$, ezért a Levi-tételből következik, hogy $\chi_K \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$.

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ relatív kompakt nyílt halmaz. Létezik olyan $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni m$-re $K_m \subseteq \Omega$ kompakt halmaz és $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$. Ha $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mérték, akkor az előző bekezdés alapján minden $\mathbb{N} \ni m$-re a K_m halmaz θ-integrálható, ezért a Levi-tétel alapján az Ω halmaz pontosan akkor θ-integrálható, ha $|\theta|^*(\Omega) < +\infty$. De az Ω relatív kompaktsága azt jelenti, hogy $\overline{\Omega}$ kompakt halmaz $\mathbb{R}^n$, tehát univerzálisan íntegrálható, így minden $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mértékre $|\theta|^*(\overline{\Omega}) < +\infty$. Ezért minden $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mértékre $|\theta|^*(\Omega) < +\infty$. ■

Megjegyezzük, hogy ha F normált tér és $f : \mathbb{R}^n \to F$ olyan függvény, amely minden $\mathscr{R}_n$ feletti mérték szerint integrálható, akkor azt mondjuk, hogy f *univerzálisan integrálható függvény*. Továbbá az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazát *univerzálisan integrálható halmaznak* nevezzük, ha a karakterisztikus függvénye univerzálisan integrálható függvény. Tehát az előző állítások úgy is megfogalmazhatók, hogy minden F Banach-térre minden $\mathbb{R}^n \to F$ folytonos függvény univerzálisan mérhető és $\mathbb{R}^n$ minden kompakt, és minden relatív kompakt nyílt részhalmaza univerzálisan integrálható halmaz.

1.1.6. Következmény. *Ha $\theta, \theta' : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ tetszőleges mértékek, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) $\theta = \theta'$.

(ii) *Minden F Banach-térre és $f \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n; F)$ függvényre*

$$\int f \, \mathrm{d}\theta = \int f \, \mathrm{d}\theta'.$$

(iii) *Minden $f \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ esetén*

$$\int f \, \mathrm{d}\theta = \int f \, \mathrm{d}\theta'.$$

(iv) *Minden $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmazra $\theta(K) = \theta'(K)$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) és (ii)⇒(iii) triviális.

(iii)⇒(iv) Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz. Van olyan $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $\Omega_{k+1} \subseteq \Omega_k$, valamint $K = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$. A kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $K \subseteq [\varphi_k = 1]$ és $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subseteq \Omega_k$. Minden $m \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\psi_m := \bigwedge_{k\leq m} \varphi_k$. Nyilvánvaló, hogy a $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, és $0 \leq \psi_m \leq \psi_0$, valamint $\chi_K = \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} \psi_m = \lim_{m\to\infty} \psi_m$. Ezért a Levi-tételből következik, hogy a $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál χ_K-hoz a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ és $\|\cdot\|_{\theta',1}$ félnormák szerint, így a (iii) alapján

$$\theta(K) = \lim_{m\to\infty} \int \psi_m \, \mathrm{d}\theta = \lim_{m\to\infty} \int \psi_m \, \mathrm{d}\theta' = \theta'(K).$$

(iv)⇒(i) Legyenek $(a_k)_{k\in n}, (b_k)_{k\in n} \in \mathbb{R}^n$ olyan rendszerek, hogy minden $k \in n$ esetén $a_k < b_k$. Legyen $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó zérussorozat $\mathbb{R}_+^*$-ban, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_m < \min\limits_{k\in n}(b_k - a_k)$. Minden $\mathbb{N} \ni m$-re legyen $K_m := \prod\limits_{k\in n}[a_k, b_k - \varepsilon_m]$. Ekkor a $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton növő halmazsorozat mindegyik tagja kompakt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben és $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} K_m = \prod\limits_{k\in n}[a_k, b_k[=: E$. Ezért a $(\chi_{K_m})_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, és pontonként konvergál χ_E-hez, így a Levi-tétel és (iv) alapján

$$\theta(E) = \int \chi_E \, \mathrm{d}\theta = \lim_{m\to\infty} \int \chi_{K_m} \, \mathrm{d}\theta = \lim_{m\to\infty} \theta(K_m) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \theta'(K_m) = \lim_{m\to\infty} \int \chi_{K_m} \, \mathrm{d}\theta' = \int \chi_E \, \mathrm{d}\theta' = \theta'(E)$$

teljesül. Ebből következik, hogy $\theta = \theta'$. ■

1.1.7. Állítás. *Legyen F Banach-tér és $f:\mathbb{R}^n \rightarrowtail F$ olyan függvény, hogy* $\mathrm{Dom}(f)$ *relatív kompakt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben. Ha $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ olyan mérték, amely szerint a* $\mathrm{Dom}(f)$ *halmaz θ-integrálható, továbbá létezik olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $\tilde{f} : \Omega \to F$ folytonos függvény, hogy $\overline{\mathrm{Dom}(f)} \subseteq \Omega$ és $f \subseteq \tilde{f}$, akkor minden $p \geq 1$ valós számra $f^\circ \in \mathscr{L}_F^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$.*

Bizonyítás. A $\overline{\mathrm{Dom}(f)}$ kompakt halmazhoz és az azt tartalmazó Ω nyílt halmazhoz legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan kompakt tartójú folytonos függvény, amelyre $\overline{\mathrm{Dom}(f)} \subseteq [\varphi = 1]$ és $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$.

Ekkor a $\varphi.\tilde{f}^\circ : \mathbb{R}^n \to F$ függvény kompakt tartójú és folytonos. Valóban, $[\varphi.\tilde{f}^\circ \neq 0] = [\varphi \neq 0] \cap [\tilde{f} \neq 0] \subseteq \mathrm{supp}(\varphi)$, ezért $\varphi.\tilde{f}^\circ$ kompakt tartójú. Továbbá, $\varphi.\tilde{f}^\circ = \tilde{f}$ az Ω halmazon, ezért az $\tilde{f}$ folytonossága és a folytonosság lokalitása miatt $\varphi.\tilde{f}^\circ$ folytonos az Ω halmaz minden pontjában. Ugyanakkor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ esetén $\varphi.\tilde{f}^\circ = 0$ az $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}(\varphi)$ halmazon, amely az x-nek nyílt környezete, ezért ismét a folytonosság lokalitása miatt $\varphi.\tilde{f}^\circ$ folytonos az x pontban.

Világos, hogy $f^\circ = \chi_{\mathrm{Dom}(f)}.\varphi.\tilde{f}^\circ$, ezért az f függvény θ-mérhető, hiszen a hipotézis szerint a $\chi_{\mathrm{Dom}(f)}$ függvény θ-integrálható, így θ-mérhető; továbbá az imént láttuk, hogy a $\varphi.\tilde{f}^\circ$ függvény kompakt tartójú és folytonos, tehát univerzálisan integrálható, így θ-mérhető. Nyilvánvaló, hogy az f° függvény korlátos és kompakt tartójú, ezért minden $p \geq 1$ valós számra $\int^* \|f^\circ\|^p \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$. Tehát az integrálhatóság kritériuma szerint minden $p \geq 1$ valós számra $f^\circ \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$. ■

Az előző állítás feltételeivel kapcsolatban megfogalmazunk néhány fontos megjegyzést.

Megjegyzések. 1) Ha az f függvény eleget tesz az állítás feltételeinek, akkor nyilvánvalóan f *folytonos* és *korlátos* függvény. Azonban nem minden $\mathbb{R}^n \rightarrowtail F$ folytonos és korlátos függvény terjeszthető ki $\mathrm{Dom}(f)$ lezártját tartalmazó nyílt halmazra folytonos függvénnyé; még akkor sem, ha $\mathrm{Dom}(f) \in \mathscr{R}_n$ (**1**. gyakorlat).

Z 2) Vigyázzunk arra, hogy az állításban szereplő f függvény definíciós tartománya *relatív kompakt* legyen, és f-nek olyan *folytonos* kiterjesztése létezzen, amelynek definíciós tartománya *nyílt* és még a $\mathrm{Dom}(f)$ *lezártját* is tartalmazza. Ha például $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, hogy $\mathrm{Dom}(f)$ relatív kompakt nyílt halmaz, akkor f önmagának folytonos kiterjesztése $\mathrm{Dom}(f)$-re (de nem $\overline{\mathrm{Dom}(f)}$-re), és ekkor lehetséges az, hogy f *nem korlátos*, ezért az 1) megjegyzés alapján f-re nem teljesülnek az állítás feltételei, pedig itt még az is igaz, hogy $\mathrm{Dom}(f)$ *univerzálisan integrálható* halmaz.

3) Ha az állítás feltételei között a $\mathrm{Dom}(f)$ relatív kompaktsága helyett megköveteljük a $\mathrm{Dom}(f)$ *kompaktságát*, akkor f folytonossága elégséges ahhoz, hogy létezzen f-nek folytonos kiterjesztése $\mathrm{Dom}(f)$-t tartalmazó nyílt halmazra (*Tietze-Dugunji-tétel*), tehát f-re teljesülnek az állítás feltételei.

4) Ha az $f:\mathbb{R}^n \rightarrowtail F$ függvényre teljesülnek az állítás feltételei, akkor f kiterjeszthető az *egész* $\mathbb{R}^n$-re folytonos függvénnyé. Legyen ugyanis $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $\tilde{f} : \Omega \to F$ olyan folytonos függvény, hogy $\overline{\mathrm{Dom}(f)} \subseteq \Omega$ és $f \subseteq \tilde{f}$. Vegyünk olyan $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ függvényt, hogy $0 \leq \varphi \leq 1$ és $\overline{\mathrm{Dom}(f)} \subseteq [\varphi = 1]$ és $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$. Ekkor a $(\varphi.\tilde{f})^\circ : \mathbb{R}^n \to F$ függvény folytonos és az f-nek kiterjesztése $\mathbb{R}^n$-re.

5) Az állításból következik, hogy ha $I \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres korlátos intervallum, F Banach-tér és $f : I \to F$ olyan folytonos függvény, amelynek létezik határértéke az I végpontjaiban, akkor minden $p \geq 1$ valós számra és minden $\theta : \mathscr{R}_1 \to \mathbb{K}$ mértékre $f^\circ \in \mathscr{L}^p_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_1, \theta)$. Valóban, ha $a := \inf(I)$ és $b := \sup(I)$, akkor az

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to F; \quad x \mapsto \begin{cases} \lim\limits_a f & ; \text{ha } x \in]\leftarrow, a], \\ f(x) & ; \text{ha } x \in]a, b[, \\ \lim\limits_b f & ; \text{ha } x \in [b, \to [\end{cases}$$

függvény az f-nek folytonos kiterjesztése $\mathbb{R}$-re, és az $\mathbb{R}$ minden korlátos intervalluma univerzálisan integrálható halmaz.

1.2. Dieudonné-féle differenciális egységfelosztás tétel

1.2.1. Tétel. (Dieudonné-féle differenciális egységfelosztás tétel) *Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz és $(\Omega_i)_{i\in I}$ véges nyílt befedése K-nak, akkor létezik olyan $(\varphi_i)_{i\in I}$ rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\varphi_i \in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq \Omega_i$, valamint $K \subseteq \Big[\sum\limits_{i\in I} \varphi_i = 1\Big]$ és $\sum\limits_{i\in I} \varphi_i \leq 1$ az $\mathbb{R}^n$-en.*

Bizonyítás. (I) Legyenek $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$ és $r, R \in \mathbb{R}^*_+$ olyan számok, hogy $r < R$. Megmutatjuk, hogy a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ kompakt gömbhöz és a $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$ nyílt gömbhöz van olyan $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, hogy $0 \leq \varphi \leq 1$, $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}) \subseteq [\varphi = 1]$ és $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$; ahol minden gömböt az $\mathbb{R}^n$ feletti ($\|\cdot\|$-val jelölt) *euklidészi normára* vonatkoztatunk. (Tehát itt a tételnek arról a speciális esetéről van szó, amikor I egy elemű halmaz, K kompakt euklidészi gömb és a nyílt befedés egyetlen tagja K-val koncentrikus nyílt euklidészi gömb.)

Legyen $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ olyan függvény, hogy minden $t \in \mathbb{R}^*_+$ esetén $f(t) > 0$, és minden $t \leq 0$ valós számra $f(t) = 0$. Ilyen például az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} \exp(-1/t) & ; \text{ha } t > 0 \\ 0 & ; \text{ha } t \leq 0 \end{cases}$$

függvény (**DIF** 10.7.3. gyakorlat), de a továbbiakban lényegtelen az f függvény konkrét alakja, csak az számít, hogy f végtelenszer differenciálható és minden $t \in \mathbb{R}^*_+$ esetén

$f(t) > 0$, valamint minden $t \leq 0$ valós számra $f(t) = 0$. Legyen $\varrho \in]r, R[$ rögzített valós szám, és értelmezzük a

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{f(\varrho^2 - \|x - \mathfrak{a}\|^2)}{f(\varrho^2 - \|x - \mathfrak{a}\|^2) + f(\|x - \mathfrak{a}\|^2 - r^2)}$$

függvényt, amely jól értelmezett $\mathbb{R}^n$-en, hiszen ha az $x \in \mathbb{R}^n$ pont olyan volna, hogy $f(\varrho^2 - \|x - \mathfrak{a}\|^2) + f(\|x - \mathfrak{a}\|^2 - r^2) = 0$, akkor $f \geq 0$ miatt $f(\varrho^2 - \|x - \mathfrak{a}\|^2) = 0$ és $f(\|x - \mathfrak{a}\|^2 - r^2) = 0$ teljesülne, amiből f tulajdonságai alapján következne, hogy $\varrho^2 - \|x - \mathfrak{a}\|^2 \leq 0$ és $\|x - \mathfrak{a}\|^2 - r^2 \leq 0$, így $\varrho \leq r$, holott $r < \varrho$.

Megmutatjuk, hogy φ eleget tesz a követelményeknek. Valóban, ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{B}_\varrho(\mathfrak{a})$, akkor $\varrho^2 - \|x - \mathfrak{a}\|^2 \leq 0$, tehát $f(\varrho^2 - \|x - \mathfrak{a}\|^2) = 0$, vagyis $\varphi(x) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $[\varphi \neq 0] \subseteq \mathrm{B}_\varrho(\mathfrak{a})$, így $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \overline{\mathrm{B}_\varrho(\mathfrak{a})} = \overline{\mathrm{B}}_\varrho(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$. Tehát φ kompakt tartójú és $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \mathrm{B}_R(\mathfrak{a})$. Az is nyilvánvaló, hogy $x \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ esetén $\|x - \mathfrak{a}\|^2 - r^2 \leq 0$, tehát $f(\|x - \mathfrak{a}\|^2 - r^2) = 0$, így $\varphi(x) = 1$. Ez azt jelenti, hogy $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}) \subseteq [\varphi = 1]$.

Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \|x\|^2 = \sum_{k \in n} x_k^2$ függvény végtelenszer differenciálható, tehát az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(\varrho^2 - \|x - \mathfrak{a}\|^2)$ és az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(\varrho^2 - \|x - \mathfrak{a}\|^2) + f(\|x - \mathfrak{a}\|^2 - r^2)$ függvény is végtelenszer differenciálható, továbbá ez utóbbi sehol sem nulla, így ezek hányadosa (vagyis φ) is végtelenszer differenciálható.

(II) Legyen most $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz és $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan nyílt halmaz, amelyre $K \subseteq \Omega$. Megmutatjuk, hogy van olyan $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, hogy $0 \leq \varphi \leq 1$, $K \subseteq [\varphi = 1]$ és $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$. (Tehát itt a tételnek arról a speciális esetéről van szó, amikor I egy elemű halmaz.)

Az Ω nyíltsága és $K \subseteq \Omega$ miatt kiválaszthatunk olyan $R : K \to \mathbb{R}_+^*$ függvényt, amelyre minden $x \in K$ esetén $\overline{\mathrm{B}}_{R(x)}(x) \subseteq \Omega$, ahol a gömböt itt és a továbbiakban az euklidészi normára vonatkoztatjuk. Legyen $r : K \to \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges olyan függvény, amelyre minden $x \in K$ esetén $r(x) < R(x)$. Ekkor $(\mathrm{B}_{r(x)}(x))_{x \in K}$ nyílt befedése a K kompakt halmaznak, így vehetünk olyan $H \subseteq K$ véges halmazt, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x \in H} \mathrm{B}_{r(x)}(x)$.

Minden $x \in H$ esetén az $\mathfrak{a} := x$ pontra és az $r := r(x)$, $R := R(x)$ számokra alkalmazzuk az (I) állítást, tehát veszünk olyan $\varphi_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény amely C^∞-osztályú, és $0 \leq \varphi_x \leq 1$, $\overline{\mathrm{B}}_{r(x)}(x) \subseteq [\varphi_x = 1]$, valamint $\mathrm{supp}(\varphi_x) \subseteq \mathrm{B}_{R(x)}(x)$; természetesen ekkor φ_x automatikusan kompakt tartójú. (Megjegyezzük, hogy a H végessége miatt a $(\varphi_x)_{x \in H}$ függvényrendszer meghatározásához nincs szükség a kiválasztási axióma alkalmazására.)

Ha $H = \emptyset$, akkor $K \subseteq \bigcup_{x \in H} \mathrm{B}_{r(x)}(x)$ miatt $K = \emptyset$, ezért a $\varphi := 0$ függvény eleget tesz a követelménynek; ezért feltehető, hogy $H \neq \emptyset$. Ekkor értelmezzük a

$$\varphi := 1 - \prod_{x' \in H} (1 - \varphi_{x'}).$$

függvényt. Megmutatjuk, hogy φ eleget tesz a követelményeknek.

Triviális az, hogy a φ függvény végtelenszer differenciálható, valamint $0 \leq \varphi \leq 1$. Ha $x \in K$, akkor van olyan $x' \in H$, hogy $x \in \mathrm{B}_{r(x')}(x') \subseteq [\varphi_{x'} = 1]$, így a definíció alapján $\varphi(x) = 1$, ami azt jelenti, hogy $K \subseteq [\varphi = 1]$. Ha $x \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $\varphi(x) \neq 0$, akkor a definíció alapján van olyan $x' \in H$, hogy $\varphi_{x'}(x) \neq 0$, tehát $x \in \mathrm{supp}(\varphi_{x'}) \subseteq \mathrm{B}_{R(x')}(x')$. Ez azt jelenti, hogy

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \bigcup_{x' \in H} \mathrm{B}_{R(x')}(x') \subseteq \bigcup_{x' \in H} \overline{\mathrm{B}}_{R(x')}(x') \subseteq \Omega.$$

Ugyanakkor a $\bigcup_{x'\in H} \overline{\mathrm{B}}_{R(x')}(x')$ halmaz kompakt $\mathbb{R}^n$-ben, tehát zárt is, így $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \bigcup_{x'\in H} \overline{\mathrm{B}}_{R(x')}(x')$. Ebből látszik, hogy φ kompakt tartójú és $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$.

(III) Áttérve az általános esetre: először megmutatjuk, hogy a K kompakt halmazhoz és az $(\Omega_i)_{i\in I}$ véges nyílt befedéséhez létezik olyan $(\Omega'_i)_{i\in I}$ halmazrendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén Ω'_i relatív kompakt nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, és $\overline{\Omega'_i} \subseteq \Omega_i$, valamint $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega'_i$, vagyis $(\Omega'_i)_{i\in I}$ szintén befedése K-nak.

Ehhez először megjegyezzük, hogy minden $x \in K$ esetén $\{R \in \mathbb{R}^*_+ | (\exists i \in I) : \overline{\mathrm{B}}_R(x) \subseteq \Omega_i\} \neq \emptyset$, mert $(\Omega_i)_{i\in I}$ *nyílt befedése* K-nak, ezért a kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{x\in K} \{R \in \mathbb{R}^*_+ | (\exists i \in I) : \overline{\mathrm{B}}_R(x) \subseteq \Omega_i\} \neq \emptyset,$$

így létezik olyan $R : K \to \mathbb{R}^*_+$ függvény, amelyre minden $x \in K$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $\overline{\mathrm{B}}_{R(x)}(x) \subseteq \Omega_i$. Ekkor $(\mathrm{B}_{R(x)}(x))_{x\in K}$ nyílt befedése a K kompakt halmaznak, tehát van olyan $K' \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x'\in K'} \mathrm{B}_{R(x')}(x')$. Legyen minden $I \ni i$-re $K'_i := \{x' \in K' | \overline{\mathrm{B}}_{R(x')}(x') \subseteq \Omega_i\}$, és legyen $\Omega'_i := \bigcup_{x'\in K'_i} \mathrm{B}_{R(x')}(x')$. Ekkor az $(\Omega'_i)_{i\in I}$ halmazrendszer rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal, mert

– $(\Omega'_i)_{i\in I}$ nyílt befedése K-nak, hiszen $x \in K$ esetén van olyan $x' \in K'$, hogy $x \in \mathrm{B}_{R(x')}(x')$ és az x'-höz létezik olyan $i \in I$, hogy $\mathrm{B}_{R(x')}(x') \subseteq \Omega_i$, tehát $x' \in K'_i$, vagyis $x \in \mathrm{B}_{R(x')}(x') \subseteq \Omega'_i$;

– minden $i \in I$ esetén, a K'_i halmaz definíciója szerint

$$\overline{\Omega'_i} = \overline{\bigcup_{x'\in K'_i} \mathrm{B}_{R(x')}(x')} = \bigcup_{x'\in K'_i} \overline{\mathrm{B}}_{R(x')}(x') \subseteq \Omega_i,$$

tehát $\overline{\Omega'_i}$ kompakt halmaz, és részhalmaza Ω_i-nek.

Vegyünk most egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező $(\Omega'_i)_{i\in I}$ halmazrendszert. A (II) állítást alkalmazva minden $i \in I$ esetén az $\overline{\Omega'_i}$ kompakt halmazra és az azt tartalmazó Ω_i nyílt halmazra kapjuk olyan $(\psi_i)_{i\in I}$ függvényrendszer létezését, amelyre minden $i \in I$ esetén a $\psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény C^∞-osztályú, $0 \le \psi_i \le 1$, $\operatorname{supp}(\psi_i) \subseteq \Omega_i$ és $\overline{\Omega'_i} \subseteq [\psi_i = 1]$. Ugyancsak a (II) állítást alkalmazva a K kompakt halmazra és az azt tartalmazó $\bigcup_{i\in I} \Omega'_i$ nyílt halmazra kapjuk olyan $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény létezését, amely C^∞-osztályú, $0 \le \psi \le 1$, $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega'_i$ és $K \subseteq [\psi = 1]$.

Minden $i \in I$ esetén értelmezzük a $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt a következő módon:

$$\varphi_i := \begin{cases} \dfrac{\psi\psi_i}{\sum\limits_{j\in I} \psi_j} & \text{az } \bigcup\limits_{j\in I} \Omega'_j \text{ halmazon,} \\ 0 & \text{az } \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j\in I} \Omega'_j \text{ halmazon.} \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy a $(\varphi_i)_{i\in I}$ függvényrendszer jól értelmezett, és eleget tesz a tétel követelményeinek.

Az $\bigcup_{j\in I}\Omega'_j$ halmaz minden pontjában valamelyik $i \in I$ esetén a ψ_i függvény 1 értéket vesz fel, ezért a $\sum_{j\in I}\psi_j$ függvény az $\bigcup_{j\in I}\Omega'_j$ halmaz minden pontjában 1-nél nagyobb-egyenlő értékű, így a $(\varphi_i)_{i\in I}$ függvényrendszer jól értelmezett. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden $I \ni i$-re $0 \leq \varphi_i \leq 1$. Továbbá, $i \in I$ esetén $[\varphi_i \neq 0] \subseteq [\psi_i \neq 0] \subseteq \mathrm{supp}(\psi_i) \subseteq \Omega_i$, tehát φ_i kompakt tartójú és $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq \Omega_i$.

Legyen $i \in I$ rögzített; igazoljuk, hogy a $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény végtelenszer differenciálható. Valóban, az $\bigcup_{j\in I}\Omega'_j$ nyílt halmazon φ_i egyenlő a $\dfrac{\psi\psi_i}{\sum_{j\in I}\psi_j}$ függvénnyel, amely C^∞-osztályú, így a magasabb rendű folytonos differenciálhatóság lokalitása miatt φ_i szintén C^∞-osztályú ezen a nyílt halmazon. Ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j\in I}\Omega'_j$, akkor $\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{supp}(\psi)$ nyílt halmazon x-nek környezete, mert $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq \bigcup_{j\in I}\Omega'_j$, továbbá φ_i ezen a nyílt halmazon egyenlő a 0 függvénnyel, így ismét a a magasabb rendű folytonos differenciálhatóság lokalitása miatt φ_i végtelenszer differenciálható az x pontban. Ez azt jelenti, hogy a φ_i függvény C^∞-osztályú.

Ha $x \in K$, akkor $K \subseteq \bigcup_{j\in I}\Omega'_j$ miatt

$$\sum_{i\in I}\varphi_i(x) = \sum_{i\in I}\frac{\psi(x)\psi_i(x)}{\sum_{j\in I}\psi_j(x)} = \psi(x) = 1,$$

hiszen $K \subseteq [\psi = 1]$. Ha $x \in \bigcup_{j\in I}\Omega'_j$, akkor hasonlóan kapjuk, hogy $\sum_{i\in I}\varphi_i(x) = \psi(x) \leq 1$, de itt már nincs szükségképpen egyenlőség. Ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j\in I}\Omega'_j$, akkor $\sum_{i\in I}\varphi_i(x) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $K \subseteq \left[\sum_{i\in I}\varphi_i = 1\right]$ és $\sum_{i\in I}\varphi_i \leq 1$ az $\mathbb{R}^n$-en. ■

Megjegyezzük, hogy a Dieudonné-féle differenciális egységfelosztás tételnek azt a speciális esetét, amikor I egy elemű halmaz, úgy fogjuk idézni, mint *differenciális Uriszon-tétel.*

1.3. Mérték tartója

1.3.1. Lemma. *Ha $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mérték, akkor egy $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz pontosan akkor θ-eltűnő halmaz, ha minden $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ esetén, ha $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$, akkor*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \,\mathrm{d}|\theta| = 0.$$

Bizonyítás. Ha $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt θ-eltűnő halmaz, akkor minden $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ esetén, ha $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$, akkor $|\varphi| \leq |||\varphi|||\, \chi_\Omega$, ezért

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \,\mathrm{d}|\theta| = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} |\varphi| \,\mathrm{d}|\theta| \leq |||\varphi||| \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \chi_\Omega \,\mathrm{d}|\theta| = |||\varphi||| \cdot |\theta|^*(\Omega) = 0.$$

Tehát ahhoz, hogy az $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz θ-eltűnő halmaz legyen szükséges, hogy minden $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ esetén, ha $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$, akkor $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \,\mathrm{d}|\theta| = 0$ teljesüljön.

Tegyük fel, hogy $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan nyílt halmaz, amelyre minden $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ esetén, ha $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$, akkor $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \,\mathrm{d}|\theta| = 0$. Legyen $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ az $\mathbb{R}^n$ kompakt részhalmazainak olyan monoton növő sorozata, amelyre $\Omega = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} K_m$. A Dieudonné-féle differenciális egységfelosztás-tétel alkalmazásával válasszunk ki olyan $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$-ből, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq \varphi_m \leq 1$, $\mathrm{supp}(\varphi_m) \subseteq \Omega$ és $K_m \subseteq [\varphi_m = 1]$. Ekkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\chi_{_{K_m}} \leq \varphi_m$, így a hipotézis alapján

$$|\theta|^*(K_m) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}^{*} \chi_{_{K_m}} \,\mathrm{d}|\theta| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}^{*} \varphi_m \,\mathrm{d}|\theta| = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_m \,\mathrm{d}|\theta| = 0.$$

Továbbá, a $|\theta|^*$ külső mérték monoton σ-folytonosságából következik az, hogy $|\theta|^*(\Omega) = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} |\theta|^*(K_m)$, ezért $|\theta|^*(\Omega) = 0$. ■

1.3.2. Állítás. *Legyen $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mérték.*

a) *Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ az $\mathbb{R}^n$ nyílt θ-eltűnő halmazainak tetszőleges rendszere, akkor $\bigcup\limits_{i\in I}\Omega_i$ is nyílt θ-eltűnő halmaz.*

b) *Egyértelműen létezik olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt θ-eltűnő halmaz, amely az $\mathbb{R}^n$ minden nyílt θ-eltűnő halmazát tartalmazza, tehát Ω a tartalmazás tekintetében legnagyobb nyílt θ-eltűnő halmaz $\mathbb{R}^n$-ben.*

Bizonyítás. a) Legyen $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ olyan, hogy $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I}\Omega_i$. Ha igazoljuk, hogy $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \,\mathrm{d}|\theta| = 0$, akkor az előző lemma alapján $\bigcup\limits_{i\in I}\Omega_i$ is nyílt θ-eltűnő halmaz.

Az $(\Omega_i)_{i\in I}$ halmazrendszer nyílt befedése a $\mathrm{supp}(\varphi)$ kompakt halmaznak, ezért van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, amelyre $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}\Omega_i$. A Dieudonné-féle differenciális egységfelosztás-tétel alapján van olyan $(\varphi_i)_{i\in J}$ rendszer $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$-ben, amelyre minden $i \in J$ esetén $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq \Omega_i$, valamint $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Big[\sum\limits_{i\in J} \varphi_i = 1\Big]$. Világos, hogy ekkor $\varphi = \sum\limits_{i\in J} \varphi\varphi_i$ és minden $J \ni i$-re $\varphi\varphi_i \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ és $\mathrm{supp}(\varphi\varphi_i) \subseteq \mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq \Omega_i$. Ha $i \in J$, akkor Ω_i nyílt θ-eltűnő halmaz, tehát az előző lemma szerint $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\varphi_i \,\mathrm{d}|\theta| = 0$. Ebből következik, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \,\mathrm{d}|\theta| = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{i\in J} \varphi\varphi_i\Big) \,\mathrm{d}|\theta| = \sum_{i\in J} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\varphi_i \,\mathrm{d}|\theta| = 0,$$

amit bizonyítani kellett.

b) Az a) alapján Ω egyenlő $\mathbb{R}^n$ *összes* nyílt θ-eltűnő halmazának uniójával. ■

1.3.3. Definíció. *Ha $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mérték, akkor a θ* **tartójának** *nevezzük és* $\mathrm{supp}(\theta)$-*val jelöljük az $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ halmazt, ahol Ω a tartalmazás tekintetében legnagyobb nyílt θ-eltűnő halmaz $\mathbb{R}^n$-ben.*

Tehát ha $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mérték, akkor $\mathrm{supp}(\theta)$ *zárt* halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, és a definíció alapján világos, hogy $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}(\theta)$ azzal ekvivalens, hogy az x pontnak létezik olyan környezete, amely θ-eltűnő halmaz; vagyis $x \in \mathrm{supp}(\theta)$ azzal ekvivalens, hogy az x pont minden környezete nem θ-eltűnő halmaz.

Világos, hogy ha $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mérték, akkor $\mathrm{supp}(\theta) = \mathbb{R}^n$ azzal ekvivalens, hogy $\emptyset$ az egyetlen nyílt θ-eltűnő halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, vagyis minden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres nyílt halmazra $|\theta|^*(\Omega) > 0$. Például az $\mathbb{R}^n$ feletti μ_n Lebesgue-mértékre $\mathrm{supp}(\mu_n) = \mathbb{R}^n$ teljesül, mert az $\mathbb{R}^n$ minden nem üres nyílt részhalmaza tartalmaz nem üres nyílt téglát, és minden nem üres nyílt téglának a Lebesgue-mértéke (azaz *euklidészi térfogata*) nullánál nagyobb valós szám.

1.4. Gyakorlatok

1. Legyen $f : [-1, 0[\to \mathbb{R};\ x \mapsto \sin(1/x)$. Az f függvény folytonos és korlátos, továbbá $\mathrm{Dom}(f) \in \mathscr{R}_1$, de *nem létezik* olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz és $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $[-1, 0] \subseteq \Omega$ és $f \subseteq \tilde{f}$ teljesül.

(*Útmutatás.* Ha volna ilyen Ω halmaz és $\tilde{f}$ függvény, akkor f-nek létezne határértéke a 0 pontban.)

2. Ha $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mérték, F Banach-tér és $f, g \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n; F)$ olyan függvények, hogy $\mathrm{supp}(\theta) \subseteq [f = g]$, akkor

$$\int f \, \mathrm{d}\theta = \int g \, \mathrm{d}\theta.$$

(*Útmutatás.* A feltevés szerint $[f \neq g] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}(\theta)$, tehát $[f \neq g]$ nyílt θ-eltűnő halmaz, vagyis $f = g$ az $\mathbb{R}^n$-en θ-majdnem mindenütt.)

3. Legyen F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és tekintsük az $\mathbb{R}^n \to F$ folytonos függvények $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n; F)$ terét. Ha $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ *kompakt tartójú* mérték, akkor létezik egyetlen olyan $I_\theta : \mathscr{C}(\mathbb{R}^n; F) \to F$ lineáris operátor, hogy minden $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ és $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n; F)$ esetén, ha $\mathrm{supp}(\theta) \subseteq [\varphi = 1]$, akkor

$$I_\theta(f) = \int \varphi . f \, \mathrm{d}\theta$$

teljesül, ami értelmes feltétel, mert $\varphi . f \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n; F) \subseteq \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$.

(*Útmutatás.* Minden $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ esetén értelmezzük az

$$I_{\theta,\varphi} : \mathscr{C}(\mathbb{R}^n; F) \to F; \quad f \mapsto \int \varphi . f \, \mathrm{d}\theta$$

leképezést, amely nyilvánvalóan lineáris operátor. A **2**. gyakorlat szerint ez *független* a $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ függvény választásától, ha $\mathrm{supp}(\theta) \subseteq [\varphi = 1]$.)

2. fejezet

Newton–Leibniz-tétel

2.1. A határozott integrál

2.1.1. Definíció. *Legyen $\theta : \mathscr{R}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{K}$ mérték, valamint F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Egy $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ függvényt* **lokálisan θ-integrálhatónak nevezünk**, *ha* $\mathrm{Dom}(f)$ *intervallum, és minden $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra, $a \leq b$ esetén $\chi_{_{[a,b[}} f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \theta)$. Ha F Banach-tér és $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ lokálisan θ-integrálható függvény, akkor minden $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén legyen*

$$\int_a^b f \ \mathrm{d}\theta := \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_{_{[a,b[}} f^\circ \ \mathrm{d}\theta & , \text{ ha } a \leq b \\ -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_{_{[b,a[}} f^\circ \ \mathrm{d}\theta & , \text{ ha } a > b. \end{cases}$$

Ha F Banach-tér és $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ lokálisan θ-integrálható függvény, akkor $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén az

$$\int_a^b f \ \mathrm{d}\theta \in F$$

vektort az f függvény a és b közötti **határozott θ-integráljának** *nevezzük. A lokálisan $\mu_{_{\mathbb{R}}}$-integrálható függvényeket* **lokálisan Lebesgue-integrálhatóknak** *nevezzük.*

A definícióval kapcsolatban a következő megjegyzéseket tesszük.

Megjegyzések. 1) Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ *folytonos* függvény és $\mathrm{Dom}(f)$ intervallum, akkor *minden* $\theta : \mathscr{R}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{K}$ mértékre f lokálisan θ-integrálható (vagyis f *univerzálisan lokálisan integrálható*). Valóban, ha $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ és $a \leq b$, akkor nyilvánvaló, hogy $\chi_{_{[a,b[}} f^\circ = (f|_{[a,b[})^\circ = (f|_{[a,b]})^\circ - (f|_{[b,b]})^\circ$, és itt $f|_{[a,b]}$, valamint $f|_{[b,b]}$ folytonos függvények, így a **GEO** 1.1. 5) megjegyzés alapján $(f|_{[a,b]})^\circ, (f|_{[b,b]})^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \theta)$, tehát $\chi_{_{[a,b[}} f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \theta)$. Ebből látható, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ függvény lehet lokálisan θ-integrálható úgy, hogy $f^\circ \notin \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \theta)$.

2) Nyilvánvaló, hogy ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $f : \mathbb{R} \to F$ *mindenütt* értelmezett függvény, akkor minden $\theta : \mathscr{R}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{K}$ mértékre az f függvény most bevezetett lokális θ-integrálhatósága ekvivalens az **INT** 6.4.10. definícióban bevezetett lokális θ-integrálhatóságával. De vigyázzunk arra, hogy ha $I \subseteq \mathbb{R}$ olyan intervallum, hogy $I \neq \mathbb{R}$, akkor létezhet olyan $f : I \to F$ függvény és $\theta : \mathscr{R}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{K}$ mérték, hogy f lokálisan θ-integrálható a fenti definíció szerint, de az $f^\circ : \mathbb{R} \to F$ függvény nem lokálisan θ-integrálható. Ugyanis abból, hogy az $f : I \to F$ függvényre teljesül az, hogy minden

$a, b \in I$ pontokra $a \leq b$ esetén $\chi_{[a,b[} f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \theta)$ nem következik hogy ugyanez igaz akkor is, ha $a \notin I$ vagy $b \notin I$, márpedig f° lokális θ-integrálhatósága éppen azt jelenti, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén, ha $a \leq b$, akkor $\chi_{[a,b[} f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \theta)$. (Tipikus ellenpélda: $\theta := \mu_\mathbb{R}$, $I :=]0, \rightarrow[$ és $f : I \rightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto 1/x$. Ekkor az 1) megjegyzés szerint f lokálisan $\mu_\mathbb{R}$-integrálható, hiszen folytonos, de ha $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < 0$ és $b > 0$, akkor $\chi_{[a,b[} f^\circ \notin \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \mu_\mathbb{R})$.)

3) Legyen F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $\theta : \mathscr{R}_\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ mérték, és $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Dom}(f)$ intervallum. Ha $f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \theta)$, akkor f lokálisan integrálható. Ez abból következik, hogy ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér és F normált tér, akkor minden $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $\varphi \in \mathscr{E}_\mathbb{K}(T, \mathscr{R})$ esetén $\varphi.f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, hiszen ha $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre $\lim\limits_{k \to \infty} \int^* \|f_n - f\| \ \mathrm{d}|\theta| = 0$, akkor $(\varphi f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben, amelyre $\lim\limits_{k \to \infty} \int^* \|\varphi f_n - \varphi f\| \ \mathrm{d}|\theta| = 0$, ugyanis minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\|\varphi f_n - \varphi f\| \leq |\!|\!| \varphi |\!|\!| \cdot \|f_n - f\|$, és a felső integrál pozitív homogén.

4) Ha $\theta : \mathscr{R}_\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ mérték, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ lokálisan θ-integrálható függvény, akkor minden $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\int_a^b f \ \mathrm{d}\theta = \mathrm{sign}(b - a) \int \chi_{[\min(a,b), \max(a,b)[} f^\circ \ \mathrm{d}\theta,$$

ahol $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $\mathrm{sign}(t) := t/|t|$, és $\mathrm{sign}(0) := 0$. Ez a definícióból nyilvánvalóan következik.

5) Vigyázzunk arra, hogy az $\int\limits_a^b f \ \mathrm{d}\theta \in F$ határozott integrál definíciójában lényeges, hogy $a \leq b$ esetén az $[a, b[$ *balról zárt és jobbról nyílt* intervallum áll (**1**. gyakorlat). Ha a $\theta : \mathscr{R}_\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ mérték olyan, hogy az $\mathbb{R}$ minden egy elemű részhalmaza θ-nullhalmaz (például az egydimenziós Lebesgue-mérték), akkor a definícióban $[a, b[$ helyett $[a, b]$, $]a, b]$, vagy $]a, b[$ vehető; ettől a határozott integrál értéke nem változik.

2.1.2. Állítás. *Legyen $\theta : \mathscr{R}_\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ mérték és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett.*

a) *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ lokálisan θ-integrálható függvény, akkor minden $a, b, c \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén teljesülnek az*

$$\int\limits_a^b f \ \mathrm{d}\theta + \int\limits_b^c f \ \mathrm{d}\theta + \int\limits_c^a f \ \mathrm{d}\theta = 0,$$

$$\int\limits_a^b f \ \mathrm{d}\theta = -\int\limits_b^a f \ \mathrm{d}\theta,$$

$$\int\limits_a^a f \ \mathrm{d}\theta = 0$$

egyenlőségek.

b) *Ha $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ lokálisan θ-integrálható függvények, akkor az $f + g : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ függvény, és minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra a $\lambda f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ függvény is lokálisan θ-integrálható,* *továbbá* $a, b \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ $(= \mathrm{Dom}(f+g))$ *esetén fennállnak az*

$$\int_a^b (f+g)\mathrm{d}\theta = \int_a^b f\ \mathrm{d}\theta + \int_a^b g\ \mathrm{d}\theta,$$

$$\int_a^b (\lambda f)\mathrm{d}\theta = \lambda \int_a^b f\ \mathrm{d}\theta$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. a) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ lokálisan θ-integrálható függvény. A definíció alapján triviális, hogy minden $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\int_a^a f\ \mathrm{d}\theta = 0 \qquad \int_a^b f\ \mathrm{d}\theta = -\int_b^a f\ \mathrm{d}\theta.$$

Ha $a, b, c \in \mathrm{Dom}(f)$ és $a \leq b \leq c$, akkor $\chi_{[a,b[}f^\circ + \chi_{[b,c[}f^\circ = \chi_{[a,c[}f^\circ$, ezért az integrál additivitása és a határozott integrál értelmezése alapján

$$\int_a^b f\ \mathrm{d}\theta + \int_b^c f\ \mathrm{d}\theta := \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}f^\circ\ \mathrm{d}\theta + \int_{\mathbb{R}} \chi_{[b,c[}f^\circ\ \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\chi_{[a,b[}f^\circ + \chi_{[b,c[}f^\circ\right)\ \mathrm{d}\theta = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,c[}f^\circ\ \mathrm{d}\theta =: \int_a^c f\ \mathrm{d}\theta = -\int_c^a f\ \mathrm{d}\theta,$$

amiből következik, hogy

$$\int_a^b f\ \mathrm{d}\theta + \int_b^c f\ \mathrm{d}\theta + \int_c^a f\ \mathrm{d}\theta = 0.$$

Ebből esetszétválasztással kapjuk, hogy ugyanez az egyenlőség érvényes akkor is, ha az $a, b, c \in \mathrm{Dom}(f)$ pontok tetszőlegesek.

b) Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ lokálisan θ-integrálható függvények. Ha $a, b \in \mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $a \leq b$, akkor $\chi_{[a,b[}f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \theta)$ és $\chi_{[a,b[}g^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \theta)$, ezért $\chi_{[a,b[}(f+g)^\circ = \chi_{[a,b[}f^\circ + \chi_{[a,b[}g^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \theta)$, ezért $f+g$ is lokálisan θ-integrálható. Az is látható, hogy az integrál additivitása folytán $a, b \in \mathrm{Dom}(f+g)$ és $a \leq b$ esetén

$$\int_a^b (f+g)\mathrm{d}\theta := \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}(f+g)^\circ\ \mathrm{d}\theta = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}f^\circ\ \mathrm{d}\theta + \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}g^\circ\ \mathrm{d}\theta =: \int_a^b f\ \mathrm{d}\theta + \int_a^b g\ \mathrm{d}\theta.$$

Ebből kapjuk, hogy ha $a, b \in \mathrm{Dom}(f+g)$ és $b < a$, akkor

$$\int_a^b (f+g)\mathrm{d}\theta = -\int_b^a (f+g)\mathrm{d}\theta = -\int_b^a f\ \mathrm{d}\theta - \int_b^a g\ \mathrm{d}\theta = \int_a^b f\ \mathrm{d}\theta + \int_a^b g\ \mathrm{d}\theta.$$

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ lokálisan θ-integrálható függvény és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor $a, b \in \mathrm{Dom}(\lambda f) = \mathrm{Dom}(f)$ és $a \le b$ esetén $\chi_{[a,b[}(\lambda f)^\circ = \lambda\Big(\chi_{[a,b[} f^\circ\Big) \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \theta)$, ezért a λf függvény is lokálisan θ-integrálható. Az is látható, hogy az integrál $\mathbb{K}$-homogenitása folytán $a, b \in \mathrm{Dom}(\lambda f)$ és $a \le b$ esetén

$$\int_a^b (\lambda f)\ \mathrm{d}\theta := \int_\mathbb{R} \chi_{[a,b[}(\lambda f)^\circ\ \mathrm{d}\theta = \int_\mathbb{R} \lambda(\chi_{[a,b[} f^\circ)\ \mathrm{d}\theta = \lambda \int_\mathbb{R} \chi_{[a,b[} f^\circ\ \mathrm{d}\theta =: \lambda \int_a^b f\ \mathrm{d}\theta.$$

Ebből kapjuk, hogy ha $a, b \in \mathrm{Dom}(f + g)$ és $b < a$, akkor

$$\int_a^b (\lambda f)\ \mathrm{d}\theta = -\int_b^a (\lambda f)\ \mathrm{d}\theta = -\lambda \int_b^a f\ \mathrm{d}\theta = \lambda \int_a^b f\ \mathrm{d}\theta$$

teljesül. ■

2.1.3. Állítás. *Legyen $\theta : \mathscr{R}_\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mérték és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ lokálisan θ-integrálható függvény, akkor az $\|f\| : \mathrm{Dom}(f) \to F$; $t \mapsto \|f(t)\|$ függvény lokálisan $|\theta|$-integrálható és minden $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra, ha $a \le b$, akkor*

$$\left\| \int_a^b f\ \mathrm{d}\theta \right\| \le \int_a^b \|f\|\ \mathrm{d}|\theta|.$$

Bizonyítás. Ha $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ és $a \le b$, akkor $\chi_{[a,b[}.f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \theta)$, ezért $\chi_{[a,b[}\|f^\circ\| \in \mathscr{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, |\theta|)$ és mivel nyilvánvalóan $\|f^\circ\| = \|f\|^\circ$, így $\chi_{[a,b[}\|f\|^\circ \in \mathscr{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, |\theta|)$ teljesül. ■

2.1.4. Állítás. *Legyen $\theta : \mathscr{R}_\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mérték és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ lokálisan θ-integrálható függvény, $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$, $a \le b$, és $M \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy θ-majdnem minden $t \in [a, b[$ pontra $\|f(t)\| \le M$, akkor*

$$\left\| \int_a^b f\ \mathrm{d}\theta \right\| \le M \cdot |\theta|([a, b[).$$

Bizonyítás. A definíció szerint $\chi_{[a,b[}.f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \theta)$, ezért $\chi_{[a,b[}\|f^\circ\| \in \mathscr{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, |\theta|)$, továbbá a hipotézis szerint

$$\left\|\chi_{[a,b[}.f^\circ\right\| = \chi_{[a,b[}.\|f\|^\circ \le M\chi_{[a,b[}$$

$\mathbb{R}$-en θ-majdnem mindenütt, így

$$\left\| \int_a^b f\ \mathrm{d}\theta \right\| \le \int_\mathbb{R} \chi_{[a,b[}\|f^\circ\|\ \mathrm{d}|\theta| = \int_\mathbb{R} \chi_{[a,b[}\|f\|^\circ\ \mathrm{d}|\theta| \le \int_\mathbb{R} \chi_{[a,b[}M\ \mathrm{d}|\theta| = M \cdot |\theta|([a, b[). \ ■$$

2.1.5. Állítás. *Legyen $\theta : \mathscr{R}_\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mérték, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum. Legyen $f : I \to F$ függvény és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : I \to F$ lokálisan θ-integrálható függvény. Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az I intervallumon θ-majdnem mindenütt pontonként konvergál f-hez, és minden $a, b \in$*

$\mathrm{Dom}(f)$ *ponthoz* $a \leq b$ *esetén van olyan* $g : [a, b[\to \overline{\mathbb{R}}_+$ *függvény, hogy* $\displaystyle\int^* g^\circ \, \mathrm{d}|\theta| < +\infty$ *és minden* $n \in \mathbb{N}$ *számra* $\|f_n\| \leq g$ *az* $[a, b[$ *intervallumon* θ*-majdnem mindenütt, akkor* f *is lokálisan* θ*-integrálható függvény és minden* $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ *esetén*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}\theta.$$

Bizonyítás. Ha $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ és $a \leq b$, akkor a hipotézis szerint az $\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \theta)$-ban haladó $(\chi_{[a,b[}.f_n^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra és a $\chi_{[a,b[}.f^\circ : \mathbb{R} \to F$ függvényre alkalmazható a Lebesgue-tétel, ezért $\chi_{[a,b[}.f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \theta)$ (tehát f lokálisan θ-integrálható függvény), és a $(\chi_{[a,b[}.f_n^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $\|\cdot\|_{1,\theta}$ félnorma szerint is konvergál a $\chi_{[a,b[}.f^\circ$ függvényhez, következésképpen

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}.f^\circ \, \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}.f_n^\circ \, \mathrm{d}\theta,$$

ami ekvivalens az

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}\theta$$

egyenlőséggel. ■

2.1.6. Következmény. *Legyen* $\theta : \mathscr{R}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{K}$ *mérték,* F *Banach-tér* $\mathbb{K}$ *felett, és* $I \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt intervallum. Legyen* $f : I \to F$ *folytonos függvény és* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan sorozat, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $f_n : I \to F$ *folytonos függvény. Ha az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egyenletesen konvergál az* f *függvényhez* I*-n, akkor minden* $a, b \in I$ *pontra*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}\theta.$$

Bizonyítás. A hipotézis szerint az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens a $\mathscr{C}(I; F)$ függvénytérben a sup-norma szerint, így korlátos is, vagyis van olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $t \in T$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_n(t)\| \leq C$. Mivel I kompakt intervallum, így $C\chi_I \in \mathscr{L}^1_+(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \theta)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_n\| \leq C\chi_I$, ezért elegendő az előző állításra hivatkozni. ■

2.2. Newton–Leinbiz-tétel

2.2.1. Tétel. (Newton–Leinbiz-tétel) *Legyen* F *Banach-tér és* $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ *lokálisan Lebesgue-integrálható függvény. Legyen* $c \in \mathrm{Dom}(f)$ *rögzített pont, és tekintsük a*

$$p : \mathrm{Dom}(f) \to F; \quad t \mapsto \int_c^t f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

leképezést. Ekkor p *folytonos függvény, és ha* $t \in \mathrm{Dom}(f)$ *olyan torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, amelyben* f *folytonos, akkor*

$$\lim_{t'\to t} \frac{p(t') - p(t)}{t' - t} = f(t).$$

Bizonyítás. A p függvény folytonosságát az átviteli elv alkalmazásával igazoljuk. Tehát legyen $t \in \mathrm{Dom}(f)$ rögzített pont, és $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amely t-hez konvergál. Azt kell igazolni, hogy $p(t) = \lim_{k\to\infty} p(t_k)$ teljesül. Természetesen feltehető, hogy $\{t\} \neq \mathrm{Dom}(f)$, különben minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $t_k = t$, így az állítás triviálisan igaz.

Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor a határozott integrál tulajdonságait alkalmazva

$$0 = \int_c^{t_k} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} + \int_{t_k}^{t} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} + \int_t^{c} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= p(t_k) + \int_{t_k}^{t} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} - \int_c^{t} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = p(t_k) - \int_t^{t_k} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} - p(t),$$

tehát fennáll a

$$p(t_k) - p(t) = \int_t^{t_k} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \mathrm{sign}(t_k - t) \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\min(t,t_k),\max(t,t_k)[} f^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

egyenlőség. Nyilvánvaló, hogy a $\left(\chi_{[\min(t,t_k),\max(t,t_k)[} f^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál 0-hoz az $\mathbb{R} \setminus \{t\}$ halmazon, tehát $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt, hiszen a $\{t\}$ halmaz $\mu_{\mathbb{R}}$-eltűnő halmaz.

A $t \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra három eset lehetséges.

– Ha t *belső pontja* a $\mathrm{Dom}(f)$ intervallumnak, akkor léteznek olyan $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ pontok, hogy $a < t < b$. Ekkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > N$ természetes számra $t_k \in [a, b[$.

– Ha t *baloldali végpontja* a $\mathrm{Dom}(f)$ intervallumnak. Ekkor a $\{t\} \neq \mathrm{Dom}(f)$ feltétel alapján van olyan $b \in \mathrm{Dom}(f)$, hogy $t < b$. Világos, hogy a b-hez van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > N$ természetes számra $t_k \in [t, b[$.

– Ha t *jobboldali végpontja* a $\mathrm{Dom}(f)$ intervallumnak. Ekkor a $\{t\} \neq \mathrm{Dom}(f)$ feltétel alapján van olyan $a \in \mathrm{Dom}(f)$, hogy $a < t$. Világos, hogy az a-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > N$ természetes számra $t_k \in [a, t]$.

Tehát mindegyik esetben léteznek olyan $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ pontok és létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > N$ természetes számra $t_k \in [a, b]$ és $t \in [a, b]$. Ekkor minden $k > N$ természetes számra $\left\|\chi_{[\min(t,t_k),\max(t,t_k)[} f^\circ\right\| \le \|\chi_{[a,b]} f^\circ\|$, és $\chi_{[a,b]} f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, hiszen $\chi_{[a,b]} f^\circ = \chi_{[a,b[} f^\circ + \chi_{[b,b]} f^\circ$, és az f lokális $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálhatósága miatt $\chi_{[a,b[} f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, és a $\chi_{[b,b]} f^\circ$ függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-eltűnő. Tehát $\int^* \|\chi_{[a,b]} f^\circ\| \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} < +\infty$ teljesül, így a Lebesgue-tétel alapján a $\left(\chi_{[\min(t,t_k),\max(t,t_k)[} f^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál 0-hoz a $\|\cdot\|_{\mu_{\mathbb{R}},1}$ félnorma szerint is, következésképpen

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\min(t,t_k),\max(t,t_k)[} f^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $p(t) = \lim_{k\to\infty} p(t_k)$, így p folytonos a p pontban.

