A matematikai analízis elemei
I.

(Számsorozatok és számsorok. Egyváltozós függvények analízise. Valós változós függvények Riemann-integrálja. Függvényterek és függvényalgebrák. Metrikus terek)

Kristóf János

NÉV SZERINTI HIVATKOZÁSOK

LOG	A matematikai analízis logikai alapjai (0. kötet, I. rész)
ENS	A matematikai analízis halmazelméleti alapjai (0. kötet, II. rész)
ALG	A matematikai analízis algebrai alapjai (0. kötet, III. rész)
TOP	A matematikai analízis topológiai alapjai (0. kötet, IV. rész)
STR	Bevezetés a matematikai struktúrák elméletébe (0. kötet, V. rész)
NUM	Számsorozatok és számsorok (1. kötet, VI. rész)
ANA	Egyváltozós függvények analízise (1. kötet, VII. rész)
INR	Valós változós függvények Riemann-integrálja (1. kötet, VIII. rész)
ESP	Függvényterek és függvényalgebrák (1. kötet, IX. rész)
MET	Metrikus terek (1. kötet, X. rész)
LIN	Folytonos lineáris és multilineáris operátorok (2. kötet, XI. rész)
DIF	Differenciálelmélet (2. kötet, XII. rész)
MES	Additív halmazfüggvények és mértékek (2. kötet, XIII. rész)
INT	Integrálelmélet (2. kötet, XIV. rész)
GEO	A geometriai integrálelmélet alapjai (2. kötet, XV. rész)
HOL	Holomorf függvények (3. kötet, XVI. rész)
FUN	A funkcionálanalízis elemei (3. kötet, XVII. rész)
GEA	Az analitikus geometria elemei (3. kötet, XVIII. rész)
EVT	Topologikus vektorterek (4. kötet, XIX. rész)
CON	Kompakt konvex halmazok (4. kötet, XX. rész)
ALN	Normált algebrák (4. kötet, XXI. rész)
AHA	Absztrakt harmonikus analízis (5. kötet, XXII. rész)
RAD	A topologikus integrálelmélet elemei (5. kötet, XXIII. rész)
VAR	Differenciálható sokaságok (6. kötet, XXIV. rész)
VEC	Vektormezők és kovariáns deriválások (6. kötet, XXV. rész)
TEN	Tenzormezők (6. kötet, XXVI. rész)
RIE	Pszeudo-Riemann sokaságok (6. kötet, XXVII. rész)
INV	Integrálás differenciálható sokaságokon (6. kötet, XXVIII. rész)
LIE	Lie-csoportok és Lie-algebrák (7. kötet, XXIX. rész)
REP	Lie-csoportok ábrázolásai (7. kötet, XXX. rész)

Tartalomjegyzék

V.

TARTALOMJEGYZÉK

VI. rész

Számsorozatok és számsorok

BEVEZETÉS

Az **ENS** 3.1.3. definícióból látható, hogy a természetes számok értelmezhetőségének problémája a halmazelmélet axiomatikájával szoros kapcsolatban álló, lényegében halmazelméleti feladat. Az $\mathbb{N}$ halmazon létezik egy kitüntetett jólrendezés és két kitüntetett művelet, amelyek tulajdonságait és egymással való kapcsolatait részletesen megvizsgáltuk (**ENS** 3.7.–3.10.). Azonban sem a kivonás, sem a nem nulla természetes számokkal való osztás nem végezhető el $\mathbb{N}$-ben feltétel nélkül, ezért pusztán *aritmetikai szempontok* arra kényszerítenek bennünket, hogy a természetes számok halmazát bővítsük olymódon, és a műveleteket terjesszük ki úgy, hogy ezek az aritmetikai típusú "hiányosságok" eltűnjenek. Ez a bővítés két lépésben hajtható végre; először a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazából az *egész számok* $\mathbb{Z}$ halmazát, majd a *racionális számok* $\mathbb{Q}$ halmazát állítjuk elő úgy, hogy mindegyik lépésben a korábban értelmezett műveleteket és rendezést kiterjesztjük a bővebb számhalmazra (**ENS** 3.12. és **ALG** 6.1.).

A racionális számok halmazán az összeadás és szorzás műveletek algebrai szempontból igen kedvező tulajdonságokkal rendelkeznek. Ezeket a "jó tulajdonságokat" a matematikában *testaxiómáknak* nevezzük. A *testek* azok a halmazok, amelyeken adott két olyan művelet, amelyek eleget tesznek a testaxiómáknak. Az első fejezetben pontosan megfogalmazzuk a rendezett testek axiómáit, és megvizsgáljuk a testek kapcsolatait $\mathbb{Z}$-vel és $\mathbb{Q}$-val.

A racionális számok testének is vannak algebrai természetű hiányosságai: például könnyen megadhatók egész szám együtthatós polinomok, amelyeknek nincs gyöke a racionális számok halmazában. Másként fogalmazva, ez azt jelenti, hogy még egészen egyszerű algebrai egyenletek is léteznek, amelyeknek nem létezik racionális megoldása. Könnyen észrevehető, hogy ez az algebrai probléma szoros kapcsolatban van a $\mathbb{Q}$ feletti természetes rendezés bizonyos értelmű "tökéletlenségével". Ilymódon eljutunk a *teljesen rendezett testek* fogalmához.

A teljesen rendezett testeknek már olyan sok erős feltételt kell kielégíteniük, hogy egyáltalán nem volna meglepő az, ha ilyenek egyáltalán nem léteznének. Azonban meglehetősen közvetlenül eljuthatunk a teljesen rendezett testek létezésének és lényegében vett egyértelműségének bizonyításához; így vezetjük be a *valós számok* $\mathbb{R}$ testét. Tehát a valós számok halmaza úgy jelenik meg a matematikában, mint egy nagyon erős algebrai és rendezéselméleti feltétel-rendszernek eleget tevő objektum. A valós számtest Dedekind-féle konstrukciója nem tekinthető tisztán algebrai eljárásnak, bár minden bizonnyal ez a módszer alkalmaz a legkevesebb nem algebrai eszközt.

A valós számok ismeretében már egyszerű algebrai definíció adható a *komplex számok* $\mathbb{C}$ testére, és kiderül, hogy minden algebrai egyenlet megoldható a komplex számok körében; ez az *algebra alaptétele*, amelynek bizonyítására csak később kerülhet sor (**MET** 8.4.4.). Ezzel a számfogalom felépítése lényegében lezárul. Egyidejűleg lehetőség nyílik az analízis módszereivel kezelhető *analitikus geometria* felépítésére. Ebből a szempontból a valós számtest egzisztenciája legalább olyan fontos, mint az aritmetika vagy algebra nézőpontjából.

A valós és komplex számtesttel kapcsolatos analízis felépítésének döntő mozzanata az *euklidészi abszolútérték-függvény* bevezetése ezeken a számtesteken; ezzel foglalkozik a második fejezet. Az abszolútérték-függvény segítségével értelmezhetők a gömbi környezetek és a legalapvetőbb topológiai fogalmak. Itt a legfontosabb eredmény az $\mathbb{R}$-re vonatkozó Cantor-féle közösrész-tétel, valamint a Borel-Lebesgue befedési tétel. Ezek igazi jelentősége majd a metrikus terek elméletében derül ki.

A harmadik fejezetben *számsorozatokról* lesz szó, a negyedikben pedig speciális módon előállított számsorozatokat, a *számsorokat* vizsgáljuk. Itt vezetjük be a sorozatok és sorok *konvergenciájának*, valamint *határértékének* fogalmát, ami az analízis legsajátosabb fogalmának tekinthető. Pontos határérték-fogalom birtokában egzakt jelentést kap a "közelítés" vagy "approximáció" fogalma. Ugyanakkor a "határérték-képzés", mint analitikus operáció nemcsak elvi, hanem gyakorlati jelentőséggel is bír, mivel annak segítségével egyszerű, algebrailag előállított objektumokból egészen bonyolult, de még analitikusan kezelhető halmazok, illetve függvények hozhatók létre. Analitikusan konstruálható függvények az *elemi analitikus függvények*, és azok konkrét típusai, az ún. *elemi függvények*, amelyekről az ötödik fejezetben lesz szó.

Irodalomjegyzék

[1] З. И. Боревич - И. Р. Шафаревич, **Теория чисел**, Наука, Москва, 1972

[2] N. Bourbaki, **Éleménts de mathématique. Algébre.** Hermann, Paris

[3] N. Bourbaki, **Éleménts de mathématique. Fonctions d'une variable réelle.** Hermann, Paris

[4] C. Faith, **Algebra: Modules and Categories**, vol. I-II, Springer-Verlag, 1973.

[5] K. Ireland - M. Rosen, **A Classical Introduction to Modern Number Theory**, Springer-Verlag, 1982.

[6] S. Lang, **Algebra**, Addison-Wesley Publ. Comp., 1965.

[7] W. Rudin, **Principles of Mathematical Analysis**, McGraw Hill Book Comp., 1964.

[8] L. Schwartz, **Analyse mathématique**, I., Hermann, Paris, 1967.

[9] Г. Е. Шилов, **Математический анализ, Функции одного переменного**, Наука, Москва, 1969.

[10] Szőkefalvi-Nagy Béla, **Valós függvények és függvénysorok**, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[11] M. Zamansky, **Introduction a l'algébre et l'analyse modernes**, Dunod, 1963. Amsterdam-Warsaw, 1967.

1. fejezet

Valós számok és komplex számok

1.1. Valós számok

1.1.1. Definíció. *A* $(K, +, \cdot, \leq)$ *négyest* **rendezett testnek** *nevezzük, ha* $(K, +, \cdot)$ *test és* $\leq$ *olyan lineáris rendezés a* K *halmaz felett, amelyre teljesülnek a következők:*

$(\mathrm{KO_I})$ *Minden* $x, y, z \in K$ *elemre, ha* $x \leq y$*, akkor* $x + z \leq y + z$*.*

$(\mathrm{KO_{II}})$ *Minden* $x, y \in K$ *elemre, ha* $x \geq \mathbf{0}$ *és* $y \geq \mathbf{0}$*, akkor* $x \cdot y \geq \mathbf{0}$*.*

Ha $(K, +, \cdot, \leq)$ *rendezett test, akkor az* $\{x \in K | x \geq \mathbf{0}\}$ *halmazt a* K_+ *szimbólummal jelöljük, és ennek elemeit* K **pozitív** *elemeinek nevezzük (a* $\leq$ *rendezés szerint), továbbá* $K_+^* := \{x \in K | x > \mathbf{0}\} = K_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$*.*

A rendezett testeket is általában egyetlen betűvel, az alaphalmaz szimbólumával jelöljük, és a rendezését a $\leq$ szimbólummal jelöljük, ha ez nem vezet félreértésre.

1.1.2. Definíció. *A* K *rendezett testet* **teljesen rendezett testnek** *mondjuk, ha* K *minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának létezik szuprémuma a* K *rendezett halmazban.*

1.1.3. Definíció. **Dedekind-szeletnek** *nevezünk minden olyan* $\lambda \subseteq \mathbb{Q}$ *halmazt, amelyre teljesülnek a következők:*

$(\mathrm{D_I})$ $\lambda \neq \emptyset$ *és* λ *felülről korlátos* $\mathbb{Q}$*-ban;*

$(\mathrm{D_{II}})$ λ*-nak nincs legnagyobb eleme* $\mathbb{Q}$*-ban;*

$(\mathrm{D_{III}})$ *minden* $r \in \lambda$ *elemre* $]\leftarrow, r] \subseteq \lambda$*.*

A Dedekind-szeletek halmazát $\mathbb{R}$ *jelöli.*

Könnyen látható, hogy minden $r \in \mathbb{Q}$ esetén az $]\leftarrow, r[$ intervallum $\mathbb{Q}$-ban Dedekind-szelet, vagyis $]\leftarrow, r[\in \mathbb{R}$, továbbá a $\mathbb{Q} \to \mathbb{R};\ r \mapsto]\leftarrow, r[$ injekció által a $\mathbb{Q}$ halmaz kitüntetett módon (azaz kanonikusan) azonosul $\mathbb{R}$ egy részhalmazával.

1.1.4. Tétel. (Dedekind-tétel) *Létezik teljesen rendezett test, és ha* $(K_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ *és* $(K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ *teljesen rendezett testek, akkor létezik egyetlen olyan* $f : K_1 \to K_2$ *bijekció, amely additív, vagyis minden* $x, y \in K_1$ *esetén* $f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$*; multiplikatív, vagyis minden* $x, y \in K_1$ *esetén* $f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)$*; és szigorúan rendezés-tartó, vagyis minden* $x, y \in K_1$ *esetén* $(x \leq_1 y) \Leftrightarrow (f(x) \leq_2 f(y))$*.*

Bizonyítás. Először megállapodunk abban, hogy a $\subseteq$ relációt $\mathbb{R}$ felett a $\leq$ szimbólummal jelöljük; megmutatjuk, hogy ez *lineáris* rendezés az $\mathbb{R}$ felett. Legyenek $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $\lambda \not\subseteq \lambda'$. Legyen $r \in \lambda$ olyan elem, amelyre $r \notin \lambda'$. Ha $s \in \lambda'$, akkor a $(\mathrm{D_{III}})$ és $r \notin \lambda'$ miatt $r \leq s$ lehetetlen, tehát $s < r$ igaz, így ismét a $(\mathrm{D_{III}})$ és $r \in \lambda$ alapján $s \in \lambda$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $\lambda \not\subseteq \lambda'$ esetén $\lambda' \subseteq \lambda$ teljesül, ami azzal ekvivalens, hogy $\lambda \subseteq \lambda'$ vagy $\lambda' \subseteq \lambda$ teljesül.

Megmutatjuk, hogy az $\mathbb{R}$ feletti $\leq$ lineáris rendezésre teljesül az, hogy minden nem üres, felülről korlátos halmaznak létezik szuprémuma. Legyen ugyanis $E \subseteq \mathbb{R}$ olyan nem üres halmaz, amelynek $\lambda' \in \mathbb{R}$ felső korlátja $\leq$ szerint, vagyis minden $\lambda \in E$ esetén $\lambda \subseteq \lambda'$. Ekkor $\bigcup E \subseteq \lambda'$, tehát $\bigcup E$ nem üres, felülről korlátos részhalmaza $\mathbb{Q}$-nak mert a λ' minden felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban az $\bigcup E$ halmaznak is felső korlátja. Ezért $\bigcup E$-re $(\mathrm{D_I})$ teljesül. Ha $r \in \bigcup E$, akkor van olyan $\lambda \in E$, hogy $r \in \lambda$, így a $(\mathrm{D_{II}})$ alapján olyan $s \in \lambda$ is létezik, amelyre $r < s$, és persze $s \in \bigcup E$ szintén teljesül. Ezért $\bigcup E$-re $(\mathrm{D_{II}})$ teljesül. Ha $r \in \bigcup E$ és $s < r$, akkor van olyan $\lambda \in E$, hogy $r \in \lambda$; ekkor $s \in \lambda \subseteq \bigcup E$, hiszen λ-ra $(\mathrm{D_{III}})$ igaz. Tehát $(\mathrm{D_{III}})$ a $\bigcup E$ halmazra is teljesül, így $\bigcup E \in \mathbb{R}$. Világos, hogy minden $\lambda \in E$ esetén $\lambda \subseteq \bigcup E$, vagyis $\bigcup E$ felső korlátja E-nek a $\leq$ rendezés szerint. Ha $\sigma \in \mathbb{R}$ felső korlátja E-nek a $\leq$ rendezés szerint, akkor minden $\lambda \in E$ esetén $\lambda \subseteq \sigma$, így az $\bigcup E$ halmaz definíciója szerint $\bigcup E \subseteq \sigma$. Ez azt jelenti, hogy $\bigcup E$ az E halmaz legkisebb felső korlátja $\mathbb{R}$-ben a $\leq$ rendezés szerint.

Most összeadást értelmezünk az $\mathbb{R}$ halmaz elemei között. Ehhez legyenek $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ rögzítve, és tekintsük a

$$\lambda + \lambda' := \{r + r' | (r \in \lambda) \wedge (r' \in \lambda')\}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy $\lambda + \lambda' \in \mathbb{R}$. Ha $\bar{r} \in \mathbb{Q}$ (illetve $\bar{r}' \in \mathbb{Q}$) a λ (illetve λ') felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban, akkor nyilvánvaló, hogy $\bar{r} + \bar{r}'$ a $\lambda + \lambda'$ halmaz felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban. Ezért $\lambda + \lambda'$-re $(\mathrm{D_I})$ teljesül. Ha $r \in \lambda$ és $r' \in \lambda'$, akkor a $(\mathrm{D_{II}})$ szerint létezik olyan $s \in \lambda$ és $s' \in \lambda'$, hogy $r < s$ és $r' < s'$; ekkor $r + r' < s + s' \in \lambda + \lambda'$, tehát $\lambda + \lambda'$-re $(\mathrm{D_{II}})$ teljesül. Ha $r \in \lambda$, $r' \in \lambda'$ és $t \in \mathbb{Q}$ olyan, hogy $t < r + r'$, akkor $t - r < r'$, így $t - r \in \lambda'$, hiszen $(\mathrm{D_{III}})$ teljesül λ'-re; ekkor viszont $t = r + (t - r) \in \lambda + \lambda'$, következésképpen $\lambda + \lambda'$-re $(\mathrm{D_{III}})$ teljesül.

Ezzel értelmeztünk egy $+$ műveletet $\mathbb{R}$-ben. Állítjuk, hogy $+$ olyan *kommutatív csoport-művelet* $\mathbb{R}$ felett, amelyre $(\mathrm{KO_I})$ teljesül.

Ha $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ és $s \in (\lambda + \lambda') + \lambda''$, akkor van olyan $r \in \lambda$, $r' \in \lambda'$ és $r'' \in \lambda''$, hogy $s = (r + r') + r''$; ekkor a $\mathbb{Q}$ összeadásának asszociativitása miatt $s = r + (r' + r'') \in \lambda + (\lambda' + \lambda'')$, tehát $(\lambda + \lambda') + \lambda'' \subseteq \lambda + (\lambda' + \lambda'')$. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy minden $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda + (\lambda' + \lambda'') \subseteq (\lambda + \lambda') + \lambda''$, következésképpen az $\mathbb{R}$ feletti $+$ művelet asszociatív.

Ha $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ és $s \in \lambda + \lambda'$, akkor van olyan $r \in \lambda$ és $r' \in \lambda'$, hogy $s = r + r'$; ekkor a $\mathbb{Q}$ összeadásának kommutativitása miatt $s = r' + r \in \lambda' + \lambda$, tehát $\lambda + \lambda' \subseteq \lambda' + \lambda$. Ez bármely két $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ elemre igaz, ezért fennáll a $\lambda' + \lambda \subseteq \lambda + \lambda'$ összefüggés is, így az $\mathbb{R}$ feletti $+$ művelet kommutatív.

Legyen $\mathbf{0} := \{r \in \mathbb{Q} | r < 0\}$; világos, hogy $\mathbf{0} \in \mathbb{R}$. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$; ekkor $s \in \mathbf{0} + \lambda$ esetén van olyan $t \in \mathbf{0}$ és $r \in \lambda$, hogy $s = t + r < 0 + r = r$, így $s \in \lambda$. Láthatóan itt azt használtuk fel, hogy $\mathbb{Q}$-ban az összeadásra és a természetes rendezésre $(\mathrm{KO_I})$, valamint λ-ra $(\mathrm{D_{III}})$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{0} + \lambda \subseteq \lambda$. Megfordítva, ha $s \in \lambda$, akkor a $(\mathrm{D_{II}})$ miatt van olyan $r \in \lambda$, hogy $s < r$; ekkor $s = (s - r) + r \in \mathbf{0} + \lambda$, így $\lambda \subseteq \mathbf{0} + \lambda$. Ezzel megmutattuk, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda = \mathbf{0} + \lambda$, tehát a $+$ művelet kommutativitása miatt $\mathbf{0}$ a $+$ műveletnek neutrális eleme.

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$; olyan $\lambda' \in \mathbb{R}$ elemet keresünk, amelyre $\lambda + \lambda' = \mathbf{0}$ teljesül. Két eset lehetséges.

– Tegyük fel, hogy λ-nak létezik szuprémuma $\mathbb{Q}$-ban, és legyen ez $\bar{r}$. Ekkor a $\lambda' :=]\leftarrow, -\bar{r}[$ intervallum $\mathbb{Q}$-ban olyan, hogy $\lambda' \in \mathbb{R}$, és $\lambda + \lambda' = \mathbf{0}$ teljesül. Valóban, ha $r \in \lambda$ és $r' \in \lambda'$, akkor $r + r' < r + (-\bar{r}) \leq 0$, mert $\bar{r}$ felső korlátja λ-nak, ezért $r + r' \in \mathbf{0}$, ami azt jelenti, hogy $\lambda + \lambda' \subseteq \mathbf{0}$. Megfordítva, ha $s \in \mathbf{0}$, akkor $\bar{r} + s$ nem felső korlátja λ-nak, tehát van olyan $r \in \lambda$, hogy $\bar{r} + s < r$; ekkor $s = r + (s - r) \in \lambda + \lambda'$, mert $s - r < -\bar{r}$. Tehát $\mathbf{0} \subseteq \lambda + \lambda'$ is teljesül.

– Tegyük fel, hogy λ-nak nem létezik szuprémuma $\mathbb{Q}$-ban. Legyen

$$\lambda' := \{-r' | (r' \in \mathbb{Q}) \wedge (\forall r \in \lambda)(r \leq r')\},$$

vagyis λ' a λ felső korlátjai $\mathbb{Q}$-beli additív inverzeinek halmaza. Először igazoljuk, hogy $\lambda' \in \mathbb{R}$. A λ' halmaz nem üres, mert λ felülről korlátos $\mathbb{Q}$-ban. Ha $r \in \lambda$, akkor $-r$ felső korlátja λ'-nek $\mathbb{Q}$-ban, tehát λ' felülről korlátos $\mathbb{Q}$-ban, mert $\lambda \neq \emptyset$. Ezért λ'-re $(\mathrm{D_I})$ teljesül. Ha $s \in \lambda'$, és r' olyan felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, hogy $s = -r'$, akkor van olyan r'' felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, hogy $r'' < r'$, különben r' a λ szuprémuma volna $\mathbb{Q}$-ban; ekkor $s = -r' < -r'' \in \lambda'$, tehát λ'-re $(\mathrm{D_{II}})$ teljesül. Legyen $s \in \lambda'$, $t \in \mathbb{Q}$ és $t < s$; ekkor van olyan r' felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, hogy $s = -r'$, tehát $r' = -s < -t$, vagyis $-t$ a felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, így $t = -(-t) \in \lambda'$. Ezért λ'-re $(\mathrm{D_{III}})$ is teljesül, vagyis $\lambda' \in \mathbb{R}$. Most megmutatjuk, hogy $\lambda + \lambda' = \mathbf{0}$. Ha $r \in \lambda$ és r' felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, akkor $r \leq r'$, tehát $r - r' \leq 0$, és $r - r' \neq 0$, különben r' a λ szuprémuma volna $\mathbb{Q}$-ban; ez azt jelenti, hogy $r + (-r') \in \mathbf{0}$, vagyis $\lambda + \lambda' \subseteq \mathbf{0}$. Megfordítva, legyen $s \in \mathbf{0}$ tetszőleges, vagyis $s \in \mathbb{Q}$ és $s < 0$. Rögzítsünk egy $r' \in \mathbb{Q}$ számot, amely a λ halmaznak felső korlátja. Ha $r \in \lambda$, akkor $-s > 0$ és a $\mathbb{Q}$ archimédészi rendezettsége folytán van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $r' - r < n \cdot (-s)$, így $r' + n \cdot s < r \in \lambda$, tehát $r' + n \cdot s$ *nem felső korlátja* λ-nak. Az $\mathbb{N}$ jólrendezettsége miatt létezik az a legkisebb $n \in \mathbb{N}$, amelyre $r' + n \cdot s$ nem felső korlátja λ-nak. Ekkor $r' + n \cdot s \in \lambda$, mert λ-ra $(\mathrm{D_{III}})$ teljesül, ugyanakkor $n > 0$, mert r' a λ-nak felső korlátja, tehát $r' + (n-1) \cdot s$ felső korlátja λ-nak. Ekkor a λ' definíciója szerint $-(r' + (n-1) \cdot s) \in \lambda'$, és $s = (r' + n \cdot s) + (-(r' + (n-1) \cdot s)) \in \lambda + \lambda'$, amivel igazoltuk, hogy $\mathbf{0} \subseteq \lambda + \lambda'$.

Ezzel beláttuk, hogy $+$ kommutatív csoportművelet $\mathbb{R}$ felett. Legyenek most $\lambda, \lambda', \sigma \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\lambda \leq \lambda'$. Ha $r \in \lambda$ és $s \in \sigma$, akkor $r \in \lambda'$, mert $\lambda \subseteq \lambda'$, tehát $r + s \in \lambda' + \sigma$. Ez azt jelenti, hogy $\lambda + \sigma \subseteq \lambda' + \sigma$, vagyis az $\mathbb{R}$ feletti $+$ műveletre és $\leq$ rendezésre $(\mathrm{KO_I})$ teljesül.