Legyen most $t \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, amelyben az f függvény folytonos. Bebizonyítjuk, hogy

$$\lim_{t' \to t} \frac{p(t') - p(t)}{t' - t} = f(t).$$

Ha $t' \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{t\}$, akkor

$$\frac{p(t') - p(t)}{t' - t} - f(t) = \frac{\mathrm{sign}(t' - t)}{t' - t} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\min(t,t'),\max(t,t')[} f^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} - f(t) =$$

$$= \frac{1}{|t' - t|} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\min(t,t'),\max(t,t')[} f^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} - \frac{1}{|t' - t|} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\min(t,t'),\max(t,t')[}.f(t) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= \frac{1}{|t' - t|} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\min(t,t'),\max(t,t')[} \Big(f^\circ - f(t) \Big) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $s \in]t - \delta, t + \delta[\cap \mathrm{Dom}(f)$ esetén $\|f(s) - f(t)\| < \varepsilon$, ugyanis f folytonos a t pontban. Ekkor $t' \in]t - \delta, t + \delta[\cap \mathrm{Dom}(f)$ esetén $[\min(t,t'), \max(t,t')[\subseteq]t - \delta, t + \delta[\cap \mathrm{Dom}(f)$, hiszen a $\min(t,t')$ és $\max(t,t')$ pontok elemei $]t - \delta, t + \delta[\cap \mathrm{Dom}(f)$-nek, és $]t - \delta, t + \delta[\cap \mathrm{Dom}(f)$ intevallum. Ezért

$$\left\| \chi_{[\min(t,t'),\max(t,t')[} \Big(f^\circ - f(t) \Big) \right\| \leq \chi_{[\min(t,t'),\max(t,t')[} \sup_{s \in]t-\delta, t+\delta[\cap \mathrm{Dom}(f)} \|f(s) - f(t)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \chi_{[\min(t,t'),\max(t,t')[},$$

amiből kapjuk, hogy ha $t' \in]t - \delta, t + \delta[\cap \mathrm{Dom}(f)$ és $t' \neq t$, akkor

$$\left\| \frac{p(t') - p(t)}{t' - t} - f(t) \right\| \leq \frac{1}{|t' - t|} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\min(t,t'),\max(t,t')[} \|f^\circ - f(t)\| \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} \leq$$

$$= \frac{\varepsilon}{|t' - t|} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\min(t,t'),\max(t,t')[} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $\lim\limits_{t' \to t} \dfrac{p(t') - p(t)}{t' - t} = f(t)$. ■

2.2.2. Következmény. (Newton–Leinbiz-tétel) *Legyen F Banach-tér, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, és $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ folytonos függvény. Legyen $c \in I$ rögzített pont, és tekintsük a*

$$p : \mathrm{Dom}(f) \to F; \quad t \mapsto \int_c^t f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

leképezést.

– Ha $t \in I$ belső pontja I-nek, akkor p differenciálható a t pontban, és

$$(\mathrm{D}p)(t) = f(t).$$

– Ha $c_- := \inf(I) \in I$ és c_- torlódási pontja I-nek, akkor p a c_- pontban jobbról differenciálható és

$$(\mathrm{D}_+ p)(c_-) = f(c_-).$$

– Ha $c_+ := \sup(I) \in I$ és c_+ torlódási pontja I-nek, akkor p a c_+ pontban balról differenciálható és

$$(\mathrm{D}_- p)(c_+) = f(c_+)$$

teljesül. ■

Tehát ha F Banach-tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $c \in [a, b]$, továbbá $f : [a.b] \to F$ folytonos függvény, akkor a

$$p : [a, b] \to F; \quad t \mapsto \int_c^t f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

leképezés folytonosan differenciálható az $]a, b[$ nyílt intervallumon és itt $\mathrm{D}p = f$, továbbá léteznek a $\lim_{t\to a}(\mathrm{D}p)(t)$ és $\lim_{t\to b}(\mathrm{D}p)(t)$ határértékek, ugyanis léteznek a $(\mathrm{D}_+p)(a)$ és $(\mathrm{D}_-p)(b)$ egyoldali deriváltak és

$$(\mathrm{D}_+p)(a) = f(a) = \lim_{t\to a} f(t) = \lim_{t\to a}(\mathrm{D}p)(t),$$
$$(\mathrm{D}_+p)(b) = f(b) = \lim_{t\to b} f(t) = \lim_{t\to b}(\mathrm{D}p)(t).$$

Tehát ekkor a

$$\widetilde{p} : \mathbb{R} \to F; \quad t \mapsto \begin{cases} p(a) + f(a)(t-a) & \text{, ha } t < a, \\ p(t) & \text{, ha } a \leq t \leq b, \\ p(b) + f(b)(t-b) & \text{, ha } t > a \end{cases}$$

függvény olyan folytonosan differenciálható kiterjesztése p-nek az $[a, b]$ intervallumról $\mathbb{R}$-re, amelyre

$$\mathrm{D}\widetilde{p} : \mathbb{R} \to F; \quad t \mapsto \begin{cases} f(a) & \text{, ha } t < a, \\ f(t) & \text{, ha } a \leq t \leq b, \\ f(b) & \text{, ha } t > a. \end{cases}$$

2.3. A Newton–Leinbiz-tétel elemi alkalmazásai

Most a Newton–Leibniz-tétel néhány többé-kevésbé közvetlen következményét tárgyaljuk.

2.3.1. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, F Banach-tér és $f : I \to F$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor minden $a, b \in I$ esetén*

$$\int_a^b (\mathrm{D}f) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = f(b) - f(a).$$

(Newton–Leibniz-formula)

Bizonyítás. Legyenek $a, b \in I$, és tekintsük a

$$p : I \to F; \quad t \mapsto \int_a^t (\mathrm{D}f) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

leképezést. A Newton–Leibniz-tétel alapján p differenciálható függvény és $\mathrm{D}p = \mathrm{D}f$. Ebből következik, hogy a $p - f$ különbségfüggvény állandó, ezért $p(b) - f(b) = p(a) - f(a) = -f(a)$, hiszen nyilvánvalóan $p(a) = 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\int_a^b (\mathrm{D}f) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =: p(b) = f(b) - f(a)$$

teljesül. ■

2.3.2. Állítás. *Ha $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, F Banach-tér és $f : \Omega \to F$ folytonos függvény, akkor van olyan $g : \Omega \to F$ folytonosan differenciálható függvény, hogy $f = \mathrm{D}g$, vagyis f-nek létezik globális primitív függvénye.*

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}$ minden nyílt részhalmaza előáll nyílt intervallumok diszjunt rendszerének uniójaként, ezért elég arra az esetre bizonyítani, amikor Ω nyílt intervallum. Ekkor viszont az állítás közvetlenül következik a Newton–Leibniz-tételből. ■

2.3.3. Állítás. *Legyenek $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $\sigma : J \to I$ folytonosan differenciálható függvény és $f : I \to F$ folytonos függvény. Ekkor minden $a, b \in J$ esetén*

$$\int_a^b (f \circ \sigma).(\mathrm{D}\sigma)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

(Helyettesítéses integrálás határozott integrálokban)

Bizonyítás. Legyen $a \in J$ rögzített pont, és tekintsük a

$$p : I \to F; \quad t \mapsto \int_{\sigma(a)}^{t} f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}},$$

$$q : J \to F; \quad s \mapsto \int_a^s (f \circ \sigma).(\mathrm{D}\sigma)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

leképezéseket, amelyek jól értelmezettek, hiszen $f : I \to F$ és $(f \circ \sigma).(\mathrm{D}\sigma) : J \to F$ folytonos függvények. A Newton–Leibniz-tétel alapján a p és q függvények folytonosan differenciálhatóak, valamint $\mathrm{D}p = f$ és $\mathrm{D}q = (f \circ \sigma).(\mathrm{D}\sigma)$. Ebből az összetett függvények differenciálási szabályát alkalmazva következik, hogy $\mathrm{D}q = ((\mathrm{D}p) \circ \sigma).(\mathrm{D}\sigma) = \mathrm{D}(p \circ \sigma)$, így a $q - p \circ \sigma : J \to F$ függvény állandó. Ugyanakkor a definíciók alapján $p(\sigma(a)) = 0$ és $q(a) = 0$, tehát minden $b \in J$ esetén $q(a) - p(\sigma(a)) = 0 = q(b) - p(\sigma(b))$, vagyis $q(b) = p(\sigma(b))$, ami azt jelenti, hogy

$$\int_a^b (f \circ \sigma).(\mathrm{D}\sigma)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

teljesül. ■

2.3.4. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint F, G, H Banach-terek és $u : F \times G \to H$ folytonos bilineáris operátor. Ha $f : I \to F$ és $g : I \to G$ folytonosan differenciálható függvények, akkor minden $a, b \in I$ esetén*

$$\int_a^b u(f, \mathrm{D}g)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = u(f(b), g(b)) - u(f(a), g(a)) - \int_a^b u(\mathrm{D}f, g)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

(Parciális integrálás)

Bizonyítás. Az $u(f, g) : I \to H$ függvény folytonosan differenciálható és $\mathrm{D}(u(f, g)) = u(\mathrm{D}f, g) + u(f, \mathrm{D}g)$, ezért a Newton–Leibniz-formula alapján minden $I \ni a, b$-re

$$u(f(b), g(b)) - u(f(a), g(a)) = \int_a^b \mathrm{D}(u(f, g))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_a^b u(\mathrm{D}f, g)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} + \int_a^b u(f, \mathrm{D}g)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}. \blacksquare$$

2.4. Integrálmaradéktagos Taylor-formula

2.4.1. Tétel. *Legyen E normált tér, F Banach-tér, $m \in \mathbb{N}$ és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Ha $\mathfrak{a}, x \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pontok, hogy az f függvény $m+1$-szer folytonosan differenciálható az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ zárt szakasz minden pontjában, akkor*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}((x-\mathfrak{a})^{[k]}) + \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m (\mathrm{D}^{m+1} f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]})\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

(Integrálmaradéktagos Taylor-formula)

(**Megjegyzés**. *Világos, hogy a feltétel alapján a*

$$[0,1] \to F; \quad t \mapsto (1-t)^m (\mathrm{D}^{m+1} f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]})$$

függvény folytonos, ezért az

$$\int_0^1 (1-t)^m (\mathrm{D}^{m+1} f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]})\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

határozott integrál jól értelmezett.)

Bizonyítás. Minden $k \in \mathbb{N}$ számra legyen

$$f_k :]0,1[\to \mathbb{K}; \quad t \mapsto \frac{(1-t)^k}{k!},$$

továbbá $k \leq m+1$ esetén

$$g_k :]0,1[\to F; \quad t \mapsto (\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]}).$$

Világos, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k \in \mathrm{C}^1(]0,1[;\mathbb{K})$, és ha $k \leq m$, akkor $g_k \in \mathrm{C}^1(]0,1[;F)$, valamint $g_{m+1} \in \mathscr{C}(]0,1[;F)$. Továbbá, ha $k \in \mathbb{N}^*$, akkor $\mathrm{D}f_k = -f_{k-1}$, és $\mathrm{D}f_0 = 0$. Az is nyilvánvaló, hogy minden $k \leq m$ természetes számra $\mathrm{D}g_k = g_{k+1}$.

Legyen $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan zérussorozat $\mathbb{R}$-ben, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $0 < \varepsilon_k < 1/2$. Most minden $k \leq m$ természetes szám esetében alkalmazva a parciális integrálás formuláját az f_k és g_k függvényekre, valamint az $\mathbb{K} \times F \to F$; $(\lambda, z) \mapsto \lambda.z$ folytonos bilineáris operátorra, kapjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni j$-re

$$\int_{\varepsilon_j}^{1-\varepsilon_j} f_k.(\mathrm{D}g_k)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = f_k(1-\varepsilon_j).g_k(1-\varepsilon_j) - f_k(\varepsilon_j).g_k(\varepsilon_j) - \int_{\varepsilon_j}^{1-\varepsilon_j} (\mathrm{D}f_k).g_k\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}},$$

hiszen $\varepsilon_j, 1-\varepsilon_j \in]0,1[$. Minden $k \leq m$ természetes számra és $\mathbb{N} \ni j$-re vezessük be a

$$z_{j,k} := \int_{\varepsilon_j}^{1-\varepsilon_j} f_k.(\mathrm{D}g_k)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} \in F$$

vektort. A fentiek alapján világos, hogy $j, k \in \mathbb{N}$ és $0 < k \leq m$ esetén

$$z_{j,k} = f_k(1-\varepsilon_j).g_k(1-\varepsilon_j) - f_k(\varepsilon_j).g_k(\varepsilon_j) + z_{j,k-1},$$

hiszen

$$\int_{\varepsilon_j}^{1-\varepsilon_j} (\mathrm{D}f_k).g_k \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = -\int_{\varepsilon_j}^{1-\varepsilon_j} f_{k-1}.(\mathrm{D}g_{k-1}) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}},$$

továbbá minden $\mathbb{N} \ni j$-re

$$z_{j,0} = f(\mathfrak{a} + (1-\varepsilon_j).(x-\mathfrak{a})) - f(\mathfrak{a} + \varepsilon_j.(x-\mathfrak{a})).$$

Ebből következik, hogy minden $j \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_{[\varepsilon_j, 1-\varepsilon_j[} \frac{(1-t)^m}{m!}.(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a} + t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]}) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \int_{\varepsilon_j}^{1-\varepsilon_j} f_m.(\mathrm{D}g_m) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =: z_{j,m} = z_{j,0} + \sum_{k=1}^{m} (z_{j,k} - z_{j,k-1}) =$$

$$= f(\mathfrak{a}+(1-\varepsilon_j).(x-\mathfrak{a})) - f(\mathfrak{a}+\varepsilon_j.(x-\mathfrak{a})) + \sum_{k=1}^{m} (f_k(1-\varepsilon_j).g_k(1-\varepsilon_j) - f_k(\varepsilon_j).g_k(\varepsilon_j)).$$

Az átviteli elv alapján az itt szereplő utolsó kifejezésnek létezik határértéke $j \to \infty$ esetén, és a határérték nyilvánvalóan az

$$f(x) - f(\mathfrak{a}) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})((x-\mathfrak{a})^{[k]})$$

vektor, vagyis

$$\lim_{j\to\infty} \int_{[\varepsilon_j, 1-\varepsilon_j[} \frac{(1-t)^m}{m!}.(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a} + t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]}) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= f(x) - f(\mathfrak{a}) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})((x-\mathfrak{a})^{[k]}).$$

Ugyanakkor a $\left(\chi_{[\varepsilon_j, 1-\varepsilon_j[}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál $\chi_{]0,1[}$-hez az $\mathbb{R}$ halmazon, továbbá minden $t \in [0,1]$ és $j \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \chi_{[\varepsilon_j, 1-\varepsilon_j[}(t) \frac{(1-t)^m}{m!}.(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]}) \right\| \leq C\|x-\mathfrak{a}\|^{m+1}\chi_{[0,1]}(t),$$

ahol

$$C := \sup_{t\in]0,1[} \|(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))\| \leq \sup_{z\in[\![\mathfrak{a},x]\!]} \|(\mathrm{D}^{m+1}f)(z)\| < +\infty,$$

mert a $\mathrm{D}^{m+1}f$ függvény folytonos az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ szakaszon. Ezért a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{j\to\infty} \int_{[\varepsilon_j, 1-\varepsilon_j[} \frac{(1-t)^m}{m!}.(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a} + t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]}) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \int_{]0,1[} \frac{(1-t)^m}{m!}.(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a} + t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]}) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{(1-t)^m}{m!}.(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a} + t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]}) \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

teljesül. ■

Az iménti tétel bizonyításából látható, hogy ha az f függvény m-szer folytonosan differenciálható az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ szakaszon és $m+1$-szer folytonosan differenciálható az $]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ szakaszon, és az $\mathrm{D}^{m+1}f$ függvény *korlátos* az $]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ szakaszon, akkor a

$$]0,1[\to F; \quad t \mapsto (1-t)^m (\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]})$$

függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható, és fennáll az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}((x-\mathfrak{a})^{[k]}) + \frac{1}{m!} \int\limits_{]0,1[} (1-t)^m (\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]}) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

egyenlőség. A **16**. gyakorlatban megmutatjuk, hogy ha az f függvény m-szer folytonosan differenciálható az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ szakaszon és $m+1$-szer folytonosan differenciálható az $]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ szakaszon, akkor az $\mathrm{D}^{m+1}f$ függvény korlátossága *nélkül* állítható, hogy a

$$]0,1[\to F; \quad t \mapsto (1-t)^m (\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]})$$

függvénynek létezik az improprius Lebesgue-integrálja a 0 és 1 határok között, és fennáll az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}((x-\mathfrak{a})^{[k]}) + \frac{1}{m!} \int_{0\leftarrow}^{\to 1} (1-t)^m (\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]}) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

egyenlőség.

2.5. A Newton–Leibniz-formula általánosítása

2.5.1. Állítás. *Legyenek $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ és F Banach-tér. Ha $f :]a, b[\to F$ folytonosan differenciálható függvény és $(\mathrm{D}f)^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, akkor léteznek a $\lim\limits_a f$ és $\lim\limits_b f$ határértékek és*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \lim_b f - \lim_a f.$$

(Általánosított Newton–Leibniz-formula)

Bizonyítás. Legyen $c \in]a, b[$ rögzített pont.

Vegyünk olyan $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $]a, b[$-ben, amely konvergál a-hoz, ha $a \neq -\infty$ (illetve $-\infty$-hez konvergál $\overline{\mathbb{R}}$-ban, ha $a = -\infty$). Nyilvánvaló, hogy a $\left(\chi_{[a_k, c[}(\mathrm{D}f)^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál a $\chi_{]a,c[}(\mathrm{D}f)^\circ$ függvényhez az $\mathbb{R}$ halmazon. Továbbá, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\left\|\chi_{[a_k, c[}(\mathrm{D}f)^\circ\right\| \leq \|(\mathrm{D}f)^\circ\|$, és a $(\mathrm{D}f)^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ hipotézis miatt $\int^* \|(\mathrm{D}f)^\circ\| \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} < +\infty$. Ezért a Lebesgue-tétel alapján $\chi_{]a,c[}(\mathrm{D}f)^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ és

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{]a,c[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{]a_k, c[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ha $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $a_k < c$, akkor a Newton–Leibniz-formula szerint

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{]a_k,c[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a_k,c[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =: \int_{a_k}^{c} (\mathrm{D}f) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = f(c) - f(a_k),$$

mert a Lebegue-mérték szerint minden egy elemű halmaz eltűnő halmaz. Ez azt jelenti, hogy az $(f(a_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, így a határértékekre vonatkozó átviteli elvet alkalmazva nyerjük, hogy létezik a $\lim\limits_a f$ határérték, valamint

$$\lim_a f = \lim_{k\to\infty} f(a_k) = f(c) - \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{]a_k,c[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = f(c) - \int_{\mathbb{R}} \chi_{]a,c[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

teljesül.

Vegyünk olyan $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $]a,b[$-ben, amely konvergál b-hez, ha $b \neq +\infty$ (illetve $+\infty$-hez konvergál $\overline{\mathbb{R}}$-ban, ha $b = +\infty$). Nyilvánvaló, hogy a $\left(\chi_{[c,b_k[}(\mathrm{D}f)^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál a $\chi_{[c,b[}(\mathrm{D}f)^\circ$ függvényhez az $\mathbb{R}$ halmazon. Továbbá, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\left\|\chi_{[c,b_k[}(\mathrm{D}f)^\circ\right\| \leq \|(\mathrm{D}f)^\circ\|$, és a $(\mathrm{D}f)^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ hipotézis miatt $\int^* \|(\mathrm{D}f)^\circ\| \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} < +\infty$. Ezért a Lebesgue-tétel alapján $\chi_{[c,b[}(\mathrm{D}f)^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ és

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[c,b[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[c,b_k[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ha $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $c < b_k$, akkor a Newton–Leibniz-formula szerint

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[c,b_k[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =: \int_{c}^{b_k} (\mathrm{D}f) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = f(b_k) - f(c).$$

Ez azt jelenti, hogy az $(f(b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben, így a határértékekre vonatkozó átviteli elvet alkalmazva nyerjük, hogy létezik a $\lim\limits_b f$ határérték, valamint

$$\lim_b f = \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(c) + \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[c,b_k[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = f(c) + \int_{\mathbb{R}} \chi_{[c,b[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

teljesül.

Végül, az integrál additivitása folytán

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \left(\chi_{]a,c[} + \chi_{[c,b[}\right)(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{]a,c[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} + \int_{\mathbb{R}} \chi_{[c,b[}(\mathrm{D}f)^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =$$
$$= (f(c) - \lim_a f) + (\lim_b f - f(c)) = \lim_b f - \lim_a f,$$

amit bizonyítani kellett. ■

Az előző állításból a parciális integrálás korábbiaknál általánosabb formulája származtatható (**2**. feladat a) pontja). Azonban a parciális integrálás tételének létezik még annál is hatékonyabb formája, ami nem a Newton–Leibniz-formulából, hanem a Lebesgue–Fubini-tételből vezethető le (**2**. gyakorlat b) pontja).

2.6. Improprius Lebesgue-integrálok

2.6.1. Definíció. *Legyenek $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, F Banach-tér és $f :]a, b[\to F$ lokálisan $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható függvény.*

– *Ha $c \in]a, b[$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az* **improprius Lebesgue-integrálja a c és b határok között**, *ha létezik a $\lim\limits_{b' \to b} \int\limits_{c}^{b'} f \, d\mu_{\mathbb{R}}$ határértérék; és ekkor az*

$$\int\limits_{c}^{\to b} f \, d\mu_{\mathbb{R}} := \lim_{b' \to b} \int\limits_{c}^{b'} f \, d\mu_{\mathbb{R}}$$

jelölést alkalmazzuk.

– *Ha $c \in]a, b[$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az* **improprius Lebesgue-integrálja az a és c határok között**, *ha létezik a $\lim\limits_{a' \to a} \int\limits_{a'}^{c} f \, d\mu_{\mathbb{R}}$ határértérék; és ekkor az*

$$\int\limits_{a \leftarrow}^{c} f \, d\mu_{\mathbb{R}} := \lim_{a' \to a} \int\limits_{a'}^{c} f \, d\mu_{\mathbb{R}}$$

jelölést alkalmazzuk.

– *Azt mondjuk, hogy f-nek létezik az* **improprius Lebesgue-integrálja az a és b határok között**, *ha létezik a $\lim\limits_{(a', b') \to (a, b)} \int\limits_{a'}^{b'} f \, d\mu_{\mathbb{R}}$ határértérék; és ekkor az*

$$\int\limits_{a \leftarrow}^{\to b} f \, d\mu_{\mathbb{R}} := \lim_{(a', b') \to (a, b)} \int\limits_{a'}^{b'} f \, d\mu_{\mathbb{R}}$$

jelölést alkalmazzuk.

A következő állítás szerint az intervallumon való improprius Lebesgue-integrálhatóság a Lebesgue-integrálhatóság fogalmának általánosítása. A **15**. gyakorlat szerint itt *valódi* általánosításról van szó.

2.6.2. Állítás. *Legyenek $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, F Banach-tér és $f :]a, b[\to F$ lokálisan $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható függvény.*

a) *Ha $c \in]a, b[$ és az f függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható a $[c, b[$ intervallumon, akkor létezik az f improprius Lebesgue-integrálja a c és b határok között, valamint*

$$\int\limits_{c}^{\to b} f \, d\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{[c,b[} f \, d\mu_{\mathbb{R}}.$$

b) *Ha $c \in]a, b[$ és az f függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható az $]a, c[$ intervallumon, akkor létezik az f improprius Lebesgue-integrálja az a és c határok között, valamint*

$$\int\limits_{a \leftarrow}^{c} f \, d\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{]a,c[} f \, d\mu_{\mathbb{R}}.$$

c) *Ha az f függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható az $]a,b[$ intervallumon, akkor létezik az f improprius Lebesgue-integrálja az a és b határok között, valamint*

$$\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{]a,b[} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Bizonyítás. a) Legyen $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat $]a,b[$-ben, amely konvergál b-hez, ha $b \neq +\infty$ (illetve nem korlátos felülről, ha $b = +\infty$). Nyilvánvaló, hogy a $\left(\chi_{[c,b_k[}f^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál a $\chi_{[c,b[}f^\circ$ függvényhez az $\mathbb{R}$ halmazon, valamint minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\chi_{[c,b_k[}f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$, hiszen f lokálisan $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható. Továbbá, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\left\|\chi_{[c,b_k[}f^\circ\right\| \leq \chi_{[c,b[}\|f^\circ\|$, és a a hipotézis szerint $\chi_{[c,b[}f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$, tehát $\int^* \|\chi_{[c,b[}f^\circ\| \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} < +\infty$. A Lebesgue-tétel alapján a $\left(\chi_{[c,b_k[}f^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál a $\chi_{[c,b[}f^\circ$ függvényhez a $\|\cdot\|_{\mu_{\mathbb{R}},1}$ félnorma szerint, és az $\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[c,b_k[}f^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat F-ben konvergens, valamint $\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[c,b_k[}f^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{[c,b[} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$. A határértékekre vonatkozó átviteli elv alapján ebből következik a $\lim_{b'\to b}\int_c^{b'} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$ határérték létezése, és a $\int_c^{\rightarrow b} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{[c,b[} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$ egyenlőség.

b) Ugyanúgy bizonyítunk, mint az a)-ban, csak most olyan olyan $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot veszünk $]a,b[$-ben, amely konvergál a-hoz, ha $a \neq -\infty$ (illetve nem korlátos alulról, ha $a = -\infty$).

c) Két tetszőleges olyan $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ és $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot veszünk $]a,b[$-ben, amelyekre $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergál a-hoz, ha $a \neq -\infty$ (illetve nem korlátos alulról, ha $a = -\infty$), valamint $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergál b-hez, ha $b \neq +\infty$ (illetve nem korlátos felülről, ha $b = +\infty$). Nyilvánvaló, hogy a $\left(\chi_{[a_k,b_k[}f^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál az f° függvényhez az $\mathbb{R}$ halmazon, valamint minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\chi_{[a_k,b_k[}f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$, hiszen f lokálisan $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható. Továbbá, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\left\|\chi_{[a_k,b_k[}f^\circ\right\| \leq \chi_{]a,b[}\|f^\circ\|$, és a a hipotézis szerint $\chi_{]a,b[}f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$, tehát $\int^* \|\chi_{]a,b[}f^\circ\| \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} < +\infty$. A Lebesgue-tétel alapján a $\left(\chi_{[a_k,b_k[}f^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál a $\chi_{]a,b[}f^\circ$ függvényhez a $\|\cdot\|_{\mu_{\mathbb{R}},1}$ félnorma szerint, és az $\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a_k,b_k[}f^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat F-ben konvergens, valamint $\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a_k,b_k[}f^\circ \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{]a,b[} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$. A határértékekre vonatkozó átviteli elv alapján ebből adódik a $\lim_{(a',b')\to(a,b)}\int_{a'}^{b'} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$ határérték létezése, és az $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{]a,b[} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$ egyenlőség is. ■

2.7. Gyakorlatok

1. (*A Newton–Leibniz-tétel általánosítása.*) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $\theta : \mathscr{R}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{K}$ mérték, és $f : I \to F$ lokálisan θ-integrálható függvény. Legyen $c \in I$ rögzített pont, és tekintsük a

$$p : I \to F; \quad t \mapsto \int\limits_c^t f \ \mathrm{d}\theta$$

függvényt. Ekkor minden $t \in I$ pontban a p függvény *balról folytonos*, tehát $\lim\limits_{t-0} p = p(t)$, és *létezik a jobboldali határértéke* is (vagyis p *reguláris függvény*), továbbá

$$\lim_{t+0} p = p(t) + \theta(\{t\})f(t)$$

teljesül.

2. (*A parciális integrálás általánosítása.*)
a) Legyenek $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ olyanok, hogy $a < b$, valamint F, G, H Banach-terek, és $u : F \times G \to H$ folytonos bilineáris operátor. Ha $f :]a,b[\to F$ és $g :]a,b[\to G$ olyan folytonosan differenciálható függvények, hogy az $u(\mathrm{D}f, g) :]a,b[\to H$ és $u(f, \mathrm{D}g) :]a,b[\to H$ függvények $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálhatók $]a,b[$-n, akkor léteznek a $\lim\limits_a u(f,g)$ és $\lim\limits_b u(f,g)$ határértékek, és fennáll az

$$\int\limits_{]a,b[} u(\mathrm{D}f, g) \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \lim_b u(f,g) - \lim_a u(f,g) - \int\limits_{]a,b[} u(f, \mathrm{D}g) \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

egyenlőség.
b) Legyenek $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, F, G, H Banach-terek, $u : F \times G \to H$ folytonos bilineáris operátor, és $f : I \to F$ és $g : I \to G$ lokálisan $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható függvények. Minden $c \in I$ pontra értelmezzük az

$$f_c : I \to F; \quad t \mapsto \int\limits_c^t f \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}},$$

$$g_c : I \to F; \quad t \mapsto \int\limits_c^t g \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

függvényeket. Ekkor minden $c \in I$ esetén az

$$u(f, g_c) : I \to H; \quad t \mapsto u(f(t), g_c(t)),$$
$$u(f_c, g) : I \to H; \quad t \mapsto u(f_c(t), g(t))$$

függvények lokálisan $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálhatóak, és minden $a, b \in I$ esetén

$$\int\limits_a^b u(f, g_c) \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = u(f_c(b), g_c(b)) - u(f_c(a), g_c(a)) - \int\limits_a^b u(f_c, g) \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

teljesül.

c) Vizsgáljuk meg az elemi parciális integrálás tételének, valamint a fenti a) és b) állítások logikai kapcsolatait!

(*Útmutatás.* a) A feltevés alapján az $u(f,g) :]a,b[\to H$ függvény folytonosan differenciálható és a deriváltfüggvénye $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható, mert egyenlő az $u(\mathrm{D}f,g)+u(f,\mathrm{D}g)$ függvénnyel. Ezért a Newton–Leibniz-formula általános alakját alkalmazva az $u(f,g)$ függvényre kapjuk, hogy léteznek a $\lim_a u(f,g)$ és $\lim_b u(f,g)$ határértékek, és fennáll az

$$\int\limits_{]a,b[} u(\mathrm{D}f,g)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} + \int\limits_{]a,b[} u(f,\mathrm{D}g)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{]a,b[} \mathrm{D}(u(f,g))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \lim_b u(f,g) - \lim_a u(f,g)$$

egyenlőség. (Figyeljük meg, hogy itt *nem elég* azt feltenni, hogy a $\mathrm{D}(u(f,g))$ deriváltfüggvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható legyen!)

b) Legyenek $a,b\in I$ olyanok, hogy $a\le b$. Az f és g függvényekre lokális $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálhatósága és a **31.3.3.** gyakorlat alapján

$$\chi_{[a,b[\times[a,b[}.(u\circ(f\times g))^\circ = u\circ\Big(\big(\chi_{[a,b[}.f^\circ\big)\times\big(\chi_{[a,b[}.g^\circ\big)\Big) \in \mathscr{L}^1_H(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}}\otimes\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}}\otimes\mu_{\mathbb{R}}),$$

továbbá fennállnak a következő egyenlőségek

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_{[a,b[\times[a,b[}.u\circ(f\times g)^\circ\ \mathrm{d}(\mu_{\mathbb{R}}\otimes\mu_{\mathbb{R}}) = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} u\circ\Big(\big(\chi_{[a,b[}.f^\circ\big)\times\big(\chi_{[a,b[}.g^\circ\big)\Big)\ \mathrm{d}(\mu_{\mathbb{R}}\otimes\mu_{\mathbb{R}}) =$$

$$= u\Big(\int\limits_R \chi_{[a,b[}.f^\circ\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}, \int\limits_R \chi_{[a,b[}.g^\circ\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}\Big) = u\Big(\int_a^b f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}, \int_a^b g\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}\Big) = u(f_a(b),g_a(b)).$$

Nyilvánvaló, hogy ha

$$T^-(a,b) := \{(t,t')\in[a,b[\times[a,b[\ \mid t'<t\},\quad T^+(a,b) := \{(t,t')\in[a,b[\times[a,b[\ \mid t<t'\},$$
$$D(a,b) := \{(t,t')\in[a,b[\times[a,b[\ \mid t=t'\},$$

akkor $[a,b[\times[a,b[= T^-(a,b)\cup T^+(a,b)\cup D(a,b)$. Ezek a halmazok páronként diszjunktak és $\mu_{\mathbb{R}}\otimes\mu_{\mathbb{R}}$-integrálhatók, ezért a

$$\chi_{T^-(a,b)}.(u\circ(f\times g))^\circ,\quad \chi_{T^+(a,b)}.(u\circ(f\times g))^\circ,\quad \chi_{D(a,b)}.(u\circ(f\times g))^\circ$$

függvények elemei az $\mathscr{L}^1_H(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}}\otimes\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}}\otimes\mu_{\mathbb{R}})$ függvénytérnek. Valóban, a $T^-(a,b)$ halmaz részhalmaza $[a,b[\times[a,b[$-nek, tehát

$$\chi_{T^-(a,b)}.(u\circ(f\times g))^\circ = \chi_{T^-(a,b)}.\Big(\chi_{[a,b[\times[a,b[}.(u\circ(f\times g))^\circ\Big),$$

és itt $\chi_{T^-(a,b)}.(u\circ(f\times g))^\circ$ korlátos $\mu_{\mathbb{R}}\otimes\mu_{\mathbb{R}}$-mérhető (sőt integrálható) függvény, és a **32.9.2.** gyakorlat szerint korlátos mérhető skaláris függvény szorzata integrálható függvénnyel szintén integrálható. A másik két halmaz esetében hasonló érvelést alkalmazhatunk.

A Lebesgue–Fubini-tételt alkalmazva kapjuk, hogy teljesülnek a következő (i) és (ii) állítások.

(i) $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\chi_{T^-(a,b)}(t,\cdot).u(f^\circ(t), g^\circ(\cdot)) \in \mathscr{L}^1_H(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, és az $\mathbb{R}$-ben $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt értelmezett

$$\mathbb{R} \rightarrowtail H; \quad t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \chi_{T^-(a,b)}(t,t').u(f^\circ(t), g^\circ(t'))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t')$$

függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható és

$$\int_{[a,b[\times[a,b[} \chi_{T^-(a,b)}.(u\circ(f\times g))^\circ\ \mathrm{d}(\mu_{\mathbb{R}}\otimes\mu_{\mathbb{R}}) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \chi_{T^-(a,b)}(t,t').u(f^\circ(t), g^\circ(t'))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \Big) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

(ii) $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem minden $t' \in \mathbb{R}$ esetén $\chi_{T^+(a,b)}(\cdot,t').u(f^\circ(\cdot), g^\circ(t')) \in \mathscr{L}^1_H(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, és az $\mathbb{R}$-ben $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt értelmezett

$$\mathbb{R} \rightarrowtail H; \quad t' \mapsto \int_{\mathbb{R}} \chi_{T^+(a,b)}(t,t').u(f^\circ(t), g^\circ(t'))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható és

$$\int_{[a,b[\times[a,b[} \chi_{T^+(a,b)}.(u\circ(f\times g))^\circ\ \mathrm{d}(\mu_{\mathbb{R}}\otimes\mu_{\mathbb{R}}) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \chi_{T^+(a,b)}(t,t').u(f^\circ(t), g^\circ(t'))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) \Big) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t').$$

Ugyanakkor, $(t,t') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ esetén $\chi_{T^-(a,b)}(t,t') = \chi_{[a,b[\times[a,t[}(t,t')$, valamint $\chi_{T^+(a,b)}(t,t') = \chi_{[a,t'[\times[a,b[}(t,t')$. Ha $t \in [a,b[$, akkor az $u(f(t),\cdot) : G \to H$ leképezés folytonos lineáris operátor, ezért

$$\chi_{[a,b[}(t).u(f(t), g_a(t)) = u\Big(f(t), \chi_{[a,b[}(t).\int_a^t g\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}\Big) =$$
$$= u\Big(f^\circ(t), \chi_{[a,b[}(t).\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,t[}.g^\circ\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}\Big) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[\times[a,t[}(t,t')u(f^\circ(t), g^\circ(t'))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{T^-(a,b)}(t,t').u(f^\circ(t), g^\circ(t'))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t'),$$

tehát *minden* $\mathbb{R} \ni t$-re $\chi_{T^-(a,b)}(t,\cdot).u(f^\circ(t), g^\circ(\cdot)) \in \mathscr{L}^1_H(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ és (i) alapján az

$$\mathbb{R} \to H; \quad t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \chi_{T^-(a,b)}(t,t').u(f^\circ(t), g^\circ(t'))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t')$$

függvény, vagyis a $\chi_{[a,b[}.u(f, g_a) : I \to H$ leképezés $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható, és

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_{T^-(a,b)}.(u\circ(f\times g))^\circ\ \mathrm{d}(\mu_{\mathbb{R}}\otimes\mu_{\mathbb{R}}) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}.u(f, g_a)^\circ\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_a^b u(f, g_a)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ha $t' \in [a,b[$, akkor az $u(\cdot, g(t')) : F \to H$ leképezés folytonos lineáris operátor, ezért

$$\chi_{_{[a,b[}}(t').u(f_a(t'), g(t')) = u\Big(\chi_{_{[a,b[}}(t'). \int\limits_a^{t'} f \; d\mu_{_\mathbb{R}}, g(t')\Big) =$$

$$= u\Big(\chi_{_{[a,b[}}(t'). \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{_{[a,t'[}}.f^\circ \; \mathrm{d}\mu_{_\mathbb{R}}, g^\circ(t')\Big) = \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{_{[a,t'[\times[a,b[}}(t,t')u(f^\circ(t'), g^\circ(t')) \; \mathrm{d}\mu_{_\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{_{T^+(a,b)}}(t,t').u(f^\circ(t), g^\circ(t')) \; \mathrm{d}\mu_{_\mathbb{R}}(t),$$

tehát *minden* $\mathbb{R} \ni t'$-re $\chi_{_{T^+(a,b)}}(\cdot, t').u(f^\circ(\cdot), g^\circ(t')) \in \mathscr{L}^1_H(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \mu_{_\mathbb{R}})$ és az (i) alapján az

$$\mathbb{R} \to H; \quad t \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{_{T^+(a,b)}}(t,t').u(f^\circ(t), g^\circ(t')) \; \mathrm{d}\mu_{_\mathbb{R}}(t)$$

függvény, vagyis a $\chi_{_{[a,b[}}.u(f_a, g) : I \to H$ leképezés $\mu_{_\mathbb{R}}$-integrálható, és

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_{_{T^+(a,b)}}.(u \circ (f \times g))^\circ \; \mathrm{d}(\mu_{_\mathbb{R}} \otimes \mu_{_\mathbb{R}}) = \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{_{[a,b[}}.u(f_a, g)^\circ \; \mathrm{d}\mu_{_\mathbb{R}} = \int\limits_a^b u(f_a, g) \; \mathrm{d}\mu_{_\mathbb{R}}.$$

Könnyen belátható, hogy a $D(a,b)$ halmaz $\mu_{_\mathbb{R}} \otimes \mu_{_\mathbb{R}}$-eltűnő halmaz, tehát $\chi_{_{[a,b[\times[a,b[}} = \chi_{_{T^-(a,b)}} + \chi_{_{T^+(a,b)}}$ teljesül az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon $\mu_{_\mathbb{R}} \otimes \mu_{_\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt, vagyis

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_{_{[a,b[\times[a,b[}}(u \circ (f \times g))^\circ \; \mathrm{d}(\mu_{_\mathbb{R}} \otimes \mu_{_\mathbb{R}}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_{_{T^-(a,b)}}(u \circ (f \times g))^\circ \; \mathrm{d}(\mu_{_\mathbb{R}} \otimes \mu_{_\mathbb{R}}) + \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_{_{T^+(a,b)}}(u \circ (f \times g))^\circ \; \mathrm{d}(\mu_{_\mathbb{R}} \otimes \mu_{_\mathbb{R}}).$$

Ezzel megmutattuk, hogy $a, b \in I$ és $a \leq b$ esetén a $\chi_{_{[a,b[}}.u(f, g_a), \; \chi_{_{[a,b[}}.u(f_a, g) : I \to H$ leképezések $\mu_{_\mathbb{R}}$-integrálhatók és teljesül az

$$u(f_a(b), g_a(b)) = \int\limits_a^b u(f, g_a) \; \mathrm{d}\mu_{_\mathbb{R}} + \int\limits_a^b u(f_a, g) \; \mathrm{d}\mu_{_\mathbb{R}} \tag{$*$}$$

egyenlőség.

Ha $a, c \in I$, akkor $f_c = f_a - f_a(c)$ és $g_c = g_a - g_a(c)$, ezért rögzített $c \in I$ esetén minden $a, b \in I$, $a \leq b$ esetén

$$\chi_{_{[a,b[}}.u(f, g_c) = \chi_{_{[a,b[}}.u(f, g_a) - \chi_{_{[a,b[}}.u(f, g_a(c)) = \chi_{_{[a,b[}}.u(f, g_a) - u(\chi_{_{[a,b[}}.f, g_a(c)),$$

és az előzőek szerint a $\chi_{_{[a,b[}}.u(f, g_a)$ függvény $\mu_{_\mathbb{R}}$-integrálható, mert f lokálisan $\mu_{_\mathbb{R}}$-integrálható, tehát az $u(\chi_{_{[a,b[}}.f, g_a(c)) = u(\cdot, g_a(c)) \circ (\chi_{_{[a,b[}}.f)$ függvény is $\mu_{_\mathbb{R}}$-integrálható, ugyanis az $u(\cdot, g_a(c)) : F \to H$ leképezés folytonos lineáris operátor. Ezért minden $c \in I$ esetén az $u(f, g_c) : I \to H$ függvény lokálisan $\mu_{_\mathbb{R}}$-integrálható, és hasonlóan kapjuk, hogy az $u(f_a, g) : I \to H$ függvény is lokálisan $\mu_{_\mathbb{R}}$-integrálható.

Végül, ha $a, c \in I$, akkor az $f_c = f_a - f_a(c)$ és $g_c = g_a - g_a(c)$ helyettesítéseket elvégezve a fenti integrál-formulákban kapjuk az

$$u(f_c(b), g_c(b)) - u(f_c(a), g_c(a)) = \int_a^b u(f, g_c)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} + \int_a^b u(f_c, g)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

egyenlőséget.

c) A parciális integrálás elemi tétele következik az a) állításból. Azonban az a) és b) kijelentések logikailag nem hasonlíthatók össze, de b)-ből szintén következik a parciális integrálás elemi tétele.)

3. Minden $x \in]-1, 1]$ valós számra

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

teljesül, és a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N};\ k \geq 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$ hatványfüggvény-sor a $]-1, 1]$ intervallumon *lokálisan egyenletesen* konvergens, továbbá a $]-1, 1[$ intervallumon *pontonként abszolút konvergens.*

(*Útmutatás.* Ugyanúgy indítunk, mint a **ANA** 3.17.2. állítás bizonyításában, tehát megállapítjuk, hogy az $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ halmazon triviálisan érvényes minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re a

$$\frac{1}{1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k + (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n}{1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$$

függvényegyenlőség. Ugyanakkor a $]-1, \rightarrow[$ intervallumon teljesülnek a

$$\mathrm{D}\Big(\log \circ (1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}})\Big) = \frac{1}{1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}},$$

$$\mathrm{D}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{k+1}\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$$

egyenlőségek, ezért minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetében, az

$$\mathrm{R}_n := \log \circ (1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{k+1}$$

függvényre a $]-1, \rightarrow[$ intervallumon teljesül a

$$\mathrm{D}\mathrm{R}_n = (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n}{1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$$

egyenlőség. Azonban most nem a Lagrange-féle középértéktételt alkalmazzuk az R_n függvényre, hanem a Newton–Leibniz-formulát, amely szerint minden $x \in]-1, \rightarrow[$ pontra és $\mathbb{N}^* \ni n$-re

$$\int_0^x (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n}{1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \mathrm{R}_n(x) - \mathrm{R}_n(0) = \log(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1},$$

vagy ami ugyanaz

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\, d\mu_{\mathbb{R}}.$$

Minden $x \in]-1, \to[$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén könnyen kapjuk a következő becsléseket

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\, d\mu_{\mathbb{R}} \right| \leq \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & ; \text{ha } x \geq 0, \\[2ex] \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)} & ; \text{ha } x \in]-1, 0[. \end{cases}$$

Ebből adódik, hogy minden $]-1, 1] \ni r$-re a $\sum_{k \in \mathbb{N};\ k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$ hatványfüggvény-sor *egyenletesen konvergens* az $[r, 1]$ intervallumon, és az összegfüggvénye egyenlő a $\log \circ (1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ függvénnyel.)

4. Minden $x \in [-1, 1]$ valós számra

$$\mathrm{Arctg}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

teljesül, és a $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{2k+1} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k+1}$ hatványfüggvény-sor a $[-1, 1]$ intervallumon *egyenletesen konvergens*, továbbá a $]-1, 1[$ intervallumon *pontonként abszolút konvergens*. Fennáll a

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

egyenlőség.

(*Útmutatás.* Ugyanúgy indítunk, mint a **ANA** 3.17.5. állítás bizonyításában, tehát megállapítjuk, hogy minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re az $\mathbb{R}$ halmazon érvényes az

$$\frac{1}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k} + (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2n}}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$$

függvényegyenlőség. Minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re fennállnak a

$$\mathrm{D}(\mathrm{Arctg}) = \frac{1}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2},$$

$$\mathrm{D}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k+1} \Big) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k}$$

egyenlőségek, ezért az

$$\mathrm{R}_n := \mathrm{Arctg} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k+1}$$

függvényre az $\mathbb{R}$ halmazon teljesül a

$$\mathrm{DR}_n = (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2n}}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$$

összefüggés. Azonban most nem a Lagrange-féle középértéktételt alkalmazzuk az R_n függvényre, hanem a Newton–Leibniz-formulát, amely szerint $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\int_0^x (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2n}}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \mathrm{R}_n(x) - \mathrm{R}_n(0) = \mathrm{Arctg}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1},$$

vagy ami ugyanaz

$$\mathrm{Arctg}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2n}}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Minden $x \in \mathbb{R}$ pontra és $\mathbb{N}^* \ni n$-re könnyen igazolható a következő becslés

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2n}}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1},$$

amiből adódik, hogy

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \mathrm{Arctg}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right| \leq \frac{1}{2n+1},$$

és ebből már következik az állítás.)

5. Igazoljuk a **3**. és **4**. gyakorlatok állításait az integrálmaradéktagos Taylor-formula alkalmazásával is!

6. (*Binomiális függvénysorok.*) Legyen $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\binom{z}{k} := \begin{cases} \dfrac{z(z-1)...(z-k+1)}{k!} & ; \text{ha } k > 0, \\ 1 & ; \text{ha } k = 0. \end{cases}$$

Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{z}{k} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$$

hatványfüggvény-sort *binomiális függvénysornak* nevezzük.

a) Minden $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ és $x \in]-1, \to[$ esetén

$$(1+x)^z = \sum_{k=0}^{m} \binom{z}{k} x^k + \mathrm{R}_m(z,x)$$

teljesül, ahol

$$\mathrm{R}_m(z,x) = z\binom{z-1}{m} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^m (1+t)^{z-1}\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t),$$

továbbá teljesülnek a következő becslések:

(i) ha $\Re(z) \neq 0$, akkor

$$|\mathrm{R}_m(z,x)| \leq \Big|\frac{z}{\Re(z)}\binom{z-1}{m}x^m\Big((1+x)^{\Re(z)}-1\Big)\Big|;$$

(ii) ha $\Re(z) = 0$, akkor

$$|\mathrm{R}_m(z,x)| \leq \Big|z\binom{z-1}{m}x^m\log(1+x)\Big|.$$

b) Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\binom{z}{k}\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$$

binomiális függvénysor a $]-1,1[$ intervallumon *lokálisan egyenletesen* és *pontonként abszolút* konvergens, valamint minden $x \in]-1,1[$ valós számra

$$(1+x)^z = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{z}{k}x^k$$

teljesül.

(*Útmutatás.* a) Ha $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ és $x \in]-1,\to[$, akkor az $R(z,x)$ maradék konkrét alakja az integrálmaradékos Taylor-formulából következik. Az (i) és (ii) becslések ebből az integrálalakból egyszerűen származtathatók, figyelembe véve azt, hogy ha $x \geq 0$ és $t \in [0,x]$, *vagy* $x \in]-1,0]$ és $t \in [x,0]$, akkor $\Big|\dfrac{x-t}{1+t}\Big| \leq |x|$.

b) Legyen $z \in \mathbb{C}$ rögzített. Minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\binom{z-1}{m} = (-1)^m \prod_{j=1}^{m}\Big(1-\frac{z}{j}\Big),$$

amiből következik, hogy

$$\Big|\binom{z-1}{m}\Big| \leq \prod_{j=1}^{m}\Big(1+\Big|\frac{z}{j}\Big|\Big).$$

Legyen $r \in]0,1[$ rögzített valós szám, és $r' \in]r,1[$ tetszőleges. Az r'-höz vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $1+\dfrac{|z|}{N} < \dfrac{1}{r'}$. Ekkor a fenti egyenlőtlenség szerint minden $x \in]-r,r[$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén, ha $m > N$, akkor

$$\Big|\binom{z-1}{m}x^m\Big| \leq \Big(\prod_{j=1}^{N}\Big(1+\frac{|z|}{j}\Big)\Big)|x|^N\Big(\frac{r}{r'}\Big)^{m-N}.$$

Ebből, és az a) pont (i) és (ii) egyenlőtlenségéből kapjuk, hogy $\Re(z) \neq 0$ esetén minden $m > N$ természetes számra

$$\sup_{x\in[-r,r]}|\mathrm{R}_m(z,x)| \leq \Big(\prod_{j=1}^{N}\Big(1+\frac{|z|}{j}\Big)\Big)r^N\Big(\frac{r}{r'}\Big)^{m-N}\Big|\frac{z}{\Re(z)}\Big|\sup_{x\in[-r,r]}\Big|(1+x)^{\Re(z)}-1\Big|,$$

és $\Re(z) = 0$ esetén minden $m > N$ természetes számra

$$\sup_{x\in[-r,r]} |\mathrm{R}_m(z,x)| \le \Big(\prod_{j=1}^{N} \Big(1 + \frac{|z|}{j}\Big)\Big) r^N \Big(\frac{r}{r'}\Big)^{m-N} |z| \sup_{x\in[-r,r]} |\log(1+x)|,$$

tehát $\lim\limits_{m\to\infty} \Big(\sup\limits_{x\in[-r,r]} |\mathrm{R}_m(z,x)|\Big) = 0$, vagyis a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \binom{z}{k} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$ binomiális függvénysor egyenletesen konvergál az $(1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}})^z$ függvényhez minden $[-r, r]$ alakú intervallumon, ahol $r \in]0, 1[$.)

7. Legyen $z \in \mathbb{C}$.

a) Ha $\Re(z) \le -1$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{z}{k} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$$

binomiális függvénysor sem a -1, sem a $+1$ pontban *nem konvergens*.

b) Ha $\Re(z) > -1$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{z}{k} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$$

binomiális függvénysor a $] - 1, 1]$ intervallumon *lokálisan egyenletesen konvergens*, és minden $x \in] - 1, 1]$ valós számra

$$(1 + x)^z = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} x^k$$

teljesül. Speciálisan, a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \binom{z}{k}$ számsor konvergens $\mathbb{C}$-ben és $2^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k}$.

c) Ha $\Re(z) \in] - 1, 0[$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{z}{k} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$$

binomiális függvénysor a -1 pontban *nem konvergens*.

d) Ha $\Re(z) > 0$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{z}{k} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$$

binomiális függvénysor a $[-1, 1]$ intervallumon *normálisan konvergens*, és minden $x \in [-1, 1]$ valós számra

$$(1 + x)^z = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} x^k$$

teljesül. Speciálisan, a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \binom{z}{k}$ és $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \binom{z}{k} (-1)^k$ számsorok *abszolút konvergensek* $\mathbb{C}$-ben, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} = 2^z, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} (-1)^k = 0.$$

(*Útmutatás.* Minden $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$ és $x \in]-1, \to[$ esetén meg kell vizsgálni a **6**. gyakorlat a) pontjában értelmezett $\mathrm{R}_m(z,x)$ maradék viselkedését $m \to \infty$ esetén, felhasználva az $|\mathrm{R}_m(z,x)|$-re igazolt felső becsléseket.)

8. Minden $x \in]-1, 1[$ valós számra

$$\mathrm{Arcsin}(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

továbbá a

$$\sum_{k \in \mathbb{N};\ k \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)} \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k+1}}{2k+1}$$

függvénysor a $]-1, 1[$ intervallumon *lokálisan egyenletesen* és *pontonként abszolút* konvergens. Fennáll a

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$$

egyenlőség. Mutassuk meg, hogy

$$0 < \pi - 3 - 6\sum_{k=1}^{13} \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} < 6 \cdot 10^{-10}.$$

Ebből következik, hogy 9 tizedesjegy pontossággal írható, hogy

$$\pi = 3.141592653...$$

(*Útmutatás.* A $z := -1/2$ exponenshez tartozó binomiális sorfejtés (**6**. gyakorlat) alapján minden $x \in]-1, 1[$ pontra és $\mathbb{N}^* \ni m$-re

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^{2k} + \mathrm{R}_m(-1/2, -x^2),$$

ahol R_m ugyanaz a maradéktag-függvény, amit a **6**. gyakorlat útmutatásában bevezettünk. Erre az R_m függvényre (szintén az előző gyakorlat útmutatása alapján) teljesül az, hogy minden $]-1, 1[\ni x$-re

$$0 \leq \mathrm{R}_m(-1/2, -x^2) \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2m+1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2m)} \frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A $]-1, 1[$ intervallumon $\mathrm{D}(\mathrm{Arcsin}) = \left(1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2\right)^{-1/2}$ teljesül, ezért minden $\mathbb{N}^* \ni m$-re és $]-1, 1[\ni x$-re

$$\mathrm{Arcsin}(x) = x + \sum_{k=1}^{m} \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{r}_m(x),$$

ahol r_m-re érvényes a következő becslés: minden $x \in]-1, 1[$ pontra

$$|\mathrm{r}_m(x)| \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2m)} \frac{|x|^{2m+1}}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{|x|^{2m+1}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ebből kapjuk, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k)} \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k+1}}{2k+1}$ függvénysor minden olyan $[-r, r]$ alakú intervallumon egyenletesen konvergens, amelyre $r \in [0, 1[$.)

9. Legyen minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$x_m := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \log(m).$$

Ekkor az $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ valós számsorozat *monoton fogyó*, és minden $\mathbb{N}^* \ni m$-re

$$\frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{m}\Big) \leq x_m \leq 1.$$

(A $\gamma := \lim\limits_{m\to\infty} x_m$ számot *Euler-Mascheroni állandónak* nevezzük. Ennek értéke 10 tizedesjegy pontossággal: 0.5772156649....)

(*Útmutatás.* Az $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sororzat monoton fogyása azzal ekvivalens, hogy minden $\mathbb{N}^* \ni m$-re $e \leq \Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^{m+1}$. Ez viszont azzal egyenértékű, hogy minden $m, m' \in \mathbb{N}^*$ esetén $\Big(1 + \frac{1}{m'}\Big)^{m'} \leq \Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^{m+1}$, ami azonnal következik a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből, ha azt felírjuk arra a $(z_k)_{1\leq k\leq m+m'+1}$ rendszerre, amelyre

$$z_k := \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m'} & ;\ \text{ha } 1 \leq k \leq m', \\[2ex] \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{m}} & ;\ \text{ha } m' < k \leq m + m' + 1. \end{cases}$$

Az állításban szereplő egyenlőtlenség bizonyításához felhasználhatjuk azt, hogy $k \in \mathbb{N}^*$ esetén az $1/\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$ függvény *konvex* a $[k, k+1]$ intervallumon, ezért minden $\mathbb{N} \ni m$-re a Newton–Leibniz-formula szerint

$$\log(m) = \int_1^m \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}}\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}}\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\Big)$$

teljesül.)

10. Parciális integrálással igazoljuk, hogy minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m}(x)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2m)} \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1}(x)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2m)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2m+1)}.$$

Ezek felhasználásával igazoljuk a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2m)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2m-1)} = \sqrt{\pi}$$

Wallis-formulát!

(*Útmutatás.* A Wallis-formula bizonyításához legyen minden $\mathbb{N} \ni m$-re

$$s_m := \int_0^{\pi/2} \sin^m(x)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x).$$

A $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat *monoton fogyó*, és mindegyik tagja *nagyobb* 0-nál. Ismerve az s_{2m} és s_{2m+1} számok értékét

$$s_{2m}^2 \geq s_{2m}s_{2m+1} = \frac{\pi/2}{2m+1} \geq s_{2m+2}^2$$

adódik, ezért $m \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2m}}} \geq s_{2m}\sqrt{2m} \geq \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{2m}}},$$

tehát $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m}\sqrt{2m} = \sqrt{\pi/2}$, amiből következik a Wallis-formula.)

11. Bizonyítsuk be a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m!}{\left(\dfrac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}} = 1$$

Stirling-formulát!

(*Útmutatás.* Minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen

$$\delta_m := \log\left(\frac{m!}{\left(\dfrac{m}{e}\right)^m \sqrt{m}}\right).$$

Ha $m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $m \geq 2$, akkor

$$\delta_m = \sum_{k=1}^{m} \log(k) - \frac{1}{2}\log(m) - m(\log(m) - 1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \log(k) - \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} \log\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2}\log(m) + 1 = m - \sum_{k=1}^{m-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Most felhasználjuk azt, hogy minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\frac{2}{2k+1} \leq \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{2k+1}{2k(k+1)}.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket úgy kapjuk, hogy az $1/\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$ függvény $\mathbb{R}_+^*$-on való konvexitását felhasználva a

$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log(k+1) - \log(k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

integrált egy alkalmasan választott trapéz területével becsüljük felülről, és két alkalmasan választott trapéz területének összegével becsüljük alulról. Ebből következik, hogy minden $\mathbb{N}^* \ni m$-re

$$\frac{1}{4}\Big(3+\frac{1}{m}\Big) \le \delta_m \le 1.$$

Ugyanakkor a $(\delta_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sorozat *konvergens* $\mathbb{R}$-ben. Ennek bizonyításához felhasználjuk azt, hogy ha minden $\mathbb{N}^* \ni k$-ra

$$r_k := \log\Big(1+\frac{1}{k}\Big) - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3},$$

akkor az $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ valós sorozatra $\lim\limits_{k\to\infty} k^3 r_k = 0$ teljesül. Ez könnyen belátható, ha a $\log\circ(1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ függvényre felírjuk a harmadrendű Taylor-formulát. Tehát $m \in \mathbb{N}$ és $m \ge 2$ esetén

$$\delta_m = m - \sum_{k=1}^{m-1}\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\log\Big(1+\frac{1}{k}\Big) = 1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{m-1}\Big(k+\frac{1}{2}\Big)r_k,$$

amiből látszik, hogy a $(\delta_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és a $\delta := \lim\limits_{m\to\infty}\delta_m$ számra $\dfrac{3}{4} \le \delta \le 1$ teljesül. Világos továbbá, hogy minden $\mathbb{N}^* \ni m$-re

$$m! = e^{\delta_m}\sqrt{m}\Big(\frac{m}{e}\Big)^m, \qquad e^{\delta} = \lim_{m\to\infty}\frac{m!}{\Big(\dfrac{m}{e}\Big)^m\sqrt{m}}.$$

Végül, a δ szám meghatározásához alkalmazzuk a Wallis-formulát (**11**. gyakorlat), amely szerint

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{2^{2m}(m!)^2}{((2m)!)^2} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{2\delta_m}}{e^{\delta_{2m}}} = \frac{e^{\delta}}{\sqrt{2}}$$

teljesül.)

12. A Stirling-formula alkalmazásával igazoljuk a következőket:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{m}}{4^m}\binom{2m}{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad \lim_{m\to\infty}\sqrt[m^2]{m!} = 1,$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{\sqrt[m]{m!}} = e, \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{(2m-1)!!}{\sqrt{2}\Big(\dfrac{2m}{e}\Big)^m} = 1,$$

ahol $m \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$(2m-1)!! := \prod_{k=1}^{m}(2k-1).$$

13. Bizonyítsuk be, hogy a π szám *irracionális*!

(*Útmutatás.* Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük olyan $p, q \in \mathbb{N}^*$ számok létezését, amelyekre $\pi = p/q$, valamint p és q relatív prímek. Legyen minden $\mathbb{N} \ni m$-re

$$c_m := q^m \int_0^{\pi} \frac{(t(\pi-t))^m}{m!}\sin(t)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

Két egymást követő parciális integrálással kapjuk, hogy minden $m \geq 2$ természetes számra

$$c_m = 2q(2m-1)c_{m-1} - p^2 c_{m-2}$$

teljesül, továbbá könnyen kiszámítható, hogy $c_0 = 2$ és $c_1 = 4q$. Ebből látszik, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén c_m *egész szám*. Ugyanakkor a definíció szerint minden $\mathbb{N} \ni m$-re $c_m > 0$, és a Lebesgue-tétel alapján $\lim\limits_{m\to\infty} c_m = 0$, ami lehetetlen.)

14. Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén vezessük be a

$$f_z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto \frac{1}{x^z}$$

függvényt.

a) Ha *létezik* olyan $a \in \mathbb{R}_+^*$, hogy az f_z függvény Lebesgue-integrálható a $]0,a[$ intervallumon (azaz $\chi_{]0,a[}(f_z)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$), akkor $\Re(z) < 1$. Megfordítva, ha $\Re(z) < 1$, akkor *minden* $a \in \mathbb{R}_+^*$ esetén az f_z függvény Lebesgue-integrálható a $]0,a[$ intervallumon.

b) Ha *létezik* olyan $a \in \mathbb{R}_+^*$, hogy az f_z függvény Lebesgue-integrálható az $]a,\to[$ intervallumon (azaz $\chi_{]a,\to[}(f_z)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$), akkor $\Re(z) > 1$. Megfordítva, ha $\Re(z) < 1$, akkor *minden* $a \in \mathbb{R}_+^*$ esetén az f_z függvény Lebesgue-integrálható az $]a,\to[$ intervallumon.

(*Útmutatás.* Legyen $z \in \mathbb{C}$ rögzített.

a) Legyen $a \in \mathbb{R}_+^*$ *tetszőleges*, és legyen $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó zérussorozat $\mathbb{R}_+^*$-ban, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $a_m < a$. Legyen minden $\mathbb{N} \ni m$-re $g_m := \chi_{[a_m,a[}.(f_z)^\circ$. Ekkor $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$-ben, amely pontonként konvergál a $\chi_{]0,a[}.(f_z)^\circ$ függvényhez az $\mathbb{R}$ halmazon mindenütt. Továbbá, minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $|g_m| = \chi_{[a_m,a[}.(f_{\Re(z)})^\circ$, tehát a $(|g_m|)_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, mindegyik tagja eleme $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$-nek, és $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} |g_m| = \chi_{]0,a[}.(f_{\Re(z)})^\circ$. A Newton–Leibniz-formula szerint minden $\mathbb{N} \ni m$-re

$$\|g_m\|_{\mu_{\mathbb{R}},1} := \int_{\mathbb{R}}^{*} |g_m| \, d\mu_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a_m,a[}.(f_{\Re(z)})^\circ \, d\mu_{\mathbb{R}} = \int_{a_m}^{a} f_{\Re(z)} \, d\mu_{\mathbb{R}},$$

és könnyen belátható, hogy

$$\int_{a_m}^{a} f_{\Re(z)} \, d\mu_{\mathbb{R}} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\Re(z)} - a_m^{1-\Re(z)}}{1-\Re(z)} & ;\text{ ha } \Re(z) \neq 1, \\ \log\Big(a/a_m\Big) & ;\text{ ha } \Re(z) = 1. \end{cases}$$

Ha $\Re(z) < 1$, akkor ebből

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|g_m\|_{\mu_{\mathbb{R}},1} = \frac{a^{1-\Re(z)}}{1-\Re(z)} < +\infty$$

következik, tehát a Levi-tétel alapján $\chi_{]0,a[}.(f_{\Re(z)})^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$ és minden $\mathbb{N} \ni m$-re $|g_m| \leq \chi_{]0,a[}.(f_{\Re(z)})^\circ$, ezért a Lebesgue-tétel szerint $\chi_{]0,a[}.(f_z)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$, vagyis az f_z függvény Lebesgue-integrálható a $]0,a[$ intervallumon.

Ha $\Re(z) \geq 1$, akkor $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|g_m\|_{\mu_{\mathbb{R}},1} = +\infty$, tehát a Levi-tétel alapján $\left|\chi_{]0,a[}.(f_z)^\circ\right| =$

$\chi_{]0,a[}.(f_{\Re(z)})^\circ \notin \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, ezért szükségképpen $\chi_{]0,a[}.(f_z)^\circ \notin \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, vagyis az f_z függvény nem Lebesgue-integrálható a $]0,a[$ intervallumon.

b) Ugyanúgy bizonyítunk, mint a)-ban, de itt az adott $a \in \mathbb{R}^*_+$ számhoz olyan $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatot veszünk $\mathbb{R}^*_+$-ban, amely nem korlátos $\mathbb{R}$-ben, és azt a $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot vizsgáljuk, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $g_m := \chi_{[a,a_m[}.(f_z)^\circ$.)

15. A sinc : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sinus cardinalis* függvényt úgy értelmezzük, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & ; \text{ha } x \neq 0, \\ 1 & ; \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ez a függvény *nem Lebesgue-integrálható* az $\mathbb{R}^*_+$ halmazon (ami azt jelenti, hogy $\chi_{\mathbb{R}^*_+}\operatorname{sinc} \notin \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$), de létezik sinc-nek az *improprius Lebesgue-integrálja* a 0 és $+\infty$ határok között, és

$$\int_0^{\to+\infty} \operatorname{sinc}\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \frac{\pi}{2}$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Ha $\chi_{\mathbb{R}^*_+}\operatorname{sinc} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, akkor $\chi_{\mathbb{R}^*_+}|\operatorname{sinc}| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, ezért

$$\int^*_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{R}^*_+} |\operatorname{sinc}|\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} < +\infty$$

lenne. Ezt viszont könnyen meg lehet cáfolni. Ugyanis minden $\mathbb{N} \ni k$-hoz létezik egyetlen olyan $x_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$, hogy $\operatorname{tg}(x_k) = x_k$ és az x_k pontban $|\operatorname{sinc}|$-nek maximuma van a $[k\pi, (k+1)\pi]$ intervallumon; ennek a maximumnak az értéke $\dfrac{1}{\sqrt{1+x_k^2}}$. A $|\operatorname{sinc}|$ függvény minden $\mathbb{N} \ni k$-ra *konkáv* a $[k\pi, (k+1)\pi]$ intervallumon, ezért minden $\mathbb{N} \ni m$-re

$$\int^*_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{R}^*_+} |\operatorname{sinc}|\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} \geq \int_0^{(m+1)\pi} |\operatorname{sinc}|\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \sum_{k=0}^{m} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\operatorname{sinc}|\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{\pi/2}{\sqrt{1+x_k^2}} \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{m} \frac{\pi/2}{\sqrt{1+(k+1)^2\pi^2}} \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{\pi/2}{\sqrt{2(k+1)^2\pi^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1}.$$

A harmonikus sor divergenciájából következik, hogy $\displaystyle\int^*_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{R}^*_+} |\operatorname{sinc}|\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = +\infty$.

Legyen $r \in \mathbb{R}^*_+$ rögzített, és tekintsük az

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto e^{-xy} \sin(x) \chi_{[0,r[\times[0,r[}(x,y)$$

függvényt, amely $\mu_{\mathbb{R}} \otimes \mu_{\mathbb{R}}$-integrálható. A Lebesgue–Fubini-tétel alapján

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-xy} \sin(x) \chi_{[0,r[\times[0,r[}(x,y)\ d(\mu_{\mathbb{R}} \otimes \mu_{\mathbb{R}})(x,y) =$$

$$= \int_0^r \Big(\int_0^r e^{-xy}\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(y) \Big) \sin(x)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \int_0^r \Big(\int_0^r e^{-xy} \sin(x)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) \Big) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(y).$$

Elemi számolással kapjuk, hogy minden $\mathbb{R}_+^* \ni x$-re

$$\int_0^r e^{-xy}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(y) = \frac{1-e^{-rx}}{x},$$

és minden $\mathbb{R}_+ \ni y$-ra

$$\int_0^r e^{-xy}\sin(x)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \frac{1-e^{-ry}(\cos(r)+y\cdot\sin(r))}{1+y^2}.$$

Ebből következik, hogy

$$\int_0^r \Big(\frac{1-e^{-rx}}{x}\Big)\sin(x)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \int_0^r \Big(\frac{1-e^{-ry}(\cos(r)+y\cdot\sin(r))}{1+y^2}\Big)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(y),$$

ami azt jelenti, hogy

$$\int_0^r \mathrm{sinc}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_0^r \Big(\frac{1}{1+y^2}\Big)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(y) + \int_0^r e^{-rx}\mathrm{sinc}(x)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) -$$
$$- \int_0^r \Big(\frac{e^{-ry}(\cos(r)+y\cdot\sin(r))}{1+y^2}\Big)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(y).$$

Ugyanakkor fennállnak a

$$\Big|\int_0^r e^{-rx}\mathrm{sinc}(x)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x)\Big| \le \int_0^r e^{-rx}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \frac{1-e^{-r^2}}{r} < \frac{1}{r},$$

$$\Big|\int_0^r \Big(\frac{e^{-ry}(\cos(r)+y\cdot\sin(r))}{1+y^2}\Big)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(y)\Big| \le \int_0^r \Big(\frac{e^{-ry}(1+y)}{1+y^2}\Big)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(y) \le \frac{1+\sqrt{2}}{2r}$$

egyenlőtlenségek, tehát

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-rx}\mathrm{sinc}(x)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \lim_{r\to+\infty}\int_0^r \Big(\frac{e^{-ry}(\cos(r)+y\cdot\sin(r))}{1+y^2}\Big)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(y) = 0.$$

Ugyanakkor a Newton–Leibniz-formula alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\int_0^r \Big(\frac{1}{1+y^2}\Big)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(y) = \mathrm{Arctg}(r).$$

A $\lim\limits_{r\to+\infty}\mathrm{Arctg}(r) = \dfrac{\pi}{2}$ egyenlőség folytán *létezik* a $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_0^r \mathrm{sinc}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$ határérték (vagyis létezik a sinc függvény improprius Lebesgue-integrálja a 0 és $+\infty$ határok között), továbbá $\int_0^{\to+\infty} \mathrm{sinc}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \lim\limits_{r\to+\infty}\int_0^r \mathrm{sinc}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \dfrac{\pi}{2}$ is teljesül.)

16. (*Az integrálmaradéktagos Taylor-formula általánosítása.*) Legyen E normált tér, F Banach-tér, $m \in \mathbb{N}$ és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Ha $\mathfrak{a}, x \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pontok, hogy az f függvény m-szer folytonosan differenciálható az $[\![\mathfrak{a}, x]\!]$ zárt szakasz minden pontjában, és $m+1$-szer folytonosan differenciálható az $]\!]\mathfrak{a}, x[\![$ nyílt szakasz minden pontjában, akkor a

$$]0,1[\to F; \quad t \mapsto (1-t)^m (\mathrm{D}^{m+1} f)(\mathfrak{a} + t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]})$$

függvénynek létezik az improprius Lebesgue-integrálja a 0 és 1 határok között, és

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}((x-\mathfrak{a})^{[k]}) + \frac{1}{m!} \int_{0\leftarrow}^{\to 1} (1-t)^m (\mathrm{D}^{m+1} f)(\mathfrak{a} + t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]}) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

(*Útmutatás.* Minden $k \in \mathbb{N}$ számra legyen

$$f_k :]0,1[\to \mathbb{K}; \quad t \mapsto \frac{(1-t)^k}{k!},$$

továbbá $k \leq m+1$ esetén

$$g_k :]0,1[\to F; \quad t \mapsto (\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a} + t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]}).$$

Világos, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k \in \mathrm{C}^1(]0,1[; \mathbb{K})$, és ha $k \leq m$, akkor $g_k \in \mathrm{C}^1(]0,1[; F)$, valamint $g_{m+1} \in \mathscr{C}(]0,1[; F)$. Továbbá, ha $k \in \mathbb{N}^*$, akkor $\mathrm{D}f_k = -f_{k-1}$, és $\mathrm{D}f_0 = 0$. Az is nyilvánvaló, hogy minden $k \leq m$ természetes számra $\mathrm{D}g_k = g_{k+1}$.

Legyenek $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ és $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ olyan sorozatok a $]0,1[$ intervallumban, amelyre $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ és $\lim_{j\to\infty} b_j = 1$. Most minden $k \leq m$ természetes szám esetében alkalmazva a parciális integrálás formuláját az f_k és g_k függvényekre, valamint az $\mathbb{K} \times F \to F$; $(\lambda, z) \mapsto \lambda.z$ folytonos bilineáris operátorra, kapjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni j$-re

$$\int_{a_j}^{b_j} f_k.(\mathrm{D}g_k) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = f_k(b_j).g_k(b_j) - f_k(a_j).g_k(a_j) - \int_{a_j}^{b_j} (\mathrm{D}f_k).g_k \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Minden $k \leq m$ természetes számra és $\mathbb{N} \ni j$-re vezessük be a

$$z_{j,k} := \int_{a_j}^{b_j} f_k.(\mathrm{D}g_k) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} \in F$$

vektort. A fentiek alapján világos, hogy $j, k \in \mathbb{N}$ és $0 < k \leq m$ esetén

$$z_{j,k} = f_k(b_j).g_k(b_j) - f_k(a_j).g_k(a_j) + z_{j,k-1},$$

hiszen

$$\int_{a_j}^{b_j} (\mathrm{D}f_k).g_k \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = -\int_{a_j}^{b_j} f_{k-1}.(\mathrm{D}g_{k-1}) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}},$$

továbbá minden $\mathbb{N} \ni j$-re

$$z_{j,0} = f(\mathfrak{a} + b_j.(x-\mathfrak{a})) - f(\mathfrak{a} + a_j.(x-\mathfrak{a})).$$

Ebből következik, hogy minden $j \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_{a_j}^{b_j} \frac{(1-t)^m}{m!}.(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]})\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \int_{a_j}^{b_j} f_m.(\mathrm{D}g_m)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =: z_{j,m} = z_{j,0} + \sum_{k=1}^{m}(z_{j,k} - z_{j,k-1}) =$$

$$= f(\mathfrak{a}+b_j.(x-\mathfrak{a})) - f(\mathfrak{a}+a_j.(x-\mathfrak{a})) + \sum_{k=1}^{m}(f_k(b_j).g_k(b_j) - f_k(a_j).g_k(a_j)).$$

Az itt látható utolsó kifejezésnek létezik határértéke $j \to \infty$ esetén, és a határérték egyenlő a

$$f(x) - f(\mathfrak{a}) - \sum_{k=1}^{m}\Big(\lim_{j\to\infty} f_k(a_j)\Big).\Big(\lim_{j\to\infty} g_k(a_j)\Big)$$

vektorral, és minden $1 \leq k \leq m$ természetes számra

$$\lim_{j\to\infty} f_k(a_j) = \frac{1}{k!},$$
$$\lim_{j\to\infty} g_k(a_j) = (\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})((x-\mathfrak{a})^{[m]}),$$

következésképpen létezik a

$$\lim_{j\to\infty}\int_{a_j}^{b_j} \frac{(1-t)^m}{m!}.(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]})\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

határérték, vagyis a

$$]0,1[\to F; \quad t \mapsto (1-t)^m(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]})$$

függvénynek létezik az improprius Lebesgue-integrálja a 0 és 1 határok között, és

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m}\frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}((x-\mathfrak{a})^{[k]}) + \frac{1}{m!}\int_{0\leftarrow}^{\to 1}(1-t)^m(\mathrm{D}^{m+1}f)(\mathfrak{a}+t.(x-\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[m+1]})\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

teljesül.)

17. Ha $E \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható halmaz, akkor minden $c \in [0, \mu_{\mathbb{R}}(E)]$ számhoz létezik olyan $E' \subseteq E$ $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható halmaz, hogy $\mu_{\mathbb{R}}(E') = c$.

(*Útmutatás.* Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a \leq b$ és $E \subseteq [a, b]$. Ekkor az

$$[a,b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int_a^x \chi_E\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

függvény folytonos, és a-hoz 0-t, valamint b-bez $\mu_{\mathbb{R}}(E)$-t rendel, így a Bolzano-tétel szerint minden $c \in [0, \mu_{\mathbb{R}}(E)]$ számhoz van olyan $x \in [a, b]$, amelyhez c-t rendel, és ekkor $E' := E \cap [0, x]$ olyan $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható részhalmaza E-nek, amelynek Lebesgue-mértéke egyenlő c-vel.)

3. fejezet

A helyettesítéses integrálás tétele

3.1. A helyettesítéses integrálás tételének alapformája egydimenziós esetben

3.1.1. Definíció. *Ha $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és F vektortér, akkor egy $f : \Omega \to F$ függvényt* **kompakt tartójúnak** *nevezünk, ha létezik olyan $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, amelyre $\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\} \subseteq K \subseteq \Omega$ teljesül.*

Nyilvánvaló, hogy ha F vektortér, akkor egy $f : \mathbb{R}^n \to F$ függvény pontosan akkor kompakt tartójú, ha a $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}}$ halmaz kompakt $\mathbb{R}^n$-ben. Ha viszont Ω valódi részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek és F vektortér, akkor egy $f : \Omega \to F$ függvény esetében vigyázni kell a $\mathrm{supp}(f)$ szimbólum használatára, mert ez jelentheti a $\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\} \subseteq \Omega$ halmaz lezártját $\mathbb{R}^n$-ben, és jelentheti ugyanezen halmaz lezártját az Ω metrikus altérben; ugyanakkor ez a két halmaz általában *nem egyenlő* (pontosabban: az utóbbi halmaz megegyezik az előbbi halmaznak és Ω-nak a metszetével). Ezért ilyen típusú függvények esetében kerüljük a $\mathrm{supp}(f)$ szimbólum használatát.

Megjegyezzük, hogy ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to F$ kompakt tartójú folytonos függvény, akkor az f függvény *univerzálisan integrálható*, vagyis minden $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mértékre $f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$, így jól értelmezett az

$$\int_{\Omega} f \ \mathrm{d}\theta := \int_{\mathbb{R}^n} f^\circ \ \mathrm{d}\theta$$

integrál. Valóban, ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan kompakt halmaz, hogy $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\} \subseteq K \subseteq \Omega$, akkor az Uriszon-tétel alapján van olyan $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, amelyre $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) = 1\}$ és $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$; ekkor világos, hogy $f^\circ = (\varphi.f)^\circ$ és a $(\varphi.f)^\circ : \mathbb{R}^n \to F$ függvény kompakt tartójú és folytonos, így univerzálisan integrálható.

3.1.2. Lemma. *Legyen $\sigma : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, és $a, b \in \mathbb{R}$ olyan pontok, hogy $a \leq b$ és $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$. Legyenek $a', b' \in \mathbb{R}$ azok a pontok, amelyekre $\sigma\langle[a, b]\rangle = [a', b']$, és tegyük fel, hogy σ monoton az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor minden F Banach-térre, és minden $f : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ folytonos függvényre, ha $[a', b'] \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$, akkor fennáll az*

$$\int_{]a',b'[} f \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{]a,b[} (f \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma| \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Vezessük be az ε számot úgy, hogy $\varepsilon := +1$, ha σ monoton növő az $[a, b]$ intervallumon, és $\varepsilon := -1$, ha σ monoton fogyó az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor $\mathrm{D}\sigma = \varepsilon|\mathrm{D}\sigma|$ teljesül az $[a, b]$ intervallumon. Legyenek $I, J \subseteq \mathbb{R}$ olyan nyílt intervallumok, amelyekre $[a, b] \subseteq J \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$ és $\sigma\langle J\rangle \subseteq I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. A helyettesítéses integrálás formuláját alkalmazzuk a $\sigma|_J : J \to I$ folytonosan differenciálható függvényre, az $f|_I : I \to F$ folytonos függvényre és az $a, b \in J$ pontokra. Azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} (f|_I)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{a}^{b} ((f|_I) \circ (\sigma|_J))(\mathrm{D}(\sigma|_J))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} := \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}.((f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma))^\circ\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{]a,b[}.((f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma))^\circ\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} =: \int\limits_{]a,b[} (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \varepsilon \int\limits_{]a,b[} (f \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma|\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}},$$

mert $\{a\}$ $\mu_{\mathbb{R}}$-eltűnő halmaz, így $\chi_{[a,b[}.((f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma))^\circ = \chi_{]a,b[}.((f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma))^\circ$ az $\mathbb{R}$-en $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt. Ezért elég azt igazolni, hogy

$$\int\limits_{]a',b'[} f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \varepsilon \int\limits_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} (f|_I)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ez viszont nyilvánvaló, mert

– ha σ monoton növő az $[a, b]$ intervallumon, akkor $\sigma(a) = a'$, $\sigma(b) = b'$ és $\varepsilon = 1$, tehát $\varepsilon \int\limits_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} (f|_I)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{a'}^{b'} (f|_I)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$;

– ha σ monoton fogyó az $[a, b]$ intervallumon, akkor $\sigma(a) = b'$, $\sigma(b) = a'$ és $\varepsilon = -1$, tehát $\varepsilon \int\limits_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} (f|_I)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = -\int\limits_{b'}^{a'} (f|_I)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{a'}^{b'} (f|_I)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$;

továbbá

$$\int\limits_{a'}^{b'} (f|_I)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} := \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[a',b'[} f^\circ\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{]a',b'[} f^\circ\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{]a',b'[} f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}},$$

mert $\{a'\}$ $\mu_{\mathbb{R}}$-eltűnő halmaz, így $\chi_{[a',b'[}.((f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma))^\circ = \chi_{]a',b'[}.((f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma))^\circ$ az $\mathbb{R}$-en $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt. ■

3.1.3. Tétel. (A helyettesítéses integrálás tételének alapformája egydimenziós esetben) *Legyenek $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazok és $\sigma : \Omega \to \Omega'$ C^1-diffeomorfizmus. Ha F Banach-tér és $f : \Omega' \to F$ kompakt tartójú folytonos függvény, akkor az $(f \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma| : \Omega \to F$ függvény szintén folytonos és kompakt tartójú, valamint fennáll az*

$$\int\limits_{\Omega} (f \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma|\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{\Omega'} f\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $K' \subseteq \mathbb{R}$ olyan kompakt halmaz, amelyre $\{t' \in \Omega'|f(t') \neq 0\} \subseteq K' \subseteq \Omega'$. A $\sigma : \Omega \to \Omega'$ függvény C^1-diffeomorfizmus, ezért a $|\mathrm{D}\sigma|$ függvény mindenütt 0-nál nagyobb értéket vesz fel. Ebből következik, hogy

$$\{t \in \Omega \mid f(\sigma(t))|(\mathrm{D}\sigma)(t)| \neq 0\} = \overset{-1}{\sigma}\langle\{t' \in \Omega' \mid f(t') \neq 0\}\rangle \subseteq \overset{-1}{\sigma}\langle K'\rangle \subseteq \Omega.$$

Ugyanakkor σ homeomorfizmus is Ω és Ω' között, és a K' halmaz kompakt az Ω' metrikus altérben is, így az $\overset{-1}{\sigma}\langle K'\rangle$ halmaz kompakt az Ω metrikus altérben, tehát $\mathbb{R}$-ben is. Ezért az $(f \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma| : \Omega \to F$ függvény is kompakt tartójú, valamint nyilvánvalóan folytonos, így jól értelmezettek az $\int\limits_{\Omega} (f \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma| \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$ és $\int\limits_{\Omega'} f \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$ integrálok.

A K' halmaz kompaktsága miatt létezik nyílt intervallumoknak olyan $(]a_i', b_i'[)_{i\in I}$ véges rendszere, amelyre $K' \subseteq \bigcup\limits_{i\in I}]a_i', b_i'[\subseteq \bigcup\limits_{i\in I} [a_i', b_i'] \subseteq \Omega'$. Minden $I \ni i$-hez egyértelműen léteznek olyan $a_i, b_i \in \Omega$ pontok, amelyekre $a_i \leq b_i$ és $\overset{-1}{\sigma}\langle [a_i', b_i']\rangle = \sigma^{-1}\langle [a_i', b_i']\rangle = [a_i, b_i]$. A Dieudonné-féle differenciális egységfelosztás-tétel alapján létezik olyan $(\varphi_i)_{i\in I}$ függvényrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ végtelenszer differenciálható függvény, $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq]a_i', b_i'[$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq \left[\sum\limits_{i\in I} \varphi_i = 1\right]$ és $\sum\limits_{i\in I} \varphi_i \leq 1$ az $\mathbb{R}$ halmazon. Ha $i \in I$, akkor $\sigma\langle [a_i, b_i]\rangle = [a_i', b_i']$, ezért az előző lemmát alkalmazva a $\sigma : \Omega \to \Omega'$ folytonosan differenciálható függvényre, a $\varphi_i.f : \Omega' \to F$ leképezésre és az $a_i, b_i \in \Omega$ pontokra kapjuk, hogy

$$\int\limits_{]a_i', b_i'[} \varphi_i.f \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{]a_i, b_i[} ((\varphi_i.f) \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma| \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ezekből az egyenlőségekből és a $\sum\limits_{i\in I} \varphi_i.f = f$ összefüggésből következik az

$$\int\limits_{\Omega'} f \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \sum_{i\in I} \int\limits_{]a_i', b_i'[} \varphi_i.f \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \sum_{i\in I} \int\limits_{]a_i, b_i[} \Big((\varphi_i.f) \circ \sigma\Big)|\mathrm{D}\sigma| \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{\Omega} (f \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma| \; \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}$$

egyenlőség. ■

3.2. A helyettesítéses integrálás tételének alapformája

3.2.1. Tétel. (A helyettesítéses integrálás tételének alapformája) *Legyenek $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok és $\sigma : \Omega \to \Omega'$ C^1-diffeomorfizmus. Ha F Banach-tér és $f : \Omega' \to F$ folytonos kompakt tartójú függvény, akkor az $(f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| : \Omega \to F$ függvény szintén folytonos és kompakt tartójú, valamint fennáll az*

$$\int\limits_{\Omega} (f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| \; \mathrm{d}\mu_n = \int\limits_{\Omega'} f \; \mathrm{d}\mu_n$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $K' \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan kompakt halmaz, amelyre $\{x' \in \Omega' | f(x') \neq 0\} \subseteq K' \subseteq \Omega'$. A $\sigma : \Omega \to \Omega'$ függvény C^1-diffeomorfizmus, ezért a $|\det(\mathrm{D}\sigma)|$ függvény mindenütt 0-nál nagyobb értéket vesz fel. Ebből következik, hogy

$$\{x \in \Omega \mid f(\sigma(x))|\det((\mathrm{D}\sigma)(x))| \neq 0\} = \overset{-1}{\sigma}\langle \{x' \in \Omega' \mid f(x') \neq 0\}\rangle \subseteq \overset{-1}{\sigma}\langle K'\rangle \subseteq \Omega.$$

Ugyanakkor σ homeomorfizmus is Ω és Ω' között, és a K' halmaz kompakt az Ω' metrikus altérben is, így az $\overset{-1}{\sigma}\langle K'\rangle$ halmaz kompakt az Ω metrikus altérben, tehát $\mathbb{R}^n$-ben is.

Ezért az $(f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| : \Omega \to F$ függvény is kompakt tartójú, valamint nyilvánvalóan folytonos, így jól értelmezettek az $\int\limits_{\Omega} (f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\ \mathrm{d}\mu_n$ és $\int\limits_{\Omega'} f\ \mathrm{d}\mu_n$ integrálok.

Az integrálformulát n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az előző állítás szerint az állítás $n = 1$ esetében teljesül. Tegyük fel, hogy $n > 1$, és az állítás igaz az $n-1$ számra.

(I) Először olyan speciális alakú σ-ra bizonyítunk, amelyhez léteznek olyan $i, j \in n$, hogy $\mathrm{pr}_i \circ \sigma \subseteq \mathrm{pr}_j$, vagyis minden $(t_k)_{k\in n} \in \Omega$ esetén $\sigma_i\left((t_k)_{k\in n}\right) = t_j$, ahol $\sigma_i := \mathrm{pr}_i \circ \sigma$ a σ leképezés i-edik komponens-függvénye. Minden $\mathbb{R} \ni s$-re értelmezzük a

$$\begin{aligned} j_s &: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n; \quad (t_0, \ldots, t_{n-2}) \mapsto (t_0, \ldots, t_{j-1}, s, t_j, \ldots, t_{n-2}) \\ i_s &: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n; \quad (t'_0, \ldots, t'_{n-2}) \mapsto (t'_0, \ldots, t'_{i-1}, s, t'_i, \ldots, t'_{n-2}) \end{aligned}$$

folytonos függvényeket. A Lebesgue–Fubini-tétel alapján

$$\int\limits_{\Omega} (f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\ \mathrm{d}\mu_n := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left((f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^{\circ}\ \mathrm{d}\mu_n =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left((f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^{\circ}\ \mathrm{d}\mu_{n-1}\Big)\mathrm{d}\mu_1(s).$$

Minden $\mathbb{R} \ni s$-re legyen

$$\Omega'_s := \overset{-1}{i}_s\langle\Omega'\rangle, \quad \Omega_s := \overset{-1}{j}_s\langle\Omega\rangle, \quad f_s := f \circ i_s,$$

valamint $\sigma_{(s)} : \Omega_s \to \mathbb{R}^{n-1}$ az a függvény, amelynek a k-adik komponens-függvénye egyenlő a $\sigma_k \circ j_s$ függvény Ω_s-re vett leszűkítésével, ha $k \leq i-1$, és egyenlő a $\sigma_{k+1} \circ j_s$ függvény Ω_s-re vett leszűkítésével, ha $n-1 > k > i-1$.

Világos, hogy $s \in \mathbb{R}$ esetén Ω'_s és Ω_s nyílt halmazok $\mathbb{R}^{n-1}$-ben, és $f_s : \Omega'_s \to F$ kompakt tartójú folytonos függvény, valamint $\Omega'_s = \sigma_{(s)}\langle\Omega_s\rangle$, továbbá a $\sigma_{(s)}$ függvény C^1-diffeomorfizmus Ω_s és Ω'_s között. Ugyanakkor, ha $s \in \mathbb{R}$, akkor $f \circ \sigma \circ j_s = f_s \circ \sigma_{(s)}$, és egyszerűen kiszámítható, hogy

$$\Big(\det(\mathrm{D}\sigma)\Big) \circ j_s = (-1)^{i+j}\det(\mathrm{D}\sigma_{(s)}).$$

Ebből a fentiek alapján következik, hogy

$$\int\limits_{\Omega} (f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\ \mathrm{d}\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\Omega_s} (f_s \circ \sigma_{(s)})|\det(\mathrm{D}\sigma_{(s)})|\ \mathrm{d}\mu_{n-1}\Big)\mathrm{d}\mu_1(s).$$

Az indukciós hipotézisből következik, hogy minden $\mathbb{R} \ni s$-re

$$\int\limits_{\Omega_s} (f_s \circ \sigma_{(s)})|\det(\mathrm{D}\sigma_{(s)})|\ \mathrm{d}\mu_{n-1} = \int\limits_{\Omega'_s} f_s\ \mathrm{d}\mu_{n-1}.$$

Ismét a Lebesgue-Funini-tételt alkalmazva

$$\int\limits_{\Omega'} f\ \mathrm{d}\mu_n := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^{\circ}\ \mathrm{d}\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f^{\circ} \circ j_s\ \mathrm{d}\mu_{n-1}\Big)\ \mathrm{d}\mu_1(s) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\Omega'_s} f_s\ \mathrm{d}\mu_{n-1}\Big)\ \mathrm{d}\mu_1(s) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\Omega_s} (f_s \circ \sigma_{(s)})|\det(\mathrm{D}\sigma_{(s)})|\ \mathrm{d}\mu_{n-1}\Big)\ \mathrm{d}\mu_1(s) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} (f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\ \mathrm{d}\mu_n$$

adódik, amivel az indukciós lépést megtettük (ilyen speciális tulajdonságú σ esetében).

(II) Legyen most $\sigma : \Omega \to \Omega'$ tetszőleges C^1-diffeomorfizmus és $\mathfrak{a} \in \Omega$ rögzített pont. Ekkor $(\mathrm{D}\sigma)(\mathfrak{a}) \neq 0$, sőt $(\mathrm{D}\sigma)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{GL}(n, \mathbb{R})$, ezért léteznek olyan $i, j \in n$, amelyekre $(\partial_j \sigma_i)(\mathfrak{a}) := \Big((\mathrm{D}\sigma)(\mathfrak{a})\Big)_{ij} \neq 0$. Vezessük be a

$$\sigma_{\mathfrak{a}} : \Omega \to \mathbb{R}^n; \quad t := (t_0, \ldots, t_{n-2}) \mapsto (t_0, \ldots, t_{j-1}, \sigma_i(t), t_{j+1}, \ldots, t_{n-2})$$

leképezést. Ez nyilvánvalóan C^1-osztályú és minden $\Omega \ni t$-re $\det((\mathrm{D}\sigma_{\mathfrak{a}})(t)) = (\partial_j \sigma_i)(t)$. Speciálisan, $\det((\mathrm{D}\sigma_{\mathfrak{a}})(\mathfrak{a}) = (\partial_j \sigma_i)(\mathfrak{a}) \neq 0$, tehát $(\mathrm{D}\sigma_{\mathfrak{a}})(\mathfrak{a}) \in \mathscr{GL}(n, \mathbb{R})$. Ezért az inverzfüggvény-tételből következik, hogy létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $\Omega_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete $\mathbb{R}^n$-ben, amelyre $\Omega_{\mathfrak{a}} \subseteq \Omega$ és a $\sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ halmaz nyílt $\mathbb{R}^n$-ben, valamint $\sigma_{\mathfrak{a}}$ C^1-diffeomorfizmus az $\Omega_{\mathfrak{a}}$ és $\sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ között. (Megjegyezzük, hogy $\sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ nem szükségképpen részhalmaza Ω'-nek.) A jelölések egyszerűsítése céljából a $\sigma_{\mathfrak{a}}$ függvény $\Omega_{\mathfrak{a}}$-ra vett leszűkítését szintén $\sigma_{\mathfrak{a}}$-val jelöljük; ez azért nem vezet félreértésre, mert a továbbiakban csak ezzel a leszűkített függvénnyel lesz dolgunk.

Tehát minden $\mathfrak{a} \in \Omega$ ponthoz ki tudunk választani olyan $(i(\mathfrak{a}), j(\mathfrak{a})) \in n \times n$ párt, és az $\mathfrak{a}$-nak olyan Ω_a nyílt környezetét, valamint egy olyan $\sigma_{\mathfrak{a}} : \Omega_{\mathfrak{a}} \to \mathbb{R}^n$ függvényt, amelyekre teljesülnek a következők:

- $\Omega_{\mathfrak{a}} \subseteq \Omega$;
- a $\sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ halmaz nyílt $\mathbb{R}^n$-ben;
- a $\sigma_{\mathfrak{a}}$ függvény C^1-diffeomorfizmus az $\Omega_{\mathfrak{a}}$ és $\sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ halmazok között;
- minden $t = (t_0, \ldots, t_{n-2}) \in \Omega_{\mathfrak{a}}$ esetén

$$\sigma_{\mathfrak{a}}(t) = (t_0, \ldots, t_{j(\mathfrak{a})-1}, \sigma_{i(\mathfrak{a})}(t), t_{j(\mathfrak{a})+1}, \ldots, t_{n-2}).$$

Az nyilvánvaló, hogy minden $\Omega \ni \mathfrak{a}$-ra, ha $k \in n$ és $k \neq j(\mathfrak{a})$, akkor $\mathrm{pr}_k \circ \sigma_a \subseteq \mathrm{pr}_k$, így $\sigma_{\mathfrak{a}}$ olyan speciális tulajdonságú C^1-diffeomorfizmus, amilyet az (I) részben tekintettünk.

Legyen $\mathfrak{a} \in \Omega$ rögzítve. Ekkor a $\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} : \sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle \to \sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ függvény C^1-diffeomorfizmus a $\sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ és $\sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ nyílt halmazok között. Továbbá, a $\sigma_{\mathfrak{a}}$ függvény definíciója szerint $\mathrm{pr}_{i(\mathfrak{a})} \circ (\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}) \subseteq \mathrm{pr}_{j(\mathfrak{a})}$ teljesül, mert $t = (t_0, \ldots, t_{n-2}) \in \Omega_{\mathfrak{a}}$ esetén

$$\begin{aligned}(\sigma_0(t), \ldots, \sigma_{i(\mathfrak{a})}(t), \ldots, \sigma_{n-1}(t)) = \sigma(t) = \left(\left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right) \circ \sigma_{\mathfrak{a}}\right)(t) = \\ = \left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right)(t_0, \ldots, t_{j(\mathfrak{a})-1}, \sigma_{i(\mathfrak{a})}(t), t_{j(\mathfrak{a})+1}, \ldots, t_{n-1}),\end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$\sigma_{i(\mathfrak{a})}(t) = \mathrm{pr}_{i(\mathfrak{a})}(\sigma(t)) = \left(\mathrm{pr}_{i(\mathfrak{a})} \circ \left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right)\right)(t_0, \ldots, t_{j(\mathfrak{a})-1}, \sigma_{i(\mathfrak{a})}(t), t_{j(\mathfrak{a})+1}, \ldots, t_{n-1}).$$

Tehát a $\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}$ függvény szintén olyan speciális tulajdonságú C^1-diffeomorfizmus, amilyet az (I) részben tekintettünk.

Ugyanakkor minden $\mathfrak{a} \in \Omega$ esetén $\sigma|_{\Omega_{\mathfrak{a}}} = (\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}) \circ \sigma_{\mathfrak{a}}$, vagyis a σ függvényt a definíciós tartománya minden pontjának valamely környezetén előállítjuk két olyan speciális tulajdonságú C^1-diffeomorfizmus kompozíciójaként, amilyenről az (I) részben volt szó.

Nyilvánvaló, hogy a $(\sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle)_{\mathfrak{a} \in \Omega}$ halmazrendszer nyílt befedése az $\Omega' = \sigma\langle\Omega\rangle$ halmaznak, mert σ *homeomorfizmus* is Ω és Ω' között. Legyen K' olyan kompakt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, amelyre $\{t' \in \Omega' | f(t') \neq 0\} \subseteq K' \subseteq \Omega'$. Ekkor van olyan $A \subseteq \Omega$ véges halmaz, amelyre $K' \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in A} \sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$. A Dieudonné-féle egységfelosztás-tétel alapján van olyan $(\varphi_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}\in A}$ függvényrendszer, hogy minden $\mathfrak{a} \in A$ esetén $\varphi_{\mathfrak{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, és $0 \leq \varphi_{\mathfrak{a}} \leq 1$, $\operatorname{supp}(\varphi_{\mathfrak{a}}) \subseteq \sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$, valamint $\sum_{\mathfrak{a}\in A} \varphi_{\mathfrak{a}} = 1$ a K' halmazon és $\sum_{\mathfrak{a}\in A} \varphi_{\mathfrak{a}} \leq 1$ az $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor $f = \sum_{\mathfrak{a}\in A} \varphi_{\mathfrak{a}} f$, ezért

$$\int_{\Omega'} f \,\mathrm{d}\mu_n = \sum_{\mathfrak{a}\in A} \int_{\Omega'} \varphi_{\mathfrak{a}} f \,\mathrm{d}\mu_n .$$

Legyen most $\mathfrak{a} \in A$ rögzítve. Ekkor $\operatorname{supp}(\varphi_{\mathfrak{a}} f) \subseteq \varphi_{\mathfrak{a}} \subseteq \sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ miatt

$$\int_{\Omega'} \varphi_{\mathfrak{a}} f \,\mathrm{d}\mu_n = \int_{\sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle} \varphi_{\mathfrak{a}} f \,\mathrm{d}\mu_n .$$

Most alkalmazzuk a bizonyítás (I) részét a $\sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ és $\sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ nyílt halmazokra, a $\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} : \sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle \to \sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ C^1-diffeomorfizmusra és a $(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\,|_{\sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle} : \sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle \to F$ kompakt tartójú folytonos függvényre:

$$\int_{\sigma\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle} \varphi_{\mathfrak{a}} f \,\mathrm{d}\mu_n = \int_{\sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle} \left((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right)\right) \left|\det\left(\mathrm{D}\left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right)\right)\right| \,\mathrm{d}\mu_n .$$

Most ismét alkalmazzuk a bizonyítás (I) részét az $\Omega_{\mathfrak{a}}$ és $\sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ nyílt halmazokra, a $\sigma_{\mathfrak{a}} : \Omega_{\mathfrak{a}} \to \sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle$ C^1-diffeomorfizmusra és a

$$\left((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right)\right) \left|\det\left(\mathrm{D}\left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right)\right)\right| : \sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle \to F$$

kompakt tartójú folytonos függvényre:

$$\int_{\sigma_{\mathfrak{a}}\langle\Omega_{\mathfrak{a}}\rangle} \left((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right)\right) \left|\det\left(\mathrm{D}\left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right)\right)\right| \,\mathrm{d}\mu_n =$$

$$= \int_{\Omega_{\mathfrak{a}}} \left((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right) \circ \sigma_{\mathfrak{a}}\right) \left(\left|\det\left(\mathrm{D}\left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right)\right)\right| \circ \sigma_{\mathfrak{a}}\right) \left|\det(\mathrm{D}\sigma_{\mathfrak{a}})\right| \,\mathrm{d}\mu_n =$$

$$= \int_{\Omega_{\mathfrak{a}}} \left((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right) \circ \sigma_{\mathfrak{a}}\right) \left|\det\left(\mathrm{D}\left(\left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right) \circ \sigma_{\mathfrak{a}}\right)\right)\right| \,\mathrm{d}\mu_n =$$

$$= \int_{\Omega_{\mathfrak{a}}} \left((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \sigma_{\mathfrak{a}}\right) \left|\det(\mathrm{D}\sigma)\right| \,\mathrm{d}\mu_n ,$$

ahol felhasználtuk azt, hogy a függvénykompozíció differenciálási szabálya és a determináns multiplikativitása miatt

$$\left(\left(\det\left(\mathrm{D}\left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right)\right)\right) \circ \sigma_{\mathfrak{a}}\right) \cdot \det(\mathrm{D}\sigma_{\mathfrak{a}}) = \det\left(\mathrm{D}\left(\left(\sigma \circ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\right) \circ \sigma_{\mathfrak{a}}\right)\right).$$

A nyert integrál-egyenlőségeket összegezve az A véges halmaz elemeire kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget. ■

3.3. A helyettesítéses integrálás tétele

A helyettesítéses integrálás tételének gyakorlati alkalmazhatóságához szükség van a tétel olyan formájára, amely nem folytonos vagy nem kompakt tartójú függvényekre vonatkozik.

3.3.1. Definíció. *Ha T halmaz és F vektortér, akkor egy $f : T \to F$ függvényt* **véges dimenziósnak** (*vagy kissé pontosabban:* **véges dimenziós értékűnek**) *nevezünk, ha az* $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$ *halmaz által generált lineáris altér F-ben véges dimenziós.*

Legyen T halmaz és F vektortér a K test felett. Legyen $f : T \to F$ véges dimenziós értékű függvény, továbbá $(e_i)_{i\in I}$ (véges) algebrai bázis az $\mathrm{Im}(f)$ halmaz által generált F-beli lineáris altérben. Ha $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer F^*-ban, hogy minden $i, j \in I$ esetén $u_i(e_j) = \delta_{i,j}$, akkor nyilvánvalóan

$$f = \sum_{i\in I}(u_i \circ f).e_i$$

teljesül, hiszen az $\mathrm{Im}(f)$ által generált lineáris altér minden z elemére

$$z = \sum_{i\in I} u_i(z)e_i,$$

következésképpen minden $T \ni t$-re

$$f(t) = \sum_{i\in I} u_i(f(t))e_i = \Big(\sum_{i\in I}(u_i \circ f).e_i\Big)(t).$$

Megfordítva; ha $(e_i)_{i\in I}$ véges rendszer F-ben, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to K$ függvény, akkor az

$$f := \sum_{i\in I} f_i.e_i$$

függvény nyilvánvalóan véges dimenziós értékű, hiszen $\mathrm{Im}(f) \subseteq \sum_{i\in I} Ke_i$ és itt a jobb oldalon az F-nek véges dimenziós lineáris altere áll.

3.3.2. Állítás. (A sima függvényekkel p-edik hatványon való approximáció tétele) *Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ mérték, és $p \geq 1$ valós szám, akkor az $\mathbb{R}^n \to F$ kompakt tartójú, C^∞-osztályú, véges dimenziós értékű függvények halmaza sűrű az $\mathscr{L}^p_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$ függvénytérben a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint.*

Bizonyítás. (I) Legyen $E \in \mathscr{R}_n$. Az $\mathscr{R}_n$ definíciója alapján létezik az $\mathbb{R}^n$ relatív kompakt nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, és az $\mathbb{R}^n$ kompakt részhalmazainak olyan $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozata, hogy $E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. A Dieudonné-féle differenciális egységfelosztás-tétel alapján kiválaszthatunk olyan $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú C^∞-osztályú függvény, és $0 \leq \varphi_k\mathbf{1}$, $C_k \subseteq [\varphi_k = 1]$ és $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subseteq \Omega_k$. Könnyen látható, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén $|\chi_{_E} - \varphi_k| \leq \chi_{_{\Omega_k \setminus C_k}}$, továbbá $\left(\chi_{_{\Omega_k \setminus C_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő függvénysorozat, amelynek minden tagja pozitív, p-edik hatványon θ-integrálható függvény, valamint $\inf_{k\in\mathbb{N}} \chi_{_{\Omega_k\setminus C_k}} = 0$ teljesül. Ezért a Levi-tétel alapján ez függvénysorozat konvergál 0-hoz a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint is, és minden $k\in\mathbb{N}$ esetén $\|\chi_{_E} - \varphi_k\|_{\theta,p} \le \|\chi_{_{\Omega_k\setminus C_k}}\|_{\theta,p}$, tehát a $\Big(\chi_{_E} - \varphi_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is konvergál 0-hoz a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint. Ebből következik, hogy az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n)$ függvényhalmaz minden eleme a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint közelíthető $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ kompakt tartójú C^∞-osztályú függvényekkel.

(II) Ha $f\in\mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n)$, akkor létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges diszjunkt rendszer $\mathscr{R}_n$-ben és olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy $f=\sum\limits_{i\in I}\chi_{_{E_i}}.z_i$. Legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az (I) alapján minden $i\in I$ esetén van olyan $\varphi_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ kompakt tartójú C^∞-osztályú függvény, hogy $\|\chi_{_E}-\varphi_i\|_{\theta,p}<\varepsilon$. Ekkor

$$\Big\|f-\sum_{i\in I}\varphi_i.z_i\Big\|_{\theta,p} = \Big\|\sum_{i\in I}\Big(\chi_{_{E_i}}-\varphi_i\Big).z_i\Big\|_{\theta,p} \le \varepsilon\Big(\sum_{i\in I}\|z_i\|^p\Big)^{1/p}$$

teljesül, és világos, hogy a $\sum\limits_{i\in I}\varphi_i.z_i:\mathbb{R}^n\to F$ függvény kompakt tartójú, C^∞-osztályú és véges dimenziós értékű. Ez azt jelenti, hogy az $\mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n)$ függvényhalmaz minden eleme a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint közelíthető $\mathbb{R}^n\to F$ kompakt tartójú, C^∞-osztályú és véges dimenziós értékű függvényekkel.