Jelölje $\mathbb{R}^+$ a $\mathbf{0}$-nál nagyobb valós számok, és $\mathbb{Q}^+$ a 0-nál nagyobb racionális számok halmazát. Nyilvánvaló, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \in \mathbb{R}^+$ pontosan akkor teljesül, ha $\lambda \cap \mathbb{Q}_+^* \neq \emptyset$. Most egy műveletet értelmezünk az $\mathbb{R}_+^*$ halmaz felett; minden $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+^*$ esetén legyen:

$$\lambda \cdot \lambda' :=]\leftarrow, 0] \cup \{r \cdot r' | (r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*) \wedge (r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*)\}.$$

Először megmutatjuk, hogy $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\lambda \cdot \lambda' \in \mathbb{R}_+^*$. Világos, hogy $\lambda \cdot \lambda'$ felülről korlátos $\mathbb{Q}$-ban, mert ha s (illetve s') a λ (illetve λ') felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban, akkor $s \cdot s'$ a $\lambda \cdot \lambda'$-nek felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban. Ha $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*$, akkor van olyan $s \in \lambda$, hogy $r < s$, és van olyan $s' \in \lambda'$, hogy $r' < s'$; ekkor $s \cdot s' \in \lambda \cdot \lambda'$, és $r \cdot r' < s \cdot s'$, vagyis $\lambda \cdot \lambda'$-ra $(\mathrm{D_{II}})$ teljesül. Ha $s \in \mathbb{Q}_+^*$, $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*$ olyanok, hogy $s < r \cdot r'$, akkor $s/r < r'$ miatt $s/r \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*$, és $s = r \cdot (s/r) \in \lambda \cdot \lambda'$, így $\lambda \cdot \lambda'$-re $(\mathrm{D_{III}})$ teljesül, vagyis $\lambda \cdot \lambda' \in \mathbb{R}_+^*$.

Megmutatjuk, hogy a $\cdot$ művelet asszociatív. Ehhez legyenek $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve, és legyen $s \in ((\lambda \cdot \lambda') \cdot \lambda'') \cap \mathbb{Q}_+^*$. Ekkor van olyan $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$, $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $r'' \in \lambda'' \cap \mathbb{Q}_+^*$, hogy $s = (r \cdot r') \cdot r''$. De a $\mathbb{Q}$ feletti szorzás asszociativitása miatt $(r \cdot r') \cdot r'' = r \cdot (r' \cdot r'') \in (\lambda \cdot (\lambda' \cdot \lambda'')) \cap \mathbb{Q}_+^*$, így $(\lambda \cdot \lambda') \cdot \lambda'' \subseteq \lambda \cdot (\lambda' \cdot \lambda'')$. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $\lambda \cdot (\lambda' \cdot \lambda'') \subseteq (\lambda \cdot \lambda') \cdot \lambda''$ is teljesül.

Igazoljuk azt, hogy a $\cdot$ művelet kommutatív. Ehhez legyenek $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve, és legyen $s \in (\lambda \cdot \lambda') \cap \mathbb{Q}_+^*$. Ekkor van olyan $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*$, hogy $s = r \cdot r'$. De a $\mathbb{Q}$ feletti szorzás kommutativitása miatt $r \cdot r' = r' \cdot r \in (\lambda' \cdot \lambda) \cap \mathbb{Q}_+^*$, így $\lambda \cdot \lambda' \subseteq \lambda' \cdot \lambda$. Ez bármely két $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+^*$ elemre igaz, ezért $\lambda \cdot \lambda' = \lambda' \cdot \lambda$.

Megmutatjuk, hogy az $\mathbf{1} := \{r \in \mathbb{Q} | r < 1\} \in \mathbb{R}_+^*$ elem a $\cdot$ műveletnek neutrális eleme. Ehhez legyen $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, és legyen $s \in (\mathbf{1} \cdot \lambda) \cap \mathbb{Q}_+^*$. Van olyan $t \in \mathbf{1} \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$, hogy $s = t \cdot r$; ekkor $t < 1$ és $0 < r$ miatt $s < r$, így $s \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$, mert λ-ra $(\mathrm{D_{III}})$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{1} \cdot \lambda \subseteq \lambda$. Megfordítva, legyen $s \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$; a $(\mathrm{D_{II}})$ miatt van olyan $r \in \lambda$, hogy $s < r$; ekkor $s/r \in \mathbf{1} \cap \mathbb{Q}_+^*$, $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $s = (s/r) \cdot r \in (\mathbf{1} \cdot \lambda) \cap \mathbb{Q}_+^*$, amiből következik, hogy $\lambda \subseteq \mathbf{1} \cdot \lambda$.

Bebizonyítjuk, hogy a $\cdot$ művelet disztributív a $+$ művelet $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$-ra vett leszűkítésére nézve. Ehhez legyenek $\sigma, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve. Ha $s \in \sigma \cap \mathbb{Q}_+^*$, $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*$, akkor $s \cdot (r + r') = s \cdot r + s \cdot r'$, mert a szorzás disztributív az összeadásra nézve $\mathbb{Q}$-ban; ugyanakkor $s \cdot r + s \cdot r' \in \sigma \cdot \lambda + \sigma \cdot \lambda'$, így $\sigma \cdot (\lambda + \lambda') \subseteq \sigma \cdot \lambda + \sigma \cdot \lambda'$. Megfordítva, legyen $t \in (\sigma \cdot \lambda + \sigma \cdot \lambda') \cap \mathbb{Q}_+^*$ tetszőleges. Ekkor van olyan $s, s' \in \sigma$, $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*$, hogy $t = s \cdot r + s' \cdot r'$. Ha $\bar{s} := max(s, s')$, akkor $\bar{s} \in \sigma$, és $t = s \cdot r + s' \cdot r' \leq \bar{s} \cdot (r + r') \in \sigma \cdot (\lambda + \lambda')$, így $\sigma \cdot \lambda + \sigma \cdot \lambda' \subseteq \sigma \cdot (\lambda + \lambda')$.

Megmutatjuk, hogy a $\cdot$ művelet szerint az $\mathbb{R}_+^*$ minden elemének van inverze (tehát $\cdot$ az $\mathbb{R}_+^*$ halmaz felett *kommutatív csoportművelet*). Legyen $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$; olyan $\lambda' \in \mathbb{R}_+^*$ elemet keresünk, amelyre $\lambda \cdot \lambda' = \mathbf{1}$ teljesül. Két eset lehetséges.

– Tegyük fel, hogy λ-nak létezik szuprémuma $\mathbb{Q}$-ban, és legyen ez $\bar{r}$. Ekkor a $\lambda' :=]\leftarrow, 1/\bar{r}[$ intervallum $\mathbb{Q}$-ban olyan, hogy $\lambda' \in \mathbb{R}_+^*$, és $\lambda \cdot \lambda' = \mathbf{1}$ teljesül. Valóban, ha $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*$, akkor $r \cdot r' < r \cdot (1/\bar{r}) \leq 1$, mert $\bar{r}$ felső korlátja λ-nak, ezért $r \cdot r' \in \mathbf{1}$, ami azt jelenti, hogy $\lambda \cdot \lambda' \subseteq \mathbf{1}$. Megfordítva, ha $s \in \mathbf{1} \cap \mathbb{Q}_+^*$, akkor $0 < s < 1$, így $s \cdot \bar{r}$ nem felső korlátja λ-nak, tehát van olyan $r \in \lambda$, hogy $s \cdot \bar{r} < r$; ekkor $s = r \cdot (s/r) \in \lambda \cdot \lambda'$, mert $s/r < 1/\bar{r}$; következésképpen $\mathbf{1} \subseteq \lambda \cdot \lambda'$ is teljesül.

– Tegyük fel, hogy λ-nak nem létezik szuprémuma $\mathbb{Q}$-ban. Legyen

$$\lambda' :=]\leftarrow, 0] \cup \{1/r' | (r' \in \mathbb{Q}_+^*) \wedge (\forall r \in \lambda)(r \leq r')\},$$

vagyis λ' a λ felső korlátjai $\mathbb{Q}$-beli multiplikatív inverzeinek halmaza, hozzávéve a $]\leftarrow, 0]$ intervallumot. Megmutatjuk, hogy $\lambda' \in \mathbb{R}_+^*$, és $\lambda \cdot \lambda' = \mathbf{1}$ teljesül. Valóban, $(\mathrm{D_I})$ teljesül λ'-re, mert ha $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$, akkor $1/r$ felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ'-nek. Ha $s \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*$, akkor van olyan $r' \in \mathbb{Q}$ felső korlátja λ-nak, hogy $s = 1/r'$; ekkor létezik olyan $r'' \in \mathbb{Q}$, amely szintén felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak és $r'' < r'$ (különben r' a λ-nak szuprémuma volna $\mathbb{Q}$-ban); világos, hogy $s < 1/r'' \in \lambda'$, tehát λ'-re $(\mathrm{D_{II}})$ is teljesül. Legyen $s \in \lambda' \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $r \in \mathbb{Q}_+^*$ olyan, hogy $r < s$; ekkor van olyan $r' \in \mathbb{Q}$ felső korlátja λ-nak, hogy $s = 1/r'$, vagyis ekkor $1/s$ felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak. Ugyanakkor $1/s < 1/r$, tehát $1/r$ is felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, tehát $r = 1/(1/r) \in \lambda'$, vagyis λ'-re $(\mathrm{D_{III}})$ is teljesül, így $\lambda' \in \mathbb{R}_+^*$. Azt kell még igazolni, hogy $\lambda \cdot \lambda' = \mathbf{1}$. Ha $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$ és r' felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, akkor $r < r'$ miatt $r \cdot (1/r') < 1$, ezért $\lambda \cdot \lambda' \subseteq \mathbf{1}$. Megfordítva, legyen $s \in \mathbf{1} \cap \mathbb{Q}_+^*$ tetszőleges, vagyis $s \in \mathbb{Q}$ és $0 < s < 1$; olyan $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$ és $r' \in \mathbb{Q}_+^*$ számokat keresünk, amelyekre r' a λ-nak felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban, és $s \leq r/r'$. Ehhez legyen $r_0 \in \lambda \cap \mathbb{Q}_+^*$ és

$r'_0 \in \mathbb{Q}$ rögzített felső korlátja λ-nak. Értelmezzük a következő függvényt:

$$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; \quad (r, r') \mapsto \begin{cases} (\frac{r+r'}{2}, r') & \text{, ha } \frac{r+r'}{2} \in \lambda \\ (r, \frac{r+r'}{2}) & \text{, ha } \frac{r+r'}{2} \notin \lambda \end{cases},$$

és vegyük az $(r_0, r'_0) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kezdőpont és az f függvény által meghatározott iterációs sorozatot; jelölje ezt $((r_n, r'_n)_{n\in\mathbb{N}})$. n szerinti teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $r_n \in \lambda \cap \mathbb{Q}^*_+$, $r_n \le r_{n+1}$, $r'_{n+1} \le r'_n$, $r'_n - r_n = \frac{r'_0 - r_0}{2^n}$, és r'_n felső korlátja λ-nak. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$2^n > \frac{\left(\frac{r'_0}{r_0}\right) - 1}{1 - s}.$$

Ekkor

$$r'_n > r_n \ge r_0 > \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{r'_0 - r_0}{1 - s}\right) = \frac{r'_n - r_n}{1 - s},$$

amiből azonnal kapjuk, hogy $s < r_n / r'_n \in \lambda \cdot \lambda'$. Ezért $s \in \lambda'$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{1} \subseteq \lambda \cdot \lambda'$, ilymódon λ' a λ inverze a $\cdot$ művelet szerint.

Most a $\cdot$ műveletet kiterjesztjük $\mathbb{R}$-re úgy, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lambda \cdot \mathbf{0} := \mathbf{0} \cdot \lambda := \mathbf{0},$$

továbbá minden $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ esetén:

$$\lambda \cdot \lambda' := \begin{cases} -(\lambda \cdot (-\lambda')) & \text{, ha } \lambda > \mathbf{0} \text{ és } \lambda' < \mathbf{0} \\ -((-\lambda) \cdot \lambda') & \text{, ha } \lambda < \mathbf{0} \text{ és } \lambda' > \mathbf{0} \\ (-\lambda) \cdot (-\lambda') & \text{, ha } \lambda < \mathbf{0} \text{ és } \lambda' < \mathbf{0} \end{cases}.$$

Kissé hosszadalmas, de teljesen elemi, esetszétválasztásos módszerrel beláthatjuk, hogy $\cdot$ olyan művelet $\mathbb{R}$, hogy az $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ hármas test, továbbá természetesen a $\cdot$ műveletre $(\mathrm{KO_{II}})$ teljesül, vagyis az $(\mathbb{R}, +, \cdot, \le)$ négyes teljesen rendezett test.

Legyen $(K, +, \cdot, \le)$ teljesen rendezett test, és tekintsük az előző állításban értelmezett $f_K : K \to \mathbb{R};\ x \mapsto \{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$ bijekciót.

Ha $x, y \in K$ és $x \le y$, akkor $r \in f_K(x)$ esetén $r < x$, ezért $r < y$, vagyis $r \in f_K(y)$, ami azt jelenti, hogy $f_K(x) \subseteq f_K(y)$. Megfordítva, ha $x, y \in K$ és $f_K(x) \subseteq f_K(y)$, akkor $y < x$ lehetetlen, különben a K archimédészi rendezettsége folytán létezne olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $y < r < x$, vagyis $r \in f_K(x)$, de $r \notin f_K(y)$, ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy $x, y \in K$ és $f_K(x) \subseteq f_K(y)$ esetén $x \le y$, következésképpen az f_K függvény rendezés-izomorfizmus a K és $\mathbb{R}$ rendezett halmazok között.

Legyenek $x, y \in K$ rögzítve. Ha $r \in f_K(x)$ és $s \in f_K(y)$, akkor $r < x$ és $s < y$, így $r + s < x + y$, tehát $r + s \in f_K(x + y)$, amiből az $\mathbb{R}$ feletti összeadás értelmezése alapján következik, hogy $f_K(x) + f_K(y) \subseteq f_K(x+y)$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $t \in f_K(x+y)$, vagyis $t \in \mathbb{Q}$ olyan, hogy $t < x+y$. Ekkor $t - y < x$, tehát a K archimédészi rendezettsége miatt van olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $t - y < r < x$. Ekkor $r \in f_K(x)$ és $t - r < y$, így a K archimédészi rendezettsége miatt van olyan $s \in \mathbb{Q}$, amelyre $t - r < s < y$. Ekkor $s \in f_K(y)$ és $t < r + s \in f_K(x) + f_K(y)$, tehát a Dedekind-szeletek $(\mathrm{D_{III}})$ tulajdonsága szerint $t \in f_K(x) + f_K(y)$. Ez azt jelenti, hogy $f_K(x + y) \subseteq f_K(x) + f_K(y)$, így az f_K függvény *additív*.

Legyenek most $x, y \in K$ olyanok, hogy $x > 0$ és $y > 0$. Ha $r \in f_K(x) \cap \mathbb{Q}^*_+$ és

$s \in f_K(y) \cap \mathbb{Q}_+^*$, akkor $0 < r < x$ és $0 < s < y$, így $r \cdot s < x \cdot y$, tehát $r \cdot s \in f_K(x \cdot y)$, amiből az $\mathbb{R}_+^*$ feletti szorzás értelmezése alapján következik, hogy $f_K(x) \cdot f_K(y) \subseteq f_K(x \cdot y)$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $t \in f_K(x \cdot y)$, vagyis $t \in \mathbb{Q}$ olyan, hogy $t < x \cdot y$. Ekkor $t \cdot y^{-1} < x$, tehát a K archimédészi rendezettsége miatt van olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $t \cdot y^{-1} < r < x$. Ekkor $r \in f_K(x)$ és $t \cdot r^{-1} < y$, így a K archimédészi rendezettsége miatt van olyan $s \in \mathbb{Q}$, amelyre $t \cdot r^{-1} < s < y$. Ekkor $s \in f_K(y)$ és $t < r \cdot s \in f_K(x) \cdot f_K(y)$, tehát a Dedekind-szeletek ($\mathrm{D}_{\mathrm{III}}$) tulajdonsága szerint $t \in f_K(x) \cdot f_K(y)$. Ez azt jelenti, hogy $f_K(x \cdot y) \subseteq f_K(x) \cdot f_K(y)$, így $f_K(x \cdot y) = f_K(x) \cdot f_K(y)$ teljesül, ha $x > 0$ és $y > 0$. Ugyanakkor tetszőleges $x, y \in K$ elemekre:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0,$$
$$x \cdot y = -(x \cdot (-y)) = -((-x) \cdot y) = (-x) \cdot (-y),$$

amiből az $\mathbb{R}$ feletti szorzás értelmezése alapján kapjuk, hogy f_K *multiplikatív*.

Legyen most $f : K \to \mathbb{R}$ tetszőleges olyan bijekció, amely additív, multiplikatív és szigorúan rendezés-tartó; megmutatjuk, hogy $f = f_K$. Ehhez legyen $L := \{x \in K | f(x) = f_K(x)\}$; azt kell igazolni, hogy $L = K$. Először is megjegyezzük, hogy az f és f_K additivitása miatt minden $x, y \in L$ esetén $x + y \in L$, továbbá az f és f_K multiplikativitása miatt minden $x, y \in L$ esetén $x \cdot y \in L$ teljesül. Az f additivitásából következik, hogy $f(0)+f(0) = f(0+0) = f(0)$, ezért $f(0) = \mathbf{0} = f_K(0)$, vagyis $0 \in L$. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az f szürjektivitása miatt van olyan $x \in K$, amelyre $f(x) = \lambda$; ekkor az f multiplikativitása szerint $f(1) \cdot \lambda = f(1) \cdot f(x) = f(1 \cdot x) = f(x) = \lambda$, ezért $f(1) = \mathbf{1} = f_K(1)$, azaz $1 \in L$. Ebből teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $\mathbb{N} \subseteq L$, mert ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \in L$, akkor $n + 1 \in L$. Ugyanakkor $x \in K$ esetén $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = \mathbf{0}$, tehát $f(-x) = -f(x)$. Ezért minden $x \in L$ esetén $-x \in L$ teljesül, következésképpen $\mathbb{Z} \subseteq L$. Ha $x \in K \setminus \{0\}$, akkor az f multiplikativitása miatt $f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(1) = \mathbf{1}$, következésképpen $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. Ebből kapjuk, hogy $x \in L \setminus \{0\}$ esetén $x^{-1} \in L$, így $\mathbb{Q} \subseteq L$, hiszen minden $q \in \mathbb{Z}$ és $p \in \mathbb{Z}^*$ esetén $q, p \in L$ és $p^{-1} \in L$, tehát $q \cdot p^{-1} \in L$. Legyen most $x \in K$ tetszőleges. Láttuk, hogy $x = \sup_K\{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$ teljesül. Ekkor

$$f(x) = f(\sup_K\{r \in \mathbb{Q} | r < x\}) = \sup_{\mathbb{R}} f\langle\{r \in \mathbb{Q} | r < x\}\rangle =$$
$$= \sup_{\mathbb{R}}\{f(r) | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (r < x)\} = \bigcup_{(r \in \mathbb{Q}) \wedge (r < x)} f(r) = \bigcup_{(r \in \mathbb{Q}) \wedge (r < x)} f_K(r),$$

mert az f függvény izomorfizmus a K és $\mathbb{R}$ rendezett halmazok között. Tehát ha $s \in f(x) = \bigcup_{(r \in \mathbb{Q}) \wedge (r < x)} f_K(r)$, akkor van olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $r < x$ és $s \in f_K(r)$; ekkor $s < r$, így $s < x$, vagyis $s \in f_K(x)$. Ez azt jelenti, hogy $f(x) \subseteq f_K(x)$. Megfordítva, ha $s \in f_K(x)$, akkor $s < x$, tehát a K archimédészi rendezettsége miatt van olyan $r \in \mathbb{Q}$, hogy $s < r < x$; ekkor $s \in f_K(r) \subseteq f(x)$, vagyis $s \in f(x)$, ami azt jelenti, hogy $f_K(x) \subseteq f(x)$. Ezzel megmutattuk, hogy $f = f_K$.

Ha $(K_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ és $(K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ teljesen rendezett testek, akkor az előzőek alapján az $f_{K_2}^{-1} \circ f_{K_1} : K_1 \to K_2$ függvény additív, multiplikatív és szigorúan rendezés-tartó bijekció; tehát ilyen tulajdonságú függvény *létezik*. Ha $f : K_1 \to K_2$ tetszőleges olyan bijekció, amely additív, multiplikatív és szigorúan rendezés-tartó, akkor az $f_{K_2} \circ f : K_1 \to \mathbb{R}$ leképezés szintén additív, multiplikatív és szigorúan rendezés-tartó, így az előzőek szerint $f_{K_2} \circ f = f_{K_1}$, tehát $f = f_{K_2}^{-1} \circ f_{K_1}$, vagyis az ilyen tulajdonságú függvény *egyértelmű*. ■

19. Mutassuk meg, hogy egy rendezett test pontosan akkor archimédészi módon rendezett test, ha izomorf az $\mathbb{R}$ valamelyik rendezett résztestével. Továbbá, egy archimédészi módon rendezett test pontosan akkor teljesen rendezett, ha izomorf a valós számok testével.

(*Útmutatás.* Archimédészi módon rendezett test minden rendezett részteste nyilvánvalóan archimédészi módon rendezett. Másfelől, láttuk hogy ha K archimédészi módon rendezett test, akkor az $f_K : K \to \mathbb{R};\ x \mapsto \{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$ leképezés injektív, művelet-tartó és szigorúan rendezés-tartó. Ez a leképezés pontosan akkor szürjektív (tehát izomorfizmus K és $\mathbb{R}$ között), ha K teljesen rendezett.)

1.2. n-edik gyökvonás

1.2.1. Lemma. *Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén:*

- *ha $-1 \leq x$, akkor $1 + n \cdot x \leq (1+x)^n$* (**elemi Bernoulli-egyenlőtlenség**),
- *ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot x$.*

Bizonyítás. Mindkét állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Világos, hogy mindkét állítás igaz $n = 0$ esetén (tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ elemre).

Legyen $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq x$, $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy $1 + n \cdot x \leq (1+x)^n$ teljesül. Ekkor:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+n\cdot x)\cdot(1+x) = 1+(n+1)\cdot x + n \cdot x^2 \geq 1 + (n+1)\cdot x,$$

mert $0 \leq 1 + x$ és rendezett testben a négyzetelemek pozitívak.

Legyen $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy $(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot x$ teljesül. Ekkor:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \leq (1 + (2^n-1)\cdot x)\cdot(1+x) = \\ &= 1 + (2^n-1)\cdot x + x + (2^n-1)\cdot x^2 \leq 1 + (2^n-1)\cdot x + x + (2^n-1)\cdot x = \\ &= 1 + (2^{n+1}-1)\cdot x,\end{aligned}$$

mert $x \in [0,1]$ miatt $x^2 \leq x$. ■

A $\mathbb{Q}$ testben az $x^2 = y$ egyenlet általában még akkor sem oldható meg, ha y természetes szám (**16**. gyakorlat). Ezzel szemben a valós számok testében ez az egyenlet minden olyan $y \in \mathbb{R}$ számra megoldható, amely pozitív. Sőt még ennél is többet állíthatunk.

1.2.2. Állítás. *Ha $y \in \mathbb{R}_+$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ számhoz létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{R}_+$, amelyre $x^n = y$ teljesül.*

Bizonyítás. (I) Először teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra teljesül az, hogy minden $y \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $z \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $z^n < y$. Ez $n = 1$ esetén nyilvánvaló; tegyük fel, hogy teljesül n-re és legyen $y \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az indukciós hipotézis alapján van olyan $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $z_0^n < y$; ekkor a $z := \min(z_0, 1) \in \mathbb{R}_+^*$ valós szám olyan, hogy $z^{n+1} \leq z^n \leq z_0^n < y$, vagyis az állítás $n+1$-re is igaz.

(II) Legyenek $y \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített számok és $E := \{z \in \mathbb{R}_+^* | z^n < y\}$. Az (I) alapján $E \neq \emptyset$; megmutatjuk, hogy E felülről korlátos $\mathbb{R}$-ben. Valóban, ha $z \in E$, akkor $z - 1 > -1$, tehát az elemi Bernoulli-egyenlőtlenség alapján $y > z^n = (1 + (z-1))^n \geq$

$1+n\cdot(z-1)$, amiből azonnal kapjuk, hogy $z < 1+\dfrac{y-1}{n}$, vagyis $1+\dfrac{y-1}{n}$ felső korlátja E-nek. Az $\mathbb{R}$ *teljes* rendezettsége miatt létezik az $x := \sup(E)$ elem, és világos, hogy $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Megmutatjuk, hogy $x^n \le y$. Ehhez legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, hogy $0 < \varepsilon' < x$. Ekkor $x - \varepsilon' < x := \sup(E)$ miatt vehetünk olyan $z \in E$ elemet, amelyre $0 < x-\varepsilon' < z$. Ugyanakkor $-\varepsilon' \cdot x^{-1} \ge -1$, ezért az elemi Bernoulli-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} y > z^n > (x-\varepsilon')^n = x^n \cdot (1-\varepsilon' \cdot x^{-1})^n \ge \\ \ge x^n \cdot (1-\varepsilon' \cdot n \cdot x^{-1}) = x^n - \varepsilon' \cdot n \cdot x^{n-1}, \end{aligned}$$

tehát $x^n - y < \varepsilon' \cdot n \cdot x^{n-1}$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, akkor van olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\varepsilon' \cdot n \cdot x^{n-1} < \varepsilon$ és $\varepsilon' < x$ egyszerre teljesül; ekkor az előzőek alapján $x^n - y < \varepsilon$. Ebből következik, hogy $x^n \le y$.