(III) Végül, legyen $f\in\mathscr{L}_F^p(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\theta)$ tetszőleges, és vegyünk egy $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ számot. Ekkor az $\mathscr{L}_F^p(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\theta)$ függvénytér definíciója szerint van olyan $g\in\mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n)$, amelyre $\|f-g\|_{\theta,p}<\varepsilon/2$. Ugyanakkor a (II) szerint van olyan $h:\mathbb{R}^n\to F$ kompakt tartójú, C^∞-osztályú és véges dimenziós értékű függvény, amelyre $\|g-h\|_{\theta,p}<\varepsilon/2$. Ekkor természetesen $\|f-h\|_{\theta,p}<\varepsilon$, amivel az állítást igazoltuk. ■

3.3.3. Következmény. *Legyen $\Omega'\subseteq\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $\theta:\mathscr{R}_n\to\mathbb{K}$ mérték és $p\ge 1$ valós szám. Ha $f:\Omega'\to F$ olyan függvény, hogy $f^\circ\in\mathscr{L}_F^p(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\theta)$, akkor létezik olyan $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, amelynek minden tagja $\Omega'\to F$ kompakt tartójú, C^∞-osztályú, véges dimenziós értékű függvény, és az $\mathscr{L}_F^p(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\theta)$-ben haladó $(f_k^\circ)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f°-hoz a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az $f^\circ\in\mathscr{L}_F^p(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\theta)$ hipotézis és az előző tétel alapján van olyan $g:\mathbb{R}^n\to F$ kompakt tartójú, C^∞-osztályú és véges dimenziós értékű függvény, amelyre $\|f^\circ-g\|_{\theta,p}<\varepsilon/2$. Ekkor

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}^{*}\|f^\circ-\chi_{_{\Omega'}}.g\|^p\,\mathrm{d}|\theta| = \int\limits_{\mathbb{R}^n}^{*}\chi_{_{\Omega'}}.\|f^\circ-g\|^p\,\mathrm{d}|\theta| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n}^{*}\|f^\circ-g\|^p\,\mathrm{d}|\theta| < \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p$$

teljesül, vagyis $\|f^\circ-\chi_{_{\Omega'}}.g\|_{\theta,p}<\varepsilon/2$. Létezik kompakt tartójú, C^∞-osztályú $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ függvényeknek olyan $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre minden $k\in\mathbb{N}$ esetén $0\le\varphi_k\le 1$, $\operatorname{supp}(\varphi_k)\subseteq\Omega'$ és $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=\chi_{_{\Omega'}}$. Ekkor a $(\varphi_k.g)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál $\chi_{_{\Omega'}}.g$-hez az $\mathbb{R}^n$-en mindenütt, továbbá minden $\mathbb{N}\ni k$-ra $\|\chi_{_{\Omega'}}.g\|\le\|g\|$ és $\int\limits_{\mathbb{R}^n}^{*}\|\|^p\,\mathrm{d}|\theta|<+\infty$. Ezért a Lebesgue-tételből következik, hogy $\chi_{_{\Omega'}}.g\in\mathscr{L}_F^p(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\theta)$, és a $(\varphi_k.g)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $\chi_{_{\Omega'}}.g$-hez a $\|\cdot\|_{\theta,p}$ félnorma szerint is, így van olyan $k\in\mathbb{N}$, hogy $\|\chi_{_{\Omega'}}.g-\varphi_k.g\|_{\theta,p}<\varepsilon/2$. Ebből kapjuk, hogy

$$\|f^\circ-\varphi_k.g\|_{\theta,p}\le\|f^\circ-\chi_{_{\Omega'}}.g\|_{\theta,p}+\|\chi_{_{\Omega'}}.g-\varphi_k.g\|_{\theta,p}<\varepsilon.$$

Ugyanakkor a $h := (\varphi_k.g)|_{\Omega'} : \Omega' \to F$ függvény kompakt tartójú, mert $\mathrm{supp}(\varphi_k)$ olyan kompakt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, amelyre $\{x \in \Omega' | h(x) \neq 0\} \subseteq \mathrm{supp}(\varphi_k) \subseteq \Omega'$. Továbbá, a h függvény C^∞-osztályú és véges dimenziós értékű, mert g is ilyen. Végül, $h^\circ = \varphi_k.g$ nyilvánvaló, hiszen $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subseteq \Omega'$, ezért $\|f^\circ - h^\circ\|_{\theta,p} < \varepsilon$. ■

3.3.4. Lemma. *Egy $E \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz pontosan akkor μ_n-eltűnő halmaz, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, hogy $\mu_n^*(\Omega) < \varepsilon$ és $E \subseteq \Omega$.*

Bizonyítás. A feltétel nyilvánvalóan elégséges, tehát csak a szükségességet igazoljuk.

(I) Először megmutatjuk, hogy ha $E := \prod_{k \in n} [a_k, b_k[\in \mathscr{S}_n$, akkor

$$\mu_n(E) = \inf\{\mu_n^*(\Omega) \mid \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ nyílt halmaz és } E \subseteq \Omega\}.$$

Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, és vegyünk tetszőleges $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ zérussorozatot $\mathbb{R}_+^*$-ban. Ekkor $E \subseteq \prod_{k \in n}]a_k - \varepsilon_m, b_k[\subseteq \prod_{k \in n} [a_k - \varepsilon_m, b_k[$, továbbá

$$\mu_n^*\Big(\prod_{k \in n}]a_k - \varepsilon_m, b_k[\Big) \leq \mu_n\Big(\prod_{k \in n} [a_k - \varepsilon_m, b_k[\Big) = \prod_{k \in n} (b_k - a_k + \varepsilon_m).$$

Világos, hogy $\lim_{m \to \infty} \prod_{k \in n} (b_k - a_k + \varepsilon_m) = \prod_{k \in n} (b_k - a_k) = \mu_n(E)$, ezért van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $\prod_{k \in n} (b_k - a_k + \varepsilon_m) < \mu_n(E) + \varepsilon$; ekkor $\Omega := \prod_{k \in n}]a_k - \varepsilon_m, b_k[$ olyan nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, amelyre $E \subseteq \Omega$ és $\mu_n^*(\Omega) < \mu_n(E) + \varepsilon$. Ebből következik, hogy $\inf\{\mu_n^*(\Omega) \mid \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $E \subseteq \Omega\} \leq \mu_n(E)$, és a fordított egyenlőtlenség triviális.

(II) Minden $E \in \mathscr{R}_n$ esetén is fennáll a

$$\mu_n(E) = \inf\{\mu_n^*(\Omega) \mid \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ nyílt halmaz és } E \subseteq \Omega\}$$

egyenlőség. Valóban, az E-hez van olyan $(E_i)_{i \in I}$ véges diszjunkt rendszer $\mathscr{S}_n$-ben, hogy $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Az egyenlőség bizonyításához feltehető, hogy $E \neq \emptyset$, így $I \neq \emptyset$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az (I) alapján minden $I \ni i$-hez van olyan $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, amelyre $E_i \subseteq \Omega_i$ és $\mu_n^*(\Omega_i) < \mu_n(E_i) + \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{Card}(I)}$. Ekkor $\Omega := \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ olyan nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, amelyre $E \subseteq \Omega$ és

$$\mu_n^*(\Omega) \leq \sum_{i \in I} \mu_n^*(\Omega_i) < \sum_{i \in I} \Big(\mu_n(E_i) + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Card}(I)}\Big) = \sum_{i \in I} \mu_n(E_i) + \varepsilon = \mu_n(E) + \varepsilon.$$

(III) Legyen $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges μ_n-eltűnő halmaz és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. A IX. fejezet 2. pontjában láttuk, hogy létezik olyan $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}_n$-ben, amelyre $E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_n(E_k) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. A (II) alapján kiválaszthatunk olyan $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ halmazsorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $E_k \subseteq \Omega_k$ és $\mu_n^*(\Omega_k) < \mu_n(E_k) + \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}$. Ekkor $\Omega := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$ olyan nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, amelyre $E \subseteq \Omega$, és a μ_n^* külső mérték megszámlálható szubadditivitása miatt

$$\mu_n^*(\Omega) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_n^*(\Omega_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\mu_n(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_n(E_k) + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

amivel a bizonyítást befejeztük. ■

3.3.5. Következmény. *Ha* Ω *és* Ω' *nyílt halmazok* $\mathbb{R}^n$*-ben és* $\sigma : \Omega \to \Omega'$ *tetszőleges* C^1*-diffeomorfizmus, akkor minden* $N' \subseteq \Omega'$ μ_n*-eltűnő halmazra a* $\overset{-1}{\sigma}\langle N'\rangle \subseteq \Omega$ *halmaz* μ_n*-eltűnő halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az előző lemma szerint van olyan $\Omega'_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, amelyre $N' \subseteq \Omega'_\varepsilon$ és $\mu_n^*(\Omega'_\varepsilon) < \varepsilon$. Létezik továbbá olyan $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$, és $\chi_{\Omega'_\varepsilon} = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k$. Ekkor

$$\left(\chi_{\overset{-1}{\sigma}\langle N'\rangle} |\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \left((\varphi_k \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ,$$

ezért a felső integrál monoton σ-folytonossága és a helyettesítéses integrálás alapformája szerint

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}^{*} \left(\chi_{\overset{-1}{\sigma}\langle N'\rangle} |\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ \mathrm{d}\mu_n \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^n}^{*} \left((\varphi_k \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ \mathrm{d}\mu_n =$$

$$= \sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} (\varphi_k \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| \ \mathrm{d}\mu_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega'} \varphi_k \ \mathrm{d}\mu_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^n}^{*} \varphi_k \ \mathrm{d}\mu_n = \mu_n^*(\Omega'_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ezért a $\left(\chi_{\overset{-1}{\sigma}\langle N'\rangle} |\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény μ_n-eltűnő, így μ_n-majdnem mindenütt a 0 értéket veszi fel. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy

$$\left[\left(\chi_{\overset{-1}{\sigma}\langle N'\rangle} |\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ \neq 0\right] = \overset{-1}{\sigma}\langle N'\rangle,$$

ezért a $\overset{-1}{\sigma}\langle N'\rangle \subseteq \Omega$ halmaz μ_n-eltűnő halmaz. ■

3.3.6. Tétel. (A helyettesítéses integrálás tétele) *Legyenek* Ω *és* Ω' *nyílt halmazok* $\mathbb{R}^n$*-ben,* F *Banach-tér és* $\sigma : \Omega \to \Omega'$ C^1*-diffeomorfizmus. Az* $f : \Omega' \to F$ *függvény pontosan akkor* μ_n*-integrálható az* Ω' *halmazon, ha az* $(f\circ\sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| : \Omega \to F$ *függvény* μ_n*-integrálható az* Ω *halmazon; továbbá, ha az* $f : \Omega' \to F$ *függvény* μ_n*-integrálható az* Ω' *halmazon, akkor*

$$\int\limits_{\Omega'} f \ \mathrm{d}\mu_n = \int\limits_{\Omega} (f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| \ \mathrm{d}\mu_n.$$

Bizonyítás. (I) Legyen F Banach-tér, $\Omega,\ \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok, $\sigma : \Omega \to \Omega'$ C^1-diffeomorfizmus és $f : \Omega' \to F$ függvény. Megmutatjuk, hogy ha az $f : \Omega' \to F$ függvény μ_n-integrálható az Ω' halmazon, *akkor* az $(f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| : \Omega \to F$ függvény μ_n-integrálható az Ω halmazon, és fennáll az

$$\int\limits_{\Omega'} f \ \mathrm{d}\mu_n = \int\limits_{\Omega} (f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| \ \mathrm{d}\mu_n$$

egyenlőség.

A hipotézis szerint $f^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, így vehetünk olyan $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, amelynek mindegyik tagja $\Omega' \to F$ kompakt tartójú folytonos függvény és

$$\lim_{k\to\infty} \int^*_{\mathbb{R}^n} \|f^\circ - f^\circ_k\| \, \mathrm{d}\mu_n = 0,$$

sőt még azt is megkövetelhetnénk, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra az f_k függvény C^∞-osztályú és véges dimenziós értékű legyen). A Riesz–Fischer-tétel alapján az $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat megválasztható úgy, hogy az $(f^\circ_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat μ_n-majdnem mindenütt konvergáljon f°-höz az $\mathbb{R}^n$-en pontonként, vagyis az

$$N' := \{t' \in \mathbb{R}^n \mid \text{az } (f^\circ_k(t'))_{k\in\mathbb{N}} \text{ sorozat nem konvergál } f^\circ(t')\text{-höz } F\text{-ben}\}$$

halmaz μ_n-eltűnő halmaz. Ekkor $N' \subseteq \Omega'$, ezért az előző lemma szerint a $\overset{-1}{\sigma}\langle N'\rangle \subseteq \Omega$ halmaz is μ_n-eltűnő halmaz, így az $\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$-ben haladó $\left(\left((f_k \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat μ_n-majdnem mindenütt (ti. az $\mathbb{R}^n \setminus \overset{-1}{\sigma}\langle N'\rangle$ halmazon) pontonként konvergál az $\left((f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ$ függvényhez. Ugyanakkor a helyettesítéses integrálás alapformája szerint minden $j, k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int^*_{\mathbb{R}^n} \left\| \left((f_j \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ - \left((f_k \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ \right\| \mathrm{d}\mu_n =$$

$$= \int^*_{\mathbb{R}^n} \left((\|f_j - f_k\| \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ \mathrm{d}\mu_n = \int_\Omega (\|f_j - f_k\| \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| \, \mathrm{d}\mu_n =$$

$$= \int_{\Omega'} \|f_j - f_k\| \, \mathrm{d}\mu_n = \int^*_{\mathbb{R}^n} \|f^\circ_j - f^\circ_k\| \, \mathrm{d}\mu_n = \|f^\circ_j - f^\circ_k\|_{\mu_n,1}.$$

Az $(f^\circ_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat Cauchy-sorozat $\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$-ben a $\|\cdot\|_{\mu_n,1}$ félnorma szerint, következésképpen az $\left(\left((f_k \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat szintén Cauchy-sorozat $\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$-ben a $\|\cdot\|_{\mu_n,1}$ félnorma szerint. A Riesz–Fischer-tétel alapján ebből következik olyan $f' \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ létezése, hogy az $\left(\left((f_k \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f'-höz a $\|\cdot\|_{\mu_n,1}$ félnorma szerint, és konvergál f'-höz az $\mathbb{R}^n$-en μ_n-majdnem mindenütt is (mert az $\left(\left((f_k \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az $\mathbb{R}^n$-en μ_n-majdnem mindenütt konvergens pontonként). Ekkor $f' = \left((f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ$ teljesül $\mathbb{R}^n$-en μ_n-majdnem mindenütt, tehát $\left((f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, következésképpen az $(f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| : \Omega' \to F$ függvény μ_n-integrálható az Ω halmazon. Ugyanakkor, az integrál $\|\cdot\|_{\mu_n,1}$ félnorma szerinti folytonossága, az imént igazolt konvergencia-tulajdonságok és a helyettesítéses integrálás alapformája szerint

$$\int_\Omega (f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| \, \mathrm{d}\mu_n := \int_{\mathbb{R}^n} \left((f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ \mathrm{d}\mu_n =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left((f_k \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\right)^\circ \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (f_k \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| \, \mathrm{d}\mu_n =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} f_k \, \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f^\circ_k \, \mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} f^\circ \, \mathrm{d}\mu_n =: \int_{\Omega'} f \, \mathrm{d}\mu_n$$

adódik.

(II) Legyen F Banach-tér, $\Omega,\ \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok, $\sigma : \Omega \to \Omega'$ C^1-diffeomorfizmus és $f : \Omega' \to F$ függvény. Állítjuk, hogy ha az $(f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| : \Omega \to F$ függvény μ_n-integrálható az Ω halmazon, akkor az $f : \Omega' \to F$ függvény μ_n-integrálható az Ω' halmazon. Valóban, az (I) állítást alkalmazva az F Banach-térre, az $\Omega',\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazokra, a $\sigma^{-1} : \Omega' \to \Omega$ C^1-diffeomorfizmusra és az $(f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| : \Omega \to F$ függvényre kapjuk, hogy az $\Big(\Big((f\circ\sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\Big)\circ\sigma^{-1}\Big)|\det(\mathrm{D}\sigma^{-1})| : \Omega' \to F$ függvény μ_n-integrálható az Ω' halmazon. Ugyanakkor a függvénykompozíció differenciálási szabálya és a determináns multiplikativitása miatt

$$1 = |\det(\mathrm{D}(\sigma \circ \sigma^{-1}))| = |\det\Big(\Big((\mathrm{D}\sigma) \circ \sigma^{-1}\Big) \circ (\mathrm{D}\sigma^{-1})\Big)| = |\det\Big((\mathrm{D}\sigma) \circ \sigma^{-1}\Big)||\det(\mathrm{D}\sigma^{-1})|$$

amiből következik, hogy

$$\Big(\Big((f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|\Big) \circ \sigma^{-1}\Big)|\det(\mathrm{D}\sigma^{-1})| = f$$

teljesül, vagyis az f függvény μ_n-integrálható az Ω' halmazon. ■

3.3.7. Következmény. *Legyenek Ω és Ω' nyílt halmazok $\mathbb{R}^n$-ben, F Banach-tér és $f : \mathbb{R}^n \to F$ függvény és $\sigma : \Omega \to \Omega'$ C^1-diffeomorfizmus. Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'$ μ_n-eltűnő halmaz. Ekkor $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ ekvivalens azzal, hogy az $(f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| : \Omega \to F$ függvény μ_n-integrálható az Ω halmazon; továbbá, ha $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \ \mathrm{d}\mu_n = \int_{\Omega} (f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| \ \mathrm{d}\mu_n.$$

Bizonyítás. Legyen $g := f|_{\Omega'}$. Ekkor $g^\circ = \chi_{\Omega'} f$, tehát a feltevés alapján $g^\circ = f$ teljesül az $\mathbb{R}^n$ halmazon μ_n-majdnem mindenütt. Ezért $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ ekvivalens azzal, hogy a $g : \Omega \to F$ függvény μ_n-integrálható az Ω' halmazon. Viszont a helyettesítéses integrálás tétele alapján $g^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ ekvivalens azzal, hogy a $(g \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| : \Omega \to F$ függvény μ_n-integrálható az Ω halmazon. De nyilvánvalóan igaz, hogy $(g\circ\sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| = (f\circ\sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)|$, ezért $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ ekvivalens azzal, hogy az $(f \circ \sigma)|\det(\mathrm{D}\sigma)| : \Omega \to F$ függvény μ_n-integrálható az Ω halmazon. Továbbá, $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor a helyettesítéses integrálás formuláját alkalmazva

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \ \mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} g^\circ \ \mathrm{d}\mu_n = \int_{\Omega'} g \ \mathrm{d}\mu_n = \int_{\Omega} (g \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma| \ \mathrm{d}\mu_n = \int_{\Omega} (f \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma| \ \mathrm{d}\mu_n$$

adódik. ■

3.3.8. Következmény. *Legyen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{A} \in \mathscr{GL}(n, \mathbb{R})$. Legyen F Banach-tér és $f : \mathbb{R}^n \to F$ függvény. Ekkor $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ ekvivalens azzal, hogy az*

$$\mathbb{R}^n \to F; \quad x \mapsto f(\mathbf{A}x + \mathbf{a})$$

függvény eleme $\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$-nek; továbbá, ha $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \ \mathrm{d}\mu_n = |\det(\mathbf{A})| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{A}x + \mathbf{a}) \ \mathrm{d}\mu_n(x).$$

Bizonyítás. Elég a helyettesítéses integrálás tételét alkalmazni az $\Omega := \Omega' := \mathbb{R}^n$ halmazra és a $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ x \mapsto \mathbf{A}x + \mathbf{a}$ leképezésre, amely C^1-diffeomorfizmus, figyelembe véve azt, hogy a $\det(\mathrm{D}\sigma)$ függvény egyenlő a $\det(\mathbf{A})$ értékű konstansfüggvénnyel. ■

Az előző állításból következik, hogy ha F Banach-tér, $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $E \in \mathscr{R}_n[\mu_n]$ (vagyis az $E \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz μ_n-integrálható), akkor teljesülnek a következő transzformációs tulajdonságok.

a) Minden $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén az $\mathbb{R}^n \to F;\ x \mapsto f(\alpha.x)$ függvény eleme $\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$-nek, $\alpha.E \in \mathscr{R}_n[\mu_n]$, és

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\alpha.x)\ \mathrm{d}\mu_n(x) = \frac{1}{|\alpha|^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\ \mathrm{d}\mu_n;$$

$$\mu_n(\alpha.E) = |\alpha|^n \mu_n(E).$$

b) Minden $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{A} \in \mathscr{GL}(n, \mathbb{R})$ esetén, ha $\mathbf{A}$ *euklidészi ortogonális transzformáció* (azaz $\mathbf{A}^T \circ \mathbf{A} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$), akkor az $\mathbb{R}^n \to F;\ x \mapsto f(\mathbf{A}x + \mathbf{a})$ függvény eleme $\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$-nek, $\mathbf{A}\langle E \rangle + \mathbf{a} \in \mathscr{R}_n[\mu_n]$, és

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{A}x + \mathbf{a})\ \mathrm{d}\mu_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\ \mathrm{d}\mu_n;$$

$$\mu_n(\mathbf{A}\langle E \rangle + \mathbf{a}) = \mu_n(E).$$

Speciálisan: $\mathbf{A} := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ esetén

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x + \mathbf{a})\ \mathrm{d}\mu_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\ \mathrm{d}\mu_n;$$

$$\mu_n(E + \mathbf{a}) = \mu_n(E)$$

adódik minden $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ esetén: ez a Lebesgue-merték *transzláció-invarianciája.*

3.4. Alkalmazás: A gamma- és béta-függvény

3.4.1. Állítás. *A* $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \dfrac{(-1)^k}{k!} \cdot \dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}} + k}$ *függvénysor normálisan konvergens minden olyan* $E \subseteq \mathbb{C}$ *halmazon, amelyre*

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{z \in E} |z + k| \right) > 0$$

teljesül. Ez a függvénysor pontonként abszolút konvergens a $\{z \in \mathbb{C} | -z \notin \mathbb{N}\}$ *halmazon.*

Bizonyítás. Ha $E \subseteq \mathbb{C}$ olyan halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ olyan szám, hogy $\varepsilon < \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf\limits_{z \in E} |z + k| \right)$, akkor minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\sup_{z \in E} \left| \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z + k} \right| < \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{\varepsilon},$$

ezért a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \dfrac{(-1)^k}{k!} \cdot \dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{C}} + k}$ függvénysor normálisan konvergens az E halmazon. ■

3.4.2. Állítás. *Minden* $z \in \mathbb{C}$ *esetén az*

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$$

függvény Lebesgue-integrálható minden $]a, \to[$ *intervallumon, ahol* $a \in \mathbb{R}_+^*$. *Ez a függvény pontosan akkor Lebesgue-integrálható a* $]0, \to[$ *intervallumon, ha* $\Re(z) > 0$.

Bizonyítás. Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén tekintsük a

$$g_z :]0, \to[\to \mathbb{C}; \quad t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$$

függvényt. Ez a függvény folytonos, ezért a g_z° leképezés $\mu_{\mathbb{R}}$-mérhető (X. fejezet, 1. pont, **4**. gyakorlat). Továbbá, ha $\Re(z) > 0$, akkor a X. fejezet, 2. pont, **14**. gyakorlat alapján

$$\int_{\mathbb{R}}^* |g_z^\circ| \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}}^* \chi_{]0,\to[}(t) \cdot \frac{e^{-t}}{t^{1-\Re(z)}} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) \leq \int_{\mathbb{R}}^* \chi_{]0,\to[}(t) \cdot \frac{1}{t^{1-\Re(z)}} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) < +\infty,$$

ezért az integrálhatóság kritériuma szerint a g_z függvény Lebesgue-integrálható a $]0, \to[$ intervallumon. A b) pont többi állítása könnyen bizonyítható a X. fejezet, 2. pont, **14**. gyakorlat eredményeinek alkalmazásával. ■

3.4.3. Definíció. Γ *jelöli azt a* $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ *függvényt, amelyre*

$$\mathrm{Dom}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \mid -z \notin \mathbb{N}\},$$

és minden $z \in \mathrm{Dom}(\Gamma)$ *esetén*

$$\Gamma(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k} + \int_{]1,\to[} t^{z-1}e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

Ezt a függvényt **gamma-függvénynek** *nevezzük.*

3.4.4. Állítás. (**A gamma-függvény Euler-féle előállítása.**) *Minden* $z \in \mathrm{Dom}(\Gamma)$ *esetén, ha* $\Re(z) > 0$, *akkor*

$$\Gamma(z) = \int_{]0,\to[} t^{z-1}e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

A Γ *függvénynek nincs gyöke az* $\{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 0\}$ *félsíkon.*

Bizonyítás. Ha $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $\Re(z) > 0$, akkor a b) alapján

$$\int_{]0,\to[} t^{z-1}e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \int_{]0,1[} t^{z-1}e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) + \int_{]1,\to[} t^{z-1}e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \int_{]0,1[} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{z-1+k} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) + \int_{]1,\to[} t^{z-1}e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t),$$

ezért elég azt igazolni, hogy

$$\int_{]0,1[} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{z-1+k} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{]0,1[} t^{z-1+k} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t),$$

hiszen a Newton–Leibniz-formula általánosított formája szerint minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\int\limits_{]0,1[} t^{z-1+k} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \frac{1}{z+k}.$$

A sorösszegzés és az integrálás sorrendjének felcserélhetősége a Lebesgue-tétel függvénysorokra vonatkozó alakjából következik. ■

3.4.5. Állítás. *Minden* $z \in \mathrm{Dom}(\Gamma)$ *esetén*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Továbbá, minden $\mathbb{N}^* \ni m$*-re*

$$\Gamma(m) = (m-1)!,$$
$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\Big(m+\frac{1}{2}\Big) = \frac{(2m)!}{2^{2m}m!}\sqrt{\pi}.$$

Bizonyítás. Ha $z \in \mathrm{Dom}(\Gamma)$, akkor a parciális integrálás általánosítását (X. fejezet, 2. pont, **2**. gyakorlat, a) pont) alkalmazva kapjuk, hogy

$$z\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{z}{z+k} + \int\limits_{]1,\to[} zt^{z-1}e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{z+k-k}{z+k} + \int\limits_{]1,\to[} \mathrm{D}(t \mapsto t^z)e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$
$$= \frac{1}{e} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{z+k} + \lim_{t\to\infty}(t^z e^{-t}) - \lim_{t\to 1}(t^z e^{-t}) + \int\limits_{]1,\to[} t^z e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{(z+1)+k} + \int\limits_{]1,\to[} t^{(z+1)-1}e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \Gamma(z+1).$$

A $\Gamma(1)$ érték könnyen meghatározható. Ebből kapjuk, hogy minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén $\Gamma(m) = (m-1)!$ teljesül. A $\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)$ meghatározásához helyettesítéses integrálást alkalmazhatunk, és felhasználhatjuk a (későbbi) **4**. gyakorlatban szereplő formulákat. ■

3.4.6. Állítás. (**A gamma-függvény Gauss-féle előállítása.**) *Ha* $z \in \mathbb{C}$ *és* $\Re(z) > 0$*, akkor*

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{m!m^z}{\prod\limits_{k=0}^{m}(z+k)}.$$

Bizonyítás. Minden $m \in \mathbb{N}^*$ és $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $\Re(z) > 0$, akkor legyen

$$\Gamma_m(z) := \int\limits_{]0,m[} t^{z-1}\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^m \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

Megmutatjuk, hogy minden $m > 1$ természtes számra és $\mathbb{C} \ni z$-re, ha $\Re(z) > 0$, akkor

$$\Gamma_m(z) = \frac{m}{z+m}\Big(\frac{m}{m-1}\Big)^z \Gamma_{m-1}(z). \tag{1}$$

Ehhez legyen $m > 1$ rögzített természetes szám és z olyan komplex szám, amelyre $\Re(z) > 0$. Ekkor

$$\Gamma_m(z) = \int\limits_{]0,m[} t^{z-1}\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^{m-1}\Big(1-\frac{t}{m}\Big)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \int\limits_{]0,m[} t^{z-1}\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^{m-1}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) - \frac{1}{m}\int\limits_{]0,m[} t^{z}\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^{m-1}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t). \tag{2}$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int\limits_{]0,m[} t^{z}\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^{m-1}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = -\int\limits_{]0,m[} t^{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^{m}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = -\lim_{\substack{t\to m,\\ 0<t<m}}\Big(t^z\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^m\Big) +$$

$$+\lim_{\substack{t\to 0,\\ 0<t<m}}\Big(t^z\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^m\Big) + z\int\limits_{]0,m[} t^{z-1}\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^{m}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = z\Gamma_m(z).$$

Ezt behelyettesítve a (2) egyenlőségbe, átrendezés után nyerjük a

$$\Big(1+\frac{z}{m}\Big)\Gamma_m(z) = \int\limits_{]0,m[} t^{z-1}\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^{m-1}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) \tag{3}$$

összefüggést. Az itt álló inegrálban végrehatva a $]0, m-1[\to]0, m[;\ \tau \mapsto \Big(\dfrac{m}{m-1}\Big)\tau$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\int\limits_{]0,m[} t^{z-1}\Big(1-\frac{t}{m}\Big)^{m-1}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \int\limits_{]0,m-1[} \Big(\frac{m}{m-1}\tau\Big)^{z-1}\Big(1-\frac{\tau}{m-1}\Big)^{m-1}\frac{m}{m-1}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(\tau) =$$

$$= \Big(\frac{m}{m-1}\Big)^z\Gamma_{m-1}(z).$$

Ebből és (3)-ból azonnal következik az (1) rekurzív összefüggés.

Könnyen látható, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $\Re(z) > 0$, akkor

$$\Gamma_1(z) = \int\limits_{]0,1[} t^{z-1}(1-t)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \int\limits_{]0,1[} t^{z-1}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) - \int\limits_{]0,1[} t^{z}\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)}.$$

Ebből, és az (1) rekurzív összefüggésből következik, hogy minden $m \in \mathbb{N}^*$ és $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $\Re(z) > 0$, akkor $\Gamma_m(z) \neq 0$, tehát ha $m > 1$, akkor

$$\Gamma_m(z) = \Gamma_1(z)\prod_{k=2}^{m}\frac{\Gamma_k(z)}{\Gamma_{k-1}(z)} = \frac{1}{z(z+1)}\prod_{k=2}^{m}\frac{k}{z+k}\Big(\frac{k}{k-1}\Big)^z =$$

$$= \frac{1}{z(z+1)}\frac{\Big(\prod\limits_{k=2}^{m} k\Big)\Big(\prod\limits_{k=2}^{m} k^z\Big)}{\Big(\prod\limits_{k=2}^{m}(z+k)\Big)\Big(\prod\limits_{k=2}^{m}(k-1)^z\Big)} = \frac{m!m^z}{\prod\limits_{k=0}^{m}(z+k)},$$

hiszen

$$\frac{\prod\limits_{k=2}^{m} k^z}{\prod\limits_{k=2}^{m} (k-1)^z} = \frac{m^z \prod\limits_{k=2}^{m-1} k^z}{\prod\limits_{j=1}^{m-1} j^z} = \frac{m^z \prod\limits_{k=2}^{m-1} k^z}{\prod\limits_{j=2}^{m-1} j^z} = m^z. \tag{4}$$

Tehát azt kaptuk, hogy ha $z \in \mathbb{C}$ és $\Re(z) > 0$, akkor minden $\mathbb{N}^* \ni m$-re

$$\Gamma_m(z) = \frac{m! m^z}{\prod\limits_{k=0}^{m} (z+k)} \qquad (5).$$

Ha $m \in \mathbb{N}^*$ és $t \in]0, m[$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\Big(1 - \frac{t}{m}\Big)^m \Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^n \leq \left(\frac{m\Big(1 - \frac{t}{m}\Big) + n\Big(1 + \frac{t}{n}\Big)}{m+n}\right)^{m+n} = 1,$$

következésképpen rögzített t és m esetén minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra $\Big(1 - \frac{t}{m}\Big)^m \leq \frac{1}{\Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^n}$,

ezért

$$\Big(1 - \frac{t}{m}\Big)^m \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^n} = \frac{1}{e^t} = e^{-t}.$$

Ebből látható, hogy ha $m \in \mathbb{N}^*$ és $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $\Re(z) > 0$, akkor minden $t \in]0, m[$ valós számra

$$\left| t^{z-1} \Big(1 - \frac{t}{m}\Big)^m \right| = t^{\Re(z)-1} \Big(1 - \frac{t}{m}\Big)^m \leq t^{\Re(z)-1} e^{-t}.$$

Mivel $z \in \mathbb{C}$ és $\Re(z) > 0$ esetén az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \begin{cases} t^{\Re(z)-1} e^{-t} & \text{, ha } t \in]0, m[; \\ 0 & \text{, ha } t \in \mathbb{R} \setminus]0, m[\end{cases}$$

függvény integrálható $\mu_{\mathbb{R}}$ szerint, és minden $t \in \mathbb{R}_+^*$ pontra

$$\lim_{m \to \infty} t^{z-1} \Big(1 - \frac{t}{m}\Big)^m = t^{z-1} e^{-t},$$

így a Lebesgue-tétel alapján

$$\Gamma(z) = \int\limits_{]0, \to[} t^{z-1} e^{-t} \, d\mu_{\mathbb{R}}(t) = \lim_{m \to \infty} \int\limits_{]0, m[} t^{z-1} \Big(1 - \frac{t}{m}\Big)^m d\mu_{\mathbb{R}}(t) = \lim_{m \to \infty} \Gamma_m(z),$$

ami (5) miatt ekvivalens a bizonyítandó egyenlőséggel. ■

3.4.7. Állítás. (**A gamma-függvény Weierstrass-féle előállítása.**) *Minden* $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$ *esetén*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{k}\Big) e^{-z/k},$$

ahol γ *az Euler-Mascheroni állandó (X. fejezet, 2. pont,* **9***. gyakorlat).*

Bizonyítás. Ha $z \in \mathbb{C}$ és $\Re(z) > 0$, akkor a Γ függvény Gauss-féle alakjából kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{m\to\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+m)}{m!m^z} = z \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^z} \prod_{k=1}^{m} \Big(1+\frac{z}{k}\Big) =$$

$$= z \lim_{m\to\infty} \Big(e^{z\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \log(m)\right)} \prod_{k=1}^{m} \Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-z/k}\Big) = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-z/k},$$

ahol felhasználtuk a X. fejezet, 2. pont, **9**. gyakorlatot. ■

3.4.8. Állítás. (**A gamma-függvény Cauchy-féle előállítása.**) *Ha $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ és $\Re(z) \in]-m-1, -m[$, akkor*

$$\Gamma(z) = \int\limits_{]0,\to[} t^{z-1}\Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!}\Big) d\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

Bizonyítás. Legyen $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $-(m+1) < \Re(z) < -m$. A Γ függvény definíciója szerint

$$\Gamma(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k} + \int\limits_{]1,\to[} t^{z-1}e^{-t}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k} + \Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k} + \int\limits_{]1,\to[} t^{z-1}e^{-t}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t)\Big).$$

A X. fejezet, 2. pont, **14**. gyakorlat, valamint a Lebesgue-tétel alkalmazásával igazolható, hogy $\Re(z) > -m-1$ miatt

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int\limits_{]0,1[} t^{z+k-1}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \int\limits_{]0,1[} t^{z-1}\Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!}\Big)\, d\mu_{\mathbb{R}}(t),$$

és $\Re(z) < -m$ miatt

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k} + \int\limits_{]1,\to[} t^{z-1}e^{-t}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \int\limits_{]1,\to[} t^{z+k-1}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t) + \int\limits_{]1,\to[} t^{z-1}e^{-t}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \int\limits_{]1,\to[} t^{z-1}\Big(e^{-t} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(-t)^k}{k!}\Big)\, d\mu_{\mathbb{R}}(t) = \int\limits_{]1,\to[} t^{z-1}\Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!}\Big)\, d\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

teljesül. ■

3.4.9. Állítás. *Legyenek $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olyan számok, amelyekre $\Re(z_1) > 0$ és $\Re(z_2) > 0$. Ekkor a*

$$]0,1[\to \mathbb{C}; \quad t \mapsto t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1}$$

függvény Lebesgue-integrálható.

Bizonyítás. ■

3.4.10. Definíció. B *jelöli azt a $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvényt, amelyre*

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{B}) := \{ \ (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid (\Re(z_1) > 0) \wedge (\Re(z_2) > 0) \ \},$$

és minden $(z_1, z_2) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{B})$ esetén

$$\mathrm{B}(z_1, z_2) := \int\limits_{]0,1[} t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

Ezt a függvényt **béta-függvénynek** *nevezzük.*

3.4.11. Állítás. *Minden $(z_1, z_2) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{B})$ esetén*

$$\mathrm{B}(z_1, z_2) = \mathrm{B}(z_2, z_1),$$

vagyis a béta-függvény szimmetrikus, és

$$\mathrm{B}(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1 + z_2)}.$$

Bizonyítás. A béta-függvény szimmetrikusságának bizonyításához elegendő helyettesítéses integrálást végrehajtani a $\sigma :]0,1[\to]0,1[; \ t \mapsto 1 - t$ C^1-diffeomorfizmussal.

Legyen $(z_1, z_2) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{B})$. A $\sigma :]0, \to [\to]0,1[; \ s \mapsto \dfrac{s}{1+s}$ C^1-diffeomorfizmussal helyettesítéses integrálást végrehajtva belátható, hogy

$$\mathrm{B}(z_1, z_2) = \int\limits_{]0,\to[} \frac{s^{z_1-1}}{(1+s)^{z_1+z_2}} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

Továbbá, a Γ függvény Euler-féle előállítása alapján kapjuk, hogy $s \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$\int\limits_{]0,\to[} t^{z_1+z_2-1} e^{-(1+s)t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \frac{\Gamma(z_1 + z_2)}{(1+s)^{z_1+z_2}}.$$

A X. fejezet, 2. pont, **14**. gyakorlat eredményei alapján igazolható, hogy a

$$]0, \to [\times]0, \to [\ \to \ \mathbb{C}; \quad (t,s) \mapsto s^{z_1-1} t^{z_1+z_2-1} e^{-(1+s)t}$$

függvény $\mu_{\mathbb{R}} \otimes \mu_{\mathbb{R}}$-integrálható, ezért a Lebesgue–Fubini-tétel alapján

$$\mathrm{B}(z_1, z_2)\Gamma(z_1 + z_2) = \int\limits_{]0,\to[} \Big(\int\limits_{]0,\to[} t^{z_1+z_2-1} e^{-(1+s)t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) \Big) s^{z_1-1} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) =$$

$$= \int\limits_{]0,\to[} \Big(\int\limits_{]0,\to[} s^{z_1-1} e^{-(1+s)t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) \Big) t^{z_1+z_2-1} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \Gamma(z_1)\Gamma(z_2). \blacksquare$$

3.5. Alkalmazás: Gauss-integrálok

3.5.1. Állítás. (**Gauss-integrálok.**) *Minden* $m \in \mathbb{N}$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *esetén*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^{2m+1} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = 0,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^m e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\alpha^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Speciálisan, fennállnak az

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^{2m} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \frac{1}{(2\alpha)^m} \frac{(2m)!}{2^m m!} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. Legyenek $m \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Tekintsük az $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$; $t \mapsto \sqrt{\dfrac{t}{\alpha}}$ C^1-diffeomorfizmust. A helyettesítéses integrálás tétele alapján az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto |x|^m e^{-\alpha x^2}$ függvény pontosan akkor Lebesgue-integrálható az $\mathbb{R}_+^*$ halmazon, ha az $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$; $t \mapsto t^{\frac{m-1}{2}} e^{-t}$ függvény Lebesgue-integrálható az $\mathbb{R}_+^*$ halmazon, és ha e két függvény közül az egyik Lebesgue-integrálható az $\mathbb{R}_+^*$ halmazon, akkor

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^*} |x|^m e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \frac{1}{2\alpha^{\frac{m+1}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} t^{\frac{m-1}{2}} e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

De $\dfrac{m-1}{2} = \dfrac{m+1}{2} - 1$ és $\dfrac{m+1}{2} > 0$, ezért a **2**. gyakorlat b) pontja szerint az $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$; $t \mapsto t^{\frac{m-1}{2}} e^{-t}$ függvény Lebesgue-integrálható az $\mathbb{R}_+^*$ halmazon, továbbá a Γ függvény Euler-féle előállítása (**2**. gyakorlat c) pontja) alapján

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^*} t^{\frac{m-1}{2}} e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} t^{\frac{m+1}{2}-1} e^{-t} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t) = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right).$$

Ugyanakkor a $\mathbb{R}_+^* \to -\mathbb{R}_+^*$; $t \to -t$ leképezés C^1-diffeomorfizmus, így az előzőek és a helyettesítéses integrálás tétele alapján az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto |x|^m e^{-\alpha x^2}$ függvény Lebesgue-integrálható a $-\mathbb{R}_+^*$ halmazon és

$$\int\limits_{-\mathbb{R}_+^*} |x|^m e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} |x|^m e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x).$$

Ebből kapjuk hogy az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto |x|^m e^{-\alpha x^2}$ függvény Lebesgue-integrálható és

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^m e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = 2 \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} |x|^m e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\alpha^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^{2m+1}e^{-\alpha x^2}$ függvény folytonos, tehát Lebesgue-mérhető (X. fejezet, 1. pont, **4**. gyakorlat), és az előzőek szerint az abszolútérték-függvénye Lebesgue-integrálható, ezért az integrálhatóság kritériuma alapján ez a függvény is Lebesgue-integrálható, és az integrálja 0, ami azonnal látszik az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $t \mapsto -t$ C^1-diffeomorfizmussal való helyettesítéses integrálás végrehajtása után. ■

3.6. Gyakorlatok

1. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az 1 értékű konstansfüggvény, és $\sigma := \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2$, akkor

$$\int\limits_{]0,1[} f \; \mathrm{d}\mu_1 = 1 \neq 0 = \int\limits_{]-1,+1[} (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma) \; \mathrm{d}\mu_1,$$

$$\int\limits_{]0,1[} f \; \mathrm{d}\mu_1 = 1 \neq 2 = \int\limits_{]-1,+1[} (f \circ \sigma)|\mathrm{D}\sigma| \; \mathrm{d}\mu_1,$$

holott $\sigma\langle[-1,+1]\rangle = [0,1]$ és a σ függvény C^1-osztályú, sőt valós analitikus (de *nem monoton* a $[-1,1]$ intervallumon). Ugyanakkor fennáll az

$$\int\limits_{\sigma(-1)}^{\sigma(+1)} f \; \mathrm{d}\mu_1 = 0 = \int\limits_{-1}^{+1} (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma) \; \mathrm{d}\mu_1$$

egyenlőség.

5. (*Gömbi koordinátázás.*) Legyen F Banach-tér és $f : \mathbb{R}^3 \to F$ függvény. Ekkor $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^3, \mathscr{R}_3, \mu_3)$ ekvivalens azzal, hogy a

$$]0,\to[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to F;$$
$$(r,\theta,\varphi) \mapsto f(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))r^2\sin(\theta)$$

függvény integrálható az $]0,\to[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt halmazon a μ_3 Lebesgue-mérték szerint. Továbbá, ha $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^3, \mathscr{R}_3, \mu_3)$, akkor

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f \; \mathrm{d}\mu_3 = \int\limits_{]0,\to[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[} f(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))r^2\sin(\theta) \; \mathrm{d}\mu_3(r,\theta,\varphi).$$

(*Útmutatás.* Tekintsük a

$$\sigma :]0,\to[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3; \quad (r,\theta,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$$

leképezést. Könnyen belátható, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Im}(\sigma) = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}$, tehát $\mathrm{Im}(\sigma)$ olyan nyílt halmaz $\mathbb{R}^3$-ban, amelynek $\mathbb{R}^3$-ra vett komplementuma μ_3-eltűnő halmaz (**9**. gyakorlat). Továbbá, a σ függvény C^1-diffeomorfizmus a $]0,\to[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ nyílt halmaz és $\mathrm{Im}(\sigma)$ között: ez azonnal látható, miután felírjuk a σ függvény inverzét. Minden $(r,\theta,\varphi) \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ esetén egyszerű számolással kapjuk a

$$(\mathrm{D}\sigma)(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

egyenlőséget, amiből következik, hogy

$$(\det(\mathrm{D}\sigma))(r,\theta,\varphi) = r^2\sin(\theta).$$

Ezután hivatkozhatunk a helyettesítéses integrálás tételének első következményére.)

6. (*Hengerkoordinátázás.*) Legyen F Banach-tér és $f : \mathbb{R}^3 \to F$ függvény. Ekkor $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^3, \mathscr{R}_3, \mu_3)$ ekvivalens azzal, hogy a

$$]0,\to[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} \to F; \quad (\varrho,\varphi,z) \mapsto f(\varrho\cos(\varphi),\varrho\sin(\varphi),z)\varrho$$

függvény integrálható az $]0,\to[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt halmazon a μ_3 Lebesgue-mérték szerint. Továbbá, ha $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^3, \mathscr{R}_3, \mu_3)$, akkor

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f \;\mathrm{d}\mu_3 = \int\limits_{]0,\to[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}} f(\varrho\cos(\varphi),\varrho\sin(\varphi),z)\varrho \;\mathrm{d}\mu_3(\varrho,\varphi,z).$$

(*Útmutatás.* Tekintsük a

$$\sigma :]0,\to[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}^3; \quad (\varrho,\varphi,z) \mapsto (\varrho\cos(\varphi),\varrho\sin(\varphi),z)$$

leképezést. Könnyen belátható, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Im}(\sigma) = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}$, tehát $\mathrm{Im}(\sigma)$ olyan nyílt halmaz $\mathbb{R}^3$-ban, amelynek $\mathbb{R}^3$-ra vett komplementuma μ_3-eltűnő halmaz (**9**. gyakorlat). Továbbá, a σ függvény C^1-diffeomorfizmus a $]0,\to[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$ nyílt halmaz és $\mathrm{Im}(\sigma)$ között: ez azonnal látható, miután felírjuk a σ függvény inverzét. Minden $(\varrho,\varphi,z) \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ esetén egyszerű számolással kapjuk a

$$(\mathrm{D}\sigma)(\varrho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\varrho\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \varrho\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

egyenlőséget, amiből következik, hogy

$$(\det(\mathrm{D}\sigma))(\varrho,\varphi,z) = \varrho.$$

Ezután hivatkozhatunk a helyettesítéses integrálás tételének első következményére.)

7. Legyen $C \in \mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ olyan mátrix, amelyhez létezik $A \in \mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ úgy, hogy $C = A^T \cdot A$ (ahol A^T az A mátrix transzponáltja és $\cdot$ a mátrixszorzás). Legyen továbbá $a \in \mathbb{R}^n$ rögzített, és értelmezzük a következő függvényt

$$G_{a,C} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*_+; \quad x \mapsto \frac{\sqrt{\det(C)}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(x-a|C(x-a)\Big)\Big),$$

ahol $(\cdot|\cdot)$ jelöli az *euklidészi skalárszorzást* $\mathbb{R}^n$ felett. Ezt a leképezést "a" *várható értékű*, "C" *kovariancia-mátrixú Gauss-féle eloszlásfüggvénynek* nevezzük.

a) A $G_{a,C}$ függvény μ_n-integrálható és

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{a,C} \;\mathrm{d}\mu_n = 1.$$

b) Az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} G_{a,C} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény μ_n-integrálható és

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} G_{a,C} \; \mathrm{d}\mu_n = a.$$

c) Értelmezzük a következő függvényt

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - a) \otimes (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - a) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R}); \quad x \mapsto \Big((x_j - a_j)(x_k - a_k) \Big)_{(j,k) \in n \times n}.$$

Ekkor az $\Big((\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - a) \otimes (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - a) \Big) G_{a,C} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ függvény μ_n-integrálható és

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big((\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - a) \otimes (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - a) \Big) G_{a,C} \; \mathrm{d}\mu_n = C.$$

(Ez azt jelenti, hogy az $(a, C) \in \mathbb{R}^n \times \mathscr{GL}(n, \mathbb{R})$ pár *rekonstruálható* a $G_{a,C}$ függvényből.)

(*Útmutatás.* Legyen $A \in \mathscr{GL}(n, \mathbb{R})$ olyan, hogy $C = A^T \cdot A$, és tekintsük a

$$\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad x \mapsto A^{-1} x + a$$

leképezést. A σ függvény C^1-diffeomorfizmus és $\det(\mathrm{D}\sigma)$ egyenlő az $\dfrac{1}{\det(A)}$ értékű konstansfüggvénnyel. Ezért a helyettesítéses integrálás tétele alapján a $G_{a,C}$ függvény pontosan akkor μ_n-integrálható, ha az

$$\Bigg(\bigg(\exp \Big(-\frac{1}{2} \Big(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - a | C \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - a) \Big) \Big) \bigg) \circ \sigma \Bigg) |\det(\mathrm{D}\sigma)| = \frac{1}{|\det(A)|} \exp \Big(-\frac{1}{2} \| \cdot \|^2 \Big)$$

függvény μ_n-integrálható, ahol $\| \cdot \|$ az euklidészi normát jelöli $\mathbb{R}^n$ felett. Az euklidészi skalárszorzás definíciója alapján minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\exp \Big(-\frac{1}{2} \|x\|^2 \Big) = \mathop{\mathrm{P}}_{k \in n} \exp \Big(-\frac{1}{2} x_k^2 \Big).$$

Ezért a $G_{a,C}$ függvény μ_n-integrálhatóságához *elégséges* az, hogy az $\exp \Big(-\dfrac{1}{2} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \Big) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény μ_1-integrálható legyen; továbbá, ha $\exp \Big(-\dfrac{1}{2} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \Big) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_1, \mu_1)$, akkor

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{a,C} \; \mathrm{d}\mu_n &= \frac{\sqrt{\det(C)}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{|\det(A)|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp \Big(-\frac{1}{2} \| \cdot \|^2 \Big) \; \mathrm{d}\mu_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp \Big(-\frac{1}{2} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \Big) \; \mathrm{d}\mu_1 \Big)^n \end{aligned}$$

is teljesül, ahol felhasználtuk a $\det(C) = (\det(A))^2$ egyenlőséget. Ezután a) bizonyításához elég a megfelelő Gauss-integrált alkalmazni (3.5.1.).)

8. (*Euklidészi gömbök és ellipszoidok térfogata.*)

a) Minden $a \in \mathbb{R}^n$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén legyen $\overline{\mathrm{B}}_r(a, n)$ az a középpontú, r-sugarú, euklidészi norma szerinti zárt gömb $\mathbb{R}^n$-ben. Ha $a \in \mathbb{R}^n$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\overline{\mathrm{B}}_r(a,n) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, és

$$\mu_n(\overline{\mathrm{B}}_r(a,n)) = r^n \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

b) Minden $a \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ esetén legyen $\overline{\mathrm{E}}_{\mathbf{r}}(a,n)$ az a középpontú, $\mathbf{r}$-sugarú, euklidészi norma szerinti zárt *ellipszoid* $\mathbb{R}^n$-ben, vagyis

$$\overline{\mathrm{E}}_{\mathbf{r}}(a,n) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k\in n} \frac{(x_k - a_k)^2}{r_k^2} \leq 1 \right\}.$$

Ha $a \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, akkor $\overline{\mathrm{E}}_{\mathbf{r}}(a,n) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, és

$$\mu_n(\overline{\mathrm{E}}_{\mathbf{r}}(a,n)) = \Big(\mathop{\mathrm{P}}_{k\in n} r_k\Big) \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

c) Az euklidészi gömbök és ellipszoidok topologikus határa μ_n-eltűnő halmaz.

(*Útmutatás.* a) Először alkalmas helyettesítéses integrálással igazolható a

$$\mu_n(\overline{\mathrm{B}}_r(a,n)) = r^n \mu_n(\overline{\mathrm{B}}_1(0,n))$$

összefüggés, tehát elég csak a $\mathrm{B}_1(0,n)$ gömb Lebesgue-mértékét kiszámítani. A Lebesgue–Fubini-tétel alapján kapjuk, hogy minden $n > 1$ természetes számra

$$\mu_n(\overline{\mathrm{B}}_1(0,n)) = \int_{-1}^{+1} \mu_{n-1}\Big(\mathrm{B}_{\sqrt{1-t^2}}(0,n-1)\Big)\, \mathrm{d}\mu_1(t) =$$

$$= \mu_{n-1}(\overline{\mathrm{B}}_1(0,n-1)) \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, \mathrm{d}\mu_1(t).$$

Ezzel rekurzív formulát kaptunk a keresett számok meghatározására. A konkrét értékek kiszámításához fel kell használni a Γ függvény Euler-féle előállítását (3.4.4.).

b) Alkalmas helyettesítéses integrálással visszavezethető az a) állításra.

c) Legyen $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan zérussorozat $\mathbb{R}_+^*$-ben, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_k < r$. Ekkor az a) állítás alapján minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\mu_n(\overline{\mathrm{B}}_r(a,n) \setminus \overline{\mathrm{B}}_{r-\varepsilon_k}(a,n))) = (r^n - (r-\varepsilon_k)^n) \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

tehát a $\Big(\mu_n(\overline{\mathrm{B}}_r(a,n) \setminus \overline{\mathrm{B}}_{r-\varepsilon_k}(a,n))\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ számsorozat 0-hoz konvergál. Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\mathrm{Fr}(\mathrm{B}_r(a,n)) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(a,n) \setminus \overline{\mathrm{B}}_{r-\varepsilon_k}(a,n)$, ezért a $\overline{\mathrm{B}}_r(a,n)$ gömb topologikus határa μ_n-eltűnő halmaz. Az ellipszoidok esetében is hasonlóan járhatunk el.)

9. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ *affin altér*, vagyis olyan halmaz, amelyhez létezik $a \in H$ úgy, hogy a $H - a := \{x \in \mathbb{R}^n | x + a \in H\}$ halmaz lineáris altere $\mathbb{R}^n$-nek. Ha $H \neq \mathbb{R}^n$, akkor H μ_n-eltűnő halmaz.

(*Útmutatás.* Egyszerű lineáris algebrai meggondolásokkal igazolható olyan $A \in \mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ és $a \in \mathbb{R}^n$ létezése, amelyre

$$A\langle H\rangle + a \subseteq \{(x_k)_{k\in n} \in \mathbb{R}^n \mid x_{n-1} = 0\}.$$

Ezért a Lebesgue-mérték invariancia-tulajdonságai alapján elég azt igazolni, hogy a fenti tartalmazás jobb oldalán álló halmaz (amit H_n-nel fogunk jelölni) μ_n-eltűnő halmaz. Nyilvánvaló, hogy $H_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big([-m, m[^{n-1} \times \{0\}\Big)$, ezért elég azt belátni, hogy minden $\mathbb{R}_+^* \ni c$-re a $[-c, c[^{n-1} \times \{0\}$ halmaz μ_n-eltűnő halmaz. Legyen $c \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve és vegyünk egy $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor

$$[-c, c[^{n-1} \times \{0\} \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big([-c, c[^{n-1} \times [0, \varepsilon_k[\Big),$$

és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $[-c, c[^{n-1} \times [0, \varepsilon_k[\in \mathscr{S}_n$ és $\mu_n\left([-c, c[^{n-1} \times [0, \varepsilon_k[\right) = (2c)^{n-1}\varepsilon_k$. Ezért minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mu_n^*\left([-c, c[^{n-1} \times \{0\}\right) \leq (2c)^{n-1}\varepsilon_k$, tehát $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ miatt $[-c, c[^{n-1} \times \{0\}$ μ_n-eltűnő halmaz.)

4. fejezet

Alkalmazás: Cauchy-feladatok

4.1. Közönséges differenciálegyenletek megoldásai és maximális megoldásai

4.1.1. Definíció. *Legyen F normált tér és $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény.*

– Azt mondjuk, hogy a $\varphi : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ függvény **megoldása az f által meghatározott közönséges differenciálegyenletnek**, *ha $\mathrm{Dom}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és φ differenciálható függvény, és minden $t \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ esetén $(t, \varphi(t)) \in \mathrm{Dom}(f)$, valamint*

$$(\mathrm{D}\varphi)(t) = f(t, \varphi(t)) \tag{E}$$

teljesül.

– Azt mondjuk, hogy a φ függvény **maximális megoldása az f által meghatározott közönséges differenciálegyenletnek**, *ha φ megoldása az f által meghatározott közönséges differenciálegyenletnek, és az f által meghatározott közönséges differenciálegyenlet minden ψ megoldására teljesül az, hogy ha $\varphi \subseteq \psi$, akkor $\psi = \varphi$ (vagyis φ a kiterjesztés reláció szerint maximális elem az f által meghatározott közönséges differenciálegyenlet megoldásainak halmazában).*

– Azt mondjuk, hogy a φ függvény **globális megoldása az f által meghatározott közönséges differenciálegyenletnek**, *ha φ megoldása az f által meghatározott közönséges differenciálegyenletnek és $\mathrm{Dom}(\varphi) = \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f) \rangle$.*

A differenciálegyenlettel kapcsolatos "közönséges" jelző arra utal, hogy az (E) egyenletben egyváltozós valós függvény deriváltja szerepel. Az egyváltozós komplex függvények deriváltját vagy deriváltjait tartalmazó differenciálegyenleteket egészen másként kell kezelni, mint az alábbiakban vizsgált közönséges differenciálegyenleteket. A valós vagy komplex többváltozós függvények deriváltját vagy deriváltjait tartalmazó parciális differenciálegyenletek vizsgálata pedig az analízis egy külön ágát képezi.

Mivel csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk, a továbbiakban mindenütt elhagyjuk a "közönséges" jelzőt. Megjegyezzük, hogy a "maximális megoldás" helyett a "nem folytatható megoldás" vagy "teljes megoldás" kifejezéseket is szokták használni.

Világos, hogy ha F normált tér, akkor az $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény által meghatározott differenciálegyenlet minden globális megoldása maximális megoldás. Az is nyilvánvaló, hogy ha φ megoldása az $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény által meghatározott differenciálegyenletnek, akkor $\mathrm{Dom}(\varphi) \subseteq \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f) \rangle$, ahol $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R} \times F \to \mathbb{R}$ az első projekció, ezért, ha $\mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle$ nem nyílt intervallum $\mathbb{R}$-ben, akkor nem létezhet globális megoldás. Kevésbé nyilvánvaló, de könnyen belátható, hogy globális megoldás még akkor sem szükségképpen létezik, ha $\mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f)\rangle = \mathbb{R}$ (**5**. gyakorlat). Azonban kiterjesztés tekintetében maximális megoldások mindig léteznek: ez világosan látható a következő állítás bizonyításából.

4.1.2. Állítás. *Ha F normált tér, akkor az $f : \mathbb{R}\times F \rightarrowtail F$ függvény által meghatározott differenciálegyenlet minden φ megoldásához létezik az f függvény által meghatározott differenciálegyenletnek olyan ψ maximális megoldása, amely φ-nek kiterjesztése.*

Bizonyítás. Legyen φ megoldása az f függvény által meghatározott differenciálegyenletnek, és jelölje $\mathfrak{S}$ azon megoldások halmazát, amelyek kiterjesztései φ-nek. Jelölje $\leq$ a kiterjesztés (azaz tartalmazás) relációt az $\mathfrak{S}$ halmaz felett.

Megmutatjuk, hogy $(\mathfrak{S}, \leq)$ induktívan rendezett halmaz. Ehhez legyen $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ lineárisan rendezett rendszer $\mathfrak{S}$-ben, tehát minden $\alpha, \beta \in A$ esetén $\psi_\alpha \subseteq \psi_\beta$ vagy $\psi_\beta \subseteq \psi_\alpha$. Világos, hogy ekkor minden $\alpha, \beta \in A$ esetén $\psi_\alpha = \psi_\beta$ a $\mathrm{Dom}(\psi_\alpha)\cap\mathrm{Dom}(\psi_\beta)$ halmazon, ezért $\psi := \bigcup_{\alpha\in A} \psi_\alpha$ olyan függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(\psi) = \bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{Dom}(\psi)$ és $\mathrm{Im}(\psi) = \bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{Im}(\psi_\alpha)$, valamint minden $\alpha \in A$ indexre $\psi_\alpha \subseteq \psi$ (**ENS** 2.7.9.). Továbbá, minden $\alpha \in A$ esetén $\mathrm{Im}(\psi_\alpha) \subseteq F$, így $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq F$. Minden $\alpha \in A$ esetén $\mathrm{Dom}(\psi_\alpha) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, így $\mathrm{Dom}(\psi) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Ha $s, t \in \mathrm{Dom}(\psi)$ és $s \leq t$, akkor léteznek olyan $\alpha, \beta \in A$ indexek, hogy $s \in \mathrm{Dom}(\psi_\alpha)$ és $t \in \mathrm{Dom}(\psi_\beta)$, ezért $s, t \in \mathrm{Dom}(\psi_\alpha)$ vagy $s, t \in \mathrm{Dom}(\psi_\beta)$, és mivel $\mathrm{Dom}(\psi_\alpha)$ és $\mathrm{Dom}(\psi_\beta)$ intervallumok, így $[s, t] \subseteq \mathrm{Dom}(\psi_\alpha)$ vagy $[s, t] \subseteq \mathrm{Dom}(\psi_\beta)$, tehát $[s, t] \subseteq \mathrm{Dom}(\psi)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Dom}(\psi) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha $t \in \mathrm{Dom}(\psi)$, akkor van olyan $\alpha \in A$, hogy $t \in \mathrm{Dom}(\psi_\alpha)$, és ψ_α megoldása az f függvény által meghatározott differenciálegyenletnek és $\psi_\alpha \subseteq \psi$, ezért $(t, \psi(t)) = (t, \psi_\alpha(t)) \in \mathrm{Dom}(f)$ és a differenciálhatóság lokalitása folytán ψ differenciálható a t pontban, hiszen a $\mathrm{Dom}(\psi_\alpha)$ nyílt halmazon egyenlő ψ_α-val, amely differenciálható t-ben, továbbá $(\mathrm{D}\psi)(t) = (\mathrm{D}\psi_\alpha)(t) = f(t, \psi_\alpha(t)) = f(t, \psi(t))$. Ezzel megmutattuk, hogy ψ is megoldása az f függvény által meghatározott differenciálegyenletnek, és természetesen $\varphi \subseteq \psi$, vagyis $\psi \in \mathfrak{S}$. Ez azt jelenti, hogy ψ felső korlátja (valójában szuprémuma) a $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ rendszernek az $(\mathfrak{S}, \leq)$ rendezett halmazban, tehát $(\mathfrak{S}, \leq)$ induktívan rendezett halmaz.

A Zorn-lemma szerint létezik maximális eleme az $(\mathfrak{S}, \leq)$ rendezett halmaznak. Ha ψ maximális elem az $(\mathfrak{S}, \leq)$ rendezett halmazban, akkor ψ megoldása az f függvény által meghatározott differenciálegyenletnek, és ψ kiterjesztése φ-nek, hiszen $\psi \in \mathfrak{S}$. Továbbá, ha ψ' olyan megoldása az f függvény által meghatározott differenciálegyenletnek, amelyre $\psi \subseteq \psi'$, akkor ψ' kiterjesztése φ-nek, tehát $\psi' \in \mathfrak{S}$, így ψ maximalitása folytán $\psi' = \psi$. Ez azt jelenti, hogy ψ olyan maximális megoldása az f függvény által meghatározott differenciálegyenletnek, amely kiterjesztése φ-nek. ■

4.1.3. Következmény. *Ha F normált tér, akkor az $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény által meghatározott differenciálegyenletnek létezik maximális megoldása.*

Bizonyítás. Az előző állítást alkalmazhatjuk a $\varphi := \emptyset$ függvényre, amely (logikai okok miatt) triviálisan megoldása az f által meghatározott differenciálegyenletnek: így olyan ψ megoldást kapunk, amely maximális. ■

Könnyű példát adni olyan f függvényre, hogy az f által meghatározott differenciálegyenletnek az üres függvény az egyetlen megoldása (**1**. gyakorlat).

4.1.4. Állítás. *Legyen F normált tér és $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény. Ha az f függvény C^n-osztályú, ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor az f által meghatározott differenciálegyenlet minden megoldása C^{n+1}-osztályú. Ha az f függvény C^∞-osztályú, akkor az f által meghatározott differenciálegyenlet minden megoldása C^∞-osztályú.*

Bizonyítás. (I) Az $n \in \mathbb{N}$ esetben az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az $n = 0$ esetben azt tesszük fel, hogy az f függvény C^0-osztályú, vagyis folytonos. Ha $\varphi : I \to F$ megoldása az f által meghatározott differenciálegyenletnek, akkor φ differenciálható, így a

$$\widehat{\varphi} : I \to \mathbb{R} \times F; \quad t \mapsto (t, \varphi(t))$$

függvény is differenciálható, mert a komponens-függvényei differenciálhatóak. Ezért $\widehat{\varphi}$ folytonos függvény, így $\mathrm{D}\varphi = f \circ \widehat{\varphi}$ folytonos függvény, tehát $\varphi \in \mathrm{C}^1(I; F)$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra, és legyen az f függvény C^{n+1}-osztályú. Legyen a $\varphi : I \to F$ függvény megoldása az f által meghatározott differenciálegyenletnek. Mivel az f függvény C^n-osztályú is, így az indukciós hipotézis alapján a φ függvény C^{n+1}-osztályú, következésképpen a fent értelmezett $\widehat{\varphi} : I \to \mathbb{R} \times F$ leképezés is C^{n+1}-osztályú. Ezért a $\mathrm{D}\varphi = f \circ \widehat{\varphi}$ függvény C^{n+1}-osztályú, tehát a φ megoldás-függvény $\mathrm{C}^{(n+1)+1}$-osztályú.

(II) Ha f végtelenszer differenciálható, és φ megoldása az f által meghatározott differenciálegyenletnek, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a f függvény C^n-osztályú, így (I) alapján a φ függvény C^{n+1}-osztályú, következésképpen a φ függvény végtelenszer differenciálható. ■

4.2. Cauchy-feladatokkal kapcsolatos lokális egzisztencia- és unicitás-tétel

4.2.1. Definíció. *Legyen F normált tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény, valamint $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$.*

– *Az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó* **Cauchy-feladat** (*vagy* **kezdeti érték probléma**) **megoldásának** *nevezzük az f által meghatározott differenciálegyenlet minden olyan φ megoldását, amelyre $t_0 \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ és $\varphi(t_0) = x_0$.*

(Tehát $\varphi : \mathbb{R} \rightarrowtail F$ olyan differenciálható függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $t_0 \in \mathrm{Dom}(\varphi)$, $\varphi(t_0) = x_0$, és minden $t \in \mathrm{Dom}(\varphi)$ esetén $(t, \varphi(t)) \in \mathrm{Dom}(f)$, valamint $(\mathrm{D}\varphi)(t) = f(t, \varphi(t))$.)

– *Az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat* **egzisztencia-tartományának** *nevezünk minden olyan $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumot, amelyhez létezik I-n értelmezett megoldása az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak.*

– *Az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat* **unicitás-tartományának** *nevezünk minden olyan $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumot, amelyre $t_0 \in I$, és legfeljebb egy I-n értelmezett megoldása van az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak.*

A Cauchy-feladatokkal kapcsolatos alapvető probléma annak tisztázása, hogy milyen feltételek mellett létezik a Cauchy-feladatnak egyszerre egzisztencia- és unicitás-tartománya.

Nyilvánvaló, hogy ha F normált tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény, valamint $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat minden I egzisztencia-tartományára teljesül az, hogy minden olyan $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum szintén egzisztencia-tartománya az adott Cauchy-feladatnak, amelyre $t_0 \in J \subseteq I$, hiszen ha $\varphi : I \to F$ megoldása az adott Cauchy-feladatnak, akkor a $\varphi|_J$ leszűkített függvény szintén megoldás.

4.2.2. Tétel. (Cauchy-féle lokális egzisztencia- és unicitás-tétel.) *Legyen F Banach-tér és $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény. Tegyük fel, hogy $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$, és létezik t_0-nak olyan I_0 környezete $\mathbb{R}$-ben és létezik x_0-nak olyan U_0 környezete F-ben, amelyekre teljesülnek a következők:*

a) *$I_0 \times U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ (ezért (t_0, x_0) belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek), és f folytonos az $I_0 \times U_0$ halmaz minden pontjában;*

b) *létezik olyan $C \geq 0$ valós szám, hogy minden $t \in I_0$ és $x, x' \in U_0$ esetén*

$$\|f(t, x') - f(t, x)\| \leq C\|x' - x\|,$$

vagyis minden $t \in I_0$ pontra az $f(t, \cdot)|_{U_0} : U_0 \to F$ leképezés C együtthatójú Lipschitz-függvény.

Ekkor létezik olyan $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, amely egzisztencia-tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, továbbá minden olyan $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum unicitás-tartománya az adott Cauchy-feladatnak, amelyre $t_0 \in J \subseteq I$ (ezért I egzisztencia- és unicitás-tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak).

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$, és legyen I_0 olyan környezete t_0-nak $\mathbb{R}$-ben és U_0 olyan környezete x_0-nak F-ben, hogy a) és b) teljesül.

Az f függvény folytonos a (t_0, x_0) pontban, ezért létezik t_0-nak olyan I_* környezete $\mathbb{R}$-ben és létezik x_0-nak olyan U_* környezete F-ben, hogy $I_* \times U_* \subseteq I_0 \times U_0$ és f *korlátos* az $I_* \times U_*$ halmazon (**MET** 7.1.3.). Legyen $M := \sup\limits_{(t,x) \in I_* \times U_*} \|f(t, x)\|$, és $r > 0$ olyan valós szám, hogy $\overline{\mathrm{B}}_r(x_0) \subseteq U_*$.

Megmutatjuk, hogy ha $I \subseteq I_*$ tetszőleges olyan *korlátos* nyílt intervallum, hogy $t_0 \in I$ és a $\varrho_I := \sup\limits_{t \in I} |t - t_0|$ számra $M \cdot \varrho_I \leq r$ teljesül, akkor az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak létezik egyetlen olyan I-n értelmezett megoldása, amelynek értékkészlete részhalmaza az $\overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$ zárt gömbnek.

Ehhez tekintsük azt a

$$K : \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)) \to \mathscr{F}(I; F)$$

függvényt, amely minden $\varphi : I \to \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$ folytonos függvényhez a

$$K(\varphi) : I \to F; \quad t \mapsto x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(t', \varphi(t'))\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t')$$

függvényt rendeli. Ez jól értelmezett, mert minden $\varphi : I \to \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$ folytonos függvényre és $t' \in I$ pontra $(t', \varphi(t')) \in I \times \overline{\mathrm{B}}_r(x_0) \subseteq I_0 \times U_0$, tehát a) alapján f folytonos a $(t', \varphi(t'))$ pontban, így az $I \to F;\ t' \mapsto f(t', \varphi(t'))$ függvény folytonos, tehát lokálisan integrálható az $\mathbb{R}$ feletti Lebesgue-mérték szerint.

Világos, hogy $\varphi \in \mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$ esetén $(K(\varphi))(t_0) = x_0$, és a Newton–Leibniz-tétel alapján a $K(\varphi) : I \to F$ függvény *differenciálható*, és minden $I \ni t$-re $(\mathrm{D}(K(\varphi)))(t) = f(t,\varphi(t))$. Továbbá, minden $\varphi \in \mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$ esetén $\mathrm{Im}(K(\varphi)) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$, mert minden $I \ni t$-re

$$\|K(\varphi)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(t',\varphi(t'))\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \right\| \leq \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \|f(t',\varphi(t'))\|\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \leq$$
$$\leq \Big(\sup_{(t',x')\in I\times\overline{\mathrm{B}}_r(x_0)} \|f(t',x')\| \Big)|t-t_0| \leq M\cdot\varrho_I \leq r,$$

hiszen $M\cdot\varrho_I \leq r$. Tehát $K : \mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_r(x_0)) \to \mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$ függvény. Jelölje d a sup-metrikát a $\mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$ függvényhalmaz felett, tehát minden $\varphi,\psi \in \mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$ esetén

$$d(\varphi,\psi) := \sup_{t\in I} \|\varphi(t) - \psi(t)\|.$$

Az F normált tér teljessége miatt a $\overline{\mathrm{B}}_r(x_0) \subseteq F$ zárt halmaz teljes, így a $(\mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_r(x_0)), d)$ metrikus tér teljes (**MET** 11.3.1.).

Rögzítsünk olyan $C \geq 0$ valós számot, amelyre minden $t \in I_0$ és $x,x' \in U_0$ esetén $\|f(t,x') - f(t,x)\| \leq C\|x'-x\|$. Természetesen ekkor $I \subseteq I_0$ és $\overline{\mathrm{B}}_r(x_0) \subseteq U_0$ miatt minden $t \in I$ és $x,x' \in \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$ esetén $\|f(t,x') - f(t,x)\| \leq C\|x'-x\|$.

Legyenek $\varphi,\psi \in \mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$ rögzítettek. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén minden $t \in I$ pontra

$$\|K^n(\varphi)(t) - K^n(\psi)(t)\| \leq \frac{|t-t_0|^n}{n!}\mathrm{C}^n d(\varphi,\psi), \tag{1}$$

ahol K^n jelöli a $K : \mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_r(x_0)) \to \mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$ függvény n-edik iteráltját (ld. **MET** 9.9.2. Definíció).

Ha $t \in I$, akkor

$$\|K(\varphi)(t) - K(\psi)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(t',\varphi(t')) - f(t',\psi(t'))\Big)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \right\| \leq$$
$$\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(t',\varphi(t')) - f(t',\psi(t'))\|\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \leq C \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|\varphi(t') - \psi(t')\|\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \leq$$
$$\leq C|t-t_0|d(\varphi,\psi) = \frac{|t-t_0|^1}{1!}\mathrm{C}^1 d(\varphi,\psi),$$

tehát az állítás igaz $n = 1$ esetén.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ természetes számra, vagyis minden $t' \in I$ esetén

$$\Big\|K^n(\varphi)(t') - K^n(\psi)(t')\Big\| \leq \frac{|t'-t_0|^n}{n!}\mathrm{C}^n d(\varphi,\psi).$$

Legyen $t \in I$. Ekkor

$$\left\| K^{n+1}(\varphi)(t) - K^{n+1}(\psi)(t) \right\| = \left\| K(K^n(\varphi))(t) - K(K^n(\psi))(t) \right\| =$$
$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(t', K^n(\varphi)(t')) - f(t', K^n(\psi)(t')) \Big) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \right\| \leq$$
$$\leq C \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \left\| K^n(\varphi)(t') - K^n(\psi)(t') \right\| \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \overset{(1)}{\leq}$$
$$\overset{(1)}{\leq} C \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \frac{|t'-t_0|^n}{n!} \mathrm{C}^n d(\varphi,\psi) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') = C^{n+1} \frac{1}{n!} d(\varphi,\psi) \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} |t'-t_0|^n \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \overset{(2)}{=}$$
$$\overset{(2)}{=} C^{n+1} \frac{1}{n!} d(\varphi,\psi) \frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1} = \frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{C}^{n+1} d(\varphi,\psi),$$

ahol

– az $\overset{(1)}{\leq}$ egyenlőtlenségnél az integrandusban felhasználtuk az indukciós hipotézist t helyett a tetszőleges $t' \in [\min(t_0,t), \max(t_0,t)]$ pontot véve;

– a $\overset{(2)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk a

$$\int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} |t'-t_0|^n \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') = \frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1}$$

egyenlőséget, amely a $t \geq t_0$ és $t < t_0$ esetszétválasztással könnyen igazolható a Newton–Leibniz-tétel alkalmazásával.

Ezzel megmutattuk, hogy az állítás az $n+1$ természetes számra is igaz.

Tehát minden $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$ függvényre, és minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és minden $t \in I$ pontra fennáll az (1) egyenlőtlenség, következésképpen minden $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$ függvényre, és minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra

$$d(K^n(\varphi), K^n(\psi)) = \sup_{t \in I} \left\| K^n(\varphi)(t) - K^n(\psi)(t) \right\| \leq \frac{\varrho_I^n}{n!} \mathrm{C}^n d(\varphi,\psi) = \frac{(C\varrho_I)^n}{n!} d(\varphi,\psi).$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(C\varrho_I)^n}{n!} = 0$, így van olyan $n \in \mathbb{N}^*$, hogy $\dfrac{(C\varrho_I)^n}{n!} < 1$, következésképpen a $K : \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)) \to \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$ függvény n-edik iteráltja *kontrakció*. Ezért Banach fixponttétele (**MET** 9.9.3.) szerint létezik egyetlen olyan $\varphi \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$, hogy $K(\varphi) = \varphi$. A fentiek szerint ez a φ függvény olyan I-n értelmezett megoldása az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, amelyre $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$.

Ha $\psi : I \to F$ szintén olyan megoldása ennek a Cauchy-feladatnak, amelyre $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$, akkor $\psi \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_r(x_0))$, és a Newton-Leibniz formula szerint minden $I \ni t$-re

$$\psi(t) - x_0 = \psi(t) - \psi(t_0) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{D}\psi)(t') \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') = \int_{t_0}^{t} f(t', \psi(t')) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t')$$

vagyis ψ fixpontja a K függvénynek, ezért $\psi = \varphi$. Tehát I abban az értelemben unicitás-tartománya az adott Cauchy-feladatnak, hogy legfeljebb egy olyan I-n értelmezett megoldása van, amelynek értékkészlete részhalmaza a $\overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$ gömbnek.

(II) Most feltesszük, hogy $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$, és I_0 olyan környezete t_0-nak $\mathbb{R}$-ben és U_0 olyan környezete x_0-nak F-ben, hogy a) és b) teljesül, továbbá I_* olyan *nyílt* környezete t_0-nak $\mathbb{R}$-ben és U_* olyan *nyílt* környezete x_0-nak F-ben, hogy $I_* \times U_* \subseteq I_0 \times U_0$ és $M := \sup_{(t,x)\in I_*\times U_*} \|f(t,x)\| < +\infty$. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, hogy $\overline{\mathrm{B}}_r(x_0) \subseteq U_*$.

Megmutatjuk, hogy ha $I \subseteq \mathbb{R}$ olyan korlátos nyílt intervallum, hogy $t_0 \in I \subseteq I_*$ és $M \cdot \varrho_I \le r$ (ahol ismét $\varrho_I := \sup_{t\in I} |t - t_0|$), akkor I unicitás-tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak.

Az (I) bekezdés alapján az adott Cauchy-feladatnak létezik egyetlen olyan φ megoldása, amely az I intervallumon értelmezett és $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x_0)$. Legyen $\psi : I \to F$ tetszőleges megoldása az adott Cauchy-feladatnak, és tekintsük a $[\varphi = \psi] := \{t \in I | \varphi(t) = \psi(t)\}$ halmazt. Azt fogjuk igazolni, hogy $[\varphi = \psi] = I$, ezért $\psi = \varphi$.

A φ és ψ függvények folytonossága miatt a $[\varphi = \psi]$ halmaz *zárt* az I (euklidészi) metrikus altérben (de $\mathbb{R}$-ben nem szükségképpen zárt). Megmutatjuk, hogy ez a halmaz *nyílt* is I-ben. Ha ez így van, akkor az I (euklidészi) metrikus altér összefüggősége folytán $[\varphi = \psi] = \emptyset$ vagy $[\varphi = \psi] = I$, tehát $t_0 \in [\varphi = \psi]$ miatt $[\varphi = \psi] = I$, vagyis $\varphi = \psi$.

Legyen $t \in [\varphi = \psi]$ rögzített pont. Ekkor I_* környezete t-nek $\mathbb{R}$-ben, és U_* nyílt környezete $\varphi(t)$-nek F-ben, és f folytonos az $I_* \times U_*$ halmazon, valamint $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy minden $t' \in I_*$ és $x, x' \in U_*$ esetén $\|f(t', x') - f(t', x)\| \le C\|x' - x\|$. Továbbá, az f függvény korlátos az $I_* \times U_*$ halmazon (az M szuprémummal), és az U_* halmaz nyíltsága miatt vehetünk olyan $r' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy $\overline{\mathrm{B}}_{r'}(\varphi(t)) \subseteq U_*$. Ezért alkalmazhatjuk a bizonyítás (I) részét az f függvényre, és (t_0, x_0) helyett a $(t, \varphi(t))$ pontra, valamint I_0 helyett I_*-ra, U_0 helyett U_*-ra, és r helyett r'-re. Azt kapjuk, hogy ha $I' \subseteq \mathbb{R}$ olyan korlátos nyílt intervallum, hogy $t \in I' \subseteq I_*$ és $M \cdot \sup_{t'\in I'} |t' - t| \le r'$, akkor az f függvényhez és a $(t, \varphi(t))$ kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak létezik egyetlen olyan I'-n értelmezett megoldása, amelynek értékkészlete részhalmaza a $\overline{\mathrm{B}}_{r'}(\varphi(t))$ zárt gömbnek.

A φ függvény folytonos t-ben, ezért létezik t-nek olyan $I'_\varphi \subseteq I$ nyílt intervallum-környezete, hogy $\varphi\langle I'_\varphi\rangle \subseteq \overline{\mathrm{B}}_{r'}(\varphi(t))$. A ψ függvény folytonos t-ben és $\psi(t) = \varphi(t)$, ezért létezik t-nek olyan $I'_\psi \subseteq I$ nyílt intervallum-környezete, hogy $\psi\langle I'_\psi\rangle \subseteq \overline{\mathrm{B}}_{r'}(\psi(t)) = \overline{\mathrm{B}}_{r'}(\varphi(t))$. Az $I' \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumot válasszuk meg úgy, hogy $t \in I'$, és $I' \subseteq I'_\varphi \cap I'_\psi$, és $M \cdot \sup_{t'\in I'} |t' - t| \le r'$ teljesüljön. Ekkor a fentiek alapján az f függvényhez és a $(t, \varphi(t))$ kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak létezik egyetlen olyan I'-n értelmezett megoldása, amely a $\overline{\mathrm{B}}_{r'}(\varphi(t))$ gömbbe érkezik. A φ és ψ függvények I'-re vett leszűkítései ilyenek, ezért $I' \subseteq [\varphi = \psi]$. Ez azt jelenti, hogy a $[\varphi = \psi]$ halmaz nyílt az I (euklidészi) metrikus altérben.

(III) Végül, tegyük fel, hogy $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$, és létezik t_0-nak olyan I_0 környezete $\mathbb{R}$-ben és létezik x_0-nak olyan U_0 környezete F-ben, amelyekre a) és b) teljesül, továbbá I_* és U_* olyan halmazok, valamint $M \ge 0$ és $r > 0$ olyan valós számok, amelyeket az (I) bekezdésben értelmeztünk. Legyen $I \subseteq I_*$ olyan korlátos nyílt intervallum, amelyre $t_0 \in I$ és $M \cdot \sup_{t\in I} |t - t_0| \le r$. Az (I) és (II) bekezdések alapján I egyszerre egzisztencia- és unicitás-tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak. Ha $J \subseteq \mathbb{R}$ olyan nyílt intervallum, hogy $t_0 \in J \subseteq I$, akkor J-re még inkább teljesül az $M \cdot \sup_{t \in J} |t - t_0| \leq r$ egyenlőtlenség, tehát az (I) és (II) állításokat alkalmazva I helyett a J intervallumra kapjuk, hogy J is egzisztencia- és unicitás-tartománya ugyanennek a Cauchy-feladatnak. ■

4.2.3. Következmény. *Legyen F Banach-tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény, és $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$. Ha az f függvény szigorúan differenciálható a (t_0, x_0) pontban, akkor az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak létezik olyan I egzisztencia- és unicitás-tartománya, hogy minden olyan $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum szintén egzisztencia- és unicitás-tartománya az adott Cauchy-feladatnak, amelyre $t_0 \in J \subseteq I$.*

Bizonyítás. A feltevés alapján létezik t_0-nak olyan I_0 nyílt környezete $\mathbb{R}$-ben és x_0-nak olyan U_0 nyílt környezete F-ben, hogy $I_0 \times U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és f *Lipschitz-függvény* az $I_0 \times U_0$ halmazon, vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $(t, x), (t', x') \in I_0 \times U_0$ esetén $\|f(t', x') - f(t, x)\| \leq C \max(|t' - t|, \|x' - x\|)$ (**DIF** 1.4.3.). Ekkor f *egyenletesen folytonos* az $I_0 \times U_0$ halmazon, valamint minden $t \in I_0$ és $x, x' \in U_0$ esetén $\|f(t, x') - f(t, x)\| \leq C\|x' - x\|$, így az f függvényre és a (t_0, x_0) pontra teljesülnek az előző tétel feltételei. ■

4.2.4. Következmény. *Legyen F Banach-tér, $g : F \rightarrowtail F$ függvény, és $x_0 \in \mathrm{Dom}(g)$ olyan pont, amelynek van olyan környezete, amelyen g differenciálható és a $\mathrm{D}g$ deriváltfüggvény folytonos az x_0 pontban. Ekkor minden $t_0 \in \mathbb{R}$ ponthoz létezik olyan $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, amelyre $t_0 \in I$ és teljesülnek a következők.*

a) *Egyértelműen létezik olyan $\varphi : I \to F$ differenciálható függvény, hogy $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, és $\varphi(t_0) = x_0$, és minden $t \in I$ esetén*

$$(\mathrm{D}\varphi)(t) = g(\varphi(t)).$$

b) *Ha J olyan nyílt intervallum, hogy $t_0 \in J \subseteq I$, és $\psi : J \to F$ olyan differenciálható függvény, hogy $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, és $\psi(t_0) = x_0$, és minden $t \in J$ esetén $(\mathrm{D}\psi)(t) = g(\psi(t))$, akkor φ kiterjesztése ψ-nek.*

Bizonyítás. Legyen W olyan nyílt környezete x_0-nak F-ben, amelyre $W \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}g)$, és vezessük be az

$$f : \mathbb{R} \times \mathrm{Dom}(g) \to F; \quad (t, x) \mapsto g(x)$$

függvényt. Közvetlenül és könnyen látható, hogy minden $(t, x) \in \mathbb{R} \times W$ esetén az f függvény differenciálható a (t, x) pontban, és

$$(\mathrm{D}f)(t, x) : \mathbb{R} \times F \to F; \quad (\mathbf{t}, \mathbf{f}) \mapsto (\mathrm{D}g)(x)\mathbf{f},$$

így a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény folytonos az (t_0, x_0) pontban, hiszen $\mathrm{D}g$ folytonos x_0-ban és minden $(t, x) \in \mathbb{R} \times W$ párra

$$\|(\mathrm{D}f)(t, x) - (\mathrm{D}f)(t_0, x_0)\| = \|(\mathrm{D}g)(x) - (\mathrm{D}g)(x_0)\|.$$

Ezért **DIF** 5.1.1. b) alapján az f függvény a (t_0, x_0) pontban szigorúan differenciálható, így az előző következmény szerint az f függvényhez és a $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathrm{Dom}(g)$ kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak létezik olyan I egzisztencia- és unicitás-tartománya, hogy minden olyan $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum szintén egzisztencia- és unicitás-tartománya az adott Cauchy-feladatnak, amelyre $t_0 \in J \subseteq I$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\varphi : I \to F$ differenciálható függvény, hogy $\varphi(t_0) = x_0$, és minden $t \in I$ esetén $(t, \varphi(t)) \in \mathrm{Dom}(f)$, azaz $\varphi(t) \in \mathrm{Dom}(g)$, és minden $t \in I$ esetén $(\mathrm{D}\varphi)(t) = f(t, \varphi(t)) = g(\varphi(t))$, vagyis a) teljesül.

Ha J olyan nyílt intervallum, hogy $t_0 \in J \subseteq I$, akkor J unicitástartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, tehát ha $\psi : J \to F$ olyan differenciálható függvény, hogy $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, és $\varphi(t_0) = x_0$, és minden $t \in J$ esetén $(\mathrm{D}\psi)(t) = g(\psi(t))$, akkor $\psi = \varphi|_J$, hiszen az egyenlőség két oldalán olyan $J \to F$ függvény áll, amely megoldása az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak. Ezért φ-re b) is teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy ha F *véges dimenziós* és f *folytonos* a (t_0, x_0) pont valamely környezetén, akkor az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak létezik egzisztencia-tartománya: ez a *Peano-féle egzisztencia-tétel* (4.7.4.). Azonban ekkor lehetséges az, hogy a szóban forgó Cauchy-feladatnak egyáltalán nem létezik uncitás-tartománya (**2**. gyakorlat). Sőt még az is előfordulhat, hogy az adott Cauchy-feladatnak végtelen sok *globális* megoldása van (**3**. gyakorlat).

Említésre méltó az is, hogy az f függvénynek még a folytonossága *sem szükséges* ahhoz, hogy az f függvénnyel kapcsolatos Cauchy-feladatnak létezzen egzisztencia- és unicitás-tartománya (**4**. gyakorlat).

4.2.5. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, F Banach-tér, és $f : I \times F \to F$ olyan folytonos függvény, hogy minden $H \subseteq I$ kompakt halmazhoz létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre minden $t \in H$ és $x, x' \in F$ esetén*

$$\|f(t, x') - f(t, x)\| \leq C\|x' - x\|.$$

Ekkor minden $(t_0, x_0) \in I \times F$ pontra az egész I intervallum egzisztencia- és unicitás-tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak.

Bizonyítás. Legyen $(t_0, x_0) \in I$ rögzített pont.

(I) Először megmutatjuk, hogy minden $a, b \in I$ esetén, ha $t_0 \in]a, b[$, akkor az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak létezik egyetlen $]a, b[$-n értelmezett *korlátos* megoldása.

Ehhez tekintsük a sup-normával ellátott $\mathscr{C}^b(]a, b[; F)$ függvényteret, ami az F teljessége folytán Banach-tér, és értelmezzük azt a

$$K : \mathscr{C}^b(]a, b[; F) \to \mathscr{F}(]a, b[; F)$$

függvényt, amely minden $\varphi \in \mathscr{C}^b(]a, b[; F)$ függvényhez hozzárendeli a

$$K(\varphi) :]a, b[\to F; \quad t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', \varphi(t'))\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t')$$

függvényt. Nyilvánvaló, hogy minden $\varphi \in \mathscr{C}^b(]a, b[; F)$ esetén $(K(\varphi))(t_0) = x_0$ és a Newton–Leibniz-tétel alapján a $K(\varphi) :]a, b[\to F$ függvény folytonosan differenciálható, valamint minden $]a, b[\ni t$-re $(\mathrm{D}(K(\varphi)))(t) = f(t, \varphi(t))$.

Megmutatjuk, hogy $\varphi \in \mathscr{C}^b(]a, b[; F)$ esetén a $K(\varphi) :]a, b[\to F$ függvény *korlátos*, tehát $K(\varphi) \in \mathscr{C}^b(]a, b[; F)$. Valóban, az $[a, b] \subseteq I$ kompakt halmazhoz van olyan $C \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $t \in [a, b]$ és $x, x' \in F$ esetén $\|f(t, x') - f(t, x)\| \leq C\|x' - x\|$. Legyen $\varphi \in \mathscr{C}^b(]a, b[; F)$, és értelmezzük az $R_\varphi := \sup_{t \in [a,b]} \|f(t, x_0)\| + C \sup_{t \in]a,b[} \|\varphi(t) - x_0\|$ számot. Ekkor a φ korlátossága miatt $R_\varphi < +\infty$ és minden $t' \in]a, b[$ esetén

$$\|f(t', \varphi(t'))\| \leq \|f(t', x_0)\| + \|f(t', \varphi(t')) - f(t', x_0)\| \leq \|f(t', x_0)\| + C\|\varphi(t') - x_0\| \leq R_\varphi,$$

következésképpen minden $]a,b[\ni t$-re

$$\|K(\varphi))(t) - x_0\| = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} f(t', \varphi(t'))\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \right\| \leq R_\varphi |t - t_0| \leq R_\varphi (b-a),$$

tehát $K(\varphi)$ korlátos függvény. Ez azt jelenti, hogy $K\langle \mathscr{C}^b(]a,b[;F)\rangle \subseteq \mathscr{C}^b(]a,b[;F)$.

Ugyanúgy, mint a lokális Cauchy-tétel (4.2.2.) bizonyításában, teljes indukcióval könnyen beláthatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^b(]a,b[;F)$ és $t \in]a,b[$ esetén

$$\Big\| K^n(\varphi)(t) - K^n(\psi)(t) \Big\| \leq \frac{|t-t_0|^n}{n!} \mathrm{C}^n \,|||\, \varphi - \psi |||,$$

ahol K^n jelöli a $K : \mathscr{C}^b(]a,b[;F) \to \mathscr{C}^b(]a,b[;F)$ függvény n-edik iteráltját, és $|||\cdot|||$ a sup-norma a $\mathscr{C}^b(]a,b[;F)$ függvénytér felett. Ebből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^b(]a,b[;F)$ esetén

$$|||K^n(\varphi) - K^n(\psi)||| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \mathrm{C}^n \,|||\, \varphi - \psi \,||| \,.$$

Ezért K-nak van olyan iteráltja, amely kontrakció, így a Banach-féle fixponttétel (**MET** 9.9.3.) alapján létezik egyetlen olyan $\varphi \in \mathscr{C}^b(]a,b[;F)$, amelyre $K(\varphi) = \varphi$. Világos, hogy ekkor a $\varphi :]a,b[\to F$ függvény korlátos megoldása az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak. Ha $\psi :]a,b[\to F$ szintén korlátos megoldása az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, akkor a Newton-Leibniz formula alapján kapjuk, hogy ψ is fixpontja a K leképezésnek, ezért $\psi = \varphi$.

(II) Most megmutatjuk, hogy ha $a, b \in I$ és $t_0 \in]a,b[$, akkor az $]a,b[$ intervallum unicitás-tartománya az f függvényhez és (t_0,x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak. Ehhez jelölje φ az adott Cauchy-feladat egyetlen $]a,b[$-n értelmezett korlátos megoldását, és legyen $\psi :]a,b[\to F$ *tetszőleges* megoldása a szóban forgó Cauchy-feladatnak.

A φ és ψ függvények folytonossága miatt $[\varphi = \psi]$ *zárt* részhalmaza az $]a,b[$ (euklidészi) metrikus altérnek. Legyen $t \in [\varphi = \psi]$ rögzített pont. A φ és ψ függvények t pontbeli folytonosságából következik olyan $a', b' \in \mathbb{R}$ számok létezése, amelyekre $a < a' < t < b' < b$, valamint a φ és ψ függvények korlátosak az $]a',b'[$ intervallumon. Ekkor a φ és ψ függvények $]a',b'[$-re vett leszűkítései korlátos megoldásai az f függvényhez és (t_0,x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, ezért az (I) alapján $t \in]a',b'[\subseteq [\varphi = \psi]$. Ezért a $[\varphi = \psi]$ halmaz *nyílt* részhalmaza az $]a,b[$ (euklidészi) metrikus altérnek, így az $]a,b[$ összefüggősége alapján $[\varphi = \psi] =]a,b[$, vagyis $\varphi = \psi$.

(III) Végül megmutatjuk, hogy az *egész* I intervallum egzisztencia- és unicitás-tartománya az f függvényhez és (t_0,x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak.

Ehhez jelölje $\mathfrak{J}$ azon $J \subseteq \mathbb{R}$ korlátos nyílt intervallumok halmazát, amelyekre $t_0 \in J \subseteq \overline{J} \subseteq I$. Minden $J \in \mathfrak{J}$ esetén jelölje φ_J az adott Cauchy-feladat egyetlen J-n értelmezett megoldását; az (I) és (II) alapján ilyen függvény egyértelműen létezik. Ha $J, J' \in \mathfrak{J}$, akkor a φ_J és $\varphi_{J'}$ függvények $J \cap J'$-re vett leszűkítései az adott Cauchy-feladatnak megoldásai, ezért egyenlők. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $I = \bigcup\limits_{J \in \mathfrak{J}} J$, ezért létezik egyetlen olyan $\varphi : I \to F$ függvény, amelyre minden $J \in \mathfrak{J}$ esetén $\varphi|_J = \varphi_J$. Világos, hogy φ megoldása az f függvényhez és (t_0,x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, tehát I egzisztencia-tartomány. Ha $\psi : I \to F$ szintén megoldása ennek a Cauchy-feladatnak, akkor a (II) szerint minden $\mathfrak{J} \ni J$-re $\psi|_J = \varphi_J = \varphi|_J$, ezért $\varphi = \psi$, így I unicitás-tartománya is az adott Cauchy-feladatnak. ■

4.3. C-függvények és áramok

Legyen F normált tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény, és $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$. Nyilvánvaló, hogy ha I egzisztencia-tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, akkor minden olyan $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum is egzisztencia-tartománya az adott Cauchy-feladatnak, amelyre $t_0 \in J \subseteq I$. Azonban *nem igaz* az, hogy ha I unicitás tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, akkor minden olyan $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum is unicitás-tartománya az adott Cauchy-feladatnak, amelyre $t_0 \in J \subseteq I$. Pontosabban: lehetséges az, hogy I unicitás- (és egzisztencia-) tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, de van olyan $J \subset I$ nyílt intervallum, hogy $t_0 \in J$ és pontosan két J-n értelmezett megoldása van az adott Cauchy-feladatnak, azonban közülük csak az egyik terjeszthető ki I-re megoldássá (ld. **2**. gyakorlat b) pont), így nem sérül az, hogy I unicitás-tartomány.

Ugyanakkor a 4.2.2. tételben láttuk, hogy az ott megfogalmazott a) és b) feltételek elégségesek ahhoz, hogy az adott Cauchy-feladatnak létezzen olyan I egzisztencia-tartománya, amelynek minden t_0 pontot tartalmazó, I által tartalmazott nyílt részintervalluma unicitás-tartomány. Ezért egyáltalán nem triviális definíció a következő.

4.3.1. Definíció. *Ha F normált tér, akkor azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ leképezés* **C-függvény a** $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ **pontban**, *ha az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak létezik olyan I egzisztencia-tartománya, amelyre teljesül az, hogy minden olyan $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum unicitás-tartománya az adott Cauchy-feladatnak, amelyre $t_0 \in J \subseteq I$. Ha F normált tér, akkor azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ leképezés* **C-függvény** *ha f C-függvény minden $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban. (A C-függvény elnevezésben a C betű Cauchy-ra utal.)*

A következő állításban elégséges feltételeket adunk arra, hogy egy leképezés C-függvény legyen a definíciós tartományának valamely pontjában.

4.3.2. Állítás. *Legyen F Banach-tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény, és tegyük fel, hogy $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$.*

a) *Ha létezik t_0-nak olyan I környezete $\mathbb{R}$-ben, és létezik x_0-nak olyan U környezete F-ben, és létezik olyan $C \geq 0$ valós szám, hogy $I \times U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és f folytonos az $I \times U$ halmaz minden pontjában, és minden $t \in I$ és $x, x' \in U$ esetén $\|f(t, x') - f(t, x)\| \leq C\|x' - x\|$, akkor f C-függvény a (t_0, x_0) pontban.*

b) *Ha f szigorúan differenciálható a (t_0, x_0) pontban, akkor f C-függvény a (t_0, x_0) pontban.*

c) *Ha f differenciálható a (t_0, x_0) pont valamely környezetén (vagyis teljesül az, hogy $(t_0, x_0) \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f))$), és a $\mathrm{D}f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail \mathscr{L}(\mathbb{R} \times F; \mathbb{R} \times F)$ deriváltfüggvény folytonos a (t_0, x_0) pontban, akkor f C-függvény a (t_0, x_0) pontban.*

d) *Ha f folytonos a (t_0, x_0) pont valamely környezetén, és $\partial_2 f$ értelmezve van a (t_0, x_0) pont valamely környezetén (vagyis teljesül az, hogy $(t_0, x_0) \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\partial_2 f))$), és a $\partial_2 f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail \mathscr{L}(F; F)$ parciális deriváltfüggvény folytonos a (t_0, x_0) pontban, akkor f C-függvény a (t_0, x_0) pontban.*

e) *Ha a $g : F \rightarrowtail F$ függvény differenciálható az x_0 pont valamely környezetén, és a $\mathrm{D}g$ deriváltfüggvény folytonos az x_0 pontban, akkor az*

$$f : \mathbb{R} \times \mathrm{Dom}(g) \to F; \quad (t, x) \mapsto g(x)$$

leképezés C-függvény a (t_0, x_0) pontban.

Bizonyítás. Az a) állítás 4.2.2., a b) állítás 4.2.3., a c) állítás 4.2.3. és 5.1.1. b), valamint az e) állítás 4.2.4. nyilvánvaló következménye.

A d) állítás bizonyításához először vesszük t_0-nak olyan I' környezetét $\mathbb{R}$-ben és x_0-nak olyan U' környezetét F-ben, hogy $I' \times U' \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és f folytonos az $I' \times U'$ halmaz minden pontjában. Ezután vesszük t_0-nak olyan I'' környezetét $\mathbb{R}$-ben és x_0-nak olyan U'' környezetét F-ben, hogy $I'' \times U'' \subseteq \mathrm{Dom}(\partial_2 f)$, és a $\partial_2 f$ függvény korlátos az $I'' \times U''$ halmazon (**MET** 7.1.3.). Ekkor $U' \cap U''$ környezete x_0-nak F-ben, így vehetjük x_0-nak olyan U_0 *konvex* (például gömbi) környezetét, amelyre $U_0 \subseteq U' \cap U''$. Tehát ha $I_0 := I' \cap I''$, akkor I_0 olyan környezete t_0-nak $\mathbb{R}$-ben és U_0 olyan konvex környezete x_0-nak F-ben, hogy $I_0 \times U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és f folytonos az $I_0 \times U_0$ halmaz minden pontjában, továbbá $I_0 \times U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(\partial_2 f)$ és $C := \sup_{(t,x)\in I_0\times U_0} \|(\partial_2 f)(t,x)\| < +\infty$. Ha $t \in I_0$, akkor $I_0 \times U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(\partial_2 f)$ miatt az $f(t,\cdot)$ parciális függvény differenciálható az U_0 halmaz minden pontjában, tehát $x, x' \in U_0$ esetén az $[\![x, x']\!]$ szakasz minden pontjában is, hiszen U_0 konvexitása folytán $[\![x, x']\!] \subseteq U_0$. Ezért minden $t \in I_0$ és $x, x' \in U_0$ esetén a véges növekmények formulája (**DIF** 4.1.2.) szerint

$$\|f(t,x') - f(t,x)\| = \|f(t,\cdot)(x') - f(t,\cdot)(x)\| \leq \Big(\sup_{z\in[\![x,x']\!]} \|(\mathrm{D}f(t,\cdot))(z)\|\Big)\|x' - x\| =$$

$$= \Big(\sup_{z\in[\![x,x']\!]} \|(\partial_2 f)(t,z)\|\Big)\|x' - x\| \leq \Big(\sup_{(\tau,z)\in I_0\times U_0} \|(\partial_2 f)(\tau,z)\|\Big)\|x' - x\| = C\|x' - x\|.$$

Tehát I_0-ra és U_0-ra teljesülnek a 4.2.2. tételben megfogalmazott a) és b) feltételek, így f C-függvény a (t_0, x_0) pontban. ■

4.3.3. Tétel. *Legyen F Banach-tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény, és tegyük fel, hogy a következő feltételek valamelyike teljesül.*

a) *Minden $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ ponthoz létezik t_0-nak olyan I környezete $\mathbb{R}$-ben, és létezik x_0-nak olyan U környezete F-ben, és létezik olyan $C \geq 0$ valós szám, hogy $I \times U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és f folytonos az $I \times U$ halmaz minden pontjában, és minden $t \in I$ és $x, x' \in U$ esetén $\|f(t,x') - f(t,x)\| \leq C\|x' - x\|$.*

b) *f szigorúan differenciálható a $\mathrm{Dom}(f)$ halmazon.*

c) *f folytonosan differenciálható a $\mathrm{Dom}(f)$ halmazon.*

d) *$\mathrm{Dom}(f)$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R} \times F$-nek, és f folytonos, és $\mathrm{Dom}(\partial_2 f) = \mathrm{Dom}(f)$, és a $\partial_2 f$ parciális deriváltfüggvény folytonos.*

e) *Létezik olyan $g : F \rightarrowtail F$ folytonosan differenciálható függvény, hogy $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathrm{Dom}(g)$ és minden $(t,x) \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra $f(t,x) = g(x)$.*

Ekkor az f leképezés C-függvény. ■

C-függvény definíciós tartománya nem szükségképpen nyílt halmaz. Például, ha $F \neq \{0\}$ normált tér, és $x_0 \in F$, továbbá $f : \mathbb{R} \times \{x_0\} \to F$ a 0 értékű konstansfüggvény, akkor minden $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén minden olyan $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum egzisztencia- és unicitástartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, amelyre $t_0 \in I$, így f C-függvény, de $\mathrm{Dom}(f)$ nem nyílt részhalmaza $\mathbb{R} \times F$-nek.

A következő tételből kiderül, hogy a Cauchy-feladatok megoldásai szempontjából mi a legfontosabb, és egyben jellemző tulajdonsága a C-függvényeknek.

4.3.4. Tétel. *Legyen F normált tér és $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *f C-függvény.*

(ii) *Minden $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ ponthoz létezik egyetlen olyan φ megoldása az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, amely kiterjesztése az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat minden megoldásának (vagyis φ a kiterjesztés reláció szerint a* **legnagyobb** *elem az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat megoldásainak halmazában).*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Legyen $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ rögzítve.

(I) Először megmutatjuk, hogy ha φ és ψ megoldásai az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, akkor $\varphi|_{\mathrm{Dom}(\varphi)\cap\mathrm{Dom}(\psi)} = \psi|_{\mathrm{Dom}(\varphi)\cap\mathrm{Dom}(\psi)}$. Ehhez tekintsük a $[\varphi = \psi]$ halmazt, amely φ és ψ folytonossága miatt zárt halmaz a $J := \mathrm{Dom}(\varphi) \cap \mathrm{Dom}(\psi) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt altérben. Megmutatjuk, hogy $[\varphi = \psi]$ nyílt is a J nyílt intervallumban. Legyen ugyanis $t \in [\varphi = \psi]$ rögzített pont, és $x := \varphi(t) = \psi(t)$. Mivel f C-függvény, így vehetjük az f függvényhez és (t, x) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak olyan I egzisztencia- és unicitástartományát, amelyre teljesül az, hogy minden olyan $K \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum szintén egzisztencia- és unicitás-tartománya az f függvényhez és (t, x) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, amelyre $t \in K \subseteq I$. Mivel $I \cap J$ olyan nyílt intervallum, amelyre $t \in I \cap J \subseteq I$, így $I \cap J$ unicitástartománya az f függvényhez és (t, x) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak. Ugyanakkor $\varphi|_{I\cap J}$ és $\psi|_{I\cap J}$ nyilvánvalóan megoldásai az f függvényhez és (t, x) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, így $\varphi|_{I\cap J} = \psi|_{I\cap J}$, következésképpen $I \cap J \subseteq [\varphi = \psi]$. Mivel $I \cap J$ (nyílt intervallum-) környezete t-nek $\mathbb{R}$-ben, így t belső pontja a $[\varphi = \psi]$ halmaznak a $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt altérben. Tehát $[\varphi = \psi]$ nyílt-zárt halmaz a $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt altérben, amely összefüggő $\mathbb{R}$-ben, így $[\varphi = \psi] = \emptyset$ vagy $[\varphi = \psi] = J$. Mivel $t \in [\varphi = \psi]$, ebből következik, hogy $[\varphi = \psi] = J = \mathrm{Dom}(\varphi) \cap \mathrm{Dom}(\psi)$, vagyis $\varphi|_{\mathrm{Dom}(\varphi)\cap\mathrm{Dom}(\psi)} = \psi|_{\mathrm{Dom}(\varphi)\cap\mathrm{Dom}(\psi)}$.