Megmutatjuk, hogy $y \le x^n$. Ehhez legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, hogy $0 < \varepsilon' < x$. Világos, hogy $x+\varepsilon' \notin E$ és $\varepsilon' \cdot x^{-1} \in [0,1]$, így az előző lemma alkalmazásával kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} y \le (x+\varepsilon')^n = x^n \cdot (1+\varepsilon' \cdot x^{-1})^n \le \\ \le x^n \cdot (1+\varepsilon' \cdot (2^n-1) \cdot x^{-1}) = x^n + \varepsilon' \cdot (2^n-1) \cdot x^{n-1}, \end{aligned}$$

tehát $y - x^n \le \varepsilon' \cdot (2^n-1) \cdot x^{n-1}$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, akkor van olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\varepsilon' \cdot (2^n-1) \cdot x^{n-1} < \varepsilon$ és $\varepsilon' < x$ egyszerre teljesül; ekkor az előzőek alapján $y - x^n < \varepsilon$. Ebből következik, hogy $y \le x^n$.

Ezzel megmutattuk, hogy minden $y \in \mathbb{R}_+^*$ és $n \in \mathbb{N}^*$ számokhoz *létezik* olyan $x \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $x^n = y$.

(III) Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén, ha $0 < x_1 < x_2$, akkor $0 < x_1^n < x_2^n$. Ebből azonnal következik, hogy $n \in \mathbb{N}^*$ és $y \in \mathbb{R}_+^*$ esetén csak egyetlen olyan $x \in \mathbb{R}_+^*$ létezhet, amelyre $x^n = y$. ■

1.2.3. Definíció. (**n-edik gyökök értelmezése.**)

a) *Ha $x \in \mathbb{R}_+$ és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor $x^{1/n}$ vagy $x^{\frac{1}{n}}$ vagy $\sqrt[n]{x}$ jelöli azt az elemet $\mathbb{R}_+$-ban, amelyre $\left(x^{1/n}\right)^n = x$ teljesül, és $x^{1/n}$-t az x pozitív szám* **n-edik pozitív gyökének** *nevezzük.*

b) *Ha $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ páratlan szám, akkor*

$$\sqrt[n]{x} := \begin{cases} x^{\frac{1}{n}} & , \text{ ha } x \ge 0, \\ -(-x)^{\frac{1}{n}} & , \text{ ha } x < 0, \end{cases}$$

és ezt a számot az x valós szám **n-edik gyökének** *nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy az előző definíció b) pontjában értelmezett $\sqrt[n]{x}$ számot páros $n \in \mathbb{N}$ esetén is értelmezhettük volna ugyanúgy, azonban könnyen látható, hogy $x < 0$ esetén minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(-(-x)^{\frac{1}{n}}\right)^n = (-1)^n \left((-x)^{\frac{1}{n}}\right)^n = (-1)^n(-x) = (-1)^{n+1}x,$$

tehát ha meg akarjuk követelni az $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ egyenlőséget az $x < 0$ esetben is, akkor az $n+1$ természetes számnak párosnak, vagyis n-nek páratlannak kell lennie. Ezért csak páratlan $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük negatív valós számokra az n-edik gyököt.

1.2.4. Állítás. a) *Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor az*

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

függvény szigorúan monoton növő.

b) *Ha $n \in \mathbb{N}$ páratlan, akkor az*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

függvény szigorúan monoton növő, és páratlan, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}.$$

Bizonyítás. a) Ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $x, y \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $0 \le x < y$, akkor $\sqrt[n]{y} \le \sqrt[n]{x}$ esetén **ALG** 7.1.2. szerint $y = \left(\sqrt[n]{y}\right)^n \le \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$, ami lehetetlen, így $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.

b) Legyen $n \in \mathbb{N}$ páratlan szám. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor a definíció szerint

$$\sqrt[n]{-x} = \begin{cases} (-x)^{\frac{1}{n}} & \text{, ha } x \le 0, \\ -x^{\frac{1}{n}} & \text{, ha } x > 0, \end{cases}$$

ugyanakkor

$$-\sqrt[n]{x} = \begin{cases} -x^{\frac{1}{n}} & \text{, ha } x \ge 0, \\ (-x)^{\frac{1}{n}} & \text{, ha } x < 0, \end{cases}$$

amiből látszik, hogy $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$, vagyis az $\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$ függvény páratlan.

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$ függvény a) szerint szigorúan monoton növő az $\mathbb{R}_+$ halmazon. Az f függvény páratlanságából következik, hogy az f függvény szigorúan monoton növő a $]\leftarrow, 0]$ intervallumon is, hiszen ha $x, y \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $x < y \le 0$, akkor $0 \le -y < -x$, így f páratlansága és a) szerint $-\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{-y} < \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$, ezért $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$. Végül, ha $x, y \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $x \le 0 \le y$ és $x \ne y$, akkor a definíció szerint $\sqrt[n]{x} \le 0 \le \sqrt[n]{y}$, és ezek a számok nem lehetnek 5, különben n-edik hatványozás után $x = y$ adódna, következésképpen $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$. Tehát az f függvény szigorúan monoton növő. ■

1.3. Középértékek

1.3.1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_k)_{1 \le k \le n}$ tetszőleges $\mathbb{R}$-ben haladó rendszer.*

– *Az $(x_k)_{1 \le k \le n}$ rendszer* **számtani** (*vagy* **aritmetikai**) **közepének** *nevezzük a*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

valós számot.

– *Ha minden $1 \le k \le n$ esetén $x_k \ge 0$, akkor az $(x_k)_{1 \le k \le n}$ rendszer* **mértani** (*vagy* **geometriai**) **közepének** *nevezzük a*

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/n}$$

valós számot.

– *Ha minden* $1 \leq k \leq n$ *esetén* $x_k > 0$*, akkor az* $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ *rendszer* **harmonikus középének** *nevezzük a*

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

valós számot.

1.3.2. Lemma. *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{R}_+$ *esetén*

$$x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0.$$

Bizonyítás. Legyen $x \geq 0$ rögzített valós szám, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$x_n = x^{n+1} - (n+1)x + n.$$

Világos, hogy $x_0 = 0$, továbbá $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{n+1} - x_n = (x^{n+2} - (n+2)x + n + 1) - (x^{n+1} - (n+1)x + n) = x^{n+2} - x^{n+1} - x + 1 =$$

$$= (x-1)x^{n+1} - (x-1) = (x-1)(x^{n+1} - 1) \geq 0,$$

mert

– ha $x \geq 1$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x^{n+1} \geq 1$, ezért $(x-1)(x^{n+1}-1) \geq 0$;

– ha $0 \leq x < 1$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq x^{n+1} < 1$, ezért $(x-1)(x^{n+1}-1) = (1-x)(1-x^{n+1}) \geq 0$.

Ez azt jelenti, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton növő és $x_0 = 0$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számra $x^{n+1} - (n+1)x + n = x_n \geq 0$. ■

1.3.3. Állítás. (**A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.**) *Ha* $n \in \mathbb{N}^*$ *és* $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ *tetszőleges* $\mathbb{R}_+$*-ban haladó rendszer, akkor*

$$\min_{1 \leq k \leq n} x_k \leq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \max_{1 \leq k \leq n} x_k,$$

és $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ *pontosan akkor teljesül, ha minden* $1 \leq j, k \leq n$ *természetes számra* $x_j = x_k$*.*

Bizonyítás. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget n-szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

A véges műveletek definíciója szerint minden $x_1 \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\left(\prod_{k=1}^{1} x_k \right)^{1/1} = x_1 = \frac{1}{1} \sum_{k=1}^{1} x_k.$$

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^*$ olyan, amelyre teljesül az egyenlőtlenség minden $\mathbb{R}_+$-ban haladó $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ rendszer esetén. Megmutatjuk, hogy ha $(x_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszer, akkor

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \right)^{1/(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x_k.$$

Vezessük be a

$$G := \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/n}, \quad A := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

számokat, amelyekre az indukciós hipotézis miatt $G \le A$ teljesül. Feltehetjük, hogy $G > 0$, különben valamelyik $1 \le k \le n$ természetes számra $x_k = 0$ teljesülne, és akkor $\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \right)^{1/(n+1)} = 0$, tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség triviálisan igaz.

A véges műveletek elemi tulajdonságai szerint

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \right)^{1/(n+1)} = \left(\left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right) x_{n+1} \right)^{1/(n+1)} = \left(G^n x_{n+1} \right)^{1/(n+1)} =$$

$$= \left(G^{n+1} \left(\frac{x_{n+1}}{G} \right) \right)^{1/(n+1)} = G \left(\frac{x_{n+1}}{G} \right)^{1/(n+1)},$$

valamint

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \frac{1}{n+1}(nA + x_{n+1}) = \frac{n}{n+1} A + \frac{1}{n+1} x_{n+1}.$$

Tehát a következő egyenlőtlenséget kell igazolni:

$$G \left(\frac{x_{n+1}}{G} \right)^{1/(n+1)} \le \frac{n}{n+1} A + \frac{1}{n+1} x_{n+1},$$

ami $G > 0$ miatt ekvivalens azzal, hogy

$$(n+1) \left(\frac{x_{n+1}}{G} \right)^{1/(n+1)} \le n \left(\frac{A}{G} \right) + \frac{x_{n+1}}{G},$$

vagyis hogy

$$\frac{x_{n+1}}{G} - (n+1) \left(\frac{x_{n+1}}{G} \right)^{1/(n+1)} + n \left(\frac{A}{G} \right) \ge 0.$$

Mivel az indukciós hipotézis alapján $A/G \ge 1$, ezért az előző lemmát alkalmazva az $x := \left(\frac{x_{n+1}}{G} \right)^{1/(n+1)} \in \mathbb{R}_+$ számra kapjuk, hogy

$$\frac{x_{n+1}}{G} - (n+1) \left(\frac{x_{n+1}}{G} \right)^{1/(n+1)} + n \left(\frac{A}{G} \right) = x^{n+1} - (n+1)x + n \left(\frac{A}{G} \right) \ge x^{n+1} - (n+1)x + n \ge 0,$$

amivel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget igazoltuk.

Ha bevezetjük az $\overline{x} := \max\limits_{1 \le k \le n} x_k$ és $\underline{x} := \min\limits_{1 \le k \le n} x_k$ jelöléseket, akkor

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/n} \ge \left(\prod_{k=1}^{n} \underline{x} \right)^{1/n} = (\underline{x}^n)^{1/n} = \underline{x},$$

valamint

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{x} = \frac{1}{n}(n\overline{x}) = \overline{x},$$

ezért teljesülnek az

$$\underline{x} \le \left(\prod_{k=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \le \overline{x}$$

egyenlőtlenségek. Ebből az is látható, hogy ha minden $1 \leq j, k \leq n$ esetén $x_j = x_k$, akkor $\underline{x} = \overline{x}$ miatt itt minden egyenlőtlenség egyenlőséggé válik.

A szigorú egyenlőtlenség érvényességének vizsgálatához megjegyezzük, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq b$, akkor

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab,$$

mert könnyen kiszámítható, hogy

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{(a-b)^2}{4} > 0.$$

Tegyük fel, hogy $n \geq 3$ és $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszer, hogy léteznek olyan $1 \leq i, j \leq n$ számok, amelyekre $x_i \neq x_j$. Ha van olyan $1 \leq k \leq n$ szám, hogy $x_k = 0$, akkor

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} = 0 < \frac{1}{n}\max(x_i, x_j) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,$$

mert a hipotézis szerint $x_i > 0$ vagy $x_j > 0$, tehát $\max(x_i, x_j) > 0$. Ezért feltehetjük, hogy minden $1 \leq k \leq n$ számra $x_k > 0$. Ekkor

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\left(x_i + x_j + \sum_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\}} x_k\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{x_i + x_j}{2} + \frac{x_i + x_j}{2} + \sum_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\}} x_k\right) \geq$$

$$\geq \left(\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)^2 \prod_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\}} x_k\right)^{1/n} > \left(x_i x_j \prod_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\}} x_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n},$$

mert az előzőek szerint $\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)^2 > x_i x_j$, és a hipotézis alapján $\prod\limits_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\}}^{n} x_k > 0$, továbbá az n-edik gyökvonás-függvény szigorúan monoton növő $\mathbb{R}_+$-on. Tehát ekkor az $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ rendszer számtani közepe szigorúan nagyobb a mértani közepénél. ■

1.3.4. Következmény. *Ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó rendszer, akkor*

$$\min_{1 \leq k \leq n} x_k \leq \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n},$$

és $\dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$ pontosan akkor teljesül, ha minden $1 \leq j, k \leq n$ természetes számra $x_j = x_k$.

Bizonyítás. Ha a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk az $(1/x_k)_{1 \leq k \leq n}$ reciprok-rendszerre, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{1/n} = \frac{1}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}},$$

amiből reciprok-képzéssel következik a harmonikus és mértani közép közötti egyenlőtlenség.

Ha $\underline{x} := \min\limits_{1\le k\le n} x_k$, akkor minden $1 \le k \le n$ természetes számra $1/x_k \le 1/\underline{x}$, ezért

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \le \frac{1}{n}\left(n\frac{1}{\underline{x}}\right) = \frac{1}{\underline{x}},$$

amiből reciprok-képzéssel következik, hogy $\underline{x}$ kisebb-egyenlő az $(x_k)_{1\le k\le n}$ rendszer harmonikus közepénél.

Végül, ha a harmonikus és mértani közepek egyenlők, akkor $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} = \left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^{1/n}$, ezért az előző tétel alapján minden $1 \le j, k \le n$ természetes számra $1/x_j = 1/x_k$, vagyis $x_j = x_k$. ■

1.4. A komplex számok teste

A valós számtestben az $x^2 = y$ egyenlet nem oldható meg x-re akkor, ha $y < 0$. Sőt ez az egyenlet semmilyen rendezett testben nem oldható meg x-re negatív y esetén. Azonban könnyen megadhatjuk $\mathbb{R}$ olyan "testbővítését", amelyben ez az egyenlet minden y-ra megoldható.

1.4.1. Állítás. *Az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ halmazon értelmezzük a $+$ és $\cdot$ műveleteket úgy, hogy minden $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ párra:*

$$(x,y) + (x',y') := (x + x', y + y'),$$

$$(x,y)\cdot(x',y') := (x\cdot x' - y\cdot y', x\cdot y' + x'\cdot y).$$

Ekkor az $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ hármas olyan test, amelyben az $x^2 = -\mathbf{1}$ egyenlet megoldható, és a

$$\mathrm{j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R};\quad x \mapsto (x, 0)$$

leképezés olyan injekció, hogy minden $x, x' \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{j}(x + x') = \mathrm{j}(x) + \mathrm{j}(x')$ és $\mathrm{j}(x\cdot x') = \mathrm{j}(x)\cdot\mathrm{j}(x')$ teljesül.

Bizonyítás. (I) Ha $(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, akkor

$$((x,y) + (x',y')) + (x'',y'') = (x + x', y + y') + (x'',y'') = ((x + x') + x'', (y + y') + y'') \overset{(1)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=} (x + (x' + x''), y + (y' + y'')) = (x,y) + (x' + x'', y' + y'') = (x,y) + ((x',y') + (x'',y'')),$$

ahol az $\overset{(1)}{=}$ egyenlőségnél az $\mathbb{R}$ feletti összeadás asszociativitását alkalmaztuk. Ezért az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ felett bevezetett $+$ művelet asszociatív.

Ha $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, akkor

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y') \overset{(2)}{=} (x' + x, y' + y) = (x',y') + (x,y),$$

ahol a $\overset{(2)}{=}$ egyenlőségnél az $\mathbb{R}$ feletti összeadás kommutativitását alkalmaztuk. Ezért az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ felett bevezetett $\cdot$ művelet kommutatív.

Ha $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, akkor $(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$, így $(0, 0)$ neutrális elem az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ felett bevezetett $+$ művelet szerint. Ha $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, akkor $(x, y) + (-x, -y) = x + (-x), y + (-y)) = (0, 0)$, tehát $(-x, -y)$ az (x, y) elem inverze az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ felett bevezetett $+$ művelet szerint.

Ez azt jelenti, hogy az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ felett bevezetett $+$ műveletre az **ALG** 6.2.1. definícióban szereplő $(\mathrm{K_I})$ tulajdonság teljesül.

(II) Ha $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, akkor

$$((x, y) \cdot (x', y')) \cdot (x'', y'') = (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y) \cdot (x'', y'') =$$
$$= ((x \cdot x' - y \cdot y') \cdot x'' - (x \cdot y' + x' \cdot y) \cdot y'', (x \cdot x' - y \cdot y') \cdot y'' + (x \cdot y' + x' \cdot y) \cdot x'') \stackrel{(3)}{=}$$
$$\stackrel{(3)}{=} (x \cdot (x' \cdot x'' - y' \cdot y'') - y \cdot (x' \cdot y'' + x'' \cdot y'), x \cdot (x' \cdot y'' + x'' \cdot y') + y \cdot (x' \cdot x'' - y' \cdot y'')) =$$
$$= (x, y) \cdot (x' \cdot x'' - y' \cdot y'', x' \cdot y'' + x'' \cdot y') = (x, y) \cdot ((x', y') \cdot (x'', y'')),$$

ahol a $\stackrel{(2)}{=}$ egyenlőségnél mindkét komponensben kiemeltük az x és y szorzó-tényezőket, kihasználva az $\mathbb{R}$ feletti műveletek tulajdonságait. Ezért az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ felett bevezetett $\cdot$ művelet asszociatív.

Ha $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, akkor

$$(x, y) \cdot (x', y') = (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y) \stackrel{(4)}{=} (x' \cdot x - y' \cdot y, x' \cdot y + y' \cdot x) = (x', y') \cdot (x, y),$$

ahol a $\stackrel{(4)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk az $\mathbb{R}$ feletti szorzás és összeadás kommutativitását. Ezért az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ felett bevezetett $\cdot$ művelet kommutatív.

Ha $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, akkor $(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x.y)$, így $(1, 0)$ neutrális elem az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ felett bevezetett $\cdot$ művelet szerint, és természetesen $(1, 0) \neq (0, 0)$.

Legyen $(x, y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$, tehát $x \neq 0$ vagy $y \neq 0$. Ekkor $x^2 + y^2 \neq 0$, tehát vehetjük az $x^2 + y^2$ valós szám $(x^2 + y^2)^{-1}$ multiplikatív inverzét. Világos, hogy

$$(x, y) \cdot \left(x \cdot (x^2 + y^2)^{-1}, -y \cdot (x^2 + y^2)^{-1}\right) =$$
$$= \left(x^2 \cdot (x^2 + y^2)^{-1} + y^2 \cdot (x^2 + y^2)^{-1}, x \cdot (-y) \cdot (x^2 + y^2)^{-1} + y \cdot x \cdot (x^2 + y^2)^{-1}\right) = (1, 0),$$

tehát az $(x \cdot (x^2 + y^2)^{-1}, -y \cdot (x^2 + y^2)^{-1})$ pár az (x, y) elem inverze az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ felett bevezetett $\cdot$ művelet szerint.

Ez azt jelenti, hogy az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ felett bevezetett $\cdot$ műveletre az **ALG** 6.2.1. definícióban szereplő $(\mathrm{K_{II}})$ tulajdonság teljesül.

(III) Ha $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, akkor

$$(x, y) \cdot ((x', y') + (x'', y'')) = (x, y) \cdot (x' + x'', y' + y'') =$$
$$= (x \cdot (x' + x'') - y \cdot (y' + y''), x \cdot (y' + y'') + y \cdot (x' + x'')) \stackrel{(5)}{=}$$
$$\stackrel{(5)}{=} ((x \cdot x' - y \cdot y') + (x \cdot x'' - y \cdot y''), (x \cdot y' + x' \cdot y) + (x \cdot y'' + x'' \cdot y)) =$$
$$= (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y) + (x \cdot x'' - y \cdot y'', x \cdot y'' + x'' \cdot y) =$$
$$= (x, y) \cdot (x', y') + (x, y) \cdot (x'', y''),$$

ahol az $\stackrel{(5)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy az $\mathbb{R}$ feletti szorzás disztributív az $\mathbb{R}$ feletti összeadásra nézve. Ezért az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ feletti $\cdot$ művelet disztributív az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ feletti összeadásra nézve, vagyis az **ALG** 6.2.1. definícióban szereplő $(\mathrm{K_{III}})$ tulajdonság teljesül, tehát az $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+\cdot)$ hármas test.

(IV) Nyilvánvaló, hogy $(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)$, és $(-1,0)$ a multiplikatív neutrális elem additív inverze az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ testben, tehát az $\mathbf{i}:=(0,1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ elem olyan, hogy $\mathbf{i}^2=-\mathbf{1}$.

Végül, a $\mathrm{j}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ x\mapsto(x,0)$ injekció additív (azaz összeadás-tartó), mert $x,x'\in\mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{j}(x+x')=(x+x',0)=(x,0)+(x'.0)=\mathrm{j}(x)+\mathrm{j}(x'),$$

továbbá a j függvény multiplikatív (azaz szorzás-tartó) is, mert

$$\mathrm{j}(x)\cdot\mathrm{j}(x')=(x,0)\cdot(x',0)=(x\cdot x'-0\cdot 0, x\cdot 0+0\cdot x')=(x\cdot x',0)=\mathrm{j}(x\cdot x'). \blacksquare$$

1.4.2. Definíció. *Az előző állításban bevezetett* $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+,\cdot)$ *testet a* **komplex számok testének** *nevezzük és* $\mathbb{C}$*-vel jelöljük. A* $\mathbb{C}$ *elemeit* (*tehát a valós számpárokat*) **komplex számoknak** *nevezzük.*

Látható, hogy a komplex számok teste felett nem létezik olyan rendezés, amellyel $\mathbb{C}$ rendezett test volna, azonban a $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{C}$ közötti kanonikus leképezés injektív (vagyis a $\mathbb{C}$ test 0 karakterisztikájú), és nemcsak a $\mathbb{Q}$ test, hanem az $\mathbb{R}$ is azonosítható az $\mathbb{C}$ egy "résztestével" (**2**. gyakorlat). Ezért a továbbiakban azt írjuk, hogy $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$, amin azt értjük, hogy $\mathbb{R}$ azonosul az $\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{C}$ halmazzal.

Ha $z\in\mathbb{C}$, akkor a z pár első (illetve második) komponensét a z komplex szám *valós* (illetve *képzetes*) *részének* nevezzük, és a $\Re(z)$ (illetve $\Im(z)$) szimbólummal jelöljük. Ha $z\in\mathbb{C}$, akkor a $(\Re(z),-\Im(z))$ komplex számot a z *konjugáltjának* nevezzük és ezt z^* vagy $\bar{z}$ jelöli.

Ha $z\in\mathbb{C}$, akkor $z=\Re(z)+\mathbf{i}\cdot\Im(z)$ teljesül, amin pontosan azt kell érteni, hogy $z=(\Re(z),\Im(z))=(\Re(z),0)+(0,1)\cdot(\Im(z),0)$.

Később látni fogjuk, hogy $\mathbb{C}$-ben minden komplex együtthatós algebrai egyenlet megoldható, vagyis minden, legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak létezik komplex gyöke. Ez az *algebra alaptétele* **MET** (22.4.4.), amit csak jóval később bizonyítunk, mert a bizonyítása eddig még nem érintett, nem triviális analitikus tényeken alapul.

1.5. Gyakorlatok

1. Legyen $(R,+)$ kommutatív csoport, és jelölje $\mathbf{0}$ a $+$ művelet szerinti neutrális elemet, és minden $x\in R$ elemre jelölje $-x$ az x inverzét a $+$ művelet szerint. Legyen $\leq$ olyan lineáris rendezés R felett, amelyre teljesül az, hogy minden $x,y,z\in R$ esetén, ha $x\leq y$, akkor $x+z\leq y+z$. Legyen $R^+:=\{x\in R|x>\mathbf{0}\}$, és legyen $\cdot$ olyan művelet R^+ felett, amely disztributív a $+$ művelet R^+-ra vett leszűkítésére nézve, és amelyre igaz az, hogy az $\mathbf{1}$-gyel jelölt neutrális eleme $\mathbf{0}$-tól különbözik. Ekkor teljesül az, hogy $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ esetén $x+y\in\mathbb{R}_+^*$. Terjesszük ki a $\cdot$ műveletet R-re úgy, hogy minden $x\in R$ esetén legyen $x\cdot\mathbf{0}:=\mathbf{0}\cdot x:=\mathbf{0}$, továbbá minden $x,y\in R\setminus\{\mathbf{0}\}$ elemre:

$$x\cdot y:=\begin{cases}-(x\cdot(-y)) & \text{, ha } x>\mathbf{0} \text{ és } y<\mathbf{0}\\ -((-x)\cdot y) & \text{, ha } x<\mathbf{0} \text{ és } y>\mathbf{0}\\ (-x)\cdot(-y) & \text{, ha } x<\mathbf{0} \text{ és } y<\mathbf{0}\end{cases}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $(R,+,\cdot,\leq)$ *rendezett test*!

2. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan bijekció, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + y) = f(x) + f(y)$ és $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ (vagyis f *automorfizmusa* az $\mathbb{R}$ testnek), akkor $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Adjuk meg a $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ testek automorfizmusait is! Minden p prímszámra számítsuk ki az $\mathbb{F}_p$ maradékosztály-test automorfizmusait!

(*Útmutatás.* Az $\mathbb{R}$-ben minden pozitív elem négyzetelem, ezért ha f multiplikatív, akkor $f\langle\mathbb{R}_+\rangle \subseteq \mathbb{R}_+$. Ugyanilyen okok és az f bijektivitása miatt $f\langle\mathbb{R}_+\rangle \supseteq \mathbb{R}_+$ is teljesül. Tehát ha f az $\mathbb{R}$-nek automorfizmusa, akkor f szigorúan rendezéstartó, így a Dedekind-tétel alapján $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. A maradékosztály-testek automorfizmusainak kiszámításához használjuk fel az **5**. gyakorlatot!)

3. Be tudjuk-e bizonyítani a pozitív valós számok n-edik gyökének létezését *n szerinti teljes indukcióval*?

(*Útmutatás.* Jelölje $\mathscr{A}(n)$ azt a következő kijelentést:

$$(n \in \mathbb{N}^*) \wedge (\forall y \in \mathbb{R}_+^*)(\exists x \in \mathbb{R}_+^*)(x^n = y).$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{A}(1)$ igaz; tegyük fel, hogy $\mathscr{A}(n)$ igaz, és legyen $y \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített elem. Hogyan következtethetünk ekkor $\mathscr{A}(n+1)$-re? Hogyan tudjuk bizonyítani az $\mathscr{A}(1) \Rightarrow \mathscr{A}(2)$ implikációt?)

4. Mutassuk meg, hogy *minden* $y \in \mathbb{C}$ számra az $x^2 = y$ egyenlet megoldható $\mathbb{C}$-ben, vagyis minden komplex szám négyzetelem! Próbáljuk igazolni azt, hogy minden $y \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ számra az $x^n = y$ egyenlet megoldható $\mathbb{C}$-ben!

5. Legyen K test és $m \in \mathbb{Z}$ olyan, hogy az $x^2 = j(m)$ egyenlet *nem oldható meg* K-ban, ahol $j : \mathbb{Z} \to K$ a kanonikus leképezés. A $K \times K$ halmazon értelmezzük a $+$ és $\cdot$ műveleteket úgy, hogy minden $(x, y), (x', y') \in K \times K$ esetén:

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'),$$

$$(x, y) \cdot (x', y') := (x \cdot x' + j(m) \cdot y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x').$$

Ekkor a $(K \times K, +, \cdot)$ hármas olyan test, amelyben az $x^2 = j(m)$ egyenlet *megoldható*, és az

$$f : K \to K \times K; \quad x \mapsto (x, 0)$$

leképezés olyan injekció, hogy minden $x, y \in K$ elemre $f(x + y) = f(x) + f(y)$ és $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Ezt a testet $K[\sqrt{m}]$ jelöli, és K-t az f függvény által azonosítjuk a $K[\sqrt{m}]$ egy résztestével. A $K[\sqrt{m}]$ alakú testeket a K *kvadratikus* bővítéseinek nevezzük. Érdekes speciális esetek: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ és $\mathbb{R}[\sqrt{-1}]$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{R}[\sqrt{-1}] = \mathbb{C}$. A $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ test részteste $\mathbb{C}$-nek; ezt a *Gauss-féle számtestnek* nevezzük.

6. Legyen $\omega := \dfrac{-1 + \mathbf{i} \cdot \sqrt{3}}{2}$ és értelmezzük az

$$\mathbb{E} := \{r + \omega \cdot s | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (s \in \mathbb{Q})\}$$

halmazt.

a) $\omega^3 = 1$ és $\omega^2 = \dfrac{-1 - \mathbf{i} \cdot \sqrt{3}}{2}$, továbbá fennáll az $1+\omega+\omega^2+\omega^3 = 0$ egyenlőség. Minden $z \in \mathbb{E}$ esetén *egyértelműen* léteznek olyan $r, s \in \mathbb{Q}$ számok, amelyekre $z = r + \omega \cdot s$.

b) Az $\mathbb{E}$ halmaz részteste $\mathbb{C}$-nek, tehát $\mathbb{E}$ a $\mathbb{C}$ műveleteinek leszűkítésével ellátva test; ezt nevezzük *Euler-féle számtestnek*.

c) Vizsgáljuk meg az n-edik gyökök létezésének problémáját az $\mathbb{E}$ testben!

7. A $\mathbb{Q}$ halmaz felett a természetes rendezésen kívül nem létezik olyan rendezés, amellyel $\mathbb{Q}$ rendezett test volna. Ha K test és $m \in \mathbb{Z}$ olyan *negatív* szám, hogy az $x^2 = j(m)$ egyenlet nem oldható meg K-ban (ahol $j : \mathbb{Z} \to K$ a kanonikus leképezés), akkor a $K[\sqrt{m}]$ kvadratikus testbővítés felett nem létezik olyan rendezés, amellyel $K[\sqrt{m}]$ rendezett test volna.

8. Az $\mathbb{R}$ test feletti $[\cdot]$ egészrész-függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal: minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén:

$$[x + y] - [x] - [y] \in \{0, 1\}$$
$$[x] - [y] - [x - y] \in \{0, 1\}$$
$$[x] + [x + y] + [y] \leq [2 \cdot x] + [2 \cdot y]$$
$$[nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right]$$
$$\left[\frac{[n \cdot x]}{n}\right] = [x].$$

Melyek ezek közül azok, amelyek tetszőleges archimédészi módon rendezett testre is érvényesek?

9. Ha $(x_i)_{i\in I}$ olyan véges rendszer a K rendezett testben, hogy minden $i \in I$ esetén $x_i \geq -1$, és minden $I \ni i, j$-re $x_i \cdot x_j \geq 0$ (vagyis az x_i elemek *azonos előjelűek*), akkor

$$\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i\in I} x_i$$

(*általános Bernoulli-egyenlőtlenség*).

10. Legyen P olyan nem nulladfokú polinom $\mathbb{R}$ felett, amelynek minden együtthatója egész szám, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $P(n) \in \mathbb{Z}$. Ha $P(\deg(P)) = 1$, akkor a P minden racionális gyöke egész szám. Ennek alkalmazásával igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $a \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $a^{1/n} \in \mathbb{Q}$, akkor van olyan $b \in \mathbb{N}$, amelyre $b^n = a$ teljesül.

11. *Algebrai számoknak* nevezzük azokat a komplex számokat, amelyek egész együtthatós polinomok gyökei; az algebrai számok halmazát $\mathbb{A}$ jelöli.

a) Az $\mathbb{A}$ halmaz *megszámlálhatóan végtelen* és $\{r + i \cdot s | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (s \in \mathbb{Q})\} \subseteq \mathbb{A}$. Léteznek irracionális valós számok, amelyek algebrai számok.

b) Az algebrai számok halmaza *részteste* $\mathbb{C}$-nek.

VI. SZÁMSOROZATOK ÉS SZÁMSOROK

1. VALÓS SZÁMOK ÉS KOMPLEX SZÁMOK

2. fejezet

Abszolútérték-függvények és elemi topológiai tulajdonságok

2.1. Euklidészi abszolútérték-függvény $\mathbb{R}$ felett

2.1.1. Definíció. *Minden $x \in \mathbb{R}$ számra legyen*

$$x^+ := \max(x, 0); \quad x^- := \max(-x, 0); \quad |x| := \max(-x, x),$$

és az x^+ (illetve x^-, illetve $|x|$) számot az x valós szám **pozitív részének** (*illetve* **negatív részének**, *illetve* (**euklidészi**) **abszolút értékének**) *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x), \quad x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$$

teljesül. Továbbá, minden $x \in \mathbb{R}$ számra:

$$x \geq 0 \Leftrightarrow x = x^+ \Leftrightarrow x^- = 0 \Leftrightarrow x = |x|.$$

2.1.2. Állítás. *Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő állítások.*

($\mathrm{VA_I}$) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

($\mathrm{VA_{II}}$) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

($\mathrm{VA_{III}}$) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Bizonyítás. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $|x| = 0$ esetén $-x \leq |x| = 0$, így $0 \leq x$, ugyanakkor $x \leq 0$ is teljesül, ezért $x = 0$. Ebből következik a ($\mathrm{VA_I}$) tulajdonság.

Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$; ekkor négy eset lehetséges:

– $x \geq 0$ és $y \geq 0$; ekkor $|x| = x$, $|y| = y$ és a ($\mathrm{KO_{II}}$) alapján $x \cdot y \geq 0$, következésképpen $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$;

– $x \geq 0$ és $y < 0$; ekkor $|x| = x$, $|y| = -y$ és a ($\mathrm{KO_{II}}$) alapján $-(x \cdot y) = x \cdot (-y) \geq 0$, következésképpen $x \cdot y \leq 0$, így $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$;

– $x < 0$ és $y \geq 0$; ekkor $|x| = -x$, $|y| = y$ és a ($\mathrm{KO_{II}}$) alapján $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y \geq 0$, következésképpen $x \cdot y \leq 0$, így $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$;

– $x < 0$ és $y < 0$; ekkor $|x| = -x$, $|y| = -y$ és a ($\mathrm{KO_{II}}$) alapján $x \cdot y = (-x) \cdot (-y) \geq 0$, következésképpen $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$, így $(\mathrm{VA_{II}})$ teljesül.

Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor teljesülnek az $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$, $y \leq |y|$ és $-y \leq |y|$ egyenlőtlenségek, ezért a $(\mathrm{KO_I})$ alapján $x + y \leq |x| + |y|$ és $-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$ is igaz, amiből azonnal kapjuk $(\mathrm{VA_{III}})$-t. ■

A $(\mathrm{VA_{III}})$ tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségnek* nevezzük, és az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto |x|$$

leképezést $\mathbb{R}$ feletti *euklidészi abszolútérték-függvénynek* nevezzük.

2.2. Abszolútérték-függvények test felett

2.2.1. Definíció. *A K test feletti* **abszolútérték-függvénynek** *nevezünk minden olyan $K \to \mathbb{R}_+$; $x \mapsto |x|$ leképezést, amelyre a 2.1.2. állításban megfogalmazott* $(\mathrm{VA_I})$, $(\mathrm{VA_{II}})$ *és* $(\mathrm{VA_{III}})$ *tulajdonságok teljesülnek minden $x, y \in K$ esetén. A 2.1.2. állításban értelmezett, $\mathbb{R}$ feletti abszolútérték-függvényt az $\mathbb{R}$ feletti* **euklidészi abszolútérték-függvénynek** *nevezzük.*

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha K test, akkor a

$$K \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x = 0, \\ 1 & \text{, ha } x \neq 0 \end{cases}$$

leképezés abszolútérték-függvény K felett; ezt nevezzük a K feletti *improprius* vagy *triviális* abszolútérték-függvénynek, és rendszerint az $|\cdot|_\infty$ szimbólummal jelöljük. Tehát minden test felett *létezik* abszolútérték-függvény. Világos, hogy az euklidészi abszolútérték-függvény $\mathbb{R}$ felett nem az improprius abszolútérték-függvény.

Legyen $|\cdot|$ abszolútérték-függvény a K test felett. Ekkor:

a) $|\mathbf{1}|{=}1$, mert $(\mathrm{VA_{II}})$ alapján $|\mathbf{1}| = |\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}| = |\mathbf{1}| \cdot |\mathbf{1}|$, így $|\mathbf{1}| = 0$ vagy $|\mathbf{1}| = 1$, és az első eset lehetetlen, hiszen $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ és $(\mathrm{VA_I})$ teljesül.

b) Minden $x \in K \setminus \{\mathbf{0}\}$ elemre $|x^{-1}| = |x|^{-1}$, mert a) és $(\mathrm{VA_{II}})$ alapján $1 = |\mathbf{1}| = |x^{-1} \cdot x| = |x^{-1}| \cdot |x|$.

c) $|-\mathbf{1}| = 1$, mert a) és $(\mathrm{VA_{II}})$ alapján $1 = |\mathbf{1}| = |(-\mathbf{1}) \cdot (-\mathbf{1})| = |-\mathbf{1}| \cdot |-\mathbf{1}|$, tehát $|-\mathbf{1}|$ pozitív négyzetgyöke $\mathbb{R}$-ben az $x^2 = 1$ egyenletnek.

d) Minden $x \in K$ esetén $|-x| = |x|$, mert c) és $(\mathrm{VA_{II}})$ miatt $|-x| = |(-\mathbf{1}) \cdot x| = |-\mathbf{1}| \cdot |x| = |x|$.

e) Minden $x, y \in K$ elemre

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

teljesül, mert a háromszög-egyenlőtlenség és d) alapján $|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|$ és $|y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x| = |x| + |x - y|$, így $|x| - |y| \leq |x - y|$ és $|y| - |x| \leq |x - y|$ egyszerre teljesül, tehát $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

f) Az indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy ha $(x_i)_{i \in I}$ tetszőleges K-ban haladó véges rendszer, akkor $(\mathrm{VA_{II}})$ alapján fennáll az

$$\Big|\prod_{i \in I} x_i\Big| = \prod_{i \in I} |x_i|$$

egyenlőség.

g) Az indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy ha $(x_i)_{i\in I}$ tetszőleges K-ban haladó véges rendszer, akkor ($\mathrm{VA_{III}}$) alapján fennáll az

$$\Big|\sum_{i\in I} x_i\Big| \leq \sum_{i\in I} |x_i|$$

egyenlőtlenség.

Az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény leszűkítése $\mathbb{Q}$-ra nyilvánvalóan abszolútérték-függvény a $\mathbb{Q}$ test felett; ezt nevezzük a $\mathbb{Q}$ *feletti euklidészi abszolút-érték-függvénynek*. A $\mathbb{Q}$ test felett sok egyéb abszolútérték-függvény is megadható (ld. **1.** gyakorlat és 2.8.1.).

Megjegyezzük még, hogy az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvénnyel kapcsolatban gyakran alkalmazzuk azt, hogy $x \in \mathbb{R}$ esetén $|x| = \sqrt{x^2}$ teljesül, hiszen $|x| \in \mathbb{R}_+$, $x^2 \in \mathbb{R}_+$ és a ($\mathrm{VA_{II}}$) miatt $|x|^2 = |x^2| = x^2$.

2.3. Euklidészi abszolút érték $\mathbb{C}$ felett

2.3.1. Lemma. (Elemi Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség) *Ha $(x_i)_{i\in I}$ és $(y_i)_{i\in I}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+$-ban haladó véges rendszerek, akkor:*

$$\sum_{i\in I} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i\in I} x_i^2}\sqrt{\sum_{i\in I} y_i^2}.$$

Bizonyítás. Rendezett testben négyzetelemek összege pozitív elem, ezért az $\mathbb{R}$ feletti szorzás asszociativitása, kommutativitása, valamint az összeadásra vonatkoztatott disztributivitása folytán:

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in I}(x_i y_j - x_j y_i)^2\Big) &= \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in I}(x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i x_j y_i y_j)\Big) = \\
&= \sum_{i\in I}\Big(x_i^2\sum_{j\in I} y_j^2 + y_i^2\sum_{j\in I} x_j^2 - 2x_i y_i\sum_{j\in I} x_j y_j\Big) = \\
= \Big(\sum_{i\in I} x_i^2\Big)\Big(\sum_{j\in I} y_j^2\Big) + \Big(\sum_{i\in I} y_i^2\Big)\Big(\sum_{j\in I} x_j^2\Big) &- 2\Big(\sum_{i\in I} x_i y_i\Big)\Big(\sum_{j\in I} x_j y_j\Big) = \\
&= 2\Big(\sum_{i\in I} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i\in I} y_i^2\Big) - 2\Big(\sum_{i\in I} x_i y_i\Big)^2,
\end{aligned}$$

tehát

$$\Big(\sum_{i\in I} x_i y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i\in I} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i\in I} y_i^2\Big),$$

amiből a négyzetgyök-függvény $\mathbb{R}_+$-on való monoton növése alapján következik a bizonyítandó egyenlőtlenség. ■

2.3.2. Állítás. *A $\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$; $z \mapsto |z| := \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$ leképezés olyan abszolútérték-függvény a $\mathbb{C}$ test felett, amelynek $\mathbb{R}$-re vett leszűkítése egyenlő az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvénnyel.*

Bizonyítás. Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén $(\mathrm{VA_I})$ nyilvánvalóan igaz, és egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy minden $x, y \in \mathbb{C}$ esetén $(\mathrm{VA_{II}})$ teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség az elemi Cauchy-Schwartz egyenlőtlenségből következik, mert ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor

$$\begin{gathered}
|z_1+z_2|^2 := (\Re(z_1+z_2))^2 + (\Im(z_1+z_2))^2 = \\
= (\Re(z_1)+\Re(z_2))^2 + (\Im(z_1)+\Im(z_2))^2 = \\
= \Re(z_1)^2 + 2\Re(z_1)\Re(z_2) + \Re(z_2)^2 + \Im(z_1)^2 + 2\Im(z_1)\Im(z_2) + \Im(z_2)^2 = \\
= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(\Re(z_1)\Re(z_2) + \Im(z_1)\Im(z_2)) \leq \\
\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(|\Re(z_1)||\Re(z_2)| + |\Im(z_1)||\Im(z_2)|) \leq \\
\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\sqrt{\Re(z_1)^2 + \Im(z_1)^2}\sqrt{\Re(z_2)^2 + \Im(z_2)^2} = \\
= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 ,
\end{gathered}$$

teljesül, tehát $|z_1 + z_1| \leq |z_1| + |z_2|$. ■

2.3.3. Definíció. *Az előző állításban bevezetett $\mathbb{C}$ feletti abszolútérték-függvényt a komplex számok teste feletti* **euklidészi abszolútérték-függvénynek** *nevezzük, és ezt a továbbiakban az $|\cdot|$ szimbólummal jelöljük. A $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ halmazt az $\mathbb{U}$ vagy $\mathbb{T}$ szimbólummal jelöljük.*

Nyilvánvaló, hogy $z \in \mathbb{C}$ esetén $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Továbbá, minden komplex szám előáll $r \cdot u$ alakban, ahol $r \in \mathbb{R}_+$ és $u \in \mathbb{U}$ (ez a komplex számok *poláris felbontása*), hiszen ha $z \in \mathbb{C}^*$, akkor $u := z/|z| \in \mathbb{U}$, $|z| \in \mathbb{R}_+^*$ és $z = |z| \cdot (z/|z|)$.

Jelölés. A továbbiakban a $\mathbb{K}$ szimbólum az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ szimbólumok jelölésére szolgál. Tehát ha egy kijelentés (akár több helyen) tartalmazza a $\mathbb{K}$ szimbólumot, akkor az adott kijelentés két állítás rövidítése; az egyiket úgy kapjuk, hogy a kijelentésben a $\mathbb{K}$ minden előfordulása helyére $\mathbb{R}$-t helyettesítünk, és a másikat úgy kapjuk, hogy a kijelentésben a $\mathbb{K}$ minden előfordulása helyére $\mathbb{C}$-t helyettesítünk.

2.4. Gömbök és korlátos halmazok $\mathbb{K}$-ban

2.4.1. Definíció. *Minden $r \in \mathbb{R}_+^*$ számra és $x \in \mathbb{K}$ elemre:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) &:= \{x' \in \mathbb{K} \mid |x'-x| < r\}; \\
\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K}) &:= \{x' \in \mathbb{K} \mid |x'-x| \leq r\};
\end{aligned}$$

a $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$ (illetve $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$) halmazt x **középpontú**, *r* **sugarú nyílt** *(illetve* **zárt***)* **gömbnek** *nevezzük $\mathbb{K}$-ban. Rögzített $x \in \mathbb{K}$ esetén az x középpontú nyílt vagy zárt $\mathbb{K}$-beli gömböket az x pont* **gömbi környezeteinek** *nevezzük $\mathbb{K}$-ban.*

Az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $x \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{R}) =]x-r, x+r[$ és $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{R}) = [x-r, x+r]$. Továbbá, az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény egyenlő a $\mathbb{C}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény $\mathbb{R}$-re vett leszűkítésével, ezért minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap \mathrm{B}_r(x;\mathbb{C})$ és $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{C})$.

2.4.2. Definíció. *Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazt* **metrikusan korlátosnak** *nevezzük $\mathbb{K}$-ban, ha létezik olyan $x \in \mathbb{K}$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $E \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$.*

2.4.3. Állítás. *Teljesülnek a következő állítások.*

a) $\mathbb{K}$ *minden metrikusan korlátos részhalmazának minden részhalmaza metrikusan korlátos* $\mathbb{K}$*-ban.*

b) $\mathbb{K}$ *véges sok metrikusan korlátos részhalmazának uniója metrikusan korlátos* $\mathbb{K}$*-ban.*

c) *Egy* $E \subseteq \mathbb{R}$ *halmaz pontosan akkor metrikusan korlátos* $\mathbb{R}$*-ben, ha korlátos az* $\mathbb{R}$ *rendezése szerint.*

d) *Egy* $E \subseteq \mathbb{R}$ *halmaz pontosan akkor metrikusan korlátos* $\mathbb{R}$*-ben, ha metrikusan korlátos* $\mathbb{C}$*-ben.*

e) *Egy* $E \subseteq \mathbb{K}$ *halmaz pontosan akkor metrikusan korlátos* $\mathbb{K}$*-ban, ha létezik olyan* $R \in \mathbb{R}_+^*$*, hogy minden* $x \in E$ *esetén* $|x| < R$*.*

Bizonyítás. a) Ha $E \subseteq \mathbb{K}$ metrikusan korlátos halmaz, és $x \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyanok, hogy $E \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$, akkor a minden $H \subseteq E$ halmazra $H \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$ teljesül, tehát H is metrikusan korlátos $\mathbb{K}$-ban.

b) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}$ metrikusan korlátos részhalmazainak tetszőleges véges rendszere. Ha $I = \emptyset$, akkor $\bigcup\limits_{i\in I} E_i = \emptyset$ és az $\emptyset$ halmaz nyilvánvalóan korlátos $\mathbb{K}$-ban; ezért feltehető, hogy I nem üres. Minden $i \in I$ esetén E_i metrikusan korlátos $\mathbb{K}$-ban, ezért kiválasztható, olyan $(x_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{K}$-ban és olyan $(r_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{R}_+^*$-ban, hogy minden $i \in I$ indexre $E_i \subseteq \mathrm{B}_{r_i}(x_i;\mathbb{K})$ (és az I végessége miatt ehhez *nem szükséges* a kiválasztási axiómára hivatkozni). Legyen $x \in \mathbb{K}$ tetszőlegesen rögzített pont. Ha $x' \in \bigcup\limits_{i\in I} E_i$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $x' \in E_i \subseteq \mathrm{B}_{r_i}(x_i;\mathbb{K})$, vagyis $|x' - x_i| < r_i$, tehát a háromszög-egyenlőtlenség alapján $|x'-x| \leq |x'-x_i| + |x_i - x| < r_i + |x_i - x|$. Ez azt jelenti, hogy az $r := \max\limits_{i\in I}(r_i + |x_i - x|) \in \mathbb{R}_+^*$ szám olyan, hogy $\bigcup\limits_{i\in I} E_i \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$, vagyis $\bigcup\limits_{i\in I} E_i$ metrikusan korlátos $\mathbb{K}$-ban.

c) Ha az $E \subseteq \mathbb{R}$ halmaz metrikusan korlátos $\mathbb{R}$-ben, akkor van olyan $x \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $E \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{R}) =]x-r, x+r[$; ekkor $x - r$ alsó és $x + r$ felső korlátja E-nek, tehát E korlátos az $\mathbb{R}$ természetes rendezése szerint. Megfordítva, ha $E \subseteq \mathbb{R}$ korlátos az $\mathbb{R}$ természetes rendezése szerint, akkor léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$ számok, hogy $a < b$ és $E \subseteq]a, b[$; ekkor az $x := (a+b)/2 \in \mathbb{R}$ és $r := (b-a)/2 \in \mathbb{R}_+^*$ számokra teljesül az, hogy $]a, b[= \mathrm{B}_r(x;\mathbb{R})$, így $E \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{R})$, vagyis E metrikusan korlátos $\mathbb{R}$-ben.

d) Ha $E \subseteq \mathbb{R}$ metrikusan korlátos $\mathbb{R}$-ben, akkor van olyan olyan $x \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $E \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{R})$; ekkor $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap \mathrm{B}_r(x;\mathbb{C})$ miatt $E \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{C})$ is teljesül, tehát E metrikusan korlátos $\mathbb{C}$-ben. Megfordítva, ha $E \subseteq \mathbb{R}$ és E metrikusan korlátos $\mathbb{C}$-ben akkor van olyan $z \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $E \subseteq \mathrm{B}_r(z;\mathbb{C})$; ekkor $x \in E$ esetén $|x - \Re(z)| = |\Re(x-z)| \leq |x - z| < r$, vagyis $E \subseteq \mathrm{B}_r(\Re(z), \mathbb{R})$, így E metrikusan korlátos $\mathbb{R}$-ben.

e) Ha $E \subseteq \mathbb{K}$ metrikusan korlátos $\mathbb{K}$-ban és $x \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan elemek, hogy $E \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$, akkor minden $x' \in E$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség szerint $|x'| = |x + (x'-x)| \leq |x| + |x'-x| < |x| + r$, tehát az $R := |x| + r \in \mathbb{R}_+^*$ számra igaz az, hogy minden $x' \in E$ esetén $|x'| < R$. Megfordítva, ha $R \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy minden $x \in E$ esetén $|x| < R$, akkor $E \subseteq \mathrm{B}_R(0;\mathbb{K})$, tehát E metrikusan korlátos $\mathbb{K}$-ban. ∎

Az előző állítás c) pontja szerint $\mathbb{R}$-ben egy részhalmaz metrikus korlátossága és rendezés szerinti korlátossága ugyanazt jelenti. Ugyanakkor, $\mathbb{C}$ részhalmazára értelmes a metrikus korlátosság, de értelmetlen a rendezés szerinti korlátosság, mert nincs kijelölve $\mathbb{C}$ feletti rendezés. Ezért megállapodunk abban, hogy a továbbiakban $\mathbb{K}$ részhalmazainak korlátosságán kizárólag a metrikus korlátosságot értjük, és a "metrikus korlátosság" kifejezés helyett mindenütt a "korlátosság" szót használjuk.