(II) Mivel f C-függvény, így az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak *létezik* megoldása, amiből 4.1.2. alapján kapjuk, hogy az f-hez tartozó differenciálegyenletnek létezik olyan φ maximális megoldása, amelyre $\varphi(t_0) = x_0$. Megmutatjuk, hogy ha ψ megoldása az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, akkor $\psi \subseteq \varphi$. Valóban, φ és ψ mindketten megoldásai az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, ezért (I) alapján $\varphi|_{\mathrm{Dom}(\varphi)\cap\mathrm{Dom}(\psi)} = \psi|_{\mathrm{Dom}(\varphi)\cap\mathrm{Dom}(\psi)}$, tehát $\varphi \cup \psi$ olyan függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(\varphi \cup \psi) = \mathrm{Dom}(\varphi) \cup \mathrm{Dom}(\psi) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. A differenciálás lokalitása miatt nyilvánvaló, hogy a $\varphi \cup \psi$ függvény olyan megoldása az f által meghatározott differenciálegyenletnek, amely kiterjesztése φ-nek, így φ maximalitása folytán $\varphi \cup \psi = \varphi$, vagyis $\psi \subseteq \varphi$. Ezzel igazoltuk az előírt tulajdonságú függvény *egzisztenciáját*, amelynek *unicitása* triviális, hiszen ha φ' szintén olyan megoldása az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, amely kiterjesztése az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat minden megoldásának, akkor $\varphi \subseteq \varphi'$ és $\varphi' \subseteq \varphi$, így $\varphi' = \varphi$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Nyilvánvaló, hiszen $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén (ii) alapján vehetjük azt a φ megoldását az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, amely kiterjesztése az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat minden megoldásának, és ekkor $\mathrm{Dom}(\varphi)$ olyan egziszenciatartománya az adott Cauhy-feladatnak, hogy ha $J \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi)$ nyílt intervallum, és $t_0 \in J$, valamint ψ és ψ' J-n értelmezett megoldásai az adott Cauchy-feladatnak, akkor φ definíciója szerint $\psi = \varphi|_J = \psi'$, tehát J unicitás-tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak. ■

Az előző tétel teszi lehetővé a következő definíció bevezetését.

4.3.5. Definíció. *Legyen F normált tér és $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ C-függvény. Ekkor minden $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén $\varphi_{f;t_0,x_0}$ jelöli azt a megoldását az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, amely kiterjesztése az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat összes megoldásának. Továbbá, minden $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\Phi_{f,t_0} : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$$

az a függvény, amelyre

$$\mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0}) \;:=\; \{\ (t,x) \in \mathbb{R} \times F \mid (t_0,x) \in \mathrm{Dom}(f))\ \bigwedge\ (t \in \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x}))\ \},$$

és minden $(t,x) \in \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ párra

$$\Phi_{f,t_0}(t,x) \;:=\; \varphi_{f;t_0,x}(t),$$

és a Φ_{f,t_0} leképezést az f **függvény áramának** *vagy egyszerűen* f**-áramnak** *nevezzük a t_0 pontban.*

Nyilvánvaló, hogy ha F normált tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ C-függvény és $t_0 \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $t_0 \notin \mathrm{pr}_1\langle \mathrm{Dom}(f) \rangle$, akkor $\mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0}) = \emptyset$, tehát Φ_{f,t_0} az üres függvény.

Vigyázzunk arra, hogy ha F normált tér és $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ C-függvény, akkor $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén a $\mathrm{Dom}(f)$ és $\mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ halmazok egymáshoz képest "általános helyzetű" részhalmazai $\mathbb{R} \times F$-nek, vagyis – általános esetben – egyik sem részhalmaza a másiknak (ld. **9**. gyakorlat).

4.4. Lineáris Cauchy-feladatok

4.4.1. Tétel. (A lineáris Cauchy-feladat esete) *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, F Banach-tér, valamint $\mathbf{u} : I \to \mathscr{L}(F)$ és $\mathbf{b} : I \to F$ folytonos függvény. Ekkor minden $(t_0, x_0) \in I \times F$ ponthoz létezik egyetlen olyan $\varphi : I \to F$ differenciálható függvény, hogy $\varphi(t_0) = x_0$ és minden $I \ni t$-re*

$$(\mathrm{D}\varphi)(t) = \mathbf{u}(t)(\varphi(t)) + \mathbf{b}(t).$$

Ha az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{b}$ függvények C^n-osztályúak, ahol $n \in \mathbb{N}$ (illetve $n = \infty$), akkor ez a φ függvény C^{n+1}-osztályú (illetve C^∞-osztályú).

Bizonyítás. Értelmezzük az

$$f : I \times F \to F; \quad (t,x) \mapsto \mathbf{u}(t)(x) + \mathbf{b}(t)$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy f folytonos függvény.

Mivel az $I \times F \to F$; $(t,x) \mapsto \mathbf{b}(t)$ leképezés egyenlő az $\mathbb{R} \times F \to \mathbb{R}$ első projekció $I \times F$-re vett leszűkítésének és a $\mathbf{b}$ függvénynek a kompozíciójával, és ezek folytonos függvények, így az $I \times F \to F$; $(t,x) \mapsto \mathbf{b}(t)$ leképezés is folytonos. Ezért elegendő az $I \times F \to F$; $(t,x) \mapsto \mathbf{u}(t)(x)$ leképezés folytonosságát igazolni. Ehhez legyen $(t_*, x_*) \in I \times F$ rögzített pont, és vegyünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számot. Ha $(t,x) \in I \times F$, akkor

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(t)(x) - \mathbf{u}(t_*)(x_*)\| &\le \|\mathbf{u}(t)(x) - \mathbf{u}(t)(x_*)\| + \|\mathbf{u}(t)(x_*) - \mathbf{u}(t_*)(x_*)\| = \\ = \|\mathbf{u}(t)(x - x_*)\| + \|(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_*))(x_*)\| &\le \|\mathbf{u}(t)\|\|x - x_*\| + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_*)\|\|x_*\|. \quad (1)\end{aligned}$$

A hipotézis szerint az $\mathbf{u} : I \to \mathscr{L}(F)$ függvény folytonos és I nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, így vehetünk olyan $\tau > 0$ valós számot, amelyre $[t_* - \tau, t_* + \tau] \subseteq I$ és minden $t \in [t_* - \tau, t_* + \tau]$ esetén $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_*)\| \|x_*\| \leq \varepsilon/2$. Az $\mathbf{u}$ függvény folytonosságából és a $[t_* - \tau, t_* + \tau]$ intervallum kompaktságából következik, hogy $\mathbf{u}$ korlátos ezen az intervallumon, tehát $\sup\limits_{t' \in [t_* - \tau, t_* + \tau]} \|\mathbf{u}(t')\| < +\infty$. Ezért vehetünk olyan $\varrho > 0$ valós számot, hogy $\varrho \cdot \sup\limits_{t' \in [t_* - \tau, t_* + \tau]} \|\mathbf{u}(t')\| \leq \varepsilon/2$. Ekkor minden $(t, x) \in [t_* - \tau, t_* + \tau] \times \overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_*)$ párra $\|\mathbf{u}(t)\| \|x - x_*\| \leq \varepsilon/2$ és $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_*)\| \|x_*\| \leq \varepsilon/2$, így az (1) összefüggések alapján $\|\mathbf{u}(t)(x) - \mathbf{u}(t_*)(x_*)\| \leq \varepsilon$, tehát az $I \times F \to F;\ (t, x) \mapsto \mathbf{u}(t)(x)$ leképezés folytonos. Ezért az $f : I \times F \to F$ függvény is folytonos.

Világos, hogy minden $t \in I$ és $x, x' \in F$ esetén $\|f(t, x') - f(t, x)\| \leq \|\mathbf{u}(t)\| \|x' - x\|$. Tehát ha $H \subseteq I$ kompakt halmaz, akkor bármely $C \geq \sup\limits_{t \in H} \|\mathbf{u}(t)\|$ valós számra teljesül az, hogy minden $t \in H$ és $x, x' \in F$ esetén $\|f(t, x') - f(t, x)\| \leq C \|x' - x\|$. Ezért az f függvényre teljesülnek a 4.2.5. tétel feltételei, így minden $(t_0, x_0) \in I \times F$ párra az I intervallum egzisztencia- és unicitás-tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak.

Az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat φ megoldásának simaságára vonatkozó állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $n = 0$, akkor a hipotézis szerint $\mathbf{u} : I \to \mathscr{L}(F)$ és $\mathbf{b} : I \to F$ C^0-osztályú, vagyis folytonos függvény, ezért az $I \to F;\ t \mapsto \mathbf{u}(t)(\varphi(t)) + \mathbf{b}(t)$ függvény is folytonos, és ez egyenlő a $\mathrm{D}\varphi$ deriváltfüggvénnyel, tehát φ folytonosan differenciálható, vagyis C^1-osztályú.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra, és tegyük fel, hogy az $\mathbf{u} : I \to \mathscr{L}(F)$ és $\mathbf{b} : I \to F$ függvények C^{n+1}-osztályúak. Ekkor ezek a függvények C^n-osztályúak, így az indukciós hipotézis szerint a φ függvény C^{n+1}-osztályú. Ebből **DIF** 5.4.11. c) alapján következik, hogy az $I \to F;\ t \mapsto \mathbf{u}(t)(\varphi(t)) + \mathbf{b}(t)$ függvény is C^{n+1}-osztályú, és ez egyenlő a $\mathrm{D}\varphi$ deriváltfüggvénnyel, tehát a φ függvény C^{n+2}-osztályú, így az állítás igaz $n + 1$-re.

Ezzel megmutattuk, hogy ha az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{b}$ függvények C^n-osztályúak, ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor a $\varphi : I \to F$ függvény C^{n+1}-osztályú.

Ha az $\mathbf{u} : I \to \mathscr{L}(F)$ és $\mathbf{b} : I \to F$ függvények C^∞-osztályúak, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén C^n-osztályúak, így az előzőek szerint a φ függvény C^{n+1}-osztályú, ami azt jelenti, hogy φ is C^∞-osztályú. ■

4.4.2. Következmény. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, F Banach-tér, valamint $\mathbf{u} : I \to \mathscr{L}(F)$ és $\mathbf{b} : I \to F$ folytonos függvények, akkor az*

$$f : I \times F \to F; \quad (t, x) \mapsto \mathbf{u}(t)(x) + \mathbf{b}(t)$$

leképezés C*-függvény.*

Bizonyítás. Legyen $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f) = I \times F$ rögzítve. A 4.4.1. tétel szerint I egzisztencia-tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak. Ha $J \subseteq I$ olyan nyílt intervallum, hogy $t_0 \in J$, akkor a 4.4.1. tételt alkalmazva I helyett a J nyílt intervallumra, és $\mathbf{u}$ helyett az $\mathbf{u}|_J$, valamint $\mathbf{b}$ helyett a $\mathbf{b}|_J$ függvényre kapjuk, hogy J unicitás-tartománya az $f|_{J \times F}$ függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak. De ha $J \subseteq I$ olyan nyílt intervallum, hogy $t_0 \in J$, akkor az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat minden J-n értelmezett megoldása nyilvánvalóan megoldása az $f|_{J\times F}$ függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak is, ezért J unicitás-tartománya az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak is. ■

4.4.3. Következmény. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nem üres nyílt intervallum, F Banach-tér, és $\mathbf{u} : I \to \mathscr{L}(F)$ folytonos függvény.*

a) *Jelölje $E_{\mathbf{u}}$ azon $\varphi : I \to F$ differenciálható függvények halmazát, amelyekre teljesül az, hogy minden $I \ni t$-re*

$$(\mathrm{D}\varphi)(t) = \mathbf{u}(t)(\varphi(t)).$$

Ekkor $E_{\mathbf{u}}$ lineáris altere a $\mathrm{C}^1(I; F)$ függvénytérnek, és minden $t \in I$ esetén az

$$E_{\mathbf{u}} \to F; \quad \varphi \mapsto \varphi(t)$$

leképezés lineáris bijekció.

b) *Legyen $\mathbf{b} : I \to F$ folytonos függvény, és jelölje $E_{\mathbf{u},\mathbf{b}}$ azon $\varphi : I \to F$ differenciálható függvények halmazát, amelyekre teljesül az, hogy minden $I \ni t$-re*

$$(\mathrm{D}\varphi)(t) = \mathbf{u}(t)(\varphi(t)) + \mathbf{b}(t).$$

Ekkor bármely $\varphi \in E_{\mathbf{u},\mathbf{b}}$ esetén

$$E_{\mathbf{u},\mathbf{b}} = \varphi + E_{\mathbf{u}}$$

teljesül.

Bizonyítás. a) Ha $t \in I$, akkor bármely $F \ni x$-hez az előző állítás szerint létezik olyan $\varphi \in E_{\mathbf{u}}$, hogy $\varphi(t) = x$, ezért az $E_{\mathbf{u}} \to F$; $\varphi \mapsto \varphi(t)$ leképezés *szürjekció*. Ez a függvény *injekció* is mert ha $\varphi, \psi \in E_{\mathbf{u}}$ és $\varphi(t) = \psi(t)$, akkor az $I \times F \to F$; $(t', x') \mapsto \mathbf{u}(t')(x')$ függvényhez és $(t, \varphi(t))$ kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladat megoldásának egyértelműsége miatt $\varphi = \psi$.

b) Triviális. ■

4.4.4. Definíció. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, F Banach-tér, és $\mathbf{u} : I \to \mathscr{L}(F)$ folytonos függvény.*

– *Az $\mathbf{u}$ függvény által meghatározott* **homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásának** *nevezünk minden olyan $\varphi : I \to F$ differenciálható függvényt, amelyre minden $I \ni t$-re*

$$(\mathrm{D}\varphi)(t) = \mathbf{u}(t)(\varphi(t))$$

teljesül.

– *Az $\mathbf{u}$ függvény által meghatározott* **homogén lineáris differenciálegyenlet alaprendszerének** *nevezzük az $\mathbf{u}$ függvény által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak bármely olyan rendszerét, amely algebrai bázis az összes megoldások vektorterében.*

4.4.5. Állítás. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nem üres nyílt intervallum, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\mathbf{u} : I \to \mathscr{L}(F)$ folytonos függvény, akkor az $\mathbf{u}$ függvény által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak létezik alaprendszere.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbf{f}_j)_{j\in J}$ algebrai bázis az F vektortérben és $t \in I$ rögzített pont. A 4.4.1. következményt alkalmazva, minden $j \in J$ esetén jelölje φ_j az $\mathbf{u}$ függvény által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenletnek azt a megoldását, amelyre $\varphi_j(t) = \mathbf{f}_j$. A 4.4.3. következmény a) pontja alapján a

$$w : E_{\mathbf{u}} \to F; \quad \varphi \mapsto \varphi(t)$$

leképezés lineáris bijekció, ahol $E_{\mathbf{u}}$ jelöli az $\mathbf{u}$ függvényhez tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak vektorterét. Ezért $(w^{-1}(\mathbf{f}_j))_{j\in J}$ algebrai bázisrendszer az $E_{\mathbf{u}}$ vektortérben, és világos, hogy minden $j \in J$ esetén $w^{-1}(\mathbf{f}_j) = \varphi_j$. Tehát $(\varphi_j)_{j\in J}$ algebrai bázisrendszer az $\mathbf{u}$ függvényhez tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai vektorterében, így az $\mathbf{u}$ függvényhez tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet alaprendszere. ■

Tehát, ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nem üres nyílt intervallum, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $\mathbf{u} : I \to \mathscr{L}(F)$ folytonos függvény, akkor az $\mathbf{u}$ függvényhez tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak *létezik* alaprendszere, és ha $(\varphi_j)_{j\in J}$ alaprendszer, akkor az adott differenciálegyenlet minden φ megoldásához egyértelműen létezik olyan $(c_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^{(J)}$ együttható rendszer, hogy

$$\varphi = \sum_{j\in J} c_j.\varphi_j.$$

Azonban alaprendszer előállítása általában nem triviális feladat.

4.5. Cauchy-feladat megoldásának függése a kezdeti feltételektől

4.5.1. Lemma. *Legyen $J \subseteq \mathbb{R}$ kompakt intervallum, F normált tér, és a $J \to F$ folytonos függvények $\mathscr{C}(J;F)$ terét lássuk el a $|||\cdot|||$-val jelölt sup-normával.*

a) *Minden $U \subseteq F$ nyílt halmazra a $J \to U$ folytonos függvények $\mathscr{C}(J;U)$ halmaza nyílt a $\mathscr{C}(J;F)$ normált térben.*

b) *Ha $U \subseteq F$ nyílt halmaz, G normált tér, és $g : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail G$ olyan folytonos függvény, hogy* $\mathrm{Dom}(g)$ *nyílt halmaz $\mathbb{R} \times F$-ben, és $J \times U \subseteq$* $\mathrm{Dom}(g)$*, akkor minden $\varphi \in \mathscr{C}(J;U)$ függvényre teljesülnek a következő egyenlőségek:*

$$\lim_{\varphi'\to\varphi}\left(\sup_{s\in J}\left(\sup_{z\in[\![\varphi(s),\varphi'(s)]\!]}\|g(s,z)-g(s,\varphi(s))\|\right)\right)=0, \qquad (*)$$

$$\lim_{\varphi'\to\varphi}\left(\sup_{s\in J}\|g(s,\varphi'(s))-g(s,\varphi(s))\|\right)=0. \qquad (**)$$

Bizonyítás. a) Legyen $U \subseteq F$ nyílt halmaz és legyen $\varphi \in \mathscr{C}(J;U)$ rögzítve. Mivel $\mathrm{Im}(\varphi)$ kompakt halmaz F-ben és U nyílt halmaz F-ben, így **MET** 8.2.3. alapján vehetünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $\bigcup_{x\in \mathrm{Im}(\varphi)} \overline{\mathrm{B}}_r(x) \subseteq U$, vagyis $\bigcup_{t\in J} \overline{\mathrm{B}}_r(\varphi(t)) \subseteq U$. Ha $\psi \in \mathscr{C}(J;F)$ olyan, hogy $|||\psi||| \leq r$, akkor minden $t \in J$ pontra $\|\psi(t)\| \leq r$, tehát $(\varphi+\psi)(t) \in \overline{\mathrm{B}}_r(\varphi(t)) \subseteq U$, vagyis $\varphi+\psi \in \mathscr{C}(J;U)$. Ez azt jelenti, hogy a $\overline{\mathrm{B}}_r(\varphi;|||\cdot|||)$-val jelölt, φ középpontú, r sugarú, sup-norma szerinti zárt gömb $\mathscr{C}(J;F)$-ben részhalmaza $\mathscr{C}(J;U)$-nak, tehát φ belső pontja a $\mathscr{C}(J;U)$ halmaznak; továbbá az is teljesül, hogy minden $\varphi' \in \overline{\mathrm{B}}_r(\varphi;|||\cdot|||)$ esetén, minden $s \in J$ pontra $[\![\varphi(s),\varphi'(s)]\!] \subseteq U$.

b) Legyen $\varphi \in \mathscr{C}(J;U)$ rögzítve, és a) alkalmazásával vegyünk olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy $\overline{\mathrm{B}}_r(\varphi; |||\cdot|||) \subseteq \mathscr{C}(J;U)$ és $\varphi' \in \overline{\mathrm{B}}_r(\varphi; |||\cdot|||)$ esetén, minden $s \in J$ pontra $[\![\varphi(s), \varphi'(s)]\!] \subseteq U$. Ha $\varphi' \in \overline{\mathrm{B}}_r(\varphi; |||\cdot|||)$, akkor minden $s \in J$ pontra $\varphi'(s) \in [\![\varphi(s), \varphi'(s)]\!]$, ezért

$$\|g(s,\varphi'(s)) - g(s,\varphi(s))\| \leq \sup_{z \in [\![\varphi(s),\varphi'(s)]\!]} \|g(s,z) - g(s,\varphi(s))\|,$$

amiből következik, hogy

$$\sup_{s\in J} \|g(s,\varphi'(s)) - g(s,\varphi(s))\| \leq \sup_{s \in J}\Big(\sup_{z \in [\![\varphi(s),\varphi'(s)]\!]} \|g(s,z) - g(s,\varphi(s))\|\Big).$$

Ezért a $(*)$ összefüggésből következik a $(**)$ egyenlőség.

A $(*)$ egyenlőség bizonyításához legyen $\varphi \in \mathscr{C}(J;U)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges valós szám. Olyan $\delta > 0$ valós számot keresünk, amelyre $\mathrm{B}_\delta(\varphi; |||\cdot|||) \subseteq \mathscr{C}(J;U)$ és minden $\varphi' \in \mathrm{B}_\delta(\varphi; |||\cdot|||)$ függvényre minden $s \in J$ esetén $[\![\varphi(s), \varphi'(s)]\!] \subseteq U$ és

$$\sup_{s \in J}\Big(\sup_{z \in [\![\varphi(s),\varphi'(s)]\!]} \|g(s,z) - g(s,\varphi(s))\|\Big) \leq \varepsilon. \tag{1}$$

A φ függvény $\mathrm{gr}(\varphi) := \{(t,\varphi(t)) | t \in J\}$ grafikonja kompakt halmaz $\mathbb{R} \times F$-ben, mert megegyezik a $J \to \mathbb{R}\times F;\ t \mapsto (t, \varphi(t))$ folytonos függvény értékkészletével, és J kompakt halmaz $\mathbb{R}$-ben. Továbbá, $\mathrm{gr}(\varphi) \subseteq J \times U \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, és a g függvény folytonos. Ezért kiválaszthatunk olyan $(\delta_t)_{t\in J}$ és $(r_t)_{t\in J}$ rendszereket $\mathbb{R}_+^*$-ban, hogy minden $t \in J$ esetén $\mathrm{B}_{r_t}(\varphi(t)) \subseteq U$, és $]t-\delta_t, t+\delta_t[\times \mathrm{B}_{r_t}(\varphi(t)) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, és

$$\forall (s,z) \in]t-\delta_t, t+\delta_t[\times \mathrm{B}_{r_t}(\varphi(t)) :\ \|g(s,z) - g(t,\varphi(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Ekkor $\mathrm{gr}(\varphi) \subseteq \bigcup_{t\in J} \Big( ]t-\delta_t, t+\delta_t[\times \mathrm{B}_{r_t/2}(\varphi(t))\Big)$, így $\mathrm{gr}(\varphi)$ kompaktsága miatt vehetünk olyan $T \subseteq J$ véges halmazt, hogy $\mathrm{gr}(\varphi) \subseteq \bigcup_{t\in T} \Big( ]t-\delta_t, t+\delta_t[\times \mathrm{B}_{r_t/2}(\varphi(t))\Big)$. (Vigyázzunk, hogy itt $r_t/2$ sugarú gömböket kell venni F-ben, nem pedig r_t sugarúakat!)

Válasszuk meg a $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ valós számot úgy, hogy minden $t \in T$ esetén $\delta \leq r_t/2$ teljesüljön. Ekkor $\mathrm{B}_\delta(\varphi; |||\cdot|||) \subseteq \mathscr{C}(J;U)$. Valóban, legyen $\varphi' \in \mathrm{B}_\delta(\varphi; |||\cdot|||)$ és $s \in J$: ekkor $(s,\varphi(s)) \in \mathrm{gr}(\varphi)$ miatt van olyan $t \in T$, hogy $(s,\varphi(s)) \in]t-\delta_t, t+\delta_t[\times \mathrm{B}_{r_t/2}(\varphi(t))$, ezért $\|\varphi(s) - \varphi(t)\| < r_t/2$. Ugyanakkor $\|\varphi'(s) - \varphi(s)\| \leq |||\varphi' - \varphi||| < \delta < r_t/2$, így $\|\varphi'(s) - \varphi(t)\| \leq \|\varphi'(s) - \varphi(s)\| + \|\varphi(s) - \varphi(t)\| < r_t/2 + r_t/2 = r_t$, vagyis $\varphi'(s) \in \mathrm{B}_{r_t}(\varphi(t)) \subseteq U$.

Legyen most $\varphi' \in \mathrm{B}_\delta(\varphi; |||\cdot|||)$ rögzítve, és legyenek $s \in J$ és $z \in [\![\varphi(s), \varphi'(s)]\!]$ tetszőlegesek. Ekkor $(s,\varphi(s)) \in \mathrm{gr}(\varphi)$ miatt vehetünk olyan $t \in T$ pontot, hogy $(s,\varphi(s)) \in]t-\delta_t, t+\delta_t[\times \mathrm{B}_{r_t/2}(\varphi(t))$, tehát (2) alapján fennáll a

$$\|g(s,\varphi(s)) - g(t,\varphi(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

egyenlőtlenség. Ugyanakkor, $z \in [\![\varphi(s), \varphi'(s)]\!]$ miatt van olyan $\Theta \in [0,1]$ valós szám, amelyre $z = (1-\Theta)\varphi(s) + \Theta\varphi'(s)$, ezért $z - \varphi(s) = \Theta(\varphi'(s) - \varphi(s))$, tehát $\|z - \varphi(s)\| \leq \|\varphi'(s) - \varphi(s)\| \leq |||\varphi' - \varphi||| < \delta \leq r_t/2$, következésképpen

$$\|z - \varphi(t)\| \leq \|z - \varphi(s)\| + \|\varphi(s) - \varphi(t)\| < \frac{r_t}{2} + \frac{r_t}{2} = r_t.$$

Tehát $(s,z) \in]t-\delta_t, t+\delta_t[\times \mathrm{B}_{r_t}(\varphi(t))$, így ismét (2) alapján

$$\|g(s,z) - g(t,\varphi(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

A (3) és (4) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\|g(s,z) - g(s,\varphi(s))\| \leq \|g(s,z) - g(t,\varphi(t))\| + \|g(s,\varphi(s)) - g(t,\varphi(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ez fennáll minden $s \in J$ és $z \in [\![\varphi(s), \varphi'(s)]\!]$ esetén, ezért (1) teljesül. ■

4.5.2. Tétel. (**Cauchy-feladat megoldásának differenciálható függése a kezdeti feltételektől.**) *Legyen $n \in \mathbb{N}^*$. Ekkor minden F Banach-térre, minden $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvényre, és minden $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra teljesül az, hogy, ha van olyan környezete a (t_0, x_0) pontnak az $\mathbb{R} \times F$ szorzattérben, amelyen az f függvény n-szer folytonosan differenciálható, akkor létezik olyan (I_0, U_0, Φ) hármas, amelyre:*

– *I_0 olyan nyílt intervallumkörnyezete t_0-nak $\mathbb{R}$-ben és U_0 olyan nyílt környezete x_0-nak F-ben, hogy $\overline{I_0} \times U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$;*

– *$\Phi : I_0 \times U_0 \to F$ olyan n-szer folytonosan differenciálható függvény, hogy $I_0 \times U_0 = \mathrm{Dom}(\partial_1 \Phi) = \mathrm{Dom}(\partial_1(\partial_2 \Phi))$, és minden $(t,x) \in I_0 \times U_0$ esetén $(t, \Phi(t,x)) \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(\partial_2 f)$, és*

$$(\partial_1 \Phi)(t,x) = f(t, \Phi(t,x)), \quad \Phi(t_0, x) = x,$$
$$(\partial_1(\partial_2 \Phi))(t,x) = (\partial_2 f)(t, \Phi(t,x)) \circ (\partial_2 \Phi)(t,x), \quad (\partial_2 \Phi)(t_0, x) = \mathrm{id}_F.$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{A}(n)$ a bizonyítandó kijelentést. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\mathfrak{A}(n)$ teljesül.

(I) Először az $\mathfrak{A}(1)$ állítást igazoljuk, tehát feltesszük, hogy F Banach-tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény, $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ és W olyan környezete a (t_0, x_0) pontnak az $\mathbb{R} \times F$ szorzattérben, amelyen az f függvény folytonosan differenciálható. Legyen I tetszőleges olyan korlátos nyílt intervallumkörnyezete t_0-nak $\mathbb{R}$-ben, és U tetszőleges olyan nyílt környezete x_0-nak F-ben, hogy $\overline{I} \times U \subseteq W$, és vezessük be a $\varrho_I := \sup_{t \in \overline{I}} |t - t_0| \in \mathbb{R}_+^*$ valós számot.

Lássuk el a $\overline{I} \to F$ folytonos függvények $\mathscr{C}(\overline{I}; F)$ vektorterét a $|||\cdot|||$-val jelölt sup-normával. Mivel F Banach-tér, így $\mathscr{C}(\overline{I}; F)$ is Banach-tér (**MET** 11.4.3.).

Ha $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{I}; U)$, akkor $\varphi : \overline{I} \to U$ folytonos függvény, így az $\overline{I} \to \mathbb{R} \times F;\ s \mapsto (s, \varphi(s))$ függvény is folytonos és a $\overline{I} \times U$ halmazba érkezik, amelyen f folytonos függvény, hiszen $\overline{I} \times U \subseteq W$ és f az W halmazon folytonos (sőt folytonosan differenciálható). Ezért minden $x \in U$ és $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{I}; U)$ esetén jól értelmezett a

$$K(x,\varphi) : \overline{I} \to F; \quad t \mapsto -\varphi(t) + x + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)$$

függvény, amely a Newton–Leibniz-tétel (2.2.1.) szerint folytonos, vagyis $K(x,\varphi) \in \mathscr{C}(\overline{I}; F)$. Ezzel értelmeztük a

$$K : U \times \mathscr{C}(\overline{I}; U) \to \mathscr{C}(\overline{I}; F); \quad (x, \varphi) \mapsto K(x, \varphi)$$

leképezést, és itt U nyílt részhalmaza az F Banach-térnek, így a 4.5.1. lemma a) pontja szerint $\mathscr{C}(\overline{I}; U)$ nyílt részhalmaza a $\mathscr{C}(\overline{I}; F)$ Banach-térnek.

Meg fogjuk mutatni, hogy a K leképezés folytonosan differenciálható. Ehhez a **DIF** 5.2.2. állítás alapján elegendő azt igazolni, hogy a

$$\partial_1 K : U \times \mathscr{C}(\overline{I};U) \rightarrowtail \mathscr{L}(F;\mathscr{C}(\overline{I};F)),$$
$$\partial_2 K : U \times \mathscr{C}(\overline{I};U) \rightarrowtail \mathscr{L}(\mathscr{C}(\overline{I};F);\mathscr{C}(\overline{I};F))$$

parciális deriváltfüggvények definíciós tartománya az egész $U\times\mathscr{C}(\overline{I};U)$ halmaz, valamint a $\partial_1 K$ és $\partial_2 K$ függvények folytonosak.

A $\partial_1 K$ függvény vizsgálatához legyen $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{I};U)$ rögzítve. Ha $x,x' \in U$, akkor K definíciója szerint minden $t \in \overline{I}$ esetén

$$K(x',\varphi)(t) - K(x,\varphi)(t) =$$
$$= \Big(-\varphi(t) + x' + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\Big) - \Big(-\varphi(t) + x + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\Big) = x' - x,$$

ami azt jelenti, hogy a $K(x',\varphi) - K(x,\varphi) : \overline{I} \to F$ függvény egyenlő az $x'-x$ értékű konstansfüggvénnyel. Tehát ha minden $z \in F$ esetén $\widehat{z}$ jelöli a z értékű $\overline{I} \to F$ konstansfüggvényt, és értelmezzük az $u : F \to \mathscr{C}(\overline{I};F);\ z \mapsto \widehat{z}$ leképezést, akkor u nyilvánvalóan folytonos lineáris operátor, azaz $u \in \mathscr{L}(F;\mathscr{C}(\overline{I};F))$, és minden $x,x' \in U$ esetén $K(x',\varphi) - K(x,\varphi) - u(x'-x) = 0$.

Ezért minden $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{I};U)$ esetén a $K(\cdot,\varphi) : U \to \mathscr{C}(\overline{I};F)$ parciális függvény minden $x \in U$ pontban differenciálható, és $(\mathrm{D}K(\cdot,\varphi))(x) = u$, vagyis $\mathrm{Dom}(\partial_1 K) = U \times \mathscr{C}(\overline{I};U)$, és minden $(x,\varphi) \in \mathrm{Dom}(\partial_1 K)$ esetén $(\partial_1 K)(x,\varphi) = (\mathrm{D}K(\cdot,\varphi))(x) = u$, azaz $\partial_1 K$ egyenlő az u értékű $U \times \mathscr{C}(\overline{I};U) \to \mathscr{L}(F;\mathscr{C}(\overline{I};F))$ konstansfüggvénnyel, így $\partial_1 K$ folytonos (sőt végtelenszer differenciálható).

A $\partial_2 K$ függvény vizsgálatához legyen $x \in U$ rögzítve. A $K(x,\cdot) : \mathscr{C}(\overline{I};U) \to \mathscr{C}(\overline{I};F)$ parciális függvény differenciálhatóságát vizsgáljuk egy rögzített $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{I};U)$ pontban. Ehhez először megjegyezzük, hogy az $\overline{I} \to \mathscr{L}(F;F);\ s \mapsto (\partial_2 f)(s,\varphi(s))$ függvény folytonos, mert egyenlő az $\overline{I} \to \overline{I} \times U;\ s \mapsto (s,\varphi(s))$ folytonos függvénynek és az $(\partial_2 f)|_W : W \to \mathscr{L}(F;F)$ folytonos függvénynek a kompozíciójával. (Itt felhasználjuk, hogy f folytonosan differenciálható a W halmazon és $\overline{I} \times U \subseteq W$.) Ezért minden $\psi \in \mathscr{C}(\overline{I};F)$ esetén **DIF** 5.4.11. alapján a $\overline{I} \to F;\ s \mapsto (\partial_2 f)(s,\varphi(s))\psi(s)$ függvény folytonos, így jól értelmezett az az

$$u_\varphi : \mathscr{C}(\overline{I};F) \to \mathscr{C}(\overline{I};F)$$

függvény, amelyre minden $\psi \in \mathscr{C}(\overline{I};F)$ és $t \in \overline{I}$ esetén

$$u_\varphi(\psi)(t) := -\psi(t) + \int_{t_0}^{t} (\partial_2 f)(s,\varphi(s))\psi(s)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

Triviális, hogy u_φ lineáris operátor, továbbá minden $\psi \in \mathscr{C}(\overline{I};F)$ és $t \in \overline{I}$ esetén

$$\|u_\varphi(\psi)(t)\| = \Big\| -\psi(t) + \int_{t_0}^{t} (\partial_2 f)(s,\varphi(s))\psi(s)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\Big\| \leq$$

$$\leq \|\psi(t)\| + \Big\| \int_{t_0}^{t} (\partial_2 f)(s,\varphi(s))\psi(s)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\Big\| \leq |||\psi\ ||| + \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|(\partial_2 f)(s,\varphi(s))\psi(s)\|\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) \leq$$

$$\leq |||\psi\ ||| + \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|(\partial_2 f)(s,\varphi(s))\|\|\psi(s)\|\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) \leq |||\ \psi\ ||| \Big(1+|t-t_0| \sup_{s\in\overline{I}} \|(\partial_2 f)(s,\varphi(s))\|\Big) \leq$$

$$\leq |||\psi\ ||| \Big(1 + \varrho_I \cdot \sup_{s\in\overline{I}} \|(\partial_2 f)(s,\varphi(s))\|\Big).$$

Ebből következik, hogy minden $\psi \in \mathscr{C}(\overline{I};F)$ függvényre

$$|||u_\varphi(\psi)||| = \sup_{t\in\overline{I}} \|u_\varphi(\psi)(t)\| \leq \Big(1 + \varrho_I \cdot \sup_{s\in\overline{I}} \|(\partial_2 f)(s,\varphi(s))\|\Big)\ |||\ \psi|||,$$

tehát az $u_\varphi : \mathscr{C}(\overline{I};F) \to \mathscr{C}(\overline{I};F)$ lineáris operátor folytonos. (Itt felhasználjuk azt, hogy $\sup\limits_{s\in\overline{I}} \|(\partial_2 f)(s,\varphi(s))\| < +\infty$, ami azért igaz, mert a φ függvény $\mathrm{gr}(\varphi)$ grafikonja kompakt halmaz $\mathbb{R}\times F$-ben, és $\mathrm{gr}(\varphi) \subseteq \overline{I}\times U \subseteq W$, és a $\partial_2 f$ függvény folytonos a W halmazon, így $\partial_2 f$ korlátos a $\mathrm{gr}(\varphi)$ halmazon, továbbá nyilvánvaló, hogy $\sup\limits_{s\in\overline{I}} \|(\partial_2 f)(s,\varphi(s))\| = \sup\limits_{v\in\mathrm{gr}(\varphi)} \|(\partial_2 f)(v)\|$.)

Megmutatjuk, hogy u_φ egyenlő a $K(x,\cdot) : \mathscr{C}(\overline{I};U) \to \mathscr{C}(\overline{I};F)$ parciális függvény φ pontbeli deriváltjával. Ehhez legyen $\varphi' \in \mathscr{C}(\overline{I};U)$ és $t \in \overline{I}$. Ekkor

$$K(x,\varphi')(t) - K(x,\varphi)(t) - u_\varphi(\varphi'-\varphi)(t) =$$

$$= \Big(-\varphi'(t) + x + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi'(s))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\Big) - \Big(-\varphi(t) + x + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\Big) -$$

$$-\Big(-\varphi'(t) + \varphi(t) - \int_{t_0}^{t} (\partial_2 f)(s,\varphi(s))(\varphi'(s)-\varphi(s))\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\Big) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Big(f(s,\varphi'(s)) - f(s,\varphi(s)) - (\partial_2 f)(s,\varphi(s))(\varphi'(s)-\varphi(s))\Big)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s),$$

amiből következik, hogy minden $\varphi' \in \mathscr{C}(\overline{I}; U)$ esetén

$$\begin{aligned}
|||K(x,\varphi') - K(x,\varphi) - u_\varphi(\varphi' - \varphi)||| &= \sup_{t\in\overline{I}} \|K(x,\varphi')(t) - K(x,\varphi)(t) - u_\varphi(\varphi'-\varphi)(t)\| = \\
&= \sup_{t\in\overline{I}} \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s,\varphi'(s)) - f(s,\varphi(s)) - (\partial_2 f)(s,\varphi(s))(\varphi'(s)-\varphi(s)) \Big)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) \right\| \leq \\
&\leq \sup_{t\in\overline{I}} \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s,\varphi'(s)) - f(s,\varphi(s)) - (\partial_2 f)(s,\varphi(s))(\varphi'(s)-\varphi(s))\|\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) \leq \\
&\leq \Big(\sup_{t\in\overline{I}} |t-t_0|\Big) \sup_{s\in\overline{I}} \|f(s,\varphi'(s)) - f(s,\varphi(s)) - (\partial_2 f)(s,\varphi(s))(\varphi'(s)-\varphi(s))\| = \\
&= \varrho_I \cdot \sup_{s\in\overline{I}} \|f(s,\varphi'(s)) - f(s,\varphi(s)) - (\partial_2 f)(s,\varphi(s))(\varphi'(s)-\varphi(s))\|.
\end{aligned}$$

Legyen most $r > 0$ olyan valós szám, hogy $\overline{\mathrm{B}}_r(\varphi; |||\cdot|||) \subseteq \mathscr{C}(\overline{I}; U)$. Tegyük fel, hogy $\varphi' \in \overline{\mathrm{B}}_r(\varphi; |||\cdot|||)$. Ha $s \in \overline{I}$, akkor $\varphi'(s) \in \overline{\mathrm{B}}_r(\varphi(s))$ és a $\overline{\mathrm{B}}_r(\varphi(s)) \subseteq F$ gömb konvexitása folytán $[\![\varphi(s), \varphi'(s)]\!] \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(\varphi(s)) \subseteq U$, így a véges növekmények formuláját (**DIF** 4.1.4.) alkalmazva az $f(s,\cdot)$ parciális függvényre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\|f(s,\varphi'(s)) - f(s,\varphi(s)) - (\partial_2 f)(s,\varphi(s))(\varphi'(s)-\varphi(s))\| \leq \\
&\leq \|\varphi'(s)-\varphi(s)\| \cdot \sup_{z\in[\![\varphi(s),\varphi'(s)]\!]} \|(\partial_2 f)(s,z) - (\partial_2 f)(s,\varphi(s))\|,
\end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$\begin{aligned}
&|||K(x,\varphi') - K(x,\varphi) - u_\varphi(\varphi'-\varphi)||| \leq \\
&\leq |||\varphi' - \varphi\,||| \cdot \varrho_I \cdot \sup_{s\in\overline{I}} \Big(\sup_{z\in[\![\varphi(s),\varphi'(s)]\!]} \|(\partial_2 f)(s,z) - (\partial_2 f)(s,\varphi(s))\| \Big).
\end{aligned}$$

Ezért a $(\partial_2 K)(x,\varphi) = u_\varphi$ egyenlőség bizonyításához elég azt belátni, hogy

$$\lim_{\varphi'\to\varphi} \Big(\sup_{s\in\overline{I}} \Big(\sup_{z\in[\![\varphi(s),\varphi'(s)]\!]} \|(\partial_2 f)(s,z) - (\partial_2 f)(s,\varphi(s))\| \Big)\Big) = 0.$$

Ez viszont nyilvánvalóan következik a 4.5.1. lemma b) pontjában található $(*)$ egyenlőségből, a $J := \overline{I}$, $G := \mathscr{L}(F;F)$, és $g := (\partial_2 f)|_W$ szereposztással.
Tehát $(x,\varphi) \in \mathrm{Dom}(\partial_2 K)$ és $(\partial_2 K)(x,\varphi) = u_\varphi$ is teljesül, vagyis minden $\psi \in \mathscr{C}(\overline{I}; F)$ és $t \in \overline{I}$ esetén

$$((\partial_2 K)(x,\varphi)\psi)(t) = -\psi(t) + \int_{t_0}^{t} (\partial_2 f)(s,\varphi(s))\psi(s)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s). \tag{1}$$

Ebből a formulából kiindulva könnyen igazolhatjuk, hogy a $\partial_2 K$ parciális deriváltfüggvény folytonos. Valóban, legyenek $(x,\varphi),(x',\varphi')\in U\times\mathscr{C}(\overline{I};U)$ rögzítve. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|(\partial_2K)(x',\varphi')-(\partial_2K)(x,\varphi)\| &= \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I};F)\\ |||\psi|||\le 1}} |||(\partial_2K)(x',\varphi')\psi-(\partial_2K)(x,\varphi)\psi||| = \\
&= \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I};F)\\ |||\psi|||\le 1}}\left(\sup_{t\in\overline{I}}\|((\partial_2K)(x',\varphi')\psi)(t)-((\partial_2K)(x,\varphi)\psi)(t)\|\right)= \\
&= \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I};F)\\ |||\psi|||\le 1}}\left(\sup_{t\in\overline{I}}\left\|\int_{t_0}^{t}(\partial_2f)(s,\varphi'(s))\psi(s)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)-\int_{t_0}^{t}(\partial_2f)(s,\varphi(s))\psi(s)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\right\|\right)= \\
&= \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I};F)\\ |||\psi|||\le 1}}\left(\sup_{t\in\overline{I}}\left\|\int_{t_0}^{t}((\partial_2f)(s,\varphi'(s))-(\partial_2f)(s,\varphi(s)))\psi(s)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\right\|\right)\le \\
&\le \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I};F)\\ |||\psi|||\le 1}}\left(\sup_{t\in\overline{I}}\int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)}\|(\partial_2f)(s,\varphi'(s))-(\partial_2f)(s,\varphi(s))\|\|\psi(s)\|\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\right)\le \\
&\le \sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I};F)\\ |||\psi|||\le 1}}\left(\left(\sup_{t\in\overline{I}}|t-t_0|\right)|||\,\psi\,|||\sup_{s\in\overline{I}}\|(\partial_2f)(s,\varphi'(s))-(\partial_2f)(s,\varphi(s))\|\right)\le \\
&\le \varrho_I\sup_{s\in\overline{I}}\|(\partial_2f)(s,\varphi'(s))-(\partial_2f)(s,\varphi(s))\|.
\end{aligned}$$

Ebből látszik, hogy a ∂_2K függvény (x,φ) pontbeli folytonosságához elegendő igazolni a

$$\lim_{\varphi'\to\varphi}\left(\sup_{s\in\overline{I}}\|(\partial_2f)(s,\varphi'(s))-(\partial_2f)(s,\varphi(s))\|\right)=0$$

összefüggést. Ez viszont nyilvánvalóan következik az 4.5.1. lemma b) pontjában található $(**)$ egyenlőségből, a következő szereposztással: $J:=\overline{I}$, $G:=\mathscr{L}(F;F)$, és $g:=(\partial_2f)|_W$. Tehát $\mathrm{Dom}(\partial_2K)=U\times\mathscr{C}(\overline{I};U)$ és ∂_2K folytonos függvény.

Alkalmazva a **DIF** 5.2.2. állítást kapjuk, hogy a $K:U\times\mathscr{C}(\overline{I};U)\to\mathscr{C}(\overline{I};F)$ függvény folytonosan differenciálható.

(II) Mindeddig I *tetszőleges* olyan korlátos nyílt intervallumkörnyezete volt t_0-nak $\mathbb{R}$-ben, és U *tetszőleges* olyan nyílt környezete volt x_0-nak F-ben, hogy $\overline{I}\times U\subseteq W$, ahol W olyan rögzített nyílt környezete (t_0,x_0)-nak $\mathbb{R}\times F$-ben, amelyen az f függvény folytonosan differenciálható. Továbbá, a $K:U\times\mathscr{C}(\overline{I};U)\to\mathscr{C}(\overline{I};F)$ leképezést az így megválasztott – és rögzített – (I,U) pár egyértelműen meghatározta.

Most a fentiek szerint rögzítjük az (I,U) párt, és az U halmazt változatlanul hagyva, az I intervallumot szűkíteni fogjuk bizonyos – természetesen később pontosan meghatározásra kerülő –tulajdonságok biztosítása céljából.

Mivel az f leképezés C-függvény a (t_0,x_0) pontban (4.3.1. és 4.3.2. c) pont), így az f függvényhez és (t_0,x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak vehetjük olyan I_* egzisztencia-tartományát, hogy minden olyan $J\subseteq\mathbb{R}$ nyílt intervallum unicitás-tartománya az adott Cauchy-feladatnak, amelyre $t_0\in J\subseteq I_*$ (4.2.2.). Legyen $\varphi_*:I_*\to F$ az a függvény, amely megoldása az adott Cauchy-feladatnak. Ekkor $\varphi_*(t_0)=x_0$ és U nyílt környezete x_0-nak F-ben, és φ_* folytonos t_0-ban, így $\overset{-1}{\varphi_*}\langle U\rangle\cap I$ nyílt környezete t_0-nak $\mathbb{R}$-ben. Legyen $J\subseteq\mathbb{R}$ olyan nyílt intervallum, hogy $t_0\in J\subseteq\overline{J}\subseteq\overset{-1}{\varphi_*}\langle U\rangle\cap I$.

Ekkor $\{(s,\varphi_*(s))|s\in\overline{J}\}$ kompakt részhalmaza $\overline{I}\times U$-nak, amelynek minden pontjában $\partial_2 f$ folytonos függvény, így $\sup\limits_{s\in\overline{J}}\|(\partial_2 f)(s,\varphi_*(s))\|<+\infty$. Ezért vehetünk olyan $I_0\subseteq\mathbb{R}$ nyílt intervallumot, hogy $t_0\in I_0\subseteq J$, és

$$\varrho_{I_0}\cdot\sup_{s\in\overline{J}}\|(\partial_2 f)(s,\varphi_*(s))\|<1, \tag{2}$$

hiszen van olyan $\delta>0$ valós szám, hogy $]t_0-\delta,t_0+\delta[\subseteq J$ és $2\delta\sup\limits_{s\in\overline{J}}\|(\partial_2 f)(s,\varphi_*(s))\|<1$, és ekkor $I_0:=]t_0-\delta,t_0+\delta[$ megfelelő intervallum.

Vezessük be a $\varphi_0:=\varphi_*|_{\overline{I_0}}\in\mathscr{C}(\overline{I_0};U)$ függvényt, amelyre teljesül az, hogy $\varphi_0|_{I_0}$ az egyetlen I_0-on értelmezett megoldása az f függvényhez és (t_0,x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak. Jelölje K az (I_0,U) pár által meghatározott, (I)-ben értelmezett $U\times\mathscr{C}(\overline{I_0};U)\to\mathscr{C}(\overline{I_0};F)$ folytonosan differenciálható leképezést.

A Newton–Leibniz-tétel (2.2.1.) szerint minden $t\in I_0$ esetén

$$K(x_0,\varphi_0)(t)=-\varphi_0(t)+x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_0(s))\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)=$$

$$=-\varphi_0(t)+\varphi_0(t_0)+\int_{t_0}^{t}(\mathrm{D}\varphi_0)(s)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)=-\varphi_0(t)+\varphi_0(t_0)+(\varphi_0(t)-\varphi_0(t_0))=0.$$

tehát a $K(x_0,\varphi_0):\overline{I_0}\to F$ függvény folytonossága miatt $K(x_0,\varphi_0)=0$. Továbbá, a $\partial_2 K$ függvény hatását megadó (1) formula szerint minden $\psi\in\mathscr{C}(\overline{I_0};F)$ és $t\in\overline{I_0}$ esetén

$$((\partial_2 K)(x_0,\varphi_0)\psi)(t)=-\psi(t)+\int_{t_0}^{t}(\partial_2 f)(s,\varphi_0(s))\psi(s)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s),$$

tehát

$$\left\|(\partial_2 K)(x_0,\varphi_0)+\mathrm{id}_{\mathscr{C}(\overline{I_0};F)}\right\|=\sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I_0};U)\\ |||\psi|||\le 1}}|||(\partial_2 K)(x_0,\varphi_0)\psi+\psi|||=$$

$$=\sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I_0};F)\\ |||\psi|||\le 1}}\left(\sup_{t\in\overline{I_0}}\|((\partial_2 K)(x_0,\varphi_0)\psi)(t)+\psi(t)\|\right)=$$

$$\sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I_0};F)\\ |||\psi|||\le 1}}\left(\sup_{t\in\overline{I_0}}\left\|\int_{t_0}^{t}(\partial_2 f)(s,\varphi_0(s))\psi(s)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\right\|\right)\le$$

$$\le\sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I_0};F)\\ |||\psi|||\le 1}}\left(\sup_{t\in\overline{I_0}}\int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)}\|(\partial_2 f)(s,\varphi_0(s))\|\|\psi(s)\|\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)\right)\le$$

$$\le\sup_{\substack{\psi\in\mathscr{C}(\overline{I_0};F)\\ |||\psi|||\le 1}}\left(\left(\sup_{t\in\overline{I_0}}|t-t_0|\right)|||\,\psi\,|||\sup_{s\in\overline{I_0}}\|(\partial_2 f)(s,\varphi_0(s))\|\right)\le$$

$$\le\varrho_{I_0}\sup_{s\in\overline{I_0}}\|(\partial_2 f)(s,\varphi_0(s))\|\le\varrho_{I_0}\sup_{s\in\overline{J}}\|(\partial_2 f)(s,\varphi_*(s))\|<1,$$

ahol az utolsó sorban kihasználtuk azt, hogy $I_0 \subseteq J$ miatt $\sup\limits_{s \in \overline{I_0}} \|(\partial_2 f)(s, \varphi_0(s))\| \leq \sup\limits_{s \in \overline{J}} \|(\partial_2 f)(s, \varphi_*(s))\|$, továbbá alkalmaztuk φ_0 definícióját és a (2) egyenlőtlenséget. Ez azt jelenti, hogy a $-(\partial_2 K)(x_0, \varphi_0) \in \mathscr{L}\Big(\mathscr{C}(\overline{I_0}; F); \mathscr{C}(\overline{I_0}; F)\Big)$ operátor operátornormában vett távolsága az $\mathrm{id}_{\mathscr{C}(\overline{I_0};F)}$ operátortól 1-nél kisebb, ezért a $-(\partial_2 K)(x_0, \varphi_0)$ operátor *lineáris homeomorfizmusa* a $\mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$ Banach-térnek (**LIN** 1.8.1.). Ekkor természetesen a $(\partial_2 K)(x_0, \varphi_0)$ operátor is lineáris homeomorfizmusa a $\mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$ Banach-térnek.

Tehát az I_0 (szükségképpen korlátos) nyílt intervallumot és a $\varphi_0 \in \mathscr{C}(\overline{I_0}; U)$ függvényt így megválasztva alkalmazhatjuk a folytonosan differenciálható függvényekre vonatkozó implicitfüggvény-tételt (**DIF** 11.3.1.) az (I_0, U) pár által meghatározott

$$K : U \times \mathscr{C}(\overline{I_0}; U) \to \mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$$

függvényre és (x_0, φ_0) kezdőpontra. Azt kapjuk, hogy létezik x_0-nak olyan U_0 nyílt környezete F-ben, és létezik φ_0-nak olyan V_0 nyílt környezete a $\mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$ Banach-térben, hogy $U_0 \subseteq U$ és $V_0 \subseteq \mathscr{C}(\overline{I_0}; U)$, valamint teljesülnek a következők:

– minden $(x, \varphi) \in U_0 \times V_0$ esetén $(\partial_2 K)(x, \varphi) \in \mathscr{L}(\mathscr{C}(\overline{I_0}; F); \mathscr{C}(\overline{I_0}; F))$ lineáris homeomorfizmusa a $\mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$ Banach-térnek;

– egyértelműen létezik a K függvénynek olyan (x_0, φ_0)-on áthaladó Ψ implicit függvénye, amelyre $\mathrm{Dom}(\Psi) = U_0$ és $\mathrm{Im}(\Psi) \subseteq V_0$;

– a Ψ függvény folytonosan differenciálható, és minden $x \in U_0$ esetén fennáll a $(\mathrm{D}\Psi)(x) = -((\partial_2 K)(x, \Psi(x)))^{-1} \circ (\partial_1 K)(x, \Psi(x))$ egyenlőség.

Bevezetve a

$$\Phi : I_0 \times U_0 \to F; \quad (t, x) \mapsto \Psi(x)(t)$$

leképezést, meg fogjuk mutatni, hogy (I_0, U_0, Φ) olyan hármas, amelyek létezését állítottuk.

Mivel a $\Psi : U_0 \to V_0$ függvény a K függvénynek (x_0, φ_0)-on áthaladó implicit függvénye, így minden $x \in U_0$ esetén $K(x, \Psi(x)) = K(x_0, \varphi_0) = 0$, vagyis K definíciója szerint minden $t \in \overline{I_0}$ pontra

$$0 = K(x, \Psi(x))(t) = -\Psi(x)(t) + x + \int_{t_0}^{t} f(s, \Psi(x)(s)) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s),$$

ami Φ definíciója szerint azt jelenti, hogy minden $(t, x) \in I_0 \times U_0$ párra

$$\Phi(t, x) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, \Phi(s, x)) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

Ebből a Newton–Leibniz-tétel alapján következik, hogy minden $x \in U_0$ esetén $\Phi(\cdot, x)$ differenciálható függvény (ezért $I_0 \times U_0 = \mathrm{Dom}(\partial_1 \Phi)$ is teljesül), és minden $t \in I_0$ pontra

$$(\partial_1 \Phi)(t, x) = (\mathrm{D}(\Phi(\cdot, x)))(t) = f(t, \Phi(t, x)), \tag{3}$$

valamint $\Phi(t_0, x) = x$.

Megmutatjuk, hogy a Φ függvény folytonos a $I_0 \times U_0$ halmazon. Ehhez legyen $(t, x) \in I_0 \times U_0$ rögzítve, és vegyünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számot. A $\Psi(x)$ függvény folytonos

t-ben, így vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy minden $t' \in \overline{I_0}$ pontra, ha $|t'-t| < \delta$, akkor $\|\Psi(x)(t') - \Psi(x)(t)\| < \varepsilon/2$. Ugyanakkor az $U_0 \to \mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$; $x' \mapsto \Psi(x')$ függvény is folytonos az x pontban F normája és a $\mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$ függvénytér feletti sup-norma szerint (sőt folytonosan differenciálható az U_0 halmazon), ezért van olyan $R \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre minden $x' \in U_0$ esetén, ha $\|x'-x\| < R$, akkor $|||\Psi(x') - \Psi(x)||| < \varepsilon/2$. Tehát, ha $(t', x') \in I_0 \times U_0$ olyan pont, hogy $|t'-t| < \delta$ és $\|x'-x\| < R$, akkor

$$\|\Phi(t',x') - \Phi(t,x)\| = \|\Psi(x')(t') - \Psi(x)(t)\| \le \|(\Psi(x') - \Psi(x))(t')\| + \|\Psi(x)(t') - \Psi(x)(t)\| \le$$
$$\le |||\Psi(x') - \Psi(x)||| + \|\Psi(x)(t') - \Psi(x)(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy a Φ függvény folytonos a (t,x) pontban. Tehát a $\Phi : I_0 \times U_0 \to F$ függvény folytonos.

Ha $(t,x) \in I_0 \times U_0$, akkor $\Phi(t,x) = \Psi(x)(t) \in U$, hiszen $\Psi(x) \in V_0 \subseteq \mathscr{C}(\overline{I_0}; U)$. Tehát $\mathrm{Im}(\Phi) \subseteq U$, így az $I_0 \times U_0 \to I_0 \times F$; $(t,x) \mapsto (t, \Phi(t,x))$ folytonos függvény a $I_0 \times U$ halmazba érkezik, amelyen f folytonos (sőt folytonosan differenciálható). Ezért az $I_0 \times U_0 \to F$; $(t,x) \mapsto f(t, \Phi(t,x))$ függvény folytonos, így (3) alapján a $\partial_1\Phi$ függvény folytonos az $I_0 \times U_0$ halmazon.

Bebizonyítjuk, hogy a $\partial_2\Phi$ függvény szintén folytonos az $I_0 \times U_0$ halmazon, amiből az előző bekezdés és **DIF** 5.2.2. alapján következik, hogy a Φ függvény folytonosan differenciálható az $I_0 \times U_0$ halmazon. Ehhez minden $t \in I_0$ esetén vezessük be az

$$u_t : \mathscr{C}(\overline{I_0}; F) \to F; \quad \psi \mapsto \psi(t)$$

leképezést, amely nyilvánvalóan folytonos lineáris operátor a $\mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$ függvénytér feletti sup-norma és F normája szerint. Ha $t \in I_0$, akkor minden $x \in U_0$ esetén $\Phi(t,x) = \Psi(x)(t) = u_t(\Psi(x))$, vagyis $\Phi(t,\cdot) = u_t \circ \Psi$. A $\Psi : U_0 \to \mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$ leképezés folytonosan differenciálható, ezért **DIF** 5.4.3. alapján minden $t \in I_0$ pontra az $u_t \circ \Psi$, azaz $\Phi(t,\cdot)$ függvény folytonosan differenciálható, és minden $x \in U_0$ esetén $(\partial_2\Phi)(t,x) = (\mathrm{D}(\Phi(t,\cdot)))(x) = u_t \circ (\mathrm{D}\Psi)(x)$. Ez azt jelenti, hogy a $\partial_2\Phi$ parciális függvény értelmezve van az $I_0 \times U_0$ halmazon, vagyis $I_0 \times U_0 = \mathrm{Dom}(\partial_2\Phi)$, továbbá minden $(t,x) \in I_0 \times U_0$ és $z \in F$ esetén

$$(\partial_2\Phi)(t,x)z = \Big(u_t \circ (\mathrm{D}\Psi)(x)\Big)z = ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t). \tag{4}$$

A $\partial_2\Phi$ függvény folytonosságának bizonyításához legyen $(t,x) \in I_0 \times U_0$ rögzítve, és vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számot. Ha $(t',x') \in I_0 \times U_0$, akkor (4) szerint

$$\|(\partial_2\Phi)(t',x') - (\partial_2\Phi)(t,x)\| = \sup_{\substack{z \in F,\\ \|z\| \le 1}} \|(\partial_2\Phi)(t',x')z - (\partial_2\Phi)(t,x)z\| =$$
$$= \sup_{\substack{z \in F,\\ \|z\| \le 1}} \|((\mathrm{D}\Psi)(x')z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\|,$$

tehát adott $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ és $R \in \mathbb{R}_+^*$ számok létezését kell igazolni, amelyekre minden $(t',x') \in I_0 \times U_0$ esetén teljesül az, hogy ha $|t'-t| < \delta$ és $\|x'-x\| < R$, akkor minden $z \in F$, $\|z\| \le 1$ vektorra $\|((\mathrm{D}\Psi)(x')z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\| \le \varepsilon$. Ehhez először megjegyezzük, hogy *tetszőleges* $(t',x') \in I_0 \times U_0$ esetén, minden $z \in F$, $\|z\| \le 1$

vektorra

$$\begin{aligned}
&\|((\mathrm{D}\Psi)(x')z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\| \leq \\
&\leq \|((\mathrm{D}\Psi)(x')z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t')\| + \|((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\| \leq \\
&\leq \|\|(\mathrm{D}\Psi)(x')z - (\mathrm{D}\Psi)(x)z\,\|\| + \|((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\| \leq \\
&\leq \|(\mathrm{D}\Psi)(x') - (\mathrm{D}\Psi)(x)\|\|z\| + \|((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\| \leq \\
&\leq \|(\mathrm{D}\Psi)(x') - (\mathrm{D}\Psi)(x)\| + \|((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\|.
\end{aligned} \tag{5}$$

A $\mathrm{D}\Psi : U_0 \to \mathscr{L}(\mathscr{C}(\overline{I_0}; F); \mathscr{C}(\overline{I_0}; F))$ függvény folytonos, így vehetünk olyan $R \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy minden $x' \in U_0$ esetén, ha $\|x'-x\| < R$, akkor $\|(\mathrm{D}\Psi)(x')-(\mathrm{D}\Psi)(x)\| \leq \varepsilon/2$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ha $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, amelyre

$$\delta\Big(\sup_{s\in I_0} \|(\partial_2 f)(s, \Psi(x)(s))\|\Big)\|(\mathrm{D}\Psi)(x)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

akkor minden $t' \in I_0$ pontra és minden $z \in F$, $\|z\| \leq 1$ vektorra, ha $|t' - t| < \delta$, akkor

$$\|((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

így ebből (5) alapján következik, hogy minden $(t', x') \in I_0 \times U_0$ esetén, ha $|t' - t_0| < \delta$ és $\|x' - x\| < R$, akkor $\|((\mathrm{D}\Psi)(x')z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\| \leq \varepsilon$, tehát a $\partial_2\Phi$ függvény folytonos az $I_0 \times U_0$ halmazon. (Megjegyezzük, hogy $\sup_{s\in I_0} \|(\partial_2 f)(s, \Psi(x)(s))\| < +\infty$, mert nyilvánvaló, hogy $\sup_{s\in I_0} \|(\partial_2 f)(s, \Psi(x)(s))\| \leq \sup_{v\in \mathrm{gr}(\Psi(x))} \|(\partial_2 f)(v)\|$ és $\partial_2 f$ folytonos függvény, így korlátos a $\mathrm{gr}(\Psi(x)) \subseteq \overline{I_0} \times U \subseteq W \subseteq \mathrm{Dom}(\partial_2 f)$ kompakt halmazon.)
Nyilvánvalóan elegendő volna azt igazolni, hogy minden $(t', x') \in I_0 \times U_0$ esetén, minden $z \in F$, $\|z\| \leq 1$ vektorra

$$\|((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\| \leq |t' - t|\Big(\sup_{s\in I_0} \|(\partial_2 f)(s, \Psi(x)(s))\|\Big)\|(\mathrm{D}\Psi)(x)\|. \tag{6}$$

Ennek bizonyításához először megállapítjuk, hogy a $(\mathrm{D}\Psi)(x) \in \mathscr{L}(F; \mathscr{C}(\overline{I_0}; F))$ operátor eleget tesz a

$$(\partial_2 K)(x, \Psi(x)) \circ (\mathrm{D}\Psi)(x) + (\partial_1 K)(x, \Psi(x)) = 0$$

operátoregyenletnek, tehát minden $z \in F$ esetén fennáll a

$$(\partial_2 K)(x, \Psi(x))((\mathrm{D}\Psi)(x)z) + (\partial_1 K)(x, \Psi(x))z = 0$$

függvényegyenlőség $\mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$-ben, így minden $z \in F$ és $t' \in \overline{I_0}$ esetén teljesül a

$$((\partial_2 K)(x, \Psi(x))((\mathrm{D}\Psi)(x)z))(t') + ((\partial_1 K)(x, \Psi(x))z)(t') = 0$$

vektoregyenlőség. Tehát ha $z \in F$ esetén bevezetjük a $\psi_{x,z} := (\mathrm{D}\Psi)(x)z \in \mathscr{C}(\overline{I_0}; F)$ jelölést, akkor minden $t' \in I_0$ pontra

$$((\partial_2 K)(x, \Psi(x))\psi_{x,z})(t') + ((\partial_1 K)(x, \Psi(x))z)(t') = 0. \tag{7}$$

Ugyanakkor láttuk, hogy minden $z \in F$ vektorra $(\partial_1 K)(x, \Psi(x))z$ egyenlő a z értékű $\overline{J} \to F$ konstansfüggvénnyel, valamint (2) alapján minden $z \in F$ és $t' \in \overline{I_0}$ esetén

$$\Big((\partial_2 K)(x, \Psi(x))\psi_{x,z}\Big)(t') = -\psi_{x,z}(t') + \int_{t_0}^{t'} (\partial_2 f)(s, \Psi(x)(s))\psi_{x,z}(s)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

Ez (7) alapján azt jelenti, hogy minden $z \in F$ és $t' \in \overline{I_0}$ esetén

$$\psi_{x,z}(t') = z + \int_{t_0}^{t'} (\partial_2 f)(s, \Psi(x)(s))\psi_{x,z}(s)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s). \tag{8}$$

Ebből a Newton–Leibniz-tétel (2.2.1.) alapján kapjuk, hogy minden $z \in F$ esetén a $\psi_{x,z} : \overline{I_0} \to F$ folytonos függvény az I_0 intervallumon differenciálható, és minden $t' \in I_0$ esetén teljesül rá a

$$(\mathrm{D}\psi_{x,z})(t') = (\partial_2 f)(t', \Psi(x)(t'))\psi_{x,z}(t')$$

egyenlőség, és a $\psi_{x,z}(t_0) = z$ kezdeti feltétel.

Legyen most $z \in F$, $\|z\| \leq 1$ és $t' \in I_0$. Ekkor $[\![t, t']\!] \subseteq I_0$ és a $\psi_{x,z}$ differenciálható az I_0 halmazon, így a véges növekmények formuláját (**DIF** 4.1.2.) alkalmazva a $\psi_{x,z}$ függvényre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\|((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t') - ((\mathrm{D}\Psi)(x)z)(t)\| = \|\psi_{x,z}(t') - \psi_{x,z}(t)\| \leq |t'-t| \sup_{s \in [\![t,t']\!]} \|(\mathrm{D}\psi_{x,z})(s)\| = \\
&= |t'-t| \sup_{s \in [\![t,t']\!]} \|(\partial_2 f)(s, \Psi(x)(s))\psi_{x,z}(s)\| \leq |t'-t| \sup_{s \in [\![t,t']\!]} \|(\partial_2 f)(s, \Psi(x)(s))\| \|\psi_{x,z}(s)\| \leq \\
&\qquad \leq |t'-t| \sup_{s \in [\![t,t']\!]} \Big(\|(\partial_2 f)(s, \Psi(x)(s))\| \, |\!|\!| \, (\mathrm{D}\Psi)(x)z \, |\!|\!| \Big) \leq \\
&\qquad \leq |t'-t| \Big(\sup_{s \in I_0} \|(\partial_2 f)(s, \Psi(x)(s))\| \Big) \|(\mathrm{D}\Psi)(x)\|.
\end{aligned}$$

Ezzel a (6) összefüggést igazoltuk, tehát a $\partial_2 \Phi$ függvény is folytonos.

(III) Megmutatjuk, hogy $I_0 \times U_0 = \mathrm{Dom}(\partial_1(\partial_2\Phi))$, és minden $(t, x) \in I_0 \times U_0$ esetén

$$(\partial_1(\partial_2\Phi))(t, x) = (\partial_2 f)(t, \Phi(t, x)) \circ (\partial_2\Phi)(t, x), \quad (\partial_2\Phi)(t_0, x) = \mathrm{id}_F.$$

Ehhez felhasználjuk azt, hogy a (8) egyenlőségből a (4) formula és a $\psi_{x,z}$ függvények definíciója alapján következik, hogy minden $(t, x) \in I_0 \times U_0$ és $z \in F$ esetén

$$(\partial_2\Phi)(t, x)z = z + \int_{t_0}^{t} (\partial_2 f)(s, \Phi(s, x))\Big((\partial_2\Phi)(s, x)z\Big)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

Mivel minden $x \in U_0$ esetén az

$$I_0 \to \mathscr{L}(F; F); \quad (s, x) \mapsto (\partial_2 f)(s, \Phi(s, x)) \circ (\partial_2\Phi)(s, x)$$

leképezés folytonos, így **INT** 4.6.3. és az előző egyenlőség szerint minden $(t, x) \in I_0 \times U_0$ párra

$$(\partial_2\Phi)(t, x) = \mathrm{id}_F + \int_{t_0}^{t} (\partial_2 f)(s, \Phi(s, x)) \circ (\partial_2\Phi)(s, x)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

Ebből látható, hogy minden $x \in U_0$ esetén $(\partial_2\Phi)(t_0, x) = \mathrm{id}_F$, továbbá, a Newton–Leibniz-tételből következik, hogy a $(\partial_2\Phi)(\cdot, x)$ függvény differenciálható minden $t \in I_0$ pontban és

$$(\partial_1(\partial_2\Phi))(t, x) = \Big(\mathrm{D}\Big((\partial_2\Phi)(\cdot, x)\Big)\Big)(t) = (\partial_2 f)(t, \Phi(t, x)) \circ (\partial_2\Phi)(t, x),$$

amit bizonyítani kellett.

(IV) Az (I), (II) és (III) bekezdések alapján az $\mathfrak{A}(1)$ állítás igaz. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}(n)$ igaz, és legyen F Banach-tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény, és $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$. Tegyük fel, hogy W olyan környezete a (t_0, x_0) pontnak az $\mathbb{R} \times F$ szorzattérben, amelyen az f függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható. Az f függvény n-szer is folytonosan differenciálható a W halmazon, így a $\mathfrak{A}(n)$ indukciós hipotézis alapján vehetünk olyan (I_*, U_*, Φ_*) hármast, amelyre teljesülnek a következő állítások:

a) I_* olyan nyílt intervallumkörnyezete t_0-nak $\mathbb{R}$-ben és U_* olyan nyílt környezete x_0-nak F-ben, hogy $\overline{I_*} \times U_* \subseteq \mathrm{Dom}(f)$;

b) $\Phi_* : I_* \times U_* \to F$ olyan n-szer folytonosan differenciálható függvény, hogy

$$I_* \times U_* = \mathrm{Dom}(\partial_1(\partial_2 \Phi_*)) = \mathrm{Dom}(\partial_1 \Phi_*),$$

valamint minden $(t, x) \in I_* \times U_*$ esetén $(t, \Phi_*(t, x)) \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(\partial_2 f)$, és

$$\begin{aligned} (\partial_1 \Phi_*)(t, x) = f(t, \Phi_*(t, x)), \quad \Phi_*(t_0, x) = x, \\ (\partial_1(\partial_2 \Phi_*))(t, x) = (\partial_2 f)(t, \Phi_*(t, x)) \circ (\partial_2 \Phi_*)(t, x), \quad (\partial_2 \Phi_*)(t_0, x) = \mathrm{id}_F. \end{aligned} \tag{$*$}$$

(Logikai szempontból semmi nem garantálja azt, hogy Φ_* megválasztható úgy, hogy $n+1$-szer is folytonosan differenciálható legyen, ezért az indukciós lépés megtételéhez az $I_0 := I_*$, $U_0 := U_*$ és $\Phi := \Phi_*$ választás *logikailag nem megfelelő*. Azonban látni fogjuk, hogy *matematikai okok* miatt I_* és U_* *szűkíthető* úgy, hogy Φ_* alkalmas leszűkítése már $n+1$-szer is folytonosan differenciálható lesz.)

Vezessük be a

$$g : I_* \times (U_* \times \mathscr{L}(F)) \to F \times \mathscr{L}(F); \quad (t, (x, u)) \mapsto (0_F, (\partial_2 f)(t, \Phi_*(t, x)) \circ u)$$

leképezést, ahol 0_F az additív neutrális elem az F vektortérben, és az $\mathscr{L}(F) := \mathscr{L}(F; F)$ rövidített jelölést alkalmaztuk. Ez a g függvény n-szer folytonosan differenciálható. Továbbá, az $F \times \mathscr{L}(F)$ normált szorzattér Banach-tér, és $U_* \times \mathscr{L}(F)$ nyílt részhalmaza ennek a Banach-térnek, ezért alkalmazható az $\mathfrak{A}(n)$ indukciós hipotézis úgy, hogy

– az F Banach-tér helyére $F \times \mathscr{L}(F)$ kerül,
– az f függvény helyére g-t helyettesítünk,
– a $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ kezdőpont helyére a $\Big(t_0, (x_0, \mathrm{id}_F)\Big) \in \mathrm{Dom}(g)$ párt tesszük.

Tehát vehetünk olyan $(\mathscr{I}, \mathscr{U}, \Psi)$ hármast, hogy $\mathscr{I}$ nyílt intervallumkörnyezete t_0-nak $\mathbb{R}$-ben, és $\mathscr{U}$ nyílt környezete (x_0, id_F)-nek az $F \times \mathscr{L}(F)$ Banach-térben, és $\overline{\mathscr{I}} \times \mathscr{U} \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, vagyis $\overline{\mathscr{I}} \subseteq I_*$, és $\mathscr{U} \subseteq U_* \times \mathscr{L}(F)$, valamint

$$\Psi : \mathscr{I} \times \mathscr{U} \to F \times \mathscr{L}(F)$$

olyan n-szer folytonosan differenciálható függvény, hogy $\mathscr{I} \times \mathscr{U} = \mathrm{Dom}(\partial_1 \Psi)$, és minden $(t, (x, u)) \in \mathscr{I} \times \mathscr{U}$ esetén $(t, \Psi(t, (x, u))) \in \mathrm{Dom}(g)$, és

$$(\partial_1 \Psi)(t, (x, u)) = g(t, \Psi(t, (x, u))), \quad \Psi(t_0, (x, u)) = (x, u). \tag{9}$$

(És még az is igaz, hogy $\mathscr{I} \times \mathscr{U} = \mathrm{Dom}(\partial_1(\partial_2 \Psi))$, és minden $(t, (x, u)) \in \mathscr{I} \times \mathscr{U}$ esetén

$$(\partial_1(\partial_2 \Psi))(t, (x, u)) = (\partial_2 g)(t, \Psi(t, (x, u))) \circ (\partial_2 \Psi)(t, (x, u)), \quad (\partial_2 \Psi)(t_0, (x, u)) = \mathrm{id}_{F \times \mathscr{L}(F)}$$

is teljesül, de ezeket az egyenlőségeket a továbbiakban egyáltalán nem használjuk fel. Azonban a $\partial_2 \Phi_*$-ra vonatkozó $(*)$ egyenlőségekre szükségünk lesz!)

Legyenek $\Psi_1 := \mathrm{pr}_1 \circ \Psi$ és $\Psi_2 := \mathrm{pr}_2 \circ \Psi$, ahol $\mathrm{pr}_1 : F \times \mathscr{L}(F) \to F$ az első projekció, és $\mathrm{pr}_2 : F \times \mathscr{L}(F) \to \mathscr{L}(F)$ a második projekció, tehát minden $(t,(x,u)) \in \overline{\mathscr{I}} \times \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ esetén

$$\Psi(t,(x,u)) = (\Psi_1(t,(x,u)), \Psi_2(t,(x,u))).$$

Ezért a (9) összefüggések és g definíciója szerint minden $(t,(x,u)) \in \mathscr{I} \times \mathscr{U}$ esetén

$$((\partial_1\Psi_1)(t,(x,u)), (\partial_1\Psi_2)(t,(x,u))) = (\partial_1\Psi)(t,(x,u)) = g(t,\Psi(t,(x,u))) =$$
$$= g(t,(\Psi_1(t,(x,u)),\Psi_2(t,(x,u)))) = (0_F, (\partial_2 f)(t,\Phi_*(t,\Psi_1(t,(x,u)))) \circ \Psi_2(t,(x,u))),$$

valamint

$$(x,u) = \Psi(t_0,(x,u)) = (\Psi_1(t_0,(x,u)), \Psi_2(t_0,(x,u))).$$

Ez azt jelenti, hogy minden $(t,(x,u)) \in \mathscr{I} \times \mathscr{U}$ esetén

$$(\partial_1\Psi_1)(t,(x,u)) = 0_F, \quad \Psi_1(t_0,(x,u)) = x, \tag{11}$$
$$(\partial_1\Psi_2)(t,(x,u)) = (\partial_2 f)(t,\Phi_*(t,\Psi_1(t,(x,u)))) \circ \Psi_2(t,(x,u)), \quad \Psi_2(t_0,(x,u)) = u. \tag{12}$$

A (11) összefüggésekből következik, hogy minden $(x,u) \in \mathscr{U}$ esetén a $\Psi_1(\cdot,(x,u)) : \mathscr{I} \to F$ leképezés egyenlő az x értékű konstansfüggvénnyel, tehát minden $t \in \mathscr{I}$ pontra $\Psi_1(t,(x,u)) = x$. Ezért a (12) egyenlőségek szerint minden $(t,(x,u)) \in \mathscr{I} \times \mathscr{U}$ esetén

$$(\partial_1\Psi_2)(t,(x,u)) = (\partial_2 f)(t,\Phi_*(t,x)) \circ \Psi_2(t,(x,u)), \quad \Psi_2(t_0,(x,u)) = u. \tag{13}$$

Az $\mathscr{U}$ halmaz nyílt környezete (x_0,id_F)-nek az $F \times \mathscr{L}(F)$ Banach-térben, így vehetünk olyan $U \subseteq F$ nyílt környezetét x_0-nak F-ben és olyan $V \subseteq \mathscr{L}(F)$ nyílt környezetét id_F-nek az $\mathscr{L}(F)$ operátortérben, hogy $U \times V \subseteq \mathscr{U}$. Mivel $\mathscr{U} \subseteq U_* \times \mathscr{L}(F)$, így az $U \times V \subseteq \mathscr{U}$ feltételből $U \subseteq U_*$ következik (mert $V \neq \emptyset$, hiszen $\mathrm{id}_F \in V$). Vezessük be a

$$h : \mathscr{I} \times U \to \mathscr{L}(F); \quad (t,x) \mapsto \Psi_2(t,(x,\mathrm{id}_F))$$

leképezést, amely n-szer folytonosan differenciálható, mert egyenlő az

$$\mathbb{R} \times F \to \mathbb{R} \times (F \times \mathscr{L}(F)); \quad (t,x) \mapsto (t,(x,\mathrm{id}_F))$$

folytonos affin függvény $\mathscr{I} \times U$-ra vett leszűkítésének és a Ψ_2 függvény kompozíciójával, és ezek a függvények n-szer folytonosan differenciálhatóak.

Megmutatjuk, hogy $h = \partial_2\Phi_*$ az $\mathscr{I} \times U$ halmazon. Ehhez legyen $x \in U$ rögzítve, és vezessük be az

$$u_x : \mathscr{I} \to \mathscr{L}(\mathscr{L}(F)); \quad t \mapsto \Big(v \mapsto (\partial_2 f)(t,\Phi_*(t,x)) \circ v\Big)$$

leképezést, amely nyilvánvalóan folytonos függvény. A 4.4.1. állítás szerint egyértelműen létezik olyan $\varphi_x : \mathscr{I} \to \mathscr{L}(F)$ differenciálható függvény, amelyre $\varphi_x(t_0) = \mathrm{id}_F$ és minden $t \in \mathscr{I}$ esetén

$$(\mathrm{D}\varphi_x)(t) = u_x(t)(\varphi_x(t)) = (\partial_2 f)(t,\Phi_*(t,x)) \circ \varphi_x(t).$$

Ugyanakkor a (13) összefüggések szerint, a $h(\cdot,x) : \mathscr{I} \to \mathscr{L}(F)$ leképezés olyan differenciálható függvény, hogy minden $t \in \mathscr{I}$ esetén

$$(\partial_1 h)(t,x) = (\mathrm{D}h(\cdot,x))(t) = (\mathrm{D}\Psi_2(\cdot,(x,\mathrm{id}_F)))(t) =$$
$$= (\partial_1\Psi_2)(t,(x,\mathrm{id}_F)) = (\partial_2 f)(t,\Phi_*(t,x)) \circ \Psi_2(t,(x,\mathrm{id}_F)) = (\partial_2 f)(t,\Phi_*(t,x)) \circ h(t,x),$$

valamint

$$h(t_0, x) = \Psi_2(t_0, (x, \mathrm{id}_F)) = \mathrm{id}_F$$

teljesül. Továbbá, a $(*)$ összefüggések szerint a $(\partial_2\Phi_*)(\cdot, x) : I_* \to \mathscr{L}(F)$ leképezés $\mathscr{I}$-re vett leszűkítése olyan differenciálható függvény, hogy minden $t \in \mathscr{I}$ esetén

$$(\mathrm{D}(\partial_2\Phi_*(\cdot,x)))(t)=(\partial_1(\partial_2\Phi_*))(t,x)=(\partial_2 f)(t,\Phi_*(t,x)) \circ (\partial_2\Phi_*)(t,x)=u_x(t)((\partial_2\Phi_*)(t,x)),$$

valamint

$$(\partial_2\Phi_*)(t_0, x) = \mathrm{id}_F.$$

A φ_x függvényre vonatkozó egyértelműség miatt ez azt jelenti, hogy $h(\cdot, x) = \varphi_x$ és a $(\partial_2\Phi_*)(\cdot, x)$ függvény $\mathscr{I}$-re vett leszűkítése szintén egyenlő φ_x-szel, tehát minden $t \in \mathscr{I}$ esetén $h(t, x) = (\partial_2\Phi_*)(t, x)$.

Ezzel beláttuk, hogy $h = \partial_2\Phi_*$ az $\mathscr{I} \times U$ halmazon. Mivel pedig a h függvény n-szer folytonosan differenciálható, így a $\partial_2\Phi_*$ függvény n-szer folytonosan differenciálható az $\mathscr{I} \times U$ halmazon. Ugyanakkor, a $\partial_1\Phi_*$ függvény az $\mathscr{I} \times U$ halmazon egyenlő az

$$\mathscr{I} \times U \to F; \quad (t, x) \mapsto f(t, \Phi_*(t, x))$$

függvénnyel, amely n-szer folytonosan differenciálható. Ezért a $\partial_1\Phi_*$ függvény is n-szer folytonosan differenciálható az $\mathscr{I} \times U$ halmazon. Ebből **DIF** 5.4.13. alapján következik, hogy a Φ_* függvény $n+1$-szer folytonosan differenciálható az $\mathscr{I} \times U$ halmazon. Tehát, ha az $I_0 := \mathscr{I}$ és $U_0 := U$ definícióval élünk, akkor a Φ_*-ra vonatkozó a) és b) feltételek alapján $\Phi := \Phi_*|_{\mathscr{I} \times U}$ olyan leképezés, amelynek a létezését akartuk bizonyítani az indukciós lépésben. ■

Megjegyzések. Az előző tételre gyakran úgy hivatkoznak, mint a közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó alapvető egzisztencia-tétel. Itt néhány megjegyzést fűzünk a tétel jelentésével, jelentőségével, bizonyításával és eredetével kapcsolatban.

0) Részletezni az I_0 intervallum konstrukcióját.

1) Eredet: Ralph Abraham ötlet, Joel W. Robbin kivitelezés (harmatgyenge)

2) Érdektelen részlet miért kell? Speciális indukciós módszer (teljes indukció felesleges hipotézissel): **ENS** 3.2.3.

3) Lényeges: indukciós lépésben def. tart. csökken, így ez $n = \infty$ esetén nem jó. Igaz-e végtelenszer diff. esetben? (Ha F véges dimenziós ld. Dieudonné.)

4) A Φ függvényt $\overline{I_0} \times U_0$-on is lehetett volna értelmezni ugyanazzal a formulával, és Φ folytonos lenne.

4.6. Autonóm áramok simasága

4.6.1. Állítás. *Legyen F Banach-tér és $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ C^n-osztályú függvény, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Ha $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor létezik t_0-nak olyan I_0 nyílt intervallumkörnyezete $\mathbb{R}$-ben és létezik x_0-nak olyan U_0 nyílt környezete F-ben, hogy $I_0 \times U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ és a Φ_{f,t_0} függvény C^n-osztályú az $I_0 \times U_0$ halmazon.*

Bizonyítás. A $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz olyan nyílt környezete a (t_0, x_0) pontnak, amelyen az f függvény C^n-osztályú, így a 4.5.2. tételt alkalmazva kapjuk, hogy létezik olyan (I_0, U_0, Φ)

hármas, amelyre I_0 nyílt intervallumkörnyezete t_0-nak $\mathbb{R}$-ben, és U_0 nyílt környezete x_0-nak F-ben, és $I_0 \times U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, valamint $\Phi : I_0 \times U_0 \to F$ olyan C^n-osztályú függvény, hogy minden $(t,x) \in I_0 \times U_0$ esetén $(t, \Phi(t,x)) \in \mathrm{Dom}(f)$ és

$$(\partial_1 \Phi)(t,x) = f(t, \Phi(t,x)), \quad \Phi(t_0, x) = x.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in U_0$ esetén a $\Phi(\cdot, x) : I_0 \to F$ parciális függvény megoldása az f függvényhez és (t_0, x) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, és mivel f C-függvény (4.3.2.), így 4.3.4. alapján $\Phi(\cdot, x) \subseteq \varphi_{f;t_0,x}$. Tehát minden $x \in U_0$ esetén $(t_0, x) \in \mathrm{Dom}(f)$ és $I_0 \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x})$, így minden $t \in I_0$ pontra $t \in \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x})$, azaz $(t,x) \in \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$, valamint $\Phi(t,x) = \varphi_{f;t_0,x}(t) = \Phi_{f,t_0}(t,x)$, vagyis $\Phi \subseteq \Phi_{f,t_0}$. Ezért a Φ_{f,t_0} függvény C^n-osztályú az $I_0 \times U_0$ halmazon. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állítás még nem azt jelenti, hogy ha az $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény C^n-osztályú, akkor $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén a Φ_{f,t_0} áram definíciós tartománya nyílt és a Φ_{f,t_0} függvény C^n-osztályú. Az állítás csak annyit mond, hogy létezik olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times F$ nyílt halmaz, hogy $(\{t_0\} \times F) \cap \mathrm{Dom}(f) \subseteq \Omega \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ és a Φ_{f,t_0} áram C^n-osztályú az Ω halmazon; azonban az az állítás semmit nem mond azokról a $(t,x) \in \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ pontokról, amelyekre $(t,x) \notin \Omega$.

4.6.2. Definíció. *Ha F normált tér, akkor az $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény által meghatározott differenciálegyenletre azt mondjuk, hogy* **autonóm**, *ha létezik olyan $g : F \rightarrowtail F$ függvény, hogy $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathrm{Dom}(g)$ és minden $(t,x) \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén $f(t,x) = g(x)$. Ekkor minden $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén a Φ_{f,t_0} függvényt* **autonóm áramnak** *nevezzük.*

4.6.3. Tétel. (**Autonóm áramok simasága.**) *Legyen F Banach-tér, $g : F \rightarrowtail F$ függvény, és vezessük be az $f : \mathbb{R} \times \mathrm{Dom}(g) \to F$; $(t,x) \mapsto g(x)$ leképezést. Ha a g függvény C^n-osztályú, ahol $n \in \mathbb{N}^*$ vagy $n = \infty$, akkor minden $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén a $\mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ halmaz nyílt és a Φ_{f,t_0} áram C^n-osztályú függvény.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén igaz az állítás, akkor $n = \infty$ esetén is igaz. A bizonyítás végéig legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $t_0 \in \mathbb{R}$ rögzítve.

A definíció szerint

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0}) = \{\ (t,x) \in \mathbb{R} \times F \mid ((t_0,x) \in \mathrm{Dom}(f)) \wedge (t \in \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x}))\ \} = \\ = \{\ (t,x) \mid (x \in \mathrm{Dom}(g)) \wedge (t \in \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x}))\ \},\end{aligned}$$

és minden $(t,x) \in \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ esetén

$$\Phi_{f,t_0}(t,x) \ = \ \varphi_{f;t_0,x}(t).$$

A magasabb rendű folytonos differenciálhatóság lokalitása miatt elegendő azt igazolni, hogy minden $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{Dom}(g)$ pontra, ha $t \in \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x})$, akkor létezik olyan W környezete (t,x)-nek az $\mathbb{R} \times F$ szorzattérben, hogy $W \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ és a Φ_{f,t_0} áram C^n-osztályú függvény a W halmazon. Ehhez azt fogjuk igazolni, hogy ha $x \in \mathrm{Dom}(g)$ rögzített vektor, akkor minden $t \in \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x})$ ponthoz létezik t-nek olyan I nyílt intervallumkörnyezete $\mathbb{R}$-ben és létezik x-nek olyan U nyílt környezete F-ben, hogy $I \times U \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ és a Φ_{f,t_0} áram C^n-osztályú függvény az $I \times U$ halmazon.

Legyen tehát $x \in \mathrm{Dom}(g)$ rögzítve és jelölje $\mathrm{I}(x)$ azon $t \in \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x})$ pontok halmazát, amelyekhez létezik t-nek olyan I nyílt intervallumkörnyezete $\mathbb{R}$-ben és létezik x-nek olyan

U nyílt környezete F-ben, hogy $I \times U \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ és a Φ_{f,t_0} áram C^n-osztályú függvény az $I \times U$ halmazon. Azt kell belátni, hogy $\mathrm{I}(x) = \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x})$.

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{I}(x) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, mert ha $t \in \mathrm{I}(x)$ és I olyan nyílt intervallumkörnyezete t-nek $\mathbb{R}$-ben és U olyan nyílt környezete x-nek F-ben, hogy $I \times U \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ és a Φ_{f,t_0} áram C^n-osztályú függvény az $I \times U$ halmazon, akkor minden $t' \in I$ esetén I olyan nyílt intervallumkörnyezete t'-nek $\mathbb{R}$-ben és U olyan nyílt környezete x-nek F-ben, hogy $I \times U \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ és a Φ_{f,t_0} áram C^n-osztályú függvény az $I \times U$ halmazon, vagyis $t' \in \mathrm{I}(x)$, ami azt jelenti, hogy $I \subseteq \mathrm{I}(x)$, így t belső pontja $\mathrm{I}(x)$-nek $\mathbb{R}$-ben.

Megmutatjuk, hogy az $\mathrm{I}(x)$ halmaz zárt a $\mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x}) \subseteq \mathbb{R}$ euklidészi metrikus altérben. Ehhez legyen $t \in \overline{\mathrm{I}(x)} \cap \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x})$, ahol $\overline{\mathrm{I}(x)}$ az $\mathrm{I}(x)$ halmaz lezártja $\mathbb{R}$-ben. Igazolni fogjuk, hogy $t \in \mathrm{I}(x)$.

Alkalmazva a 4.6.1. állítást az $x_0 := \varphi_{f;t_0,x}(t)$ pontra, vehetjük olyan I_0 nyílt intervallumkörnyezetét t_0-nak $\mathbb{R}$-ben és olyan U_0 nyílt környezetét $\varphi_{f;t_0,x}(t)$-nek F-ben, hogy $I_0 \times U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ és a Φ_{f,t_0} függvény C^n-osztályú az $I_0 \times U_0$ halmazon. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, hogy $]t_0 - r, t_0 + r[\subseteq I_0$. Ekkor a $]t - r, t + r[\cap \overset{-1}{\varphi}_{f;t_0,x}\langle U_0 \rangle$ halmaz nyílt környezete t-nek, így $t \in \overline{\mathrm{I}(x)}$ miatt vehetünk egy

$$t_* \in \left( ]t - r, t + r[\cap \overset{-1}{\varphi}_{f;t_0,x}\langle U_0 \rangle \right) \cap \mathrm{I}(x)$$

pontot. Világos, hogy $\mathrm{I}(x)$ definíciója és $t_* \in \mathrm{I}(x)$ alapján rögzíthetjük t_*-nak olyan I_* nyílt intervallumkörnyezetét $\mathbb{R}$-ben és x-nek olyan U_* nyílt környezetét F-ben, hogy $I_* \times U_* \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ és a Φ_{f,t_0} áram C^n-osztályú függvény az $I_* \times U_*$ halmazon, vagyis a $\Psi := \Phi_{f,t_0}|_{I_* \times U_*} : I_* \times U_* \to F$ függvény C^n-osztályú. Ekkor a $\Psi(t_*, \cdot) : U_* \to F$ függvény is C^n-osztályú, így folytonos is, és az $x \in U_*$ ponthoz a

$$\Psi(t_*, x) = \Phi_{f,t_0}(t_*, x) = \varphi_{f;t_0,x}(t_*) \in U_0$$

értéket rendeli, tehát az $U := \overset{-1}{\Psi}(t_*, \cdot)\langle U_0 \rangle$ halmaz olyan nyílt környezete x-nek F-ben, hogy $U \subseteq U_*$ és minden $x' \in U$ pontra $\Psi(t_*, x') \in U_0$. Ugyanakkor minden $t' \in]t_* - r, t_* + r[$ pontra $t' - t_* + t_0 \in]t_0 - r, t_0 + r[$, vagyis $I :=]t_* - r, t_* + r[$ olyan nyílt intervallumkörnyezete t-nek $\mathbb{R}$-ben és U olyan nyílt környezete x-nek F-ben, hogy minden $(t', x') \in I \times U$ párra $(t' - t_* + t_0, \Psi(t_*, x')) \in I_0 \times U_0 \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$. Ezért jól értelmezett a

$$\Phi : I \times U \to F; \quad (t', x') \mapsto \Phi_{f,t_0}(t' - t_* + t_0, \Psi(t_*, x'))$$

leképezés. Világos, hogy ha bevezetjük az

$$\alpha : I \times U \to \mathbb{R} \times F; \quad (t', x') \mapsto (t' - t_* + t_0, \Psi(t_*, x')),$$

$$\beta := \Phi_{f,t_0}|_{I_0 \times U_0} : I_0 \times U_0 \to F$$

függvényeket, akkor $\Phi = \beta \circ \alpha$. Az α függvény C^n-osztályú, és a β függvény is C^n-osztályú, így a $\Phi : I \times U \to F$ leképezés is C^n-osztályú.

Legyen $x' \in U$ rögzítve, és vezessük be az $y' := \Phi_{f,t_0}(t_*, x')$ pontot. Világos, hogy ekkor a $\Phi(\cdot, x') : I \to F$ differenciálható függvényre

$$\Phi(t_*, x') = \Phi_{f,t_0}(t_0, \Psi(t_*, x')) = \Psi(t_*, x') = \Phi_{f,t_0}(t_*, x') = y'$$

teljesül, vagyis $\Phi(\cdot,x')(t_*) = y'$. Ugyanakkor az áram definíciója szerint minden $t' \in I$ esetén

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}\Phi(\cdot,x'))(t') = (\partial_1\Phi)(t',x') = (\partial_1\Phi_{f,t_0})(t'-t_*+t_0,\Psi(t_*,x')) =\\ = f(t'-t_*+t_0,\Phi_{f,t_0}(t'-t_*+t_0,\Psi(t_*,x'))) = f(t'-t_*+t_0,\Phi(t',x')) =\\ = g(\Phi(t',x')) = f(t',\Phi(t',x')).\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a $\Phi(\cdot,x') : I \to F$ függvény megoldása az f függvényhez és (t_*,y') kezdeti feltételhez tartozó Cauchy-feladatnak, következésképpen

$$\Phi(\cdot,x') \subseteq \varphi_{f;t_*,y'}. \tag{1}$$

Ugyanakkor $y' = \Phi_{f,t_0}(t_*,x') = \varphi_{f;t_0,x'}(t_*)$ és minden $t' \in \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x'})$ esetén

$$(\mathrm{D}\varphi_{f;t_0,x'})(t') = f(t',\varphi_{f;t_0,x'}(t')),$$

vagyis a $\varphi_{f;t_0,x'}$ függvény szintén megoldása az f függvényhez és (t_*,y') kezdeti feltételhez tartozó Cauchy-feladatnak, következésképpen

$$\varphi_{f;t_0,x'} \subseteq \varphi_{f;t_*,y'}. \tag{2}$$

Ebből következik, hogy $t_0 \in \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x'}) \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_*,y'})$ és $\varphi_{f;t_*,y'}(t_0) = \varphi_{f;t_0,x'}(t_0) = x'$, vagyis a $\varphi_{f;t_*,y'}$ függvény megoldása az f függvényhez és (t_0,x') kezdeti feltételhez tartozó Cauchy-feladatnak, következésképpen

$$\varphi_{f;t_*,y'} \subseteq \varphi_{f;t_0,x'}. \tag{3}$$

A (2) és (3) összefüggések alapján $\varphi_{f;t_*,y'} = \varphi_{f;t_0,x'}$, ezért (1) szerint $\Phi(\cdot,x') \subseteq \varphi_{f;t_0,x'}$, vagyis $I = \mathrm{Dom}(\Phi(\cdot,x')) \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x'})$, és minden $t' \in I$ esetén

$$\Phi(t',x') = \varphi_{f;t_0,x'}(t') = \Phi_{f,t_0}(t',x').$$

Ez azt jelenti, hogy $\Phi \subseteq \Phi_{f,t_0}$, tehát $I \times U = \mathrm{Dom}(\Phi) \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$, és a Φ_{f,t_0} függvény C^n-osztályú az $I \times U$ halmazon. Mivel pedig $t_* \in]t-r,t+r[$, így $t \in]t_*-r,t_*+r[= I$, vagyis I olyan nyílt intervallumkörnyezete t-nek $\mathbb{R}$-ben és U olyan nyílt környezete x-nek F-ben, hogy $I \times U \subseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f,t_0})$ és a Φ_{f,t_0} áram C^n-osztályú függvény az $I \times U$ halmazon, tehát $t \in \mathrm{I}(x)$.

Ezzel beláttuk, hogy $\overline{\mathrm{I}(x)} \cap \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x}) = \mathrm{I}(x)$, így az $\mathrm{I}(x)$ halmaz zárt a $\mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x}) \subseteq \mathbb{R}$ euklidészi metrikus altérben. Mivel az $\mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x})$ halmaz összefüggő $\mathbb{R}$-ben, így $\mathrm{I}(x) = \emptyset$ vagy $\mathrm{I}(x) = \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x})$. A 4.6.1. állítás szerint $t_0 \in \mathrm{I}(x)$, ezért $\mathrm{I}(x) = \mathrm{Dom}(\varphi_{f;t_0,x})$, amit bizonyítani kellett. ■

4.7. Peano-féle egzisztenciatétel

4.7.1. Definíció. *Ha F valós vektortér, és $a,b \in \mathbb{R}$ olyan pontok, hogy $a < b$, akkor a $\varphi : [a,b] \to F$ leképezést* **töröttvonalfüggvénynek** *nevezzük, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $\mathbb{R}$-ben haladó $(t_k)_{0 \le k \le n}$ szigorúan monoton növő rendszer, hogy $t_0 = a$, $t_n = b$ és minden $k < n$ természetes számra és $t \in [t_k,t_{k+1}]$ pontra*

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) + \Big(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\Big).(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)).$$

Nyilvánvaló, hogy ha F valós normált tér, és $a, b \in \mathbb{R}$ olyan pontok, hogy $a < b$, akkor minden $\varphi : [a, b] \to F$ töröttvonalfüggvény folytonos, és ha $n \in \mathbb{N}$, valamint $(t_k)_{0 \leq k \leq n}$ olyan $\mathbb{R}$-ben haladó szigorúan monoton növő rendszer, hogy $t_0 = a$, $t_n = b$ és minden $k < n$ természetes számra és $t \in [t_k, t_{k+1}]$ pontra

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) + \Big(\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\Big).(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)),$$

akkor minden $k < n$ természetes számra φ differenciálható a $]t_k, t_{k+1}[$ nyílt intervallumon, tehát $\mathrm{Dom}(\varphi) \setminus \mathrm{Dom}(\mathrm{D}\varphi)$ *véges* halmaz, és minden $t \in]t_k, t_{k+1}[$ pontra

$$(\mathrm{D}\varphi)(t) = \frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)}{t_{k+1} - t_k}.$$

4.7.2. Lemma. *Legyen F véges dimenziós valós normált tér és*

$$f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$$

folytonos függvény, valamint $(t_0, x_0) \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$. Legyenek $\tau, R \in \mathbb{R}_+^*$ olyan számok, hogy $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{\mathrm{B}}_R(x_0) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és f korlátos a $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{\mathrm{B}}_R(x_0)$ halmazon, továbbá legyen $M := \sup\limits_{(t,x) \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{\mathrm{B}}_R(x_0)} \|f(t, x)\|$. Tegyük fel, hogy $M > 0$, és legyen $\tau_0 := \min\left(\tau, \dfrac{R}{2M}\right)$. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan $\varphi : [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \to F$ töröttvonalfüggvény, amelyre teljesülnek a következők:

- *$\varphi(t_0) = x_0$.*
- *minden $t \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ esetén $\varphi(t) \in \mathrm{B}_R(x_0)$ (ezért $(t, \varphi(t)) \in \mathrm{Dom}(f)$);*
- *minden $t \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}\varphi)$ esetén*

$$\|(\mathrm{D}\varphi)(t) - f(t, \varphi(t))\| < \varepsilon;$$

- *minden $t, s \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ esetén*

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\| \leq M|t - s|.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve. A Heine-tétel szerint f egyenletesen folytonos a $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{\mathrm{B}}_R(x_0) \subseteq \mathbb{R} \times F$ kompakt halmazon, így vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre teljesül az, hogy minden $(t, x), (t', x') \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{\mathrm{B}}_R(x_0)$ esetén, ha $|t' - t| < \delta$ és $\|x' - x\| < \delta$, akkor $\|f(t', x') - f(t, x)\| < \varepsilon$. Természetesen feltehetjük, hogy $\delta \leq R$. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy

$$\frac{\tau_0}{n} < \min\left(\delta, \frac{\delta}{M}\right).$$

(I) Legyen $(t_k)_{1 \leq k \leq n}$ olyan szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, amelyre $t_n = t_0 + \tau_0$ és minden $k < n$ természetes számra $t_{k+1} - t_k \leq \dfrac{\tau_0}{n}$. (Például megfelelő az a $(t_k)_{1 \leq k \leq n}$ rendszer, amely olyan, hogy minden $k < n$ természetes számra $t_k := t_0 + \dfrac{k}{n}\tau_0$, de nem szükséges az, hogy a t_k pontok "egyenletesen" legyenek elosztva a $[t_0, t_0 + \tau_0]$ intervallumban.)

Megmutatjuk, hogy egyértelműen létezik olyan $\mathrm{B}_R(x_0)$-ban haladó $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ rendszer, amelyre teljesül az, hogy minden $k < n$ természetes számra

$$x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k).f(t_k, x_k).$$

Az *unicitás* bizonyításához legyenek $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ és $(x'_k)_{1\leq k\leq n}$ olyan $\mathrm{B}_R(x_0)$-ban haladó rendszerek, hogy minden $k < n$ természetes számra $x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k).f(t_k, x_k)$ és $x'_{k+1} = x'_k + (t_{k+1} - t_k).f(t_k, x'_k)$. Indirekt, tegyük fel, hogy van olyan $1 \leq k \leq n$ természetes szám, amelyre $x_k \neq x'_k$, vagyis a $\mathfrak{N} := \{k \in \mathbb{N} | (1 \leq k \leq n) \wedge (x_k \neq x'_k)\}$ halmaz nem üres. Jelölje k_* a $\mathfrak{N}$ halmaz legkisebb elemét. Nyilvánvaló, hogy $1 \notin \mathfrak{N}$, mert $x_1 = x_0 + (t_1 - t_0).f(t_0, x_0) = x'_1$, ezért $k_* > 1$. A k_* szám minimalitása folytán $1 \leq k_* - 1 \notin \mathfrak{N}$, vagyis $x_{k_*-1} = x'_{k_*-1}$, amiből következik, hogy

$$x_{k_*} = x_{k_*-1} + (t_{k_*} - t_{k_*-1}).f(t_{k_*-1}, x_{k_*-1}) = x'_{k_*-1} + (t_{k_*} - t_{k_*-1}).f(t_{k_*-1}, x'_{k_*-1}) = x'_{k_*},$$

tehát $k_* \notin \mathfrak{N}$, holott $k_* \in \mathfrak{N}$. Ezért $\mathfrak{N} = \emptyset$, azaz $(x_k)_{1\leq k\leq n} = (x'_k)_{1\leq k\leq n}$.

Az *egzisztencia* bizonyításához jelölje $\mathfrak{M}$ azon $1 \leq m \leq n$ természetes számok halmazát, amelyekhez létezik olyan $\mathrm{B}_R(x_0)$-ban haladó $(x_k)_{1\leq k\leq m}$ rendszer, amelyre teljesül az, hogy minden $k < m$ természetes számra $x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k).f(t_k, x_k)$. Világos, hogy az $x_1 := x_0 + (t_1 - t_0).f(t_0, x_0) \in F$ vektorra

$$\|x_1 - x_0\| = (t_1 - t_0)\|f(t_0, x_0)\| \leq (t_1 - t_0)M \leq \frac{\tau_0}{n}M \leq \tau_0 M \leq \frac{R}{2} < R,$$

vagyis $x_1 \in \mathrm{B}_R(x_0)$, ezért az $(x_k)_{k=1}$ (egy tagú) rendszerre teljesül az, hogy a $\mathrm{B}_R(x_0)$-ban halad, és minden $k < 1$ természetes számra a definíció szerint $x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k).f(t_k, x_k)$, hiszen $x_1 = x_0 + (t_1 - t_0).f(t_0, x_0)$. Ez azt jelenti, hogy $1 \in \mathfrak{M}$, vagyis $\mathfrak{M}$ nem üres, és természetesen véges. Jelölje m_* az $\mathfrak{M}$ halmaz legnagyobb elemét. Megmutatjuk, hogy $m_* = n$. Indirekt, tegyük fel, hogy $m_* < n$, és vegyünk olyan $\mathrm{B}_R(x_0)$-ban haladó $(x_k)_{1\leq k\leq m_*}$ rendszert, hogy minden $k < m_*$ természetes számra $x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k).f(t_k, x_k)$. Ekkor

$$x_{m_*} - x_0 = \sum_{k=0}^{m_*-1}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{m_*-1}(t_{k+1} - t_k).f(t_k, x_k),$$

amiből következik, hogy

$$\|x_{m_*} - x_0\| \leq \sum_{k=0}^{m_*-1}(t_{k+1} - t_k)\|f(t_k, x_k)\| \leq \sum_{k=0}^{m_*-1}\frac{\tau_0}{n}M = \frac{m_*}{n}\tau_0 M < \tau_0 M \leq \frac{R}{2}, \tag{1}$$

hiszen minden $k \leq m_* - 1$ természetes számra $t_{k+1} - t_k \leq \dfrac{\tau_0}{n}$ és $\|f(t_k, x_k)\| \leq M$, valamint $\tau_0 \leq \dfrac{R}{2M}$. Ugyanakkor, az

$$x := x_{m_*} + (t_{m_*+1} - t_{m_*}).f(t_{m_*}, x_{m_*}) \in F$$

vektorra teljesül az, hogy

$$\|x - x_{m_*}\| = (t_{m_*+1} - t_{m_*})\|f(t_{m_*}, x_{m_*}\| \leq \frac{\tau_0}{n}M \leq \tau_0 M \leq \frac{R}{2}, \tag{2}$$

hiszen $t_{m_*+1} - t_{m_*} \leq \dfrac{\tau_0}{n}$ és $\|f(t_{m_*}, x_{m_*}\| \leq M$, valamint $\tau_0 \leq \dfrac{R}{2M}$. Az (1) és (2) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\|x - x_0\| \leq \|x - x_{m_*}\| + \|x_{m_*} - x_0\| < 2\frac{R}{2} = R,$$

vagyis $x \in \mathrm{B}_R(x_0)$. Ezért az $x_{m_*+1} := x$ vektorra teljesül az, hogy az $(x_k)_{1\leq k\leq m_*+1}$ rendszer $\mathrm{B}_R(x_0)$-ban halad és minden $k < m_* + 1$ természetes számra fennáll az $x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k).f(t_k, x_k)$ egyenlőség, vagyis $m_* + 1 \in \mathfrak{M}$. Ez ellentmond m_* maximalitásának, ezért $m_* = n$, vagyis $n \in \mathfrak{M}$, ami az előírt tulajdonságú vektorrendszer létezését jelenti.