2.4.4. Definíció. *Egy $\mathbb{K}$-ba érkező f függvényt korlátosnak nevezünk, ha az $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{K}$ halmaz korlátos $\mathbb{K}$-ban.*

Az előző állítás e) pontja szerint nyilvánvaló, hogy ha T halmaz és $f : T \to \mathbb{K}$ függvény, akkor az f korlátosságához szükséges és elégséges olyan $R > 0$ valós szám létezése, amelyre minden $t \in T$ esetén $|f(t)| < R$ teljesül.

2.5. Nyílt halmazok és zárt halmazok $\mathbb{K}$-ban

2.5.1. Definíció. *Az $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ halmazt* **nyíltnak** *nevezzük $\mathbb{K}$-ban, ha minden $x \in \Omega$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \Omega$ teljesül. Az $F \subseteq \mathbb{K}$ halmazt* **zártnak** *nevezzük $\mathbb{K}$-ban, ha a $\mathbb{K} \setminus F$ halmaz nyílt $\mathbb{K}$-ban.*

Vigyázzunk arra, hogy a zártság *nem tagadása* a nyíltságnak; léteznek olyan részhalmazai $\mathbb{K}$-nak, amelyek egyszerre nyíltak és zártak (röviden: nyílt-zártak), továbbá $\mathbb{K}$-nak van sok olyan részhalmaza, amely sem nem nyílt, sem nem zárt.

2.5.2. Állítás. *$\mathbb{K}$-ban minden nyílt (illetve zárt) gömb nyílt (illetve zárt) halmaz. $\mathbb{R}$-ben a nyílt (illetve zárt) intervallumok nyílt (illetve zárt) halmazok.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{K}$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve. Ha $x' \in \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$, akkor $|x'-x| < r$, ezért a háromszög-egyenlőtlenség alapján bármely $\varepsilon \in]0, r - |x'-x|[$ számra teljesül az, hogy $\mathrm{B}_\varepsilon(x',\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$, tehát $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban. Ha $x' \in \mathbb{K} \setminus \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$, akkor $|x'-x| > r$, ezért a háromszög-egyenlőtlenség alapján bármely $\varepsilon \in]0, |x'-x| - r[$ számra teljesül az, hogy $\mathrm{B}_\varepsilon(x',\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$, tehát $\mathbb{K} \setminus \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, így $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$ zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban. ■

2.5.3. Állítás. *$\mathbb{K}$ nyílt részhalmazainak halmazára teljesülnek a következők:*

($\mathrm{O_I}$) *$\emptyset$ és $\mathbb{K}$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban.*

($\mathrm{O_{II}}$) *$\mathbb{K}$-ban nyílt halmazok tetszőleges nem üres véges rendszerének metszete nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban.*

($\mathrm{O_{III}}$) *$\mathbb{K}$-ban nyílt halmazok tetszőleges rendszerének uniója nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban.*

Bizonyítás. ($\mathrm{O_I}$) nyilvánvalóan igaz. Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}$ nyílt részhalmazainak nem üres véges rendszere, és legyen $x \in \bigcap_{i\in I} \Omega_i$. Minden $i \in I$ esetén Ω_i nyílt $\mathbb{K}$-ban és $x \in \Omega_i$, ezért kiválasztható olyan $(r_i)_{i\in I}$ rendszer R^+-ban, amelyre minden $i \in I$ indexre $\mathrm{B}_{r_i}(x;\mathbb{K}) \subseteq \Omega_i$ teljesül. Ekkor az $r := \min_{i\in I} r_i \in \mathbb{R}_+^*$ számra $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathrm{B}_{r_i}(x;\mathbb{K}) \subseteq \bigcap_{i\in I} \Omega_i$, tehát $\bigcap_{i\in I} \Omega_i$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, így ($\mathrm{O_{II}}$) teljesül.

Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}$ nyílt részhalmazainak tetszőleges rendszere, és $x \in \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, akkor van olyan $j \in I$, amelyre $x \in \Omega_j$; ekkor az Ω_j nyíltsága miatt van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \Omega_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, vagyis a $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$ halmaz nyílt $\mathbb{K}$-ban, így ($\mathrm{O_{III}}$) teljesül. ■

2.5.4. Következmény. *$\mathbb{K}$ zárt részhalmazainak halmazára teljesülnek a következők:*

($\mathrm{F_I}$) *$\emptyset$ és $\mathbb{K}$ zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban.*

($\mathrm{F_{II}}$) *$\mathbb{K}$-ban zárt halmazok tetszőleges véges rendszerének uniója zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban.*

($\mathrm{F_{III}}$) *$\mathbb{K}$-ban zárt halmazok tetszőleges nem üres rendszerének metszete zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban.*

Bizonyítás. Ha $(F_i)_{i\in I}$ tetszőleges nem üres halmazrendszer, akkor a de Morgan egyenlőségek (**ENS** 2.9.1.) szerint:

$$\mathbb{K} \setminus \bigcup_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I}(\mathbb{K} \setminus F_i); \quad \mathbb{K} \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I}(\mathbb{K} \setminus F_i),$$

így az állítás azonnal következik a zárt halmazok definíciójából és az előző állításból. ■

Azonban végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül nyílt, és végtelen sok zárt halmaz uniója nem feltétlenül zárt. Az viszont nyilvánvaló, hogy ha $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt és $F \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, akkor $\Omega \setminus F = \Omega \cap (\mathbb{K} \setminus F)$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, mert két nyílt halmaz metszete, továbbá $F \setminus \Omega = F \cap (\mathbb{K} \setminus \Omega)$ zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, mert két zárt halmaz metszete. Speciálisan; $x \in \mathbb{K}$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén az

$$\mathrm{S}_r(x;\mathbb{K}) := \{x' \in \mathbb{K} | |x' - x| = r\}$$

halmaz zárt $\mathbb{K}$-ban, mert egyenlő a $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K}) \setminus \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$ halmazzal. (Az $\mathrm{S}_r(x;\mathbb{K})$ halmazt az x *középpontú*, r *sugarú gömbfelületnek* nevezzük $\mathbb{K}$-ban).

2.6. Halmaz belseje és lezártja

2.6.1. Állítás. *Minden $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazhoz egyértelműen létezik az a nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, amely részhalmaza E-nek, és minden E által tartalmazott nyílt részhalmazt tartalmaz. Továbbá, minden $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazhoz egyértelműen létezik az a zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, amely tartalmazza E-t, és minden E-t tartalmazó $\mathbb{K}$-beli zárt halmaznak részhalmaza.*

Bizonyítás. Legyen $E \subseteq \mathbb{K}$ és $\mathscr{O} := \{\Omega \subseteq \mathbb{K} | (\Omega \text{ nyílt } \mathbb{K}\text{-ban}) \wedge (\Omega \subseteq E)\}$. Ekkor az ($\mathrm{O_{III}}$) miatt $\bigcup \mathscr{O}$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, $\bigcup \mathscr{O} \subseteq E$, és ha $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor a $\mathscr{O}$ definíciója szerint $\Omega \in \mathscr{O}$, tehát $\Omega \subseteq \bigcup \mathscr{O}$. Ezért $\bigcup \mathscr{O}$ az a nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, amely részhalmaza E-nek, és minden E által tartalmazott részhalmazt tartalmaz.

Legyen $E \subseteq \mathbb{K}$ és $\mathscr{F} := \{F \subseteq \mathbb{K} | (F \text{ zárt } \mathbb{K}\text{-ban}) \wedge (E \subseteq F)\}$. Ekkor $\mathscr{F} \neq \emptyset$, mert $\mathbb{K} \in \mathscr{F}$, így a $\bigcap \mathscr{F} := \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$ halmaz jól értelmezett, és a (C_{III}) miatt zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, továbbá $E \subseteq \bigcap \mathscr{F}$, és ha $F \subseteq \mathbb{K}$ olyan zárt halmaz, hogy $E \subseteq F$, akkor a $\mathscr{F}$ definíciója szerint $F \in \mathscr{F}$, tehát $\bigcap \mathscr{F} \subseteq F$. Ezért $\bigcap \mathscr{F}$ az a zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, amely tartalmazza E-t, és minden E-t tartalmazó zárt halmaznak részhalmaza. ■

2.6.2. Definíció. *Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz* **belsejének** (*illetve* **lezártjának**) *nevezzük $\mathbb{K}$-ban azt a tartalmazás tekintetében legnagyobb* (*illetve legkisebb*) *nyílt* (*illetve zárt*) *halmazt $\mathbb{K}$-ban, amely részhalmaza E-nek* (*illetve tartalmazza E-t*)*. Az E halmaz belsejét* (*illetve lezártját*) *$\mathbb{K}$-ban az $\mathring{E}$ vagy $\mathrm{Int}(E)$* (*illetve $\overline{E}$ vagy $\mathrm{Cl}(E)$*) *szimbólummal jelöljük. Az $\mathring{E}$* (*illetve $\overline{E}$*) *elemeit az E* **belső** (*illetve* **érintési**) **pontjainak** *nevezzük.*

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazra; E pontosan akkor nyílt (illetve zárt) $\mathbb{K}$-ban, ha $E = \overset{\circ}{E}$ (illetve $E = \overline{E}$).

2.6.3. Állítás. *Korlátos halmaz lezártja korlátos.*

Bizonyítás. Ha $E \subseteq \mathbb{K}$ korlátos halmaz, és $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, illetve $x \in \mathbb{K}$ olyan pont, amelyekre $E \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$, akkor $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$ és a $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$ halmaz zártsága folytán $\overline{E} \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$ is teljesül. Ekkor bármely $s \in \mathbb{R}_+^*$ számra, ha $r < s$, akkor $\overline{E} \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{B}_s(x;\mathbb{K})$, így $\overline{E}$ is korlátos halmaz. ■

2.7. Belső pontok, érintési pontok és torlódási pontok

2.7.1. Állítás. (A belső pontok és érintési pontok jellemzése gömbi környezetekkel) *Legyen $E \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$.*

a) *Az x pont akkor és csak akkor belső pontja E-nek, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq E$.*

b) *Az x pont akkor és csak akkor érintési pontja E-nek, ha minden $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \cap E \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. a) Ha x belső pontja E-nek, akkor $x \in \overset{\circ}{E}$ és $\overset{\circ}{E}$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \overset{\circ}{E} \subseteq E$. Megfordítva, ha $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq E$, akkor $x \in \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \overset{\circ}{E}$, mert a $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$ gömb nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, így x belső pontja E-nek.

b) Ha x *nem* érintési pontja E-nek, akkor $x \in \mathbb{K} \setminus \overline{E}$, és a definíció szerint $\mathbb{K} \setminus \overline{E}$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus \overline{E}$; ekkor teljesül az, hogy $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \cap E = \emptyset$. Megfordítva, ha $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \cap E = \emptyset$, akkor $\mathbb{K} \setminus \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$ olyan zárt halmaz, amely tartalmazza E-t, így $\overline{E}$-t is, ugyanakkor $x \notin \mathbb{K} \setminus \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$, következésképpen $x \notin \overline{E}$, így x *nem* érintési pontja E-nek. ■

2.7.2. Állítás. *Ha $x \in \mathbb{K}$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, akkor fennállnak a*

$$\overline{\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})} = \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K}),$$
$$\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})\right) = \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. (I) A $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$ halmaz zárt és tartalmazza $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$-t, ezért halmaz lezártjának definíciója szerint $\overline{\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})} \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$.

Legyen $F \subseteq \mathbb{K}$ olyan zárt halmaz, hogy $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq F$. Ekkor $\mathbb{K} \setminus F \subseteq \mathbb{K} \setminus \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$, ezért $x' \in \mathbb{K} \setminus F$ esetén $|x' - x| \geq r$, ugyanakkor a $\mathbb{K} \setminus F$ nyíltsága miatt van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_\varepsilon(x';\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus F$; megmutatjuk, hogy ekkor $|x' - x| \geq r + \varepsilon$ is teljesül. Ha ugyanis ez nem volna igaz, akkor $1 - \dfrac{\varepsilon}{|x' - x|} < \dfrac{r}{|x' - x|} \leq 1$ teljesülne, tehát

$$\left]0, \frac{r}{|x' - x|}\right[\cap \left]1 - \frac{\varepsilon}{|x' - x|}, 1\right[\neq \emptyset.$$

Ha t eleme ennek a halmaznak, akkor az $x_t := (1 - t)x + tx' \in \mathbb{K}$ pontra $|x - x_t| = t|x - x'| < r$ és $|x' - x_t| = (1 - t)|x - x'| < \varepsilon$ teljesül, tehát a háromszög-egyenlőtlenség szerint $x_t \in \mathrm{B}_\varepsilon(x';\mathbb{K}) \cap \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$, holott $\mathrm{B}_\varepsilon(x';\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus F \subseteq \mathbb{K} \setminus \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$ miatt $\mathrm{B}_\varepsilon(x';\mathbb{K}) \cap \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) = \emptyset$. Ebből következik, hogy $x' \in \mathbb{K} \setminus F$ esetén $|x'-x| > r$, azaz $x' \in \mathbb{K} \setminus \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$. Tehát $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq F$ teljesül minden olyan $F \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazra, amelyre $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq F$, így a lezárt definíciója szerint $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \overline{\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})}$.

(II) A $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$ halmaz nyílt és része a $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$ halmaznak, ezért halmaz belsejének definíciója szerint $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})\right)$.

Legyen $x' \in \mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})\right)$. Ekkor a belső pontok jellemzése szerint vehetünk olyan $\rho > 0$ valós számot, hogy $\mathrm{B}_\rho(x';\mathbb{K}) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$. Rögzítsünk tetszőlegesen egy $\rho' \in]0,\rho[$ valós számot. Ekkor az $y := x' + \dfrac{\rho'}{r}(x'-x) \in \mathbb{K}$ elemre $y \in \mathrm{B}_\rho(x';\mathbb{K})$ teljesül, hiszen

$$|y-x'| = \frac{\rho'}{r}|x'-x| \leq \frac{\rho'}{r} \cdot r = \rho' < \rho,$$

ahol kihasználtuk azt, hogy $\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})\right) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$ miatt $x' \in \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$, tehát $|x'-x| \leq r$. Ezért $y \in \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$, tehát

$$r \geq |y-x| = \left(1 + \frac{\rho'}{r}\right)|x'-x|,$$

amiből következik, hogy $|x'-x| \leq \dfrac{r}{1+\dfrac{\rho'}{r}} < r$, így $x' \in \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_\mathrm{r}(\mathrm{x};\mathbb{K})\right) \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$ is teljesül. ■

Az előző állításból látható, hogy $x \in \mathbb{K}$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén a $\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})$ nyílt gömb rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy

$$\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}_r(x;\mathbb{K})}\right) = \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}),$$

és a $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})$ zárt gömb rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy

$$\overline{\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K})\right)} = \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathbb{K}).$$

2.7.3. Állítás. *Ha $E \subseteq \mathbb{R}$ nem üres felülről (illetve alulról) korlátos halmaz, akkor $\sup(E) \in \overline{E}$ (illetve $\inf(E) \in \overline{E}$).*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy E felülről korlátos. Ekkor minden $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\sup(E) - r$ nem felső korlátja E-nek, ezért van olyan $x \in E$, amelyre $\sup(E) - r < x$; ekkor $\sup(E) - r < x \leq \sup(E) < \sup(E) + r$, így $E \cap \mathrm{B}_r(\sup(E);\mathbb{R}) \neq \emptyset$, tehát az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján $\sup(E) \in \overline{E}$.

Tegyük fel, hogy E alulról korlátos. Ekkor minden $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\inf(E) + r$ nem alsó korlátja E-nek, ezért van olyan $x \in E$, amelyre $x < \inf(E) + r$; ekkor $\inf(E) - r < \inf(E) \leq x < \inf(E) + r$, így $E \cap \mathrm{B}_r(\inf(E);\mathbb{R}) \neq \emptyset$, tehát az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján $\inf(E) \in \overline{E}$. ■

2.7.4. Definíció. *Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazt* **sűrűnek** *nevezzük $\mathbb{K}$-ban, ha $\overline{E} = \mathbb{K}$.*

2.7.5. Állítás. *A $\mathbb{Q}$ halmaz sűrű $\mathbb{R}$-ben, és az $\{r + \mathbf{i}s \mid (r \in \mathbb{Q}) \wedge (s \in \mathbb{Q})\}$ halmaz sűrű $\mathbb{C}$-ben. Létezik megszámlálható sűrű halmaz $\mathbb{K}$-ban.*

Bizonyítás. Ha $x \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, akkor az $\mathbb{R}$ rendezett test archimédészi rendezettsége miatt $\mathbb{Q} \cap]x-r, x+r[\neq \emptyset$ (**ALG** 7.3.3.), vagyis $\mathbb{Q} \cap \mathrm{B}_r(x;\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján ez azzal egyenértékű, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, vagyis $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ha $z \in \mathbb{C}$ és $\varrho \in \mathbb{R}_+^*$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\mathrm{B}_{\varrho/\sqrt{2}}(\Re(z);\mathbb{R}) \times \mathrm{B}_{\varrho/\sqrt{2}}(\Im(z);\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{B}_\varrho(z;\mathbb{C}),$$

és $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben, ezért léteznek olyan $r, s \in \mathbb{Q}$ számok, hogy $r \in \mathrm{B}_{\varrho/\sqrt{2}}(\Re(z);\mathbb{R})$ és $s \in \mathrm{B}_{\varrho/\sqrt{2}}(\Im(z);\mathbb{R})$, így $r + \mathbf{i}s \in \mathrm{B}_\varrho(z;\mathbb{C})$. Az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján ez azzal egyenértékű, hogy $\mathbb{C}$ minden eleme érintési pontja az $\{r + \mathbf{i}s | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (s \in \mathbb{Q})\}$ halmaznak.

A $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{C};\ (r,s) \mapsto r + \mathbf{i}s$ függvény *ráképez* az $\{r + \mathbf{i}s | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (s \in \mathbb{Q})\}$ halmazra, ezért ez utóbbi kisebb-egyenlő számosságú $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$-nál, amely megszámlálható. ■

2.7.6. Definíció. *Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz* **torlódási pontjának** *nevezünk minden olyan $x \in \mathbb{K}$ pontot, amelyre $x \in \overline{E \setminus \{x\}}$ teljesül.*

Az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján nyilvánvaló, hogy egy $x \in \mathbb{K}$ pont akkor és csak akkor torlódási pontja az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaznak, ha minden $r \in \mathbb{R}_+^*$ számra $(E \setminus \{x\}) \cap \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) \neq \emptyset$, vagyis az x minden gömbi környezetében van az E-nek *x-től különböző* pontja. Világos, hogy egy halmaz minden torlódási pontja érintési pont is, de ennek megfordítása általában nem igaz.

2.7.7. Állítás. *Ha $E \subseteq \mathbb{K}$ és $\mathfrak{a} \in \overset{\circ}{E}$, akkor $\mathfrak{a}$ torlódási pontja az E halmaznak.*

Bizonyítás. A belső pontok gömbi környezetekkel való jellemzése szerint van olyan $R \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_R(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \subseteq E$. Ha $r \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, akkor létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $0 < x < \min(r, R)$, és ekkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{a} + x \in (\mathrm{B}_R(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \subseteq (E \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{K})$, tehát az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése szerint $\mathfrak{a}$ torlódási pontja E-nek. ■

2.7.8. Definíció. *Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz* **izolált pontjának** *nevezzük az E minden olyan érintési pontját, amely nem torlódási pontja E-nek. Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazt* **diszkrétnek** *nevezzük, ha az E minden pontja izolált pontja E-nek.*

Tehát egy $x \in \mathbb{K}$ pont akkor és csak akkor izolált pontja az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaznak, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $E \cap \mathrm{B}_r(x;\mathbb{K}) = \{x\}$. Speciálisan; az E minden izolált pontja szükségképpen eleme E-nek.

2.8. Cantor-féle közösrész tétel $\mathbb{R}$-re

2.8.1. Tétel. (Cantor-féle közösrész tétel $\mathbb{R}$-re) *Legyen $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ olyan nem üres (indexhalmazú) halmazrendszer, hogy minden $\alpha \in A$ esetén $F_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, korlátos és zárt halmaz. Ha minden $\alpha \in A$ és $\beta \in A$ esetén van olyan $\gamma \in A$, hogy $F_\gamma \subseteq F_\alpha \cap F_\beta$, akkor $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}$ teljes rendezettsége miatt minden $\alpha \in A$ esetén képezhetjük a $\sup(F_\alpha) \in \mathbb{R}$ és $\inf(F_\alpha) \in \mathbb{R}$ elemeket. Ha $\alpha \in A$ és $\beta \in A$, akkor $\inf(F_\beta) \leq \sup(F_\alpha)$, mert ha $\gamma \in A$ olyan, hogy $F_\gamma \subseteq F_\alpha \cap F_\beta$, akkor:

$$\inf(F_\beta) \leq \inf(F_\gamma) \leq \sup(F_\gamma) \leq \sup(F_\alpha).$$

Ebből következik, hogy a $\{\sup(F_\alpha) | \alpha \in A\}$ halmaz *alulról korlátos*, hiszen minden $\beta \in A$ esetén $\inf(F_\beta)$ alsó korlátja ennek a halmaznak (és persze $A \neq \emptyset$). Ismét az $\mathbb{R}$ teljes rendezettségére hivatkozva képezhetjük az $x := \inf\{\sup(F_\alpha) | \alpha \in A\} \in \mathbb{R}$ pontot. Meg fogjuk mutatni, hogy $x \in \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$.

Legyen $\alpha \in A$ rögzítve; azt akarjuk megmutatni, hogy $x \in F_\alpha$. E helyett elég azt igazolni, hogy minden $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $]x - r, x + r[\cap F_\alpha \neq \emptyset$, hiszen az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján ez azt jelenti, hogy $x \in \overline{F_\alpha}$, vagyis $x \in F_\alpha$, mert F_α zárt.

Legyenek tehát $\alpha \in A$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve. A definíció szerint x a $\{\sup(F_\beta) | \beta \in A\}$ halmaz legnagyobb alsó korlátja, ezért $x + r$ nem alsó korlát, így létezik olyan $\beta \in A$, amelyre $\sup(F_\beta) < x + r$. Legyen $\gamma \in A$ olyan, hogy $F_\gamma \subseteq F_\alpha \cap F_\beta$. Ekkor $\sup(F_\gamma) - r$ nem felső korlátja F_γ-nak, tehát van olyan $y \in F_\gamma$, amelyre $\sup(F_\gamma) - r < y$. Világos, hogy

$$x - r \leq \sup(F_\gamma) - r < y \leq \sup(F_\gamma) \leq \sup(F_\beta) < x + r,$$

tehát $y \in]x - r, x + r[$, ugyanakkor $y \in F_\gamma \subseteq F_\alpha$, vagyis $y \in]x - r, x + r[\cap F_\alpha$. ∎

A tételben egészen lényeges az, hogy az F_α halmazok *korlátosak* és *zártak*, továbbá fontos az, hogy minden $\alpha \in A$ és $\beta \in A$ esetén létezzen olyan $\gamma \in A$, hogy $F_\gamma \subseteq F_\alpha \cap F_\beta$; ezt a tulajdonságot az $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ halmazrendszer *lefelé irányítottságának* nevezzük.

2.9. Borel-Lebesgue befedési tétel $\mathbb{R}$-re

2.9.1. Definíció. *Az E halmaz* **befedésének** *nevezünk minden olyan $(E_i)_{i \in I}$ halmazrendszert, amelyre $E \subseteq \bigcup_{i \in I} E_i$ teljesül. Ha $(E_i)_{i \in I}$ az E halmaz befedése, és $J \subseteq I$ olyan részhalmaz, hogy $(E_i)_{i \in J}$ szintén befedése E-nek, akkor azt mondjuk, hogy $(E_i)_{i \in J}$ az $(E_i)_{i \in I}$* **részbefedése**.