Jelölje φ_+ azt a $[t_0, t_0 + \tau_0] \to F$ függvényt, amelyre teljesül az, hogy minden $k < n$ természetes számra és $t \in [t_k, t_{k+1}]$ pontra

$$\varphi_+(t) := x_k + (t - t_k).f(t_k, x_k),$$

ami jól értelmezett, mert az $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ rendszer definíciója szerint minden $k < n$ természetes számra $x_k + (t_{k+1} - t_k).f(t_k, x_k) = x_{k+1}$. Világos, hogy φ_+ töröttvonalfüggvény, mert ha $k < n$ természetes szám és $t \in [t_k, t_{k+1}]$, akkor

$$\Big(\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\Big).(\varphi_+(t_{k+1}) - \varphi_+(t_k)) = \Big(\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\Big).(x_k + (t_{k+1} - t_k).f(t_k, x_k) - x_k) =$$
$$= (t - t_k).f(t_k, x_k) = \varphi_+(t) - x_k = \varphi_+(t) - \varphi_+(t_k).$$

Ebből az is következik, hogy minden $k < n$ természetes számra és $t \in [t_k, t_{k+1}]$ pontra $\varphi_+(t)$ eleme a $\varphi_+(t_k) = x_k \in \mathrm{B}_R(x_0)$ és $\varphi_+(t_{k+1}) = x_{k+1} \in \mathrm{B}_R(x_0)$ vektorok által meghatározott zárt szakasznak az F vektortérben, és mivel $\mathrm{B}_R(x_0)$ konvex halmaz, így $\varphi_+(t) \in \mathrm{B}_R(x_0)$, következésképpen $\mathrm{Im}(\varphi_+) \subseteq \mathrm{B}_R(x_0)$.

A definíció szerint nyilvánvaló, hogy minden $k \leq n$ természetes számra $\varphi_+(t_k) = x_k$, így $\varphi_+(t_0) = x_0$ is teljesül.

Megmutatjuk, hogy minden $t \in [t_0, t_0 + \tau_0] \setminus \{x_k | k \in n + 1\}$ esetén fennáll a $\|(\mathrm{D}\varphi_+)(t) - f(t, \varphi_+(t))\| < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Ehhez legyen $k < n$ természetes szám és $t \in]t_k, t_{k+1}[$. A definíció szerint ekkor $(\mathrm{D}\varphi_+)(t) = f(t_k, x_k)$. Nyilvánvaló, hogy $|t - t_k| < t_{k+1} - t_k \leq \dfrac{\tau_0}{n} < \delta$, továbbá $\|\varphi_+(t) - x_k\| = (t - t_k)\|f(t_k, x_k)\| < \dfrac{\tau_0}{n}M \leq \dfrac{\delta}{M}M = \delta$, ezért δ választása szerint $\|(\mathrm{D}\varphi_+)(t) - f(t, \varphi_+(t))\| = \|f(t_k, x_k) - f(t, \varphi_+(t))\| < \varepsilon$. Ha $k \leq n$ olyan természetes szám, hogy φ_+ differenciálható x_k-ban, akkor $0 < k < n$ és $f(t_k, x_k) = (\mathrm{D}_+\varphi_+)(t_k) = (\mathrm{D}\varphi_+)(t_k)$, következésképpen $\|(\mathrm{D}\varphi_+)(t_k) - f(t_k, \varphi_+(t_k))\| = \|(\mathrm{D}\varphi_+)(t_k) - f(t_k, x_k)\| = 0 < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $t \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}\varphi)$ esetén $\|(\mathrm{D}\varphi)(t) - f(t, \varphi(t))\| < \varepsilon$.

Megmutatjuk, hogy minden $t, s \in [t_0, t_0 + \tau_0] \setminus \{x_k | k \in n + 1\}$ és esetén, ha $t < s$, akkor $\|\varphi_+(s) - \varphi_+(t)\| \leq M(s - t)$ teljesül. Ehhez legyenek $j, k < n$ olyan természetes számok, hogy $j \leq k$ és $t \in [t_j, t_{j+1}]$ és $s \in [k_k, t_{k+1}]$. Ekkor, felhasználva azt, hogy vektortérben üres indexhalmazú rendszer összege definíció szerint egyenlő 0-val, kapjuk, hogy

$$\varphi_+(s) - \varphi_+(t) = (\varphi_+(s) - \varphi_+(t_k)) + \sum_{p=j+1}^{k-1} (\varphi_+(t_{p+1}) - \varphi_+(t_p)) + (\varphi_+(t_{j+1}) - \varphi_+(t)) =$$
$$= (s - t_k).f(t_k, x_k) + \Big(\sum_{p=j+1}^{k-1} (t_{p+1} - t_p).f(t_p, x_p)\Big) + (x_{j+1} - x_j - (t - t_j).f(t_j, x_j)) =$$
$$= (s - t_k).f(t_k, x_k) + \Big(\sum_{p=j+1}^{k-1} (t_{p+1} - t_p).f(t_p, x_p)\Big) - (t_{j+1} - t_j)f(t_j, x_j) + (t - t_j).f(t_j, x_j) =$$
$$= (s - t_k).f(t_k, x_k) + \Big(\sum_{p=j+1}^{k-1} (t_{p+1} - t_p).f(t_p, x_p)\Big) + (t_{j+1} - t)f(t_j, x_j) = (s - t).\sum_{p=j}^{k} \lambda_p.f(t_p, x_p),$$

ahol $(\lambda_p)_{j\leq p\leq k}$ az a rendszer, amelyre minden $j \leq p \leq k$ esetén

$$\lambda_p := \begin{cases} \dfrac{t_{j+1}-t}{s-t} & \text{, ha } p = j, \\ \dfrac{t_{p+1}-t_p}{s-t} & \text{, ha } j+1 \leq p \leq k-1, \\ \dfrac{s-t_k}{s-t} & \text{, ha } p = k. \end{cases}$$

Mivel minden $j \leq p \leq k$ számra $\lambda_p \in [0,1]$ és nyilvánvalóan

$$\sum_{p=j}^{k} \lambda_p = \frac{t_{j+1}-t}{s-t} + \sum_{p=j+1}^{k-1} \left(\frac{t_{p+1}-t_p}{s-t}\right) + \frac{s-t_k}{s-t} = 1,$$

ebből következik, hogy

$$\|\varphi_+(s) - \varphi_+(t)\| \leq (s-t)\sum_{p=j}^{k} \lambda_p \|f(t_p, x_p)\| \leq (s-t)\sum_{p=j}^{k} \lambda_p M = M(s-t).$$

Ezzel igazoltuk, hogy ε-hoz létezik olyan φ_+ töröttvonalfüggvény, amely az összes követelménynek eleget tesz a $[t_0, t_0+\tau_0]$ intervallumon.

(II) Legyen $(t_k)_{1\leq k\leq n}$ olyan szigorúan monoton fogyó rendszer $\mathbb{R}$-ben, amelyre $t_n = t_0 - \tau_0$ és minden $k < n$ természetes számra $t_k - t_{k+1} \leq \dfrac{\tau_0}{n}$. (Például megfelelő az a $(t_k)_{1\leq k\leq n}$ rendszer, amely olyan, hogy minden $k < n$ természetes számra $t_k := t_0 - \dfrac{k}{n}\tau_0$, de nem szükséges az, hogy a t_k pontok "egyenletesen" legyenek elosztva a $[t_0-\tau_0, t_0]$ intervallumban.)

Ezután (I) mintáját követve igazolható, hogy egyértelműen létezik olyan $\mathrm{B}_R(x_0)$-ban haladó $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ rendszer, amelyre teljesül az, hogy minden $k < n$ természetes számra

$$x_{k+1} = x_k + (t_k - t_{k+1}).f(t_k, x_k),$$

majd bevezetjük azt a $\varphi_- : [t_0-\tau_0, t_0] \to F$ függvényt, amelyre teljesül az, hogy minden $k < n$ természetes számra és $t \in [t_{k+1}, t_k]$ pontra

$$\varphi_-(t) := x_k + (t_k - t).f(t_k, x_k).$$

Erre a φ_- függvényre az (I) mintáját követve igazolható, hogy olyan töröttvonalfüggvény, amely minden előírt feltételnek eleget tesz a $[t_0-\tau_0, t_0]$ intervallumon.

(III) Bevezetjük a $\varphi : [t_0-\tau_0, t_0+\tau_0] \to F$ töröttvonalfüggvényt a φ_- és φ_+ függvények összeragasztásával. Ez – egy kivételével – az összes előírt feltételnek nyilvánvalóan eleget tesz a $[t_0-\tau_0, t_0+\tau_0]$ intervallumon. Csak azt kell megvizsgálni, hogy ha $t \in [t_0-\tau_0, t_0[$ és $s \in]t_0, t_0+\tau_0]$, akkor teljesül-e a $\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq M(s-t)$ egyenlőtlenség? Ehhez elegendő felírni a következő nyilvánvaló összefüggést:

$$\varphi(s) - \varphi(t) = (s-t)\left(\left(\frac{s-t_0}{s-t}\right).\left(\frac{\varphi_+(s)-\varphi_+(t_0)}{s-t_0}\right) + \left(\frac{t_0-t}{s-t}\right).\left(\frac{\varphi_-(t_0)-\varphi_-(t)}{t_0-t}\right)\right).$$

Felhasználva a már ismert $\|\varphi_+(s)-\varphi_+(t_0)\| \leq M(s-t_0)$ és $\|\varphi_-(t_0)-\varphi_-(t)\| \leq M(t_0-t)$ összefüggéseket, ebből kapjuk, hogy

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq (s-t)\left(\left(\frac{s-t_0}{s-t}\right)M + \left(\frac{t_0-t}{s-t}\right)M\right) = M(s-t),$$

amivel a bizonyítást befejeztük. ■

4.7.3. Lemma. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, és F Banach-tér. Legyen $\varphi : [a, b] \to F$ olyan töröttvonalfüggvény, amelyre $n \in \mathbb{N}$ olyan természetes szám és $(t_k)_{0\leq k\leq n}$ szigorúan monoton növő rendszer, hogy $t_0 = a$, $t_n = b$ és minden $k < n$ természetes számra és $t \in [t_k, t_{k+1}]$ pontra*

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) + \Big(\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}\Big).(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)).$$

Ha $(\mathrm{D}\varphi)^\bullet$ jelöli a $\mathrm{D}\varphi : [a, b] \setminus \{t_k|0 \leq k \leq n\} \to F$ függvény tetszőleges kiterjesztését $[a, b]$-re, akkor a $(\mathrm{D}\varphi)^\bullet : [a, b] \to F$ függvény Lebesgue-integrálható, és minden $t, s \in [a, b]$ esetén

$$\int_t^s (\mathrm{D}\varphi)^\bullet \,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \varphi(s) - \varphi(t).$$

Bizonyítás. Minden $k < n$ természetes számra legyen

$$z_k := .\frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)}{t_{k+1} - t_k},$$

tehát minden $t \in [t_k, t_{k+1}]$ pontra $\varphi(t) = \varphi(t_k) + (t - t_k).z_k$ így $t_k < t < t_{k+1}$ esetén $(\mathrm{D}\varphi)(t) = z_k$, amiből következik, hogy

$$((\mathrm{D}\varphi)^\bullet)^\circ = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{[t_k,t_{k+1}[}.z_k$$

az $\mathbb{R}\setminus\{t_k|0 \leq k \leq n\}$ halmazon, vagyis $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt. Mivel itt a jobb oldalon $\mathscr{R}_{\mathbb{R}}$-lépcsősfüggvény áll, így ebből látható, hogy a $(\mathrm{D}\varphi)^\bullet$ függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, tehát itt lokálisan is $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható.
Először megmutatjuk, hogy minden $k < n$ természetes számra és $t \in [t_k, t_{k+1}]$ pontra

$$\int_{t_k}^t (\mathrm{D}\varphi)^\bullet \,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \varphi(t) - \varphi(t_k).$$

Valóban, $\chi_{[t_k,t[}.((\mathrm{D}\varphi)^\bullet)^\circ = \chi_{[t_k,t[}.z_k$ az $\mathbb{R} \setminus \{t_k, t\}$ halmazon, ezért

$$\int_{t_k}^t (\mathrm{D}\varphi)^\bullet \,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[t_k,t[}.((\mathrm{D}\varphi)^\bullet)^\circ \,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[t_k,t[}.z_k \,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = (t - t_k)z_k.$$

Megmutatjuk, hogy minden $t, s \in [a, b]$ és esetén, ha $t < s$, akkor

$$\int_t^s (\mathrm{D}\varphi)^\bullet = \varphi(s) - \varphi(t).$$

Ehhez legyenek $j, k < n$ olyan természetes számok, hogy $j \leq k$ és $t \in [t_j, t_{j+1}]$ és $s \in [k_k, t_{k+1}]$. Ekkor, felhasználva azt, hogy vektortérben üres indexhalmazú rendszer összege definíció szerint egyenlő 0-val, kapjuk, hogy

$$\varphi(s)-\varphi(t)=(\varphi(s)-\varphi(t_k))+\sum_{p=j+1}^{k-1}(\varphi(t_{p+1})-\varphi(t_p))+(\varphi(t_{j+1})-\varphi(t))=$$

$$=(s-t_k).z_k+\left(\sum_{p=j+1}^{k-1}\int_{t_p}^{t_{p+1}}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}\right)+(\varphi(t_{j+1})-\varphi(t_j)-(t-t_j).z_j)=$$

$$=\int_{t_k}^{s}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}+\left(\sum_{p=j+1}^{k-1}\int_{t_p}^{t_{p+1}}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}\right)+\int_{t_j}^{t_{j+1}}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}-\int_{t_j}^{t}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}=$$

$$=\int_{t_k}^{s}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}+\left(\sum_{p=j}^{k-1}\int_{t_p}^{t_{p+1}}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}\right)+\int_{t}^{t_j}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}=\int_{t}^{s}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ha $t,s\in[a,b]$ és $t>s$, akkor az előzőek szerint

$$\int_{t}^{s}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}=-\int_{s}^{t}(\mathrm{D}\varphi)^\bullet\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}=-(\varphi(t)-\varphi(s))=\varphi(s)-\varphi(t),$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

4.7.4. Tétel. (Peano-féle egzisztencia-tétel) *Legyen F véges dimenziós valós normált tér és $f:\mathbb{R}\times F\rightarrowtail F$ folytonos függvény. Ekkor minden $(t_0,x_0)\in\mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(f))$ ponthoz létezik egzisztencia-tartománya az f függvényhez és (t_0,x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak.*

Bizonyítás. Legyenek $\tau,R\in\mathbb{R}_+^*$ olyan számok, hogy $[t_0-\tau,t_0+\tau]\times\overline{\mathrm{B}}_R(x_0)\subseteq\mathrm{Dom}(f)$ és f korlátos a $[t_0-\tau,t_0+\tau]\times\overline{\mathrm{B}}_R(x_0)$ halmazon, továbbá legyen $M:=\sup_{(t,x)\in[t_0-\tau,t_0+\tau]\times\overline{\mathrm{B}}_R(x_0)}\|f(t,x)\|$. Ha $M=0$, akkor a $]t_0-\tau,t_0+\tau[\to F;\ t\mapsto x_0$ konstansfüggvény nyilvánvalóan megoldása az f függvényhez és (t_0,x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, tehát $]t_0-\tau,t_0+\tau[$ egzisztencia-tartománya ennek a Cauchy-feladatnak. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $M>0$, és bevezetjük a $\tau_0:=\min\left(\tau,\dfrac{R}{2M}\right)$ számot. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rögzített, $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat, és a 4.7.2. lemma alapján válasszunk ki egy olyan $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert, amelyre teljesül az, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\Phi_n:[t_0-\tau_0,t_0+\tau_0]\to F$ töröttvonalfüggvény, és:

- $\Phi_n(t_0)=x_0$.
- minden $t\in[t_0-\tau_0,t_0+\tau_0]$ esetén $\Phi_n(t)\in\mathrm{B}_R(x_0)$ (tehát $(t,\Phi_n(t))\in\mathrm{Dom}(f)$);
- minden $t\in\mathrm{Dom}(\mathrm{D}\Phi_n)$ esetén

$$\|(\mathrm{D}\Phi_n)(t)-f(t,\Phi_n(t))\|\leq\varepsilon_n;$$

- minden $t,s\in[t_0-\tau_0,t_0+\tau_0]$ esetén

$$\|\Phi_n(t)-\Phi_n(s)\|\leq M|t-s|.$$

Ekkor minden $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ esetén $\delta:=\dfrac{\varepsilon}{M}\in\mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy minden $t,s\in[t_0-\tau_0,t_0+\tau_0]$ esetén, ha $|t-s|<\delta$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$ számra:

$$\|\Phi_n(t)-\Phi_n(s)\|\leq M|t-s|<M\delta=\varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy a $\{\Phi_n | n \in \mathbb{N}\}$ függvényhalmaz *egyenletesen ekvifolytonos* (**MET** 11.9.2.). Továbbá, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(\Phi_n) \subseteq \mathrm{B}_R(x_0)$, tehát a $\{\Phi_n | n \in \mathbb{N}\}$ függvényhalmaz egyenletesen korlátos. Ezért az Ascoli–Arzelá-tétel (**MET** 11.9.8.) szerint létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény és létezik olyan $\varphi : [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \to F$ folytonos függvény, hogy a $(\Phi_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* φ-hez a $[t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ kompakt intervallumon. A bizonyítás hátralevő részében minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\varphi_n := \Phi_{\sigma(n)}$ definíciót alkalmazzuk.

Megmutatjuk, hogy a φ függvény $]t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0[$ nyílt intervallumra vett leszűkítése megoldása az f függvényhez és (t_0, x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, tehát $]t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0[$ egzisztencia-tartománya ennek a Cauchy-feladatnak.

Legyen $n \in \mathbb{N}$, és jelölje $(\mathrm{D}\varphi_n)^\bullet$ a $\mathrm{D}\varphi_n$ függvény tetszőleges kiterjesztését $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}\varphi_n)$-ről $[t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$-ra. Az előző lemma szerint a $(\mathrm{D}\varphi_n)^\bullet : [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \to F$ függvény Lebesgue-integrálható és minden $t \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ pontra

$$\varphi_n(t) = \varphi_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{D}\varphi_n)^\bullet(t')\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') =$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big((\mathrm{D}\varphi_n)^\bullet(t') - f(t', \varphi_n(t'))\Big)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') + \int_{t_0}^{t} f(t', \varphi_n(t'))\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t'). \tag{1}$$

A definíciók szerint $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem minden $t' \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ pontra

$$\|(\mathrm{D}\varphi_n)^\bullet(t') - f(t', \varphi_n(t'))\| < \varepsilon_{\sigma(n)},$$

hiszen ez $t' \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}\varphi_n)$ esetén teljesül és $[t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \setminus \mathrm{Dom}(\mathrm{D}\varphi_n)$ véges halmaz, tehát a Lebesgue-mérték szerint eltűnő. Ezért 2.1.4. alapján minden $t \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ pontra

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \Big((\mathrm{D}\varphi_n)^\bullet(t') - f(t', \varphi_n(t'))\Big)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \right\| \leq \varepsilon_{\sigma(n)} \cdot |t - t_0|.$$

Ebből következik, hogy minden $t \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ pontra

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} \Big((\mathrm{D}\varphi_n)^\bullet(t') - f(t', \varphi_n(t'))\Big)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') = 0. \tag{2}$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\widetilde{\varphi_n} : [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \to [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \times \mathrm{B}_R(x_0); \quad t \mapsto (t, \varphi_n(t)),$$

valamint

$$\widetilde{\varphi} : [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \to [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \times \mathrm{B}_R(x_0); \quad t \mapsto (t, \varphi(t)).$$

A $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál φ-hez a $[t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ intervallumon, ezért nyilvánvaló, hogy a $(\widetilde{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $\widetilde{\varphi}$-hoz a $[t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ intervallumon. Továbbá, a Heine-tétel szerint az f függvény egyenletesen folytonos a $[t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \times \overline{\mathrm{B}}_R(x_0)$ kompakt halmazon, így **MET** 11.4.4. szerint az

$(f\circ\widetilde{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $f\circ\widetilde{\varphi}$-hez ugyanezen az intervallumon. Ebből 2.1.6. alapján kapjuk, hogy minden $t\in[t_0-\tau_0,t_0+\tau_0]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(t',\varphi_n(t'))\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t')=\int_{t_0}^{t} f(t',\varphi(t'))\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t'). \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) összefüggésekből $n\to\infty$ esetén következik, hogy minden $t\in[t_0-\tau_0,t_0+\tau_0]$ pontra

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(t',\varphi(t'))\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t').$$

Ebből a Newton–Leibniz-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy a φ függvény minden $t\in\,]t_0-\tau_0,t_0+\tau_0[$ pontban differenciálható és

$$(\mathrm{D}\varphi)(t)=f(t,\varphi(t)),$$

valamint $\varphi(t_0)=x_0$, tehát a φ függvény $]t_0-\tau_0,t_0+\tau_0[$ nyílt intervallumra vett leszűkítése megoldása az f függvényhez és (t_0,x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak. ■

4.8. Gyakorlatok

1. Jelölje $f:\mathbb{R}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ az 1 értékű konstansfüggvényt. Ekkor az üres függvény az f által meghatározott differenciálegyenlet egyetlen megoldása.

(*Útmutatás.* Az f által meghatározott differenciálegyenlet minden φ megoldására teljesül az, hogy minden $t\in\mathrm{Dom}(\varphi)$ esetén $(t,\varphi(t))\in\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$, tehát $\varphi(t)\in\mathbb{Q}$ és φ differenciálható t-ben, és $(\mathrm{D}\varphi)(t)=1$, így létezik olyan $c\in\mathbb{R}$, amelyre minden $t\in\mathrm{Dom}(\varphi)$ esetén $\varphi(t)=t+c\in\mathbb{Q}$, következésképpen $\mathrm{Dom}(\varphi)\subseteq -c+\mathbb{Q}$, így $\mathrm{Dom}(\varphi)$ megszámlálható halmaz, amiből $\mathrm{Dom}(\varphi)=\emptyset$ adódik, hiszen nem üres nyílt intervallum nem megszámlálhatóan végtelen.)

2. a) Legyen $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ (t,x)\mapsto\sqrt[3]{x}$, és tekintsük az f folytonos függvényhez és $(0,0)$ kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatot. Ekkor az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ azonosan 0 függvény, valamint a

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad t\mapsto\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}t\right)^{3/2} & \text{, ha } t\geq 0,\\ 0 & \text{, ha } t<0\end{cases}$$

függvény két megoldása ennek a Cauchy-feladatnak, és φ a 0 pont semmilyen környezetén nem azonosan 0, ezért ennek a Cauchy-feladatnak *nem létezik unicitás-tartománya*. (Ez a példa azt mutatja, hogy a 4.7.4. Peano-tételben nem lehet szó unicitásról, még autonóm differenciálegyenlet esetében sem.)

b) Legyen $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre minden $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ esetén

$$f(t,x):=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & \text{, ha } t<1,\\ 0 & \text{, ha } t\geq 1.\end{cases}$$

Ekkor $\mathbb{R}$ egzisztencia- és unicitás-tartománya az f függvényhez és $(0,0)$ kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, ugyanakkor a $]\leftarrow,1[$ nyílt intervallumon két megoldása van ennek a Cauchy-feladatnak: az a) pontban értelmezett φ függvény $]\leftarrow,1[$ intervallumra vett leszűkítése és a $]\leftarrow,1[\to\mathbb{R}$ azonosan 0 függvény. Tehát $]\leftarrow,1[$ *nem unicitás-tartománya* az adott Cauchy-feladatnak. Az f függvény nem C-függvény a $(0,0)$ pontban.

c) A b) pontban értelmezett f függvényre teljesül az, hogy az f függvényhez és $(0,0)$ kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak léteznek különböző (kiterjesztés tekintetében) *maximális* megoldásai, ti. az a) pontban értelmezett φ függvény $]\leftarrow,1[$ intervallumra vett leszűkítése és az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ azonosan 0 függvény ilyenek.

3. Legyen $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ (t,x)\mapsto 2\sqrt{|x|}$, és tekintsük az f folytonos függvényhez és $(0,0)$ kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatot. Minden $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ esetén legyen

$$\varphi_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad t\mapsto\begin{cases}-(t+a)^2 & \text{, ha } t\le -a,\\ 0 & \text{, ha } -a<t<b,\\ +(t-b)^2 & \text{, ha } b\le t.\end{cases}$$

Ekkor minden $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ esetén a $\varphi_{a,b}$ függvény megoldása az adott Cauchy-feladatnak. A 0 pont minden nyílt környezetén *végtelen sok* megoldása létezik ennek a Cauchy-feladatnak, így f nem C-függvény a $(0,0)$ pontban.

4. Legyen $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ (t,x)\mapsto \operatorname{sgn}(x)$, ahol

$$\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\begin{cases}1 & \text{, ha } x>0,\\ 0 & \text{, ha } x=0,\\ -1 & \text{, ha } x<0.\end{cases}$$

Ekkor f az $\mathbb{R}\times\{0\}$ halmaz egyetlen pontjában sem folytonos, azonban teljesülnek a következők.

a) Ha $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ és $x_0\neq 0$, akkor az f függvényhez és (t_0,x_0) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak a $]t_0-|x_0|,\to[$ intervallum egzisztencia- és unicitás-tartománya, ugyanis a

$$]t_0-|x_0|,\to[\to\mathbb{R};\quad t\mapsto x_0+(t-t_0)\operatorname{sgn}(x_0)$$

függvény az egyetlen megoldása az adott Cauchy-feladatnak, az adott intervallumon.

b) Ha $t_0\in\mathbb{R}$, akkor az egész $\mathbb{R}$ intervallum egzisztencia- és unicitás-tartománya az f függvényhez és $(t_0,0)$ kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, ugyanis ekkor az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ azonosan 0 függvény az egyetlen megoldása az adott Cauchy-feladatnak, az adott intervallumon.

5. Legyen $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ (t,x)\mapsto x^2$. Minden $a\in\mathbb{R}$ esetén értelmezzük a

$$\varphi_a:\mathbb{R}\setminus\{a\}\to\mathbb{R};\quad t\mapsto -\frac{1}{t-a}$$

függvényt. Ekkor az f függvény által meghatározott differenciálegyenlet minden φ maximális megoldásához létezik olyan $a\in\mathbb{R}$, hogy $\varphi=(\varphi_a)|_{]a,\to[}$ vagy $\varphi=(\varphi_a)|_{]\leftarrow,a[}$. (Tehát ennek a differenciálegyenletnek *nem létezik* globális megoldása, holott $\mathrm{pr}_1(\mathrm{Dom}(f))=\mathbb{R}$.)

6. (*Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet megoldásai.*) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, F Banach-tér, $\mathbf{u} \in \mathscr{L}(F)$, és $\mathbf{b} : I \to F$ folytonos függvény. Ekkor minden $t_0 \in I$ és $x_0 \in F$ esetén

$$\varphi : I \to F; \quad t \mapsto \mathrm{Exp}_{\mathscr{L}(F)}((t-t_0).\mathbf{u})(x_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{Exp}_{\mathscr{L}(F)}((t-t').\mathbf{u})(\mathbf{b}(t'))\mathrm{d}\mu_1(t')$$

az egyetlen olyan differenciálható függvény, hogy $\varphi(t_0) = x_0$, és minden $I \ni t$-re

$$(\mathrm{D}\varphi)(t) = \mathbf{u}(\varphi(t)) + \mathbf{b}(t)$$

teljesül. (Az $\mathrm{Exp}_{\mathscr{L}(F)} : \mathscr{L}(F) \to \mathscr{GL}(F)$ exponenciális függvény értelmezése megtalálható a VI. fejezet, 1. pont, **16**. gyakorlatban.)

7. Legyen F normált tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény, $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $U \subseteq F$ olyan halmaz, amelyre $I \times U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Tegyük fel, hogy $C > 0$ olyan valós szám, amelyre teljesül az, hogy minden $t \in I$ és $x, x' \in U$ esetén

$$\|f(t,x') - f(t,x)\| \le C\|x - x'\|.$$

Legyenek $\varphi_1, \varphi_2 : I \to F$ olyan differenciálható függvények, és $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+$ olyan valós számok, hogy minden $t \in I$ esetén $\varphi_1(t) \in U$ és $\varphi_2(t) \in U$, és

$$\|(\mathrm{D}\varphi_1)(t) - f(t,\varphi_1(t))\| \le \varepsilon_1, \quad \|(\mathrm{D}\varphi_2)(t) - f(t,\varphi_2(t))\| \le \varepsilon_2.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden $t_0, t \in I$ esetén

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \le \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| \cdot \mathrm{e}^{C|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Big(\frac{\mathrm{e}^{C|t-t_0|} - 1}{C}\Big).$$

(**Megjegyzés**. Lényeges, hogy itt $\varepsilon_1 = 0$ és $\varepsilon_2 = 0$ lehetséges. Ebben a speciális esetben φ_1 és φ_2 olyan I-n értelmezett megoldásai az f által meghatározott differenciálegyenletnek, amelyek az U halmazba érkeznek.)

(*Bizonyítás.* Vezessük be az $\varepsilon := \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ számot és a

$$\Delta : I \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$$

folytonos függvényt. Rögzítsük a $t_0 \in I$ pontot. Ha $t \in I$, akkor $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in U$ miatt

$$\begin{gathered}\|\left(\mathrm{D}(\varphi_1 - \varphi_2)\right)(t)\| = \|(\mathrm{D}\varphi_1)(t) - (\mathrm{D}\varphi_2)(t)\| = \\ = \|(\mathrm{D}\varphi_1)(t) - f(t,\varphi_1(t)) + f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t)) + f(t,\varphi_2(t)) - (\mathrm{D}\varphi_2)(t)\| \le \\ \le \|(\mathrm{D}\varphi_1)(t) - f(t,\varphi_1(t))\| + \|f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))\| + \|f(t,\varphi_2(t)) - (\mathrm{D}\varphi_2)(t)\| \le \\ \le \varepsilon_1 + C\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| + \varepsilon_2 = \varepsilon + C\Delta(t) = (\mathrm{D}g)(t),\end{gathered}$$

ahol bevezettük a

$$g : I \to F; \quad t \mapsto \varepsilon t + C\int_{t_0}^{t} \Delta(s)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)$$

függvényt, amely a Newton-Leibniz-tétel (2.2.1.) szerint differenciálható és minden $t \in I$ pontra $(\mathrm{D}g)(t) = \varepsilon + C\Delta(t)$. Ebből **DIF** 4.1.1. alkalmazásával kapjuk, hogy minden $t \in I$ esetén:

– ha $t \geq t_0$, akkor

$$\|(\varphi_1 - \varphi_2)(t) - (\varphi_1 - \varphi_2)(t_0)\| \leq g(t) - g(t_0) = \varepsilon(t - t_0) + C \int\limits_{t_0}^{t} \Delta(s) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s),$$

– ha $t < t_0$, akkor

$$\|(\varphi_1 - \varphi_2)(t_0) - (\varphi_1 - \varphi_2)(t)\| \leq g(t_0) - g(t) = \varepsilon(t_0 - t) - C \int\limits_{t_0}^{t} \Delta(s) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) =$$

$$= \varepsilon(t_0 - t) + C \int\limits_{t}^{t_0} \Delta(s) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

Ez azt jelenti, hogy minden $t \in I$ pontra

$$\|(\varphi_1 - \varphi_2)(t) - (\varphi_1 - \varphi_2)(t_0)\| \leq \varepsilon|t - t_0| + C \int\limits_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \Delta(s) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s),$$

amiből azonnal következik, hogy

$$\Delta(t) = \|(\varphi_1 - \varphi_2)(t)\| \leq \|(\varphi_1 - \varphi_2)(t_0)\| + \|(\varphi_1 - \varphi_2)(t) - (\varphi_1 - \varphi_2)(t_0)\| \leq$$

$$\leq \Delta(t_0) + \varepsilon|t - t_0| + C \int\limits_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \Delta(s) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) =$$

$$= \Delta(t_0) + \varepsilon|t - t_0| + C \int\limits_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} (\Delta(t_0) + (\Delta(s) - \Delta(t_0))) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) =$$

$$= \Delta(t_0) + (\varepsilon + C\Delta(t_0))|t - t_0| + C \int\limits_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} (\Delta(s) - \Delta(t_0)) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

Tehát, ha bevezetjük az

$$u : I \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \Delta(t) - \Delta(t_0)$$

folytonos különbségfüggvényt, akkor erre fennáll az, hogy minden $t \in I$ esetén

$$u(t) \leq A|t - t_0| + C \int\limits_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} u(s) \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s), \tag{1}$$

ahol $A := \varepsilon + C\Delta(t_0)$. Meg fogjuk mutatni, hogy ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy minden $t \in I$ pontra

$$u(t) \leq \frac{A}{C}\Big(\mathrm{e}^{C|t-t_0|} - 1\Big),$$

amiből $\dfrac{A}{C} = \dfrac{\varepsilon}{C} + \Delta(t_0)$ és $u(t) = \Delta(t) - \Delta(t_0)$ alapján, egyszerűsítés után kapjuk a $\Delta(t) \leq \Delta(t_0)\mathrm{e}^{C|t-t_0|} + \dfrac{\varepsilon}{C}\Big(\mathrm{e}^{C|t-t_0|} - 1\Big)$ egyenlőtlenséget, amit bizonyítani kell.

Ehhez vezessük be a

$$v : I \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \mathrm{e}^{-C|t-t_0|} \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} u(s)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s)$$

függvényt, amelynek segítségével az (1) egyenlőtlenség így írható át:

$$u(t) \leq A|t-t_0| + C\mathrm{e}^{C|t-t_0|}v(t). \tag{2}$$

Könnyen látható, hogy v differenciálható az I intervallumon, és minden $t \in I$ esetén

$$(\mathrm{D}v)(t) = \mathrm{sgn}(t-t_0)\Big(-Cv(t) + \mathrm{e}^{-C|t-t_0|}u(t)\Big),$$

amiből $\mathrm{sgn}(t-t_0)$-lal szorozva és átrendezve, valamint a (2) egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\begin{gathered}\mathrm{sgn}(t-t_0)(\mathrm{D}v)(t) + Cv(t) = \mathrm{e}^{-C|t-t_0|}u(t) \leq \\ \leq \mathrm{e}^{-C|t-t_0|}\Big(A|t-t_0| + C\mathrm{e}^{C|t-t_0|}v(t)\Big) = A|t-t_0|\mathrm{e}^{-C|t-t_0|} + Cv(t),\end{gathered}$$

adódik, tehát fennáll a

$$\mathrm{sgn}(t-t_0)(\mathrm{D}v)(t) \leq A|t-t_0|\mathrm{e}^{-C|t-t_0|} \tag{3}$$

egyenlőtlenség.

Tegyük fel, hogy $t \in I$ és $t < t_0$. Ekkor a (3) egyenlőtlenség mindkét oldalát -1-gyel szorozva kapjuk, hogy

$$(\mathrm{D}v)(t) \geq -A|t-t_0|\mathrm{e}^{-C|t-t_0|} = A(t-t_0)\mathrm{e}^{C(t-t_0)},$$

ezért a Newton-Leibniz–tétel szerint

$$-v(t) = v(t_0) - v(t) = \int_t^{t_0} (\mathrm{D}v)(s)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) \geq A\int_t^{t_0} (s-t_0)\mathrm{e}^{C(s-t_0)}\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) = A.\int_{t-t_0}^{0} \tau\mathrm{e}^{C\tau}\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(\tau),$$

vagyis

$$v(t) \leq -A.\int_{t-t_0}^{0} \tau\mathrm{e}^{C\tau}\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(\tau). \tag{4}$$

Parciális integrálással könnyen kiszámolható, hogy

$$-\int_{t-t_0}^{0} \tau\mathrm{e}^{C\tau}\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(\tau) = (t-t_0)\frac{\mathrm{e}^{C(t-t_0)}}{C} + \frac{1}{C^2}\Big(1-\mathrm{e}^{C(t-t_0)}\Big),$$

tehát (4) alapján

$$v(t) \leq \frac{A}{C}(t-t_0)\mathrm{e}^{C(t-t_0)} + \frac{A}{C^2}\Big(1-\mathrm{e}^{C(t-t_0)}\Big).$$

Ebből a (2) egyenlőtlenség alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\begin{gathered}u(t) \leq A(t_0-t) + C\mathrm{e}^{C(t_0-t)}v(t) \leq \\ \leq A(t_0-t) + C\mathrm{e}^{C(t_0-t)}\frac{A}{C}(t-t_0)\mathrm{e}^{C(t-t_0)} + C\mathrm{e}^{C(t_0-t)}\frac{A}{C^2}\Big(1-\mathrm{e}^{C(t-t_0)}\Big) = \frac{A}{C}\Big(\mathrm{e}^{C|t-t_0|}-1\Big),\end{gathered}$$

tehát megkaptuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

Tegyük fel, hogy $t \in I$ és $t \geq t_0$. Ekkor a (3) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$(\mathrm{D}v)(t) \leq A|t-t_0|\mathrm{e}^{-C|t-t_0|} = A(t-t_0)\mathrm{e}^{-C(t-t_0)},$$

ezért a Newton-Leibniz–tétel szerint

$$v(t) = v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{D}v)(s)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) \leq A \int_{t_0}^{t} (s-t_0)\mathrm{e}^{-C(s-t_0)}\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(s) = A. \int_{0}^{t-t_0} \tau\mathrm{e}^{-C\tau}\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(\tau),$$

vagyis

$$v(t) \leq A. \int_{0}^{t-t_0} \tau\mathrm{e}^{-C\tau}\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(\tau). \tag{5}$$

Parciális integrálással könnyen kiszámolható, hogy

$$\int_{0}^{t-t_0} \tau\mathrm{e}^{-C\tau}\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(\tau) = -(t-t_0)\frac{\mathrm{e}^{-C(t-t_0)}}{C} - \frac{1}{C^2}\Big(\mathrm{e}^{-C(t-t_0)} - 1\Big),$$

tehát (5) alapján

$$v(t) \leq -\frac{A}{C}(t-t_0)\mathrm{e}^{-C(t-t_0)} - \frac{A}{C^2}\Big(\mathrm{e}^{-C(t-t_0)} - 1\Big).$$

Ebből a (2) egyenlőtlenség alkalmazásával nyerjük, hogy

$$u(t) \leq A(t-t_0) + C\mathrm{e}^{C(t-t_0)}v(t) \leq$$
$$\leq A(t-t_0) - C\mathrm{e}^{C(t-t_0)}\frac{A}{C}(t-t_0)\mathrm{e}^{-C(t-t_0)} - C\mathrm{e}^{C(t-t_0)}\frac{A}{C^2}\Big(\mathrm{e}^{-C(t-t_0)} - 1\Big) = \frac{A}{C}\Big(\mathrm{e}^{C|t-t_0|} - 1\Big),$$

tehát megkaptuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.)

8. Legyen F Banach-tér, $f : \mathbb{R} \times F \rightarrowtail F$ függvény, és $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$. Tegyük fel, hogy $\tau, \varrho \in \mathbb{R}_+^*$ és $\varepsilon \in]0,1[$ olyan valós számok, hogy a

$$V :=]t_0 - \tau, t_0 + \tau[\times \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0) \subseteq \mathbb{R} \times F$$

halmazra teljesülnek a következők.

1) $V \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és f folytonos a V halmaz minden pontjában.

2) Létezik olyan $C \geq 0$ valós szám, hogy minden $t \in]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$ és $x, x' \in \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0)$ esetén

$$\|f(t,x') - f(t,x)\| \leq C\|x' - x\|.$$

3) Minden $(t,x) \in V$ esetén $\|f(t,x)\| \leq (1-\varepsilon)\dfrac{\varrho}{\tau}$.

Mutassuk meg, hogy ekkor létezik egyetlen olyan

$$\Phi :]t_0 - \tau, t_0 + \tau[\times \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0) \to \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0)$$

függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(\partial_1\Phi) = \mathrm{Dom}(\Phi)$, és minden $(t,x) \in \mathrm{Dom}(\Phi)$ esetén

$$(\partial_1\Phi)(t,x) = f(t, \Phi(t,x)), \quad \Phi(t_0, x) = x.$$

Ez a Φ leképezés Lipschitz-függvény.

(Tehát minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ esetén a $\Phi(\cdot, x) :]t_0 - \tau, t_0 + \tau[\to F$ parciális függvény megoldása az f függvényhez és (t_0, x) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak.)

(*Bizonyítás.* A 3) feltétel szerint $M := \sup\limits_{(t,x)\in V} \|f(t,x)\| \leq (1-\varepsilon)\dfrac{\varrho}{\tau}$, vagyis $M\tau \leq (1-\varepsilon)\varrho$.

Vezessük be az $I :=]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$ jelölést. Minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ esetén tekintsük azt a

$$K_x : \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0)) \to \mathscr{F}(I; F)$$

függvényt, amely minden $\varphi : I \to \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0)$ folytonos függvényhez a

$$K_x(\varphi) : I \to F; \quad t \mapsto x + \int\limits_{t_0}^{t} f(t', \varphi(t'))\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t')$$

függvényt rendeli. Ez jól értelmezett, mert minden $\varphi : I \to \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0)$ folytonos függvényre és $t' \in I$ pontra $(t', \varphi(t')) \in I \times \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0) = V$, tehát 1) alapján f folytonos a $(t', \varphi(t'))$ pontban, így az $I \to F;\ t' \mapsto f(t', \varphi(t'))$ függvény folytonos, tehát lokálisan integrálható az $\mathbb{R}$ feletti Lebesgue-mérték szerint.

Világos, hogy $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ és $\varphi \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0))$ esetén $K_x(\varphi)(t_0) = x$, és a Newton–Leibniz-tétel alapján a $K_x(\varphi) : I \to F$ függvény *differenciálható*, és minden $I \ni t$-re $(\mathrm{D}(K_x(\varphi)))(t) = f(t, \varphi(t))$. Továbbá, minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ és $\varphi \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0))$ esetén $\mathrm{Im}(K_x(\varphi)) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0)$, mert minden $I \ni t$-re

$$\|K_x(\varphi)(t) - x\| = \Bigg\| \int\limits_{t_0}^{t} f(t', \varphi(t'))\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \Bigg\| \leq \int\limits_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \|f(t', \varphi(t'))\|\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \leq$$

$$\leq \Big(\sup_{(t',x')\in I\times\overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0)} \|f(t', x')\| \Big) |t - t_0| \leq M\tau \leq (1-\varepsilon)\varrho,$$

ezért

$$\|K_x(\varphi)(t) - x_0\| \leq \|\Big(K_x(\varphi)\Big)(t) - x\| + \|x - x_0\| \leq (1-\varepsilon)\varrho + \varepsilon\varrho = \varrho.$$

Tehát minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ pontra

$$K_x : \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0)) \to \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0))$$

függvény. Jelölje d a sup-metrikát a $\mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0))$ függvényhalmaz felett, tehát minden $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0))$ esetén

$$d(\varphi, \psi) := \sup_{t\in I} \|\varphi(t) - \psi(t)\|.$$

Az F normált tér teljessége miatt a $\overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0) \subseteq F$ zárt halmaz teljes, így a $\Big(\mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0)), d\Big)$ metrikus tér teljes (**MET** 11.3.1.).

A 2) feltétel alapján most rögzítünk egy olyan $C \geq 0$ valós számot, hogy minden $t \in]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$ és $x, x' \in \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0)$ esetén $\|f(t, x') - f(t, x)\| \leq C\|x' - x\|$.

Legyenek $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_{\varrho}(x_0))$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ és $t \in I$ pontra

$$\|K_x^n(\varphi)(t) - K_x^n(\psi)(t)\| \leq \frac{|t - t_0|^n}{n!} \mathrm{C}^n d(\varphi, \psi), \tag{1}$$

ahol K_x^n jelöli a $K_x : \mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0)) \to \mathscr{C}(I;\overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0))$ függvény n-edik iteráltját (ld. **MET** 9.9.2. Definíció).

Ha $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ és $t \in I$, akkor

$$\Big\|K_x(\varphi)(t) - K_x(\psi)(t)\Big\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(t',\varphi(t')) - f(t',\psi(t'))\Big)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t')\right\| \leq$$

$$\leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(t',\varphi(t')) - f(t',\psi(t'))\| \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \leq C \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|\varphi(t') - \psi(t')\| \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \leq$$

$$\leq C|t-t_0|d(\varphi,\psi) = \frac{|t-t_0|^1}{1!}\mathrm{C}^1 d(\varphi,\psi),$$

tehát az állítás igaz $n = 1$ esetén.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ természetes számra, vagyis minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ és $t' \in I$ esetén

$$\Big\|K_x^n(\varphi)(t') - K_x^n(\psi)(t')\Big\| \leq \frac{|t'-t_0|^n}{n!}\mathrm{C}^n d(\varphi,\psi).$$

Legyen $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ és $t \in I$. Ekkor

$$\Big\|K_x^{n+1}(\varphi)(t) - K_x^{n+1}(\psi)(t)\Big\| = \Big\|K_x(K_x^n(\varphi))(t) - K_x(K_x^n(\psi))(t)\Big\| =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(t',K_x^n(\varphi)(t')) - f(t',K_x^n(\psi)(t'))\Big)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t')\right\| \leq$$

$$\leq C \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \Big\|K_x^n(\varphi)(t') - K_x^n(\psi)(t')\Big\| \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \overset{(1)}{\leq}$$

$$\overset{(1)}{\leq} C \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \frac{|t'-t_0|^n}{n!}\mathrm{C}^n d(\varphi,\psi) \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') = C^{n+1}\frac{1}{n!}d(\varphi,\psi) \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} |t'-t_0|^n \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} C^{n+1}\frac{1}{n!}d(\varphi,\psi)\frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1} = \frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{C}^{n+1}d(\varphi,\psi),$$

ahol

– az $\overset{(1)}{\leq}$ egyenlőtlenségnél az integrandusban felhasználtuk az indukciós hipotézist t helyett a tetszőleges $t' \in [\min(t_0,t), \max(t_0,t)]$ pontot véve;

– a $\overset{(2)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk a

$$\int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} |t'-t_0|^n \ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t') = \frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1}$$

egyenlőséget, amely a $t \geq t_0$ és $t < t_0$ esetszétválasztással könnyen igazolható a Newton–Leibniz-tétel alkalmazásával.

Ezzel megmutattuk, hogy az állítás az $n+1$ természetes számra is igaz.

Tehát minden $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0))$ függvényre, és minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ és $t \in I$ pontra fennáll az (1) egyenlőtlenség, következésképpen minden $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0))$ függvényre, és minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ pontra

$$d(K_x^n(\varphi), K_x^n(\psi)) = \sup_{t \in I} \left\| K_x^n(\varphi)(t) - K_x^n(\psi)(t) \right\| \leq \frac{\tau^n}{n!} \mathrm{C}^n d(\varphi, \psi) = \frac{(C\tau)^n}{n!} d(\varphi, \psi).$$

Mivel $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(C\tau)^n}{n!} = 0$, így van olyan $n \in \mathbb{N}^*$, hogy $\dfrac{(C\tau)^n}{n!} < 1$, következésképpen minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ esetén a $K_x : \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0)) \to \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0))$ függvény n-edik iteráltja *kontrakció*. Ezért Banach fixponttétele (**MET** 9.9.3.) szerint minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ ponthoz létezik egyetlen olyan $\varphi_x \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0))$ függvény, hogy $K_x(\varphi_x) = \varphi_x$. A fentiek szerint minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ esetén ez a φ_x függvény olyan I-n értelmezett megoldása az f függvényhez és (t_0, x) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, amelyre $\mathrm{Im}(\varphi_x) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0)$. Tehát a

$$\Phi :]t_0 - \tau, t_0 + \tau[\times \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0) \to \overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0); \quad (t, x) \mapsto \varphi_x(t)$$

olyan függvény, hogy minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ esetén a $\Phi(\cdot, x) = \varphi_x$ függvény olyan $]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$-n értelmezett megoldása az f függvényhez és (t_0, x) kezdőponthoz tartozó Cauchy-feladatnak, amely a $\overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0)$ gömbbe érkezik.

Ha $\widetilde{\Phi}$ szintén olyan $t_0 - \tau, t_0 + \tau[\times \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0) \to \overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0)$ függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(\partial_1 \widetilde{\Phi}) = \mathrm{Dom}(\widetilde{\Phi})$, és minden $(t, x) \in \mathrm{Dom}(\widetilde{\Phi})$ esetén

$$(\partial_1 \widetilde{\Phi})(t, x) = f(t, \widetilde{\Phi}(t, x)), \quad \widetilde{\Phi}(t_0, x) = x,$$

akkor minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon\varrho}(x_0)$ esetén $\widetilde{\Phi}(\cdot, x) \in \mathscr{C}(I; \overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0))$, és a Newton-Leibniz formula szerint minden $I \ni t$-re

$$\widetilde{\Phi}(t, x) - x = \widetilde{\Phi}(t, x) - \widetilde{\Phi}(t_0, x) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{D}\widetilde{\Phi}(\cdot, x)) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_{t_0}^{t} f(t', \widetilde{\Phi}(t')) \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(t')$$

vagyis $\widetilde{\Phi}(\cdot, x)$ fixpontja a K_x függvénynek, ezért $\widetilde{\Phi}(\cdot, x) = \varphi_x = \Phi(\cdot, x)$. Ez azt jelenti, hogy $\widetilde{\Phi} = \Phi$, tehát Φ egyértelműen van meghatározva.

Végül megmutatjuk, hogy Φ Lipschitz-függvény. Ehhez legyenek $(t, x), (t', x') \in \mathrm{Dom}(\Phi)$ rögzítve. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t', x') - \Phi(t, x)\| &\leq \|\Phi(t', x') - \Phi(t', x)\| + \|\Phi(t', x) - \Phi(t, x)\| \overset{(1)}{\leq} \\
&\overset{(1)}{\leq} \|\Phi(t_0, x') - \Phi(t_0, x)\| \mathrm{e}^{C|t' - t_0|} + |t' - t| \sup_{s \in [\min(t, t'), \max(t, t')]} \|(\partial_1 \Phi)(s, x)\| \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} \|x' - x\| \mathrm{e}^{C|t' - t_0|} + |t' - t| \sup_{s \in [\min(t, t'), \max(t, t')]} \|f(s, \Phi(s, x))\| \leq \\
&\|x' - x\| \mathrm{e}^{C\tau} + |t' - t|(1 - \varepsilon)\frac{\varrho}{\tau} \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} \left(\mathrm{e}^{C\tau} + (1 - \varepsilon)\frac{\varrho}{\tau}\right) \max(|t' - t|, \|x' - x\|) = \left(\mathrm{e}^{C\tau} + (1 - \varepsilon)\frac{\varrho}{\tau}\right) \|(t', x') - (t, x)\|,
\end{aligned}$$

ahol

– az $\overset{(1)}{\leq}$ egyenlőtlenségnél felhasználtuk azt, hogy a $\Phi(\cdot, x')$ és $\Phi(\cdot, x)$ parciális függvények megoldásai az f által meghatározott differenciálegyenletnek, és mindketten a $\overline{\mathrm{B}}_\varrho(x_0)$ gömbbe érkeznek, amelyre a 2) feltétel teljesül, így a **??** lemma alapján

$$\|\Phi(t', x') - \Phi(t', x)\| \leq \|\Phi(t_0, x') - \Phi(t_0, x)\| \mathrm{e}^{C|t'-t_0|},$$

továbbá, a $\Phi(\cdot, x) \ :]t_0 - \tau, t_0 + \tau[\to F$ differenciálható parciális függvényre és a $[\min(t, t'), \max(t, t')] \subseteq]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$ intervallumra alkalmaztuk a véges növekmények formuláját (**DIF** 4.1.2.), amely szerint

$$\|\Phi(t', x) - \Phi(t, x)\| \leq \sup_{s \in [\min(t,t'), \max(t,t')]} \|(\mathrm{D}\Phi(\cdot, x))(s)\| = \sup_{s \in [\min(t,t'), \max(t,t')]} \|(\partial_1 \Phi)(s, x)\|;$$

– a $\overset{(2)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy a $\Phi(t_0, x') = x'$ és $\Phi(t_0, x) = x$, továbbá alkalmaztuk a $\Phi(\cdot, x)$ függvényre vonatkozó $(\partial_1 \Phi)(s, x) = f(s, \Phi(s, x))$ egyenlőséget;

– a $\overset{(3)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk a $|t' - t_0| \leq \tau$, és a 3) feltétellel előírt $\|f(s, x)\| \leq (1 - \varepsilon)\dfrac{\varrho}{\tau}$ egyenlőtlenséget minden $s \in [\min(t, t'), \max(t, t')]$ pontra.)

9. Legyen $c \in \mathbb{R}_+^*$ és jelölje f_c azt az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $\mathrm{Dom}(f_c) := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | ct < x\}$ és minden $(t, x) \in \mathrm{Dom}(f_c)$ esetén $f_c(t, x) := c$. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Dom}(\Phi_{f_c,0}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (tehát $\mathrm{Dom}(f_c) \nsubseteq \mathrm{Dom}(\Phi_{f_c,0})$ és $\mathrm{Dom}(\Phi_{f_c,0}) \nsubseteq \mathrm{Dom}(f_c)$), és minden $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ esetén $\Phi_{f_c,0}(t, x) = x + ct$.

Tárgymutató