2.9.2. Definíció. *Egy $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazt* **kompaktnak** *nevezünk, ha a $\mathbb{K}$ nyílt részhalmazainak bármely $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszerére teljesül az, hogy ha $E \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, akkor van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup_{i \in J} \Omega_i$ teljesül.*

Tehát az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha az E halmaz bármely nyílt halmazokból álló befedésének létezik véges (indexhalmazú) részbefedése.

2.9.3. Tétel. (Borel-Lebesgue befedési tétel $\mathbb{R}$-re) *$\mathbb{R}$-nek egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy az $F \subseteq \mathbb{R}$ halmaz korlátos és zárt, és legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ az $\mathbb{R}$ nyílt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $F \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Jelölje A az I véges részhalmazainak halmazát, és minden $\alpha \in A$ esetén legyen $F_\alpha := F \setminus \bigcup_{i \in \alpha} \Omega_i$. Nyilvánvaló, hogy

$(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan halmazrendszer, amelyre minden $\alpha \in A$ esetén F_α korlátos és zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben, továbbá $\alpha \in A$ és $\beta \in A$ esetén $F_\alpha \cap F_\beta = F \setminus \bigcup_{i\in\alpha\cup\beta} \Omega_i = F_\gamma$, ahol $\gamma := \alpha \cup \beta \in A$. Ha minden $\alpha \in A$ esetén $F_\alpha \neq \emptyset$ teljesülne, akkor a Cantor-féle közösrész tétel szerint $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset$ teljesülne. Azonban a de Morgan egyenlőség szerint

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = F \setminus \bigcup_{\alpha\in A} \Big(\bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i\Big) = F \setminus \bigcup_{i\in I} \Omega_i = \emptyset,$$

hiszen $F \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy *létezik* olyan $\alpha \in A$, amelyre $F_\alpha = \emptyset$. Ha α ilyen, akkor az F_α definíciója szerint $F \subseteq \bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy F kompakt halmaz $\mathbb{R}$-ben.

(II) Tegyük fel, hogy az $F \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem korlátos. Ekkor az $(]-n, n[)_{n\in\mathbb{N}}$ intervallum-sorozat mindegyik tagja nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, és $F \subseteq \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, n[$. Ha $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, akkor létezik olyan $m \in \mathbb{N}^*$, hogy $H \subseteq m$; ekkor

$$\bigcup_{n\in H}]-n, n[\;\subseteq\; \bigcup_{n\leq m}]-n, n[\;=\;]-m, m[,$$

és F nem részhalmaza $]-m, m[$-nek (mert F nem korlátos), így $F \subseteq \bigcup_{n\in H}]-n, n[$ lehetetlen. Tehát F nem kompakt halmaz.

(III) Tegyük fel, hogy az $F \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem zárt, és legyen $x \in \overline{F} \setminus F$. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre $\inf\{\varepsilon_n | n \in \mathbb{N}\} = 0$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ teljesül. (Például, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_n := 1/(n+1)$, akkor az $\mathbb{R}$ archimédészi rendezettségéből következik, hogy $\inf\{\varepsilon_n | n \in \mathbb{N}\} = 0$, és persze minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ teljesül.) Ekkor az $(\mathbb{R} \setminus [x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n])_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat minden tagja nyílt $\mathbb{R}$-ben, és $x \notin F$ miatt

$$F \;\subseteq\; \mathbb{R} \setminus \{x\} \;=\; \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n] \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus [x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n]).$$

Ha $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, akkor létezik olyan $m \in \mathbb{N}^*$, hogy $H \subseteq m$; ekkor

$$\bigcup_{n\in H} (\mathbb{R} \setminus [x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n]) \;\subseteq\; \bigcup_{n\leq m} (\mathbb{R} \setminus [x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n]) \;=$$
$$= \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n\leq m} [x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n] \;=\; \mathbb{R} \setminus [x-\varepsilon_m, x+\varepsilon_m],$$

és F nem részhalmaza $\mathbb{R} \setminus [x-\varepsilon_m, x+\varepsilon_m]$-nek (mert $x \in \overline{F}$), következésképpen $F \subseteq \bigcup_{n\in H} (\mathbb{R} \setminus [x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n])$ lehetetlen. Tehát F nem kompakt halmaz.

A (II) és (III) alapján az $\mathbb{R}$ minden kompakt részhalmaza korlátos és zárt. ■

Később megadjuk a Borel-Lebesgue befedési tételnek és a Cantor-féle közösrész tételnek a kiterjesztését $\mathbb{C}$-re, sőt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{K}^n$-re is.

2.10. Gyakorlatok

1. Jelölje $\mathbb{P}$ a prímszámok halmazát. Minden $x \in \mathbb{Q}^*$ számhoz egyértelműen létezik olyan $\mathbb{Z}$-ben haladó $(\nu_p(x))_{p\in\mathbb{P}}$ rendszer és olyan $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ elem, hogy $\{p \in \mathbb{P} | \nu_p(x) \neq 0\}$ véges halmaz és

$$x = \varepsilon \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\nu_p(x)}$$

teljesül. Legyen $p \in \mathbb{P}$ rögzített, és tekinstük a következő függvényt:

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto |x|_p := \begin{cases} p^{-\nu_p(x)} & \text{, ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } x = 0 \end{cases}.$$

Minden $p \in \mathbb{P}$ esetén ez a $|\cdot|_p$ leképezés abszolútérték-függvény a $\mathbb{Q}$ test felett, amit a $\mathbb{Q}$ feletti *p-adikus abszolútérték-függvénynek* nevezünk. Ha $p \in \mathbb{P}$, akkor minden $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$$

is teljesül, ami *erősebb* feltétel, mint a háromszög-egyenlőtlenség. Azt mondjuk, hogy a K test feletti $|\cdot|$ abszolútérték-függvény *ultrametrikusnak* nevezünk, ha $(\mathrm{VA_{III}})$ helyett a következő erősebb feltétel teljesül:

$(\mathrm{VA'_{III}})$ Minden $x, y, z \in K$ esetén $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$.

Tehát minden p prímszámra $|\cdot|_p$ ultrametrikus abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges test felett az impropriusz abszolútérték-függvény ultrametrikus.

2. $\mathbb{K}$-ban nem üres nyílt halmazok bármely diszjunkt rendszerének az indexhalmaza megszámlálható.

3. $\mathbb{R}$-ben minden nyílt halmaz előáll megszámlálható sok korlátos nyílt intervallum uniójaként.

4. Legyen H zárt részcsoportja az $(\mathbb{R}, +)$ csoportnak. Ekkor $H \neq \mathbb{R}$ esetén egyértelműen létezik olyan $\theta \in \mathbb{R}_+$, amelyre $H = \{n\theta | n \in \mathbb{Z}\}$ teljesül, vagyis H a θ valós szám egész számú többszöröseiből áll.

(*Útmutatás.* $\theta := \min(H \cap \mathbb{R}_+^*)$)

5. Minden $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazhoz van olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén K_n korlátos és zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, és $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Minden $F \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazhoz van olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén Ω_n nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, és $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$.

(*Útmutatás.* A második állítás az elsőből a de Morgan egyenlőségek szerint következik.

Ha $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem korlátos $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, akkor minden $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazra $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \cap \mathrm{B}_{r_n}(0; \mathbb{K}))$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\Omega \cap \mathrm{B}_{r_n}(0; \mathbb{K})$ korlátos nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban. Tehát a $\mathbb{K}$ minden nyílt részhalmaza előáll megszámlálható sok korlátos nyílt halmaz uniójaként, így az első állítást elég *korlátos* nyílt halmazra bizonyítani.

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ korlátos és nyílt halmaz. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n = 0$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$K_n := \{x \in \mathbb{K} | \inf_{x'\in\mathbb{K}\setminus\Omega} |x - x'| \geq \varepsilon_n\}.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra K_n zárt halmaz, mert

$$K_n = \bigcap_{x'\in\mathbb{K}\setminus\Omega} (\mathbb{K} \setminus \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x'; \mathbb{K})),$$

továbbá K_n korlátos is, mert $K_n \subseteq \Omega$. Könnyen belátható, hogy $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$.)

6. Ha K véges test, akkor nem létezik K felett nem improprius abszolútérték-függvény.

(*Útmutatás.* Ha $|\cdot|$ nem improprius abszolútérték-függvény a K test felett, akkor van olyan $x \in K$, hogy $|x| > 1$; ekkor az $\mathbb{N} \to K$; $x \mapsto x^n$ leképezés *injektív*, tehát K nem véges.)

7. (*Az elemi Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség általános formája.*) Ha K rendezett test, és $(x_i)_{i\in I}$ és $(y_i)_{i\in I}$ tetszőleges K-ban haladó véges rendszerek, akkor:

$$\Big(\sum_{i\in I} x_i y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i\in I} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i\in I} y_i^2\Big),$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha minden $I \ni i, j$-re $x_i y_j = x_j y_i$ (ami ekvivalens olyan $z \in K$ létezésével, amelyre minden $i \in I$ esetén $y_i = z x_i$, ha van olyan $i \in I$, hogy $x_i \neq 0$).

3. fejezet

Számsorozatok

3.1. Konvergens sorozatok $\mathbb{K}$-ban

3.1.1. Definíció. *A $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatokat* **számsorozatoknak** *vagy* **numerikus sorozatoknak** *nevezzük. Az $\mathbb{R}$-ben (illetve $\mathbb{C}$-ben) haladó sorozatokat* **valós** (*illetve* **komplex**) **sorozatoknak** *nevezzük.*

3.1.2. Definíció. *Az* $\mathbf{s}$ *számsorozatot* **konvergensnek** *mondjuk $\mathbb{K}$-ban, ha létezik olyan $x \in \mathbb{K}$, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > N$, akkor $|\mathbf{s}(n) - x| < \varepsilon$. Minden ilyen tulajdonságú $x \in \mathbb{K}$ pontot az* $\mathbf{s}$ *sorozat* **határértékének** *vagy* **limeszpontjának** *nevezünk. A nem konvergens számsorozatokat* **divergenseknek** *nevezzük. Az* $\mathbf{s}$ *számsorozatot* **zérussorozatnak** *nevezzük, ha konvergens és 0 határértéke* $\mathbf{s}$*-nek.*

Tehát a $\mathbb{K}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozat pontosan akkor konvergens $\mathbb{K}$-ban, ha

$$(\exists x \in \mathbb{K})(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})((n > N) \Rightarrow |\mathbf{s}(n) - x| < \varepsilon)$$

teljesül.

3.1.3. Állítás. *Konvergens számsorozatnak pontosan egy határértéke létezik.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ konvergens $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, és legyenek $x, x' \in \mathbb{K}$ határérékei $\mathbf{s}$-nek. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $x \neq x'$, vagyis $|x - x'| > 0$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $2\varepsilon < |x - x'|$. Az x pont határértéke $\mathbf{s}$-nek, ezért az ε-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $|\mathbf{s}(n) - x| < \varepsilon$. Az x' pont határértéke $\mathbf{s}$-nek, ezért az ε-hoz létezik olyan $N' \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}'$ és $n > N'$ esetén $|\mathbf{s}(n) - x'| < \varepsilon$. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > N$ és $n > N'$, akkor az $|\mathbf{s}(n) - x| < \varepsilon$ és $|\mathbf{s}(n) - x'| < \varepsilon$ egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek, így a háromszög-egyenlőtlenség alapján $|x - x'| \leq |x - \mathbf{s}(n)| + |\mathbf{s}(n) - x'| < 2\varepsilon < |x - x'|$, ami lehetetlen. ■

Jelölés. Ha $\mathbf{s}$ konvergens számsorozat, akkor az $\mathbf{s}$ egyértelműen meghatározott határértékét $\lim(\mathbf{s})$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{s}(n)$ jelöli.

3.1.4. Állítás. *Az* $\mathbf{s}$ *komplex sorozat pontosan akkor konvergens $\mathbb{C}$-ben, ha az*

$$\Re(\mathbf{s}) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \Re(\mathbf{s}(n))$$
$$\Im(\mathbf{s}) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \Im(\mathbf{s}(n))$$

valós sorozatok konvergensek $\mathbb{R}$*-ben, és ha* $\mathbf{s}$ *konvergens* $\mathbb{C}$*-ben, akkor:*

$$\lim(\mathbf{s}) = \lim(\Re(\mathbf{s})) + \mathbf{i} \cdot \lim(\Im(\mathbf{s})),$$

vagyis

$$\Re(\lim(\mathbf{s})) = \lim(\Re(\mathbf{s})), \quad \Im(\lim(\mathbf{s})) = \lim(\Im(\mathbf{s})).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{s}$ konvergens $\mathbb{C}$-ben. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, és $N \in \mathbb{N}$ olyan természetes szám, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra, $n > N$ esetén $|\Re(\mathbf{s}(n)) - \Re(\lim(\mathbf{s}))| \leq |\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$ és $|\Im(\mathbf{s}(n)) - \Im(\lim(\mathbf{s}))| \leq |\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$, tehát a $\Re(\mathbf{s})$ és $\Im(\mathbf{s})$ valós sorozatok konvergensek $\mathbb{R}$-ben, és $\lim(\Re(\mathbf{s})) = \Re(\lim(\mathbf{s}))$, valamint $\lim(\Im(\mathbf{s})) = \Im(\lim(\mathbf{s}))$, ami azt is jelenti, hogy $\lim(\mathbf{s}) = \lim(\Re(\mathbf{s})) + \mathbf{i} \cdot \lim(\Im(\mathbf{s}))$.

Tegyük fel, hogy az $\Re(\mathbf{s})$ és $\Im(\mathbf{s})$ valós sorozatok konvergensek, és legyen $a := \lim(\Re(\mathbf{s}))$, valamint $b := \lim(\Im(\mathbf{s}))$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített. Legyen $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$) olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N$ (illetve $n > N'$), akkor $|\Re(\mathbf{s})(n) - a| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ (illetve $|\Im(\mathbf{s})(n) - b| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$). Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > \max(N, N')$, akkor $|\mathbf{s}(n) - (a + \mathbf{i} \cdot b)| < \varepsilon$, tehát az $\mathbf{s}$ sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben. ■

3.1.5. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ *és* $\mathbf{s}'$ *olyan számsorozatok, amelyekhez létezik olyan* $N_0 \in \mathbb{N}$*, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq N_0$ *számra* $\mathbf{s}(n) = \mathbf{s}'(n)$*, akkor az* $\mathbf{s}$ *és* $\mathbf{s}'$ *sorozatok egyszerre konvergensek vagy divergensek, és ha konvergensek, akkor* $\lim(\mathbf{s}) = \lim(\mathbf{s}')$.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{s}$ konvergens számsorozat, akkor $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > N$, akkor $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$; ekkor $n > \max(N, N_0)$ esetén fennáll az $|\mathbf{s}'(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$ egyenlőtlenség is, így $\mathbf{s}'$ konvergens, és $\lim(\mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s})$. ■

Az előző állításból következik, hogy ha az $\mathbf{s}$ számsorozatnak *véges sok* helyen megváltoztatjuk az értékét, akkor az így nyert $\mathbf{s}'$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha $\mathbf{s}$ konvergens, továbbá, ha $\mathbf{s}$ konvergens, akkor $\lim(\mathbf{s}) = \lim(\mathbf{s}')$. Ezért minden olyan $\mathbf{s} : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvénynek is tekinthetjük a konvergenciáját és a határértékét, amelyre $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Dom}(\mathbf{s})$ *véges* halmaz; ehhez elegendő az $\mathbf{s}$ függvényt kiterjeszteni $\mathbb{N}$-re *tetszőlegesen*, és venni a kiterjesztett sorozat határértékét (amennyiben létezik); ekkor a kiterjesztett sorozat konvergenciájának ténye, illetve konvergencia esetén a $\mathbb{K}$-beli határértéke *független* a kiterjesztés választásától.

3.1.6. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ *és* $\mathbf{s}'$ *olyan konvergens valós számsorozatok, amelyekhez létezik olyan* $N_0 \in \mathbb{N}$*, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq N_0$ *számra* $\mathbf{s}(n) \leq \mathbf{s}'(n)$*, akkor* $\lim(\mathbf{s}) \leq \lim(\mathbf{s}')$.

Bizonyítás. Legyenek $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ konvergens valós számsorozatok, és legyen $N_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ számra $\mathbf{s}(n) \leq \mathbf{s}'(n)$. Legyen $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, amelyre $C < \lim(\mathbf{s})$; meg fogjuk mutatni, hogy ekkor $C \leq \lim(\mathbf{s}')$ is teljesül. Valóban; rögzítsünk egy $\varepsilon \in]0 \lim(\mathbf{s}) - C[$ valós számot, és ε-hoz legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\mathbf{s}(n) \in]\lim(\mathbf{s}) - \varepsilon, \lim(\mathbf{s}) + \varepsilon[$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N, N_0)$ esetén $C \leq \lim(\mathbf{s}) - \varepsilon < \mathbf{s}(n) \leq \mathbf{s}'(n)$. Ha $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, akkor van olyan $N'' \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}''$ és $n > N''$ esetén $\mathbf{s}'(n) \in]\lim(\mathbf{s}') - \varepsilon', \lim(\mathbf{s}') + \varepsilon'[$; tehát ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > \max(N, N_0, N')$, akkor $C < \mathbf{s}'(n) < \lim(\mathbf{s}') + \varepsilon'$. Tehát minden $\mathbb{R}_+^* \ni \varepsilon'$-re $C < \lim(\mathbf{s}') + \varepsilon'$, így $C \leq \lim(\mathbf{s}')$. Ebből következik, hogy $\lim(\mathbf{s}) \leq \lim(\mathbf{s}')$ (**ENS** 2.12.14.). ■

3.1.7. Következmény. *Ha* $\mathbf{s}$ *konvergens valós számsorozat, és a* $C \in \mathbb{R}$ *számhoz létezik olyan* $N_0 \in \mathbb{N}$*, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq N_0$ *számra* $\mathbf{s}(n) \leq C$ *(illetve* $C \leq \mathbf{s}(n)$*), akkor* $\lim(\mathbf{s}) \leq C$ *(illetve* $C \leq \lim(\mathbf{s})$*).*

Bizonyítás. Az első állítás az előző állításból következik, ha abban $\mathbf{s}'$ helyére a konstans C-értékű sorozatot helyettesítjük. A második állítás is az előző állításból következik, ha ott $\mathbf{s}'$ helyére az $\mathbf{s}$ sorozatot és $\mathbf{s}$ helyére a C-értékű konstans-sorozatot helyettesítjük. ■

Azonban vigyázzunk arra, hogy ha $\mathbf{s}$ konvergens valós számsorozat, és a $C \in \mathbb{R}$ számhoz létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ számra az $\mathbf{s}(n) < C$ *szigorú egyenlőtlenség* teljesül, akkor is csak annyi állítható, hogy $\lim(\mathbf{s}) \leq C$ teljesül, de előfordulhat, hogy $\lim(\mathbf{s}) = C$, így a $\lim(\mathbf{s}) < C$ szigorú egyenlőtlenség *nem szükségképpen igaz.*

3.1.8. Állítás. (Közrefogási elv.) *Ha* $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}'$ *és* $\mathbf{s}''$ *olyan valós számsorozatok, hogy létezik olyan* $N_0 \in \mathbb{N}$*, amelyre minden* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq N_0$ *számra* $\mathbf{s}'(n) \leq \mathbf{s}(n) \leq \mathbf{s}''(n)$*, továbbá az* $\mathbf{s}'$ *és* $\mathbf{s}''$ *sorozatok konvergensek, és* $\lim(\mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s}'')$*, akkor* $\mathbf{s}$ *is konvergens és* $\lim(\mathbf{s}) = \lim(\mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s}'')$*.*

Bizonyítás. Legyen $x := \lim(\mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s}'')$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Ekkor léteznek olyan $N' \in \mathbb{N}$ és $N'' \in \mathbb{N}$ számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N'$, akkor $|\mathbf{s}'(n) - x| < \varepsilon$ és ha $n > N''$, akkor $|\mathbf{s}''(n) - x| < \varepsilon$. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > \max(N', N'', N_0)$, akkor $x - \varepsilon < \mathbf{s}'(n) \leq \mathbf{s}(n) \leq \mathbf{s}''(n) < x + \varepsilon$, vagyis $|\mathbf{s}(n) - x| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{s}$ konvergens sorozat, és $\lim(\mathbf{s}) = x$. ■

3.2. Konvergens sorozat átrendezései és részsorozatai

3.2.1. Tétel. *Ha* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *olyan függvény, hogy minden* $F \subseteq \mathbb{N}$ *véges halmazra a* $\overset{-1}{\sigma}\langle F \rangle$ *halmaz véges, akkor minden* $\mathbf{s}$ *konvergens számsorozatra az* $\mathbf{s} \circ \sigma$ *számsorozat is konvergens és* $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) = \lim(\mathbf{s})$*.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N'$, akkor $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$. A $[\![0, N']\!] \subseteq \mathbb{N}$ halmaz véges, ezért a hipotézis alapján a $\overset{-1}{\sigma}\langle [\![0, N']\!] \rangle$ halmaz is véges, így vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amely felső korlátja ennek a véges halmaznak, vagyis $\overset{-1}{\sigma}\langle [\![0, N']\!] \rangle \subseteq [\![0, N]\!]$ (**ENS** 4.1.9.). Ha $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $k > N$, vagyis $k \notin [\![0, N]\!]$, akkor $k \notin \overset{-1}{\sigma}\langle [\![0, N']\!] \rangle$, azaz $\sigma(k) > N'$, így $|\mathbf{s}(\sigma(k)) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$. Ez éppen azt jelenti, hogy az $\mathbf{s} \circ \sigma$ számsorozat konvergens és $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) = \lim(\mathbf{s})$. ■

3.2.2. Következmény. *Ha* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *injekció (például* σ *permutációja* $\mathbb{N}$*-nek, vagy* σ *szigorúan monoton növő), akkor minden* $\mathbf{s}$ *konvergens számsorozatra az* $\mathbf{s} \circ \sigma$ *számsorozat is konvergens és* $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) = \lim(\mathbf{s})$*.*

Bizonyítás. Ha $F \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, akkor σ injektivitása miatt $\overset{-1}{\sigma}\langle F \rangle$ is véges, sőt $\mathrm{Card}(\overset{-1}{\sigma}\langle F \rangle) \leq \mathrm{Card}(F)$. Ezért az állítás következik az előző tételből. ■

Tehát konvergens számsorozat minden *átrendezése* konvergens, és ugyanaz a határértéke, mint az eredeti sorozaté. De vigyázzunk arra, hogy ha a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény olyan, hogy létezik $m \in \mathbb{N}$, amelyre a $\overset{-1}{\sigma}\langle\{m\}\rangle$ halmaz *végtelen*, akkor már van olyan olyan $\mathbf{s}$ konvergens számsorozat, amelyre az $\mathbf{s} \circ \sigma$ számsorozat nem konvergens, vagy konvergens, de $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) \neq \lim(\mathbf{s})$!

Megjegyezzük még, hogy ha $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, akkor a "minden $F \subseteq \mathbb{N}$ véges halmazra a $\overset{-1}{\sigma}\langle F\rangle$ halmaz véges" kijelentés *ekvivalens* azzal, hogy "minden $m \in \mathbb{N}$ esetén a $\overset{-1}{\sigma}\langle\{m\}\rangle$ halmaz véges" (vagyis σ egyetlen értéket sem vesz fel végtelen sokszor), hiszen ha az utóbbi állítás teljesül, és $F \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, akkor

$$\overset{-1}{\sigma}\langle F\rangle = \bigcup_{m\in F} \overset{-1}{\sigma}\langle\{m\}\rangle$$

miatt $\overset{-1}{\sigma}\langle F\rangle$ is véges halmaz, mert véges sok véges halmaz uniója véges.

3.2.3. Állítás. *Konvergens számsorozat minden részsorozata konvergens, és a határértéke egyenlő az eredeti sorozat határértékével.*

Bizonyítás. Az előző következmény alapján nyilvánvaló, mert minden $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat injekció, de közvetlenül is bizonyíthatunk, a következő módon. Legyen $\mathbf{s}$ konvergens számsorozat és $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$; ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\sigma(n) \geq n > N$, így $|\mathbf{s}(\sigma(n)) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$ is teljesül, tehát $\mathbf{s} \circ \sigma$ konvergens, és $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) = \lim(\mathbf{s})$. ■

3.2.4. Következmény. *Legyen* $(\sigma_i)_{i\in I}$ *indexsorozatoknak olyan véges rendszere, hogy az* $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{i\in I} \mathrm{Im}(\sigma_i)$ *halmaz véges. Ha* $\mathbf{s}$ *olyan számsorozat, hogy minden* $i \in I$ *esetén az* $\mathbf{s} \circ \sigma_i$ *részsorozat konvergens és a határértéke ugyanaz az* $x \in \mathbb{K}$ *elem, akkor az* $\mathbf{s}$ *sorozat konvergens és* $\lim(\mathbf{s}) = x$.

Bizonyítás. Az $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{i\in I} \mathrm{Im}(\sigma_i)$ halmaz végessége miatt vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{i\in I} \mathrm{Im}(\sigma_i) \subseteq [\![0, N]\!]$ (**ENS** 4.1.9.), vag, ami ezzel ekvivalens: $\{n \in \mathbb{N} | n > N\} \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathrm{Im}(\sigma_i)$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és minden $i \in I$ esetén legyen $N_i \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N_i$, akkor $|\mathbf{s}(\sigma_i(n)) - x| < \varepsilon$. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > N$ és $n > \max_{i\in I} \sigma_i(N_i)$, akkor van olyan $i \in I$ és $m \in \mathbb{N}$, hogy $n = \sigma_i(m)$, így $|\mathbf{s}(n) - x| = |\mathbf{s}(\sigma_i(m)) - x| < \varepsilon$, hiszen $m > N_i$, különben $\sigma_i(N_i) < n = \sigma_i(m) \leq \sigma_i(N_i)$ teljesülne, ami lehetetlen. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{s}$ sorozat konvergens és $\lim(\mathbf{s}) = x$. ■

3.3. Monoton valós számsorozat konvergenciája

3.3.1. Állítás. *Minden konvergens számsorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ konvergens számsorozat, és rögzítsünk egy $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot. Az r-hez van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < r$, vagyis $\{\mathbf{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\} \subseteq \mathrm{B}_r(\lim(\mathbf{s}); \mathbb{K})$; ekkor az $\{\mathbf{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\}$ halmaz korlátos és $\{\mathbf{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq N)\}$ szintén korlátos, hiszen véges, így $\mathrm{Im}(\mathbf{s})$ is korlátos halmaz, mert $\mathrm{Im}(\mathbf{s}) = \{\mathbf{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\} \cup \{\mathbf{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq N)\}$. ■

3.3.2. Állítás. *Monoton valós sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos. Ha* $\mathbf{s}$ *korlátos monoton növő (illetve fogyó) sorozat, akkor* $\lim(\mathbf{s}) = \sup(\mathrm{Im}(\mathbf{s}))$ *(illetve* $\lim(\mathbf{s}) = \inf(\mathrm{Im}(\mathbf{s}))$*).*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ monoton növő korlátos valós sorozat. Ekkor $\mathrm{Im}(\mathbf{s})$ nem üres, felülről korlátos részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, tehát az $\mathbb{R}$ teljes rendezettsége miatt $\sup(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) \in \mathbb{R}$ létezik. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\sup(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) - \varepsilon$ már nem felső korlátja $\mathrm{Im}(\mathbf{s})$-nek, tehát létezik $N \in \mathbb{N}$, amelyre $\sup(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) - \varepsilon < \mathbf{s}(N)$; ekkor az $\mathbf{s}$ monoton növése miatt minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $\sup(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) - \varepsilon < \mathbf{s}(N) \leq \mathbf{s}(n) \leq \sup(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) < \sup(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) + \varepsilon$, vagyis $|\mathbf{s}(n) - \sup(\mathrm{Im}(\mathbf{s}))| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{s}$ konvergens és $\lim(\mathbf{s}) = \sup(\mathrm{Im}(\mathbf{s}))$.

Legyen $\mathbf{s}$ monoton fogyó korlátos valós sorozat. Ekkor $\mathrm{Im}(\mathbf{s})$ nem üres, alulról korlátos részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, tehát az $\mathbb{R}$ teljes rendezettsége miatt $\inf(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) \in \mathbb{R}$ létezik. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\inf(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) + \varepsilon$ már nem alsó korlátja $\mathrm{Im}(\mathbf{s})$-nek, tehát létezik $N \in \mathbb{N}$, amelyre $\mathbf{s}(N) < \inf(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) + \varepsilon$; ekkor az $\mathbf{s}$ monoton fogyása miatt minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $\inf(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) - \varepsilon < \inf(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) \leq \mathbf{s}(n) \leq \mathbf{s}(N) < \inf(\mathrm{Im}(\mathbf{s})) + \varepsilon$, vagyis $|\mathbf{s}(n) - \inf(\mathrm{Im}(\mathbf{s}))| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{s}$ konvergens és $\lim(\mathbf{s}) = \inf(\mathrm{Im}(\mathbf{s}))$. ■

3.4. Műveletek sorozatokkal és összetett sorozatok konvergenciája

3.4.1. Definíció. *Legyenek* $\mathbf{s}$ *és* $\mathbf{s}'$ $\mathbb{K}$*-ban haladó sorozatok, és* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Ekkor a* $\mathbb{K}$*-ban haladó* $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$, $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'$, $\lambda \cdot \mathbf{s}$, $|\mathbf{s}|$ *és* $\overline{\mathbf{s}}$ *sorozatokat úgy értelmezzük, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$(\mathbf{s} + \mathbf{s}')(n) := \mathbf{s}(n) + \mathbf{s}'(n), \quad (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}')(n) := \mathbf{s}(n) \cdot \mathbf{s}'(n), \quad (\lambda \cdot \mathbf{s})(n) := \lambda \cdot \mathbf{s}(n),$$
$$|\mathbf{s}|(n) := |\mathbf{s}(n)|, \quad \overline{\mathbf{s}}(n) := \overline{\mathbf{s}(n)}.$$

Ha $\mathbf{s}$ *olyan számsorozat, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathbf{s}(n) \neq 0$*, akkor* $1/\mathbf{s}$ *vagy* $\mathbf{s}^{-1}$ *jelöli azt a számsorozatot, amelyre minden* $n \in \mathbb{N}$ *számra*

$$(1/\mathbf{s})(n) := 1/\mathbf{s}(n).$$

3.4.2. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ *és* $\mathbf{s}'$ *konvergens számsorozatok, akkor* $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$, $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'$ *és minden* $\lambda \in \mathbb{K}$ *esetén* $\lambda \cdot \mathbf{s}$ *is konvergens számsorozatok, és*

$$\lim(\mathbf{s} + \mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s}) + \lim(\mathbf{s}'), \quad \lim(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s}) \cdot \lim(\mathbf{s}'), \quad \lim(\lambda \cdot \mathbf{s}) = \lambda \cdot \lim(\mathbf{s}).$$

Ha $\mathbf{s}$ *konvergens számsorozat, akkor* $|\mathbf{s}|$ *és* $\overline{\mathbf{s}}$ *is konvergensek, és*

$$\lim(|\mathbf{s}|) = |\lim(\mathbf{s})|, \quad \lim(\overline{\mathbf{s}}) = \overline{\lim(\mathbf{s})}.$$

Ha $\mathbf{s}$ *olyan konvergens számsorozat, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathbf{s}(n) \neq 0$ *és* $\lim(\mathbf{s}) \neq 0$*, akkor* $1/\mathbf{s}$ *konvergens és:*

$$\lim(1/\mathbf{s}) = 1/\lim(\mathbf{s}).$$

Bizonyítás. Feltesszük, hogy $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ konvergens számsorozatok, és $\lambda \in \mathbb{K}$ rögzített szám.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és vegyünk tetszőleges olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\varepsilon' < \varepsilon/2$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$) olyan, hogy minden $n > N$ (illetve $n > N'$) természetes számra $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon'$ (illetve $|\mathbf{s}'(n) - \lim(\mathbf{s}')| < \varepsilon'$). Ekkor minden $n > \max(N, N')$ természetes számra:

$$|(\mathbf{s} + \mathbf{s}')(n) - (\lim(\mathbf{s}) + \lim(\mathbf{s}'))| \leq |\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| + |\mathbf{s}'(n) - \lim(\mathbf{s}')| < 2 \cdot \varepsilon' < \varepsilon,$$

tehát $\mathbf{s}+\mathbf{s}'$ konvergens, és $\lim(\mathbf{s}+\mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s}) + \lim(\mathbf{s}')$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és vegyünk tetszőleges olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $|\lambda| \cdot \varepsilon' < \varepsilon$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon'$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra:

$$|(\lambda \cdot \mathbf{s})(n) - \lambda \cdot \lim(\mathbf{s})| = |\lambda| \cdot |\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| \leq |\lambda| \cdot \varepsilon' < \varepsilon,$$

tehát $\lambda \cdot \mathbf{s}$ konvergens, és $\lim(\lambda \cdot \mathbf{s}) = \lambda \cdot \lim(\mathbf{s})$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$\begin{gathered}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}')(n) - (\lim(\mathbf{s})) \cdot (\lim(\mathbf{s}')) = (\mathbf{s}(n)) \cdot (\mathbf{s}'(n)) - (\lim(\mathbf{s})) \cdot (\lim(\mathbf{s}')) = \\ = (\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})) \cdot (\mathbf{s}'(n) - \lim(\mathbf{s}')) + \\ +(\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})) \cdot \lim(\mathbf{s}') + \lim(\mathbf{s}) \cdot (\mathbf{s}'(n) - \lim(\mathbf{s}')),\end{gathered}$$

amiből az következik, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$, valamint $|\mathbf{s}'(n) - \lim(\mathbf{s}')| < \varepsilon$, akkor:

$$|(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}')(n) - (\lim(\mathbf{s})) \cdot (\lim(\mathbf{s}'))| < \varepsilon^2 + \varepsilon \cdot |\lim(\mathbf{s}')| + |\lim(\mathbf{s})| \cdot \varepsilon.$$

Legyen tehát $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és vegyünk tetszőleges olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $(\varepsilon')^2 + \varepsilon' \cdot |\lim(\mathbf{s}')| + |\lim(\mathbf{s})| \cdot \varepsilon' \leq \varepsilon$; például:

$$\varepsilon' := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + |\lim(\mathbf{s})| + |\lim(\mathbf{s}')|}\right).$$

Az ε' számhoz legyen $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$) olyan, hogy minden $n > N$ (illetve $n > N'$) természetes számra $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon'$ (illetve $|\mathbf{s}'(n) - \lim(\mathbf{s}')| < \varepsilon'$). Ekkor a fentiek szerint minden $n > \max(N, N')$ természetes számra:

$$|(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}')(n) - (\lim(\mathbf{s})) \cdot (\lim(\mathbf{s}'))| < (\varepsilon')^2 + \varepsilon' \cdot |\lim(\mathbf{s}')| + |\lim(\mathbf{s})| \cdot \varepsilon' \leq \varepsilon,$$

tehát $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'$ konvergens és $\lim(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s}) \cdot \lim(\mathbf{s}')$.

Legyen $\mathbf{s}$ konvergens számsorozat és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra:

$$||\mathbf{s}|(n) - |\lim(\mathbf{s})|| := ||\mathbf{s}(n)| - |\lim(\mathbf{s})|| \leq |\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon,$$

továbbá:

$$|\overline{\mathbf{s}}(n) - \overline{\lim(\mathbf{s})}| := |\overline{\mathbf{s}(n)} - \overline{\lim(\mathbf{s})}| = |\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon,$$

tehát $|\mathbf{s}|$ és $\overline{\mathbf{s}}$ konvergens számsorozatok, és

$$\lim(|\mathbf{s}|) = |\lim(\mathbf{s})|, \quad \lim(\overline{\mathbf{s}}) = \overline{\lim(\mathbf{s})}.$$

Legyen $\mathbf{s}$ olyan konvergens számsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) \neq 0$ és $\lim(\mathbf{s}) \neq 0$. Legyen $C \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy $C < |\lim(\mathbf{s})|$; ekkor a $|\lim(\mathbf{s})| - C > 0$ számhoz vehetünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ elemet, amelyre minden $n > N'$ természetes szám esetén $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < |\lim(\mathbf{s})| - C > 0$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N'$ esetén $|\lim(\mathbf{s})| - |\mathbf{s}(n)| \leq |\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < |\lim(\mathbf{s})| - C$, ezért $|\mathbf{s}(n)| > C$, így:

$$|(1/\mathbf{s})(n) - (1/\lim(\mathbf{s}))| = \frac{|\lim(\mathbf{s}) - \mathbf{s}(n)|}{|\mathbf{s}(n)| \cdot |\lim(\mathbf{s})|} \leq \frac{|\lim(\mathbf{s}) - \mathbf{s}(n)|}{C \cdot |\lim(\mathbf{s})|}.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és rögzítsünk olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre

$$\frac{\varepsilon'}{C \cdot |\lim(\mathbf{s})|} < \varepsilon.$$

Legyen $N'' \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N''$ természetes számra $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon'$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N', N'')$ esetén $|(1/\mathbf{s})(n) - (1/\lim(\mathbf{s}))| < \varepsilon$ teljesül, tehát $1/\mathbf{s}$ konvergens, és $\lim(1/\mathbf{s}) = 1/\lim(\mathbf{s})$. ■

3.4.3. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ *zérussorozat és* $\mathbf{s}'$ *korlátos számsorozat, akkor* $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'$ *zérussorozat.*

Bizonyítás. Az $\mathbf{s}'$ korlátossága miatt van olyan $C \in \mathbb{R}_+^*$ szám, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\mathbf{s}'(n)| < C$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és rögzítsünk olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\varepsilon' < \varepsilon/C$. Az ε'-höz legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\mathbf{s}(n)| < \varepsilon'$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra fennáll az $|(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}')(n))| \leq |\mathbf{s}(n)| \cdot C < \varepsilon' \cdot C < \varepsilon$ egyenlőtlenség, tehát $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'$ konvergens, és $\lim(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}') = 0$. ■

3.4.4. Állítás. *Ha* $(\mathbf{s}_i)_{i \in I}$ *konvergens valós számsorozatok nem üres véges rendszere, akkor a*

$$\overline{\mathbf{s}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \max_{i \in I}(\mathbf{s}_i(n)),$$
$$\underline{\mathbf{s}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \min_{i \in I}(\mathbf{s}_i(n))$$

valós számsorozatok is konvergensek és

$$\lim(\overline{\mathbf{s}}) = \max_{i \in I}\left(\lim(\mathbf{s}_i)\right),$$
$$\lim(\underline{\mathbf{s}}) = \min_{i \in I}\left(\lim(\mathbf{s}_i)\right).$$

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| \max_{i \in I}(\mathbf{s}_i(n)) - \max_{i \in I}\left(\lim(\mathbf{s}_i)\right) \right| \leq \max_{i \in I} |\mathbf{s}_i(n) - \lim(\mathbf{s}_i)|,$$
$$\left| \min_{i \in I}(\mathbf{s}_i(n)) - \min_{i \in I}\left(\lim(\mathbf{s}_i)\right) \right| \leq \max_{i \in I} |\mathbf{s}_i(n) - \lim(\mathbf{s}_i)|.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Ekkor vehetünk olyan $\mathbb{N}$-ben haladó $(N_i)_{i \in I}$ rendszert, hogy minden $i \in I$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N_i$, akkor $|\mathbf{s}_i(n) - \lim(\mathbf{s}_i)| < \varepsilon$. Ekkor $N := \max_{i \in I} N_i$ olyan természetes szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N$, akkor minden $i \in I$ indexre $n > N_i$ folytán $|\mathbf{s}_i(n) - \lim(\mathbf{s}_i)| < \varepsilon$, ezért $\max_{i \in I} |\mathbf{s}_i(n) - \lim(\mathbf{s}_i)| < \varepsilon$, így a fenti egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\left| \overline{\mathbf{s}}(n) - \max_{i \in I}\left(\lim(\mathbf{s}_i)\right) \right| = \left| \max_{i \in I}(\mathbf{s}_i(n)) - \max_{i \in I}\left(\lim(\mathbf{s}_i)\right) \right| < \varepsilon,$$
$$\left| \underline{\mathbf{s}}(n) - \min_{i \in I}\left(\lim(\mathbf{s}_i)\right) \right| = \left| \min_{i \in I}(\mathbf{s}_i(n)) - \min_{i \in I}\left(\lim(\mathbf{s}_i)\right) \right| < \varepsilon,$$

ami az állítást igazolja. ■

3.5. Érintési és torlódási pontok jellemzése sorozatokkal

3.5.1. Állítás. *Legyen $E \subseteq \mathbb{K}$.*

a) *Az $x \in \mathbb{K}$ pont akkor és csak akkor érintési pontja E-nek, ha létezik olyan E-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál.* **(Az érintési pontok jellemzése sorozatokkal)**

b) *Az $x \in \mathbb{K}$ pont akkor és csak akkor torlódási pontja E-nek, ha létezik olyan $E \setminus \{x\}$-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál.* **(A torlódási pontok jellemzése sorozatokkal)**

c) *Az E halmaz pontosan akkor zárt, ha minden E-ben haladó konvergens sorozat határértéke eleme E-nek.* **(A zárt halmazok jellemzése sorozatokkal)**

Bizonyítás. a) Ha $\mathbf{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}(n) \in \mathrm{B}_\varepsilon(x; \mathbb{K})$; ekkor $E \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x; \mathbb{K}) \neq \emptyset$, vagyis az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján $x \in \overline{E}$. Megfordítva, tegyük fel, hogy x érintési pontja E-nek. Rögzítsünk egy $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot, amely $\mathbb{R}_+^*$-ban halad. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E \cap \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x; \mathbb{K}) \neq \emptyset$, ezért a kiválasztási axióma szerint: $\prod_{n\in\mathbb{N}}(E \cap \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x; \mathbb{K})) \neq \emptyset$; legyen $\mathbf{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\mathbf{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\mathbf{s}(n) - x| < \varepsilon_n$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, akkor $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ számra $\varepsilon_n < \varepsilon$, így $|\mathbf{s}(n) - x| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az E-ben haladó $\mathbf{s}$ számsorozat az x-hez konvergál.

b) Nyilvánvalóan következik az a) állításból és abból, hogy definíció szerint x pontosan akkor torlódási pontja E-nek, ha érintési pontja $E \setminus \{x\}$-nek.

c) Nyilvánvalóan következik az a) állításból és abból, hogy az E halmaz pontosan akkor zárt, ha $\overline{E} \subseteq E$, vagyis minden érintési pontja eleme neki. ■

Az előző állítás a) pontjából következik, hogy ha $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz és $\mathbf{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amely konvergens, akkor $\lim(\mathbf{s}) \in \overline{E}$. Ezt a tényt gyakran alkalmazzuk az analízisben.

3.5.2. Következmény. *Ha $\mathbf{s}$ konvergens valós számsorozat, és $C \in \mathbb{R}$ (illetve $C' \in \mathbb{R}$) olyan szám, hogy létezik $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$), amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ (illetve $n > N'$) esetén $\mathbf{s}(n) \leq C$ (illetve $C' \leq \mathbf{s}(n)$), akkor $\lim(\mathbf{s}) \leq C$ (illetve $C' \leq \lim(\mathbf{s})$) teljesül.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik az előző állítás c) részéből és abból, hogy a $]\leftarrow, C]$ és $[C', \rightarrow[$ intervallumok zárt halmazok $\mathbb{R}$-ben. ■

3.6. Cauchy-sorozatok

Az analízisben sokszor értelmezünk olyan sorozatokat, amelyek konvergenciájának ténye fontos volna akkor is, ha nem ismerjük a határértéküket. Ezért értékes lenne egy olyan *konvergenciakritérium*, amelynek alkalmazásával eldönthető volna egy sorozat konvergenciájának ténye a határérték ismerete nélkül.

3.6.1. Definíció. *Az $\mathbf{s}$ számsorozatot* **Cauchy-sorozatnak** *nevezzük, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > N$ és $n > N$ természetes számra $|\mathbf{s}(m) - \mathbf{s}(n)| < \varepsilon$.*

Tehát a $\mathbb{K}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\ ((m > N) \wedge (n > N)) \Rightarrow |\mathbf{s}(m) - \mathbf{s}(n)| < \varepsilon\ )$$

teljesül.

3.6.2. Állítás. *Minden konvergens számsorozat Cauchy-sorozat, és minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ konvergens számsorozat, és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az $\varepsilon/2$ számhoz legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon/2$. Ha $m > N$ és $n > N$ tetszőleges természetes számok, akkor $|\mathbf{s}(m)-\mathbf{s}(n)| \leq |\mathbf{s}(m)-\lim(\mathbf{s})|+|\lim(\mathbf{s}) - \mathbf{s}(n)| < 2 \cdot (\varepsilon/2) = \varepsilon$, tehát $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat.

Legyen $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat és rögzítsünk egy $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot. Az r-hez legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m > N$ és $n > N$ természetes számra $|\mathbf{s}(m) - \mathbf{s}(n)| < r$. Ekkor $\{\mathbf{s}(m)|(m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\} \subseteq \mathrm{B}_r(\mathbf{s}(N + 1); \mathbb{K})$, tehát az $\{\mathbf{s}(m)|(m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\}$ halmaz korlátos, továbbá az $\{\mathbf{s}(m)|(m \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq N)\}$ halmaz is korlátos, mert véges, így az $\mathrm{Im}(\mathbf{s}) = \{\mathbf{s}(m)|(m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\} \cup \{\mathbf{s}(m)|(m \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq N)\}$ halmaz is korlátos, vagyis $\mathbf{s}$ korlátos sorozat. ■

3.6.3. Állítás. *Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, ezért a feltétel *szükséges.* A feltétel *elégségességének* bizonyításához legyen $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat, és legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan szigorúan monoton növő függvény, amelyre $\mathbf{s} \circ \sigma$ konvergens sorozat. Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathbf{s}$-nek a $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma)$ pont a határértéke.

Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m > N'$ és $n > N'$ természetes számra $|\mathbf{s}(m)-\mathbf{s}(n)| < \varepsilon/2$; ilyen létezik, mert $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat. Legyen továbbá $N'' \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N''$ természetes számra $|(\mathbf{s} \circ \sigma)(n) - \lim(\mathbf{s} \circ \sigma)| < \varepsilon/2$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N', N'')$, akkor $\sigma(n) \geq n > N'$, így $|\mathbf{s}(\sigma(n)) - \mathbf{s}(n)| < \varepsilon/2$, továbbá $n > N''$ miatt $|\mathbf{s}(\sigma(n)) - \lim(\mathbf{s} \circ \sigma)| < \varepsilon/2$, amiből a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy $|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s} \circ \sigma)| < \varepsilon$. ■

3.7. Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel és Cauchy-féle konvergenciakritérium

3.7.1. Állítás. (Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel) *Minden korlátos számsorozatnak létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. (I) Először feltesszük, hogy $\mathbf{s}$ korlátos *valós* sorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen:

$$F_n := \overline{\{\mathbf{s}(k)|(k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\}}.$$

Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $F_n \subseteq \mathbb{R}$ nem üres és zárt halmaz, valamint korlátos is, mert $F_n \subseteq \overline{\mathrm{Im}(\mathbf{s})}$ és $\mathrm{Im}(\mathbf{s})$ korlátos. Továbbá, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor nyilvánvalóan $F_{n+1} \subseteq F_n$, ezért a Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Megmutatjuk, hogy a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ halmaz minden eleméhez létezik $\mathbf{s}$-nek olyan részsorozata, amely hozzá konvergál. Ehhez először rögzítsünk egy $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó zérussorozatot, amely $\mathbb{R}_+^*$-ban halad, majd válasszunk egy $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ elemet. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x \in F_{n+1} := \overline{\{\mathbf{s}(k)|(k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n+1)\}},$$

ezért az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján

$$\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x;\mathbb{R}) \cap \{\mathbf{s}(k)|(k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n+1)\} \neq \emptyset.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\{k \in \mathbb{N}|(k > n) \wedge (|\mathbf{s}(k) - x| < \varepsilon_n)\} \neq \emptyset$. Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a leképezés, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$f(n) := \min\{k \in \mathbb{N}|(k > n) \wedge (|\mathbf{s}(k) - x| < \varepsilon_n)\}.$$

Jelölje σ a $0 \in \mathbb{N}$ kezdőpont és az f függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sigma(n+1) = f(\sigma(n)) \in \{k \in \mathbb{N}|(k > \sigma(n)) \wedge (|\mathbf{s}(k) - x| < \varepsilon_{\sigma(n)})\},$$

tehát $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ és $|\mathbf{s}(\sigma(n+1)) - x| < \varepsilon_{\sigma(n)}$. Ezért a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény szigorúan monoton növő, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\mathbf{s}(\sigma(n+1)) - x| < \varepsilon_{\sigma(n)} \leq \varepsilon_n$, hiszen $\sigma(n) \geq n$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\varepsilon_n < \varepsilon$; ekkor minden $n > N+1$ természetes számra $|\mathbf{s}(\sigma(n)) - x| < \varepsilon_{n-1} < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{s} \circ \sigma$ konvergens és $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) = x$.

(II) Legyen most $\mathbf{s}$ korlátos *komplex* sorozat. Az $\Re(\mathbf{s})$ és $\Im(\mathbf{s})$ sorozatok valósak és korlátosak, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|(\Re(\mathbf{s}))(n)| \leq |\mathbf{s}(n)|$ és $|(\Im(\mathbf{s}))(n)| \leq |\mathbf{s}(n)|$. Ekkor (I) alapján az $\Re(\mathbf{s})$ korlátos valós sorozathoz van olyan $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre $(\Re(\mathbf{s})) \circ \sigma_1$ konvergens valós sorozat. Ekkor $(\Im(\mathbf{s})) \circ \sigma_1$ szintén korlátos valós sorozat, így ismét (I) alapján van olyan $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre $((\Im(\mathbf{s})) \circ \sigma_1) \circ \sigma_2$ konvergens valós sorozat. Ekkor a $\sigma := \sigma_1 \circ \sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény szigorúan monoton növő, és a definíció szerint $(\Im(\mathbf{s})) \circ \sigma$ konvergens valós sorozat, és a $(\Re(\mathbf{s})) \circ \sigma$ valós sorozat is konvergens, mert ez részsorozata a $(\Re(\mathbf{s})) \circ \sigma_1$ konvergens sorozatnak. Ugyanakkor nyilvánvalóan $(\Re(\mathbf{s})) \circ \sigma = \Re(\mathbf{s} \circ \sigma)$ és $(\Im(\mathbf{s})) \circ \sigma = \Im(\mathbf{s} \circ \sigma)$. Ez azt jelenti, hogy a $\Re(\mathbf{s} \circ \sigma)$ és $\Im(\mathbf{s} \circ \sigma)$ valós sorozatok konvergensek, így az $\mathbf{s} \circ \sigma$ komplex sorozat konvergens. ■

3.7.2. Tétel. (Cauchy-féle konvergenciakritérium.) *Számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Minden konvergens számsorozat Cauchy-sorozat (3.6.2.). Ha egy számsorozat Cauchy-sorozat, akkor korlátos (3.6.2.), így a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel (3.7.1.) szerint létezik konvergens részsorozata, tehát 3.6.3. alapján konvergens. ■

Most valós számsorozatokra igazolunk egy olyan állítást, amelyből 3.6.2. és 3.6.3., valamint 3.3.2. és 3.1.4. alkalmazásával az előző tétel olyan új bizonyítását nyerjük, amely a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tételtől független.

3.7.3. Állítás. *Minden valós számsorozatnak létezik* **monoton** *részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ valós számsorozat és

$$H := \{\, n \in \mathbb{N} \mid (\forall m \in \mathbb{N}) : ((n \leq m) \Rightarrow (\mathbf{s}(n) \leq \mathbf{s}(m)))\}.$$

Tegyük fel, hogy a H halmaz végtelen. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{k \in H | n < k\}$ halmaz nem üres, tehát jól értelmezett az

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \min\{k \in H | n < k\}$$

függvény. Jelölje σ a $\min\{k \in H | 0 < k\}$ kezdőpont és f függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény (tehát indexsorozat), mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+1) = f(\sigma(n)) \in \{k \in H | \sigma(n) < k\}$, azaz $\sigma(n) < \sigma(n+1)$. Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) \in H$, ezért $\mathbf{s}(\sigma(n)) \leq \mathbf{s}(\sigma(n+1))$, tehát $\mathbf{s} \circ \sigma$ monoton növő sorozat.

Tegyük fel, hogy a H halmaz véges, és legyen $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy a H minden eleme kisebb n_0-nál. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n_0 \leq n$, akkor $n \notin H$, tehát van olyan $m \in \mathbb{N}$, amelyre $n < m$ és $\mathbf{s}(n) > \mathbf{s}(m)$, vagyis a $\{k \in \mathbb{N} | (n < k) \wedge (\mathbf{s}(n) > \mathbf{s}(k))\}$ halmaz nem üres. Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amely minden n_0-nál kisebb természetes számhoz 0-t rendel, és minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ esetén

$$f(n) := \min\{k \in \mathbb{N} | (n < k) \wedge (\mathbf{s}(n) > \mathbf{s}(k))\}.$$

Jelölje σ az n_0 kezdőpont és f függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény (tehát indexsorozat), mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+1) = f(\sigma(n)) \in \{k \in \mathbb{N} | (\sigma(n) < k) \wedge (\mathbf{s}(\sigma(n)) > \mathbf{s}(k))\}$, azaz $\sigma(n) < \sigma(n+1)$. Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(\sigma(n)) > \mathbf{s}(\sigma(n+1))$, tehát $\mathbf{s} \circ \sigma$ szigorúan monoton fogyó sorozat. ■

3.8. Bolzano–Weierstrass-tétel $\mathbb{K}$-ra

3.8.1. Tétel. (Bolzano–Weierstrass-tétel $\mathbb{K}$-ra: a korlátos és zárt halmazok jellemzése sorozatokkal.) *Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha minden E-ben haladó sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme E-nek.*

Bizonyítás. Ha E korlátos és zárt halmaz, valamint $\mathbf{s}$ tetszőleges E-ben haladó sorozat, akkor E korlátossága miatt $\mathbf{s}$ korlátos, ezért a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel (3.7.1.) miatt $\mathbf{s}$-nek létezik konvergens részsorozata, továbbá az $\mathbf{s}$ bármely konvergens részsorozatának a határértéke $\overline{E}$-nak eleme (az érintési pontok sorozatokkal való jellemzése szerint), így E zártsága miatt E-nek eleme.

Megmutatjuk, hogy ha E nem korlátos, akkor van olyan E-ben haladó sorozat, amelynek még korlátos részsorozata sincs. Valóban, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E \setminus \mathrm{B}_{n+1}(0; \mathbb{K}) \neq \emptyset$, mert E nem korlátos, így a kiválasztási axióma szerint $\prod_{n \in \mathbb{N}} (E \setminus \mathrm{B}_{n+1}(0; \mathbb{K})) \neq \emptyset$. Ha $\mathbf{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor $\mathbf{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\mathbf{s}(n)| \geq n+1$. Ekkor $\mathbf{s}$ minden részsorozata *nem korlátos*, mert ha $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, akkor minden n természetes számra $|(\mathbf{s} \circ \sigma)(n)| \geq \sigma(n) + 1 \geq n + 1$.

Megmutatjuk, hogy ha E nem zárt, akkor van olyan E-ben haladó sorozat, amely minden konvergens részsorozatának a határértéke *nem eleme* E-nek. Valóban, legyen $x \in \overline{E} \setminus E$ tetszőleges pont. Az érintési pontok sorozatokkal való jellemzése alapján van olyan E-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat, amely x-hez konvergál; ekkor az $\mathbf{s}$ minden részsorozata konvergens és a határértéke egyenlő x-szel, tehát nem eleme E-nek. ■

3.8.2. Következmény. *Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha minden E-ben haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Ha $E \subseteq \mathbb{K}$ korlátos halmaz, akkor $\overline{E}$ korlátos és zárt, és minden E-ben haladó sorozat $\overline{E}$-ban halad, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint minden E-ben haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Ha $E \subseteq \mathbb{K}$ nem korlátos halmaz, akkor a Bolzano–Weierstrass-tétel iménti *bizonyítása szerint* van olyan E-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat, amelynek mindegyik részsorozata nem korlátos, tehát $\mathbf{s}$-nek nem létezik konvergens részsorozata, hiszen konvergens részsorozat korlátos volna. ■

3.9. A kibővített számegyenes bevezetése

Az $\mathbb{R}$ halmaz a természetes rendezés szerint nem korlátos, ezért $\mathbb{R}$-nek sok olyan részhalmaza van, amelyik felülről vagy alulról nem korlátos. Ez az oka annak, hogy az $\mathbb{R}$ rendezésteljességét csak korlátos halmazokra fogalmazzuk meg, tehát csak annyit követelhetünk meg, hogy *felülről korlátos* halmaznak létezzen szuprémuma. Sőt még azt is ki kell kötni, hogy a halmaz *nem üres*, mert az üres halmaznak minden valós szám felső és alsó korlátja is, vagyis az üres halmaznak sem létezhet sem szuprémuma, sem infimuma $\mathbb{R}$-ben. Most megadjuk az $(\mathbb{R}, \leq)$ rendezett halmaz olyan bővítését, amelyre a rendezésteljesség az elképzelhető legerősebb formában igaz lesz.

3.9.1. Definíció. *Jelöljön $+\infty$ és $-\infty$ két olyan különböző halmazt, amelyek nem elemei $\mathbb{R}$-nek, és legyen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon bevezetjük a*

$$\overline{\leq} \ := \ \leq \ \cup \ (\overline{\mathbb{R}} \times \{+\infty\}) \ \cup \ (\{-\infty\} \times \overline{\mathbb{R}})$$

relációt, ahol $\leq$ a természetes rendezés $\mathbb{R}$ felett. Az $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\leq})$ párt **kibővített valós számegyenesnek** *nevezzük. Az $\{x \in \overline{\mathbb{R}} | 0 \overline{\leq} x\}$ halmazt $\overline{\mathbb{R}}_+$ jelöli (tehát $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$).*

Könnyen igazolhatóak a következő állítások.

– A kibővített valós számegyenes olyan *lineárisan rendezett halmaz*, amelyben a $\overline{\leq}$ rendezés megszorítása $\mathbb{R}$-re megegyezik az $\mathbb{R}$ természetes rendezésével.

– A $\overline{\leq}$ rendezés szerint $+\infty$ a legnagyobb és $-\infty$ a legkisebb elem $\overline{\mathbb{R}}$-ben.

– Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmaz *minden* részhalmazának létezik szuprémuma és infimuma a $\overline{\leq}$ rendezés szerint. Pontosabban, ha $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, akkor:

a) $E = \emptyset$ esetén $\sup(E) = -\infty$ és $\inf(E) = +\infty$ a $\overline{\leq}$ rendezés szerint;

b) ha E felülről (illetve alulról) nem korlátos a $\overline{\leq}$ rendezés szerint, akkor $\sup(E) = +\infty$ (illetve $\inf(E) = -\infty$).

c) ha $E \neq \emptyset$ és E felülről (illetve alulról) korlátos $\mathbb{R}$-ben, akkor $\sup(E)$ (illetve $\inf(E)$) a $\overline{\leq}$ rendezés szerint megegyezik a $\leq$ rendezés szerinti $\mathbb{R}$-beli szuprémummal (illetve infimummal).

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban az $\overline{\mathbb{R}}$ feletti rendezést is a $\leq$ szimbólummal jelöljük.

3.10. $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozat alsó és felső határértéke

3.10.1. Definíció. *Ha* $\mathbf{s}$ $\overline{\mathbb{R}}$*-ban haladó sorozat, akkor*

$$\limsup(\mathbf{s}) := \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}\mathbf{s}(k)\Big)$$
$$\liminf(\mathbf{s}) := \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}\mathbf{s}(k)\Big)$$

és a $\limsup(\mathbf{s}) \in \overline{\mathbb{R}}$ (*illetve* $\liminf(\mathbf{s}) \in \overline{\mathbb{R}}$) *elemet az* $\mathbf{s}$ *sorozat* **felső** (*illetve* **alsó**) **határértékének** *nevezzük. A* $\limsup(\mathbf{s})$ (*illetve* $\liminf(\mathbf{s})$) *jel helyett a* $\limsup\limits_{n\to\infty}\mathbf{s}(n)$, $\overline{\lim}(\mathbf{s})$ *vagy* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\mathbf{s}(n)$ (*illetve* $\liminf\limits_{n\to\infty}\mathbf{s}(n)$, $\underline{\lim}(\mathbf{s})$ *vagy* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\mathbf{s}(n)$) *jeleket is alkalmazzuk. A felső* (*illetve alsó*) *határérték elnevezés helyett a* **limesz szuperior** (*illetve* **limesz inferior**) *elnevezést is alkalmazzuk.*

3.10.2. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ $\overline{\mathbb{R}}$*-ban haladó sorozat, akkor*

$$\liminf(\mathbf{s}) = -\limsup(-\mathbf{s})$$
$$\limsup(\mathbf{s}) = -\liminf(-\mathbf{s}).$$

Bizonyítás. Felhasználva azt, hogy minden $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ esetén $-\inf(E) = \sup(-E)$, a definíció alapján kapjuk, hogy

$$-\limsup(-\mathbf{s}) = -\inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}(-\mathbf{s}(k))\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(-\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}(-\mathbf{s}(k))\Big) =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}\mathbf{s}(k)\Big) = \liminf(\mathbf{s}).$$

Felhasználva azt, hogy minden $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ esetén $-\sup(E) = \inf(-E)$, a definíció alapján kapjuk, hogy

$$-\liminf(-\mathbf{s}) = -\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}(-\mathbf{s}(k))\Big) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(-\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}(-\mathbf{s}(k))\Big) =$$
$$= \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}\mathbf{s}(k)\Big) = \limsup(\mathbf{s}).\ \blacksquare$$

3.10.3. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ $\overline{\mathbb{R}}$*-ban haladó sorozat, akkor:*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{s}(n) \leq \liminf(\mathbf{s}) \leq \limsup(\mathbf{s}) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{s}(n).$$

Bizonyítás. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\underline{\mathbf{s}}(n) := \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}\mathbf{s}(k), \quad \overline{\mathbf{s}}(n) := \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}\mathbf{s}(k).$$

Világos, hogy az $\underline{\mathbf{s}}$ sorozat monoton növő, és az $\overline{\mathbf{s}}$ sorozat monoton fogyó. Tehát ha $m, n \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek, és $N := \max(m, n)$, akkor $\underline{\mathbf{s}}(m) \leq \underline{\mathbf{s}}(N) \leq \overline{\mathbf{s}}(N) \leq \overline{\mathbf{s}}(n)$, így:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{s}(k) \leq \underline{\mathbf{s}}(m) \leq \overline{\mathbf{s}}(n) \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{s}(k).$$

Ez azt jelenti, hogy $m \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{s}(k) \leq \underline{\mathbf{s}}(m) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathbf{s}}(n) \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{s}(k),$$

amiből következik, hogy:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{s}(k) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \underline{\mathbf{s}}(m) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathbf{s}}(n) \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{s}(k).$$

A definíció szerint $\limsup(\mathbf{s}) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathbf{s}}(n)$ és $\liminf(\mathbf{s}) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \underline{\mathbf{s}}(m)$, amivel az állítást igazoltuk. ■

3.10.4. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ *és* $\mathbf{s}'$ *olyan* $\overline{\mathbb{R}}$*-ban haladó sorozatok, hogy létezik olyan* $N \in \mathbb{N}$*, amelyre minden* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq N$ *esetén* $\mathbf{s}(n) \leq \mathbf{s}'(n)$*, akkor*

$$\liminf(\mathbf{s}) \leq \liminf(\mathbf{s}'), \quad \limsup(\mathbf{s}) \leq \limsup(\mathbf{s}').$$

Bizonyítás. Legyen C olyan valós szám, hogy $\limsup(\mathbf{s}') < C$. A definíció szerint ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}'(k) < C,$$

tehát minden $k \geq n$ természetes számra $\mathbf{s}'(k) < C$. Ekkor

$$\limsup(\mathbf{s}) \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,N)} \mathbf{s}(k) \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,N)} \mathbf{s}'(k) \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}'(k) < C,$$

amiből következik, hogy $\limsup(\mathbf{s}) \leq \limsup(\mathbf{s}')$.

Legyen C olyan valós szám, hogy $C < \liminf(\mathbf{s})$. A definíció szerint ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$C < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}(k),$$

tehát minden $k \geq n$ természetes számra $C < \mathbf{s}(k)$. Ekkor

$$C < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}(k) \leq \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,N)} \mathbf{s}(k) \leq \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,N)} \mathbf{s}'(k) \leq \liminf(\mathbf{s}'),$$

amiből következik, hogy $\liminf(\mathbf{s}) \leq \liminf(\mathbf{s}')$. ■

Az előző állításból következik, hogy ha az $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozatnak *véges sok* helyen megváltoztatjuk az értékét, akkor az így nyert $\mathbf{s}'$ sorozatra $\liminf(\mathbf{s}) = \liminf(\mathbf{s}')$ és $\limsup(\mathbf{s}) = \limsup(\mathbf{s}')$ teljesül. Ezért minden olyan $\mathbf{s} : \mathbb{N} \rightarrowtail \overline{\mathbb{R}}$ függvénynek is tekinthetjük az alsó és felső határértékét, amelyre $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Dom}(\mathbf{s})$ *véges* halmaz; ehhez elegendő az $\mathbf{s}$-t kiterjeszteni $\mathbb{N}$-re *tetszőlegesen*, és venni a kiterjesztett sorozat alsó és felső határértékét; ezek az $\overline{\mathbb{R}}$-beli elemek *függetlenek* a kiterjesztés választásától.

3.10.5. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ *tetszőleges* $\overline{\mathbb{R}}$*-ban haladó sorozat és* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *szigorúan monoton növő függvény, akkor*

$$\liminf(\mathbf{s}) \leq \liminf(\mathbf{s}\circ\sigma) \leq \limsup(\mathbf{s}\circ\sigma) \leq \limsup(\mathbf{s}).$$

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{(\mathbf{s}\circ\sigma)(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\} \subseteq \{\mathbf{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\},$$

hiszen $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq n$ esetén σ szigorú monoton növése miatt $\sigma(k) \geq \sigma(n) \geq n$. Ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\inf\{\mathbf{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\} \leq \inf\{(\mathbf{s}\circ\sigma)(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\} \leq \liminf(\mathbf{s}),$$

következésképpen $\liminf(\mathbf{s}\circ\sigma) \leq \liminf(\mathbf{s})$, továbbá

$$\limsup(\mathbf{s}\circ\sigma) \leq \sup\{(\mathbf{s}\circ\sigma)(k) | (k\in\mathbb{N})\wedge(k\geq n)\} \leq \sup\{\mathbf{s}(k) | (k\in\mathbb{N})\wedge(k\geq n)\},$$

következésképpen $\limsup(\mathbf{s}\circ\sigma) \leq \limsup(\mathbf{s})$. ■

Lehetséges, hogy az előző állításban felírt mindhárom egyenlőtlenség *szigorú*. Legyenek például $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ olyan számok, hogy $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$ teljesül, és értelmezzük azt az $\mathbf{s}$ valós sorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ és $j \in \{0,1,2,3\}$ esetén $\mathbf{s}(4k+j) := a_j$. Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(2n) := 8n+1$ és $\sigma(2n+1) := 8n+6$. Ekkor σ szigorúan monoton növő és az alsó és felső határértékek definíciója alapján könnyen belátható, hogy

$$\liminf(\mathbf{s}) = a_0 < a_1 = \liminf(\mathbf{s}\circ\sigma) < \limsup(\mathbf{s}\circ\sigma) = a_2 < a_3 = \limsup(\mathbf{s}).$$

3.10.6. Tétel. *Az* $\mathbf{s}$ *valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens* $\mathbb{R}$*-ben, ha* $\liminf(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}$ *és* $\limsup(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}$ *és* $\liminf(\mathbf{s}) = \limsup(\mathbf{s})$*. Ha az* $\mathbf{s}$ *valós számsorozat konvergens* $\mathbb{R}$*-ben, akkor* $\lim(\mathbf{s}) = \liminf(\mathbf{s}) = \limsup(\mathbf{s})$*.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{s}$ valós számsorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és legyen $x := \lim(\mathbf{s})$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, és vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$, $k > N$ esetén $|\mathbf{s}(k) - x| < \varepsilon$, vagyis $x - \varepsilon < \mathbf{s}(k) < x + \varepsilon$. Tehát ha $n > N$ tetszőleges természetes szám, akkor

$$-\infty < x - \varepsilon \leq \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}(k) \leq \liminf(\mathbf{s}) \leq \limsup(\mathbf{s}) \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}(k) \leq x + \varepsilon < +\infty.$$

Ebből következik, hogy $\liminf(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}$, $\limsup(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}$ és $|\limsup(\mathbf{s}) - \liminf(\mathbf{s})| \leq 2\cdot\varepsilon$. Ez utóbbi egyenlőtlenség minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számra igaz, ezért $\liminf(\mathbf{s}) = \limsup(\mathbf{s})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\liminf(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}$, $\limsup(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}$ és $\liminf(\mathbf{s}) = \limsup(\mathbf{s})$. Legyen $x := \liminf(\mathbf{s})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Ekkor $\liminf(\mathbf{s}) := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}(k)\right) > x - \varepsilon$, ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}(k) > x - \varepsilon$, így minden $k \geq n$ természetes számra $\mathbf{s}(k) > x - \varepsilon$. Ugyanakkor $\limsup(\mathbf{s}) := \inf_{m\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \mathbf{s}(k)\right) < x + \varepsilon$, ezért van olyan $m \in \mathbb{N}$, amelyre $\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \mathbf{s}(k) < x + \varepsilon$, így minden $k \geq m$ természetes számra $\mathbf{s}(k) < x + \varepsilon$. Ekkor $N := \max(m, n) \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k > N$ természetes számra $x - \varepsilon < \mathbf{s}(k) < x + \varepsilon$, vagyis $|\mathbf{s}(k) - x| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{s}$ valós számsorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és $\lim(\mathbf{s}) = \liminf(\mathbf{s}) = \limsup(\mathbf{s})$. ■

Az előző tétel alapján $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozatok konvergenciájának fogalmát a következőképpen adjuk meg.

3.10.7. Definíció. *Az* $\overline{\mathbb{R}}$*-ban haladó* $\mathbf{s}$ *sorozatot* **$\overline{\mathbb{R}}$-ban konvergensnek** *nevezzük, ha* $\liminf(\mathbf{s}) = \limsup(\mathbf{s})$ *teljesül, és ekkor ezt a közös értéket az* $\mathbf{s}$ *sorozat* **határértékének** *nevezzük* $\overline{\mathbb{R}}$*-ban, és szintén a* $\lim(\mathbf{s})$ *vagy* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{s}(n)$ *szimbólummal jelöljük.*

A 3.10.6. tételből és aa előző definícióból látszik, hogy ha $\mathbf{s}$ valós számsorozat, akkor $\mathbf{s}$ konvergenciája $\mathbb{R}$-ben ekvivalens azzal, hogy $\mathbf{s}$ konvergens $\overline{\mathbb{R}}$-ban és az $\overline{\mathbb{R}}$-beli határértéke véges (vagyis eleme $\mathbb{R}$-nek); továbbá, ha $\mathbf{s}$ konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor a határértékei $\mathbb{R}$-ben és $\overline{\mathbb{R}}$-ban egyenlők.

Továbbá, a 3.10.5. állítás alapján $\overline{\mathbb{R}}$-ben haladó sorozatokra is igaz, hogy $\overline{\mathbb{R}}$-ban konvergens sorozat minden részsorozata konvergens $\overline{\mathbb{R}}$-ban, és ugyanaz az $\overline{\mathbb{R}}$-beli határértéke, mint az eredeti sorozaté.

3.10.8. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ *olyan* $\overline{\mathbb{R}}$*-ban haladó sorozat, amely konvergens* $\overline{\mathbb{R}}$*-ban, akkor teljesülnek a következő állítások:*

$$\lim(\mathbf{s}) = +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall r \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})\ ((k > n) \;\Rightarrow\; \mathbf{s}(k) > r), \tag{1}$$
$$\lim(\mathbf{s}) = -\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall r \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})\ ((k > n) \;\Rightarrow\; \mathbf{s}(k) < r). \tag{2}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozat $\overline{\mathbb{R}}$-ban konvergens.

(I) Ha $\lim(\mathbf{s}) = +\infty$, akkor $\liminf(\mathbf{s}) = +\infty$, vagyis minden $r \in \mathbb{R}$ esetén $\liminf(\mathbf{s}) > r$, tehát létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\inf\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}(k) > r$, így minden $k > n$ természetes számra $\mathbf{s}(k) > r$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{s}$-re teljesül az (1) ekvivalencia jobb oldalán álló kijelentés. Legyen $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $k > n$ természetes számra $\mathbf{s}(k) > r$. Ekkor

$$\liminf(\mathbf{s}) \geq \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n+1} \mathbf{s}(k) \geq r,$$

vagyis a $\liminf(\mathbf{s}) \in \overline{\mathbb{R}}$ elem minden valós számnál nagyobb-egyenlő, így $\lim(\mathbf{s}) = \liminf(\mathbf{s}) = +\infty$.

(I) Ha $\lim(\mathbf{s}) = -\infty$, akkor $\limsup(\mathbf{s}) = -\infty$, vagyis minden $r \in \mathbb{R}$ esetén $\limsup(\mathbf{s}) < r$, tehát létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\sup\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}(k) < r$, így minden $k > n$ természetes számra $\mathbf{s}(k) < r$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{s}$-re teljesül a (2) ekvivalencia jobb oldalán álló kijelentés. Legyen $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $k > n$ természetes számra $\mathbf{s}(k) < r$. Ekkor

$$\limsup(\mathbf{s}) \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n+1} \mathbf{s}(k) \leq r,$$

vagyis a $\limsup(\mathbf{s}) \in \overline{\mathbb{R}}$ elem minden valós számnál kisebb-egyenlő, így $\lim(\mathbf{s}) = \limsup(\mathbf{s}) = -\infty$. ■

3.11. Műveletek $\overline{\mathbb{R}}$ felett

Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmaz felett nem adhatók meg olyan $+$ és $\cdot$ műveletek, amelyek a megfelelő $\mathbb{R}$ feletti műveletek kiterjesztései és amelyekkel $\overline{\mathbb{R}}$ test volna (**17**. és **25**. gyakorlat). Azonban bizonyos $\overline{\mathbb{R}}$-beli elempárokra értelmezzük az összeadást és a szorzást a következő módon:

– minden $x \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén:

$$x + (+\infty) := (+\infty) + x := +\infty, \text{ ha } x \neq -\infty,$$
$$x + (-\infty) := (-\infty) + x := -\infty, \text{ ha } x \neq +\infty.$$

– minden $x \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén:

$$x \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot x := \begin{cases} +\infty & \text{, ha } x > 0 \\ -\infty & \text{, ha } x < 0 \\ 0 & \text{, ha } x = 0, \end{cases}$$

$$x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := \begin{cases} -\infty & \text{, ha } x > 0 \\ +\infty & \text{, ha } x < 0 \\ 0 & \text{, ha } x = 0, \end{cases}.$$

Azonban a $(+\infty) + (-\infty)$ és $(-\infty) + (+\infty)$ értékeket nem értelmezzük.

Könnyen igazolható, hogy az összeadás az $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$ halmazon *asszociatív, kommutatív*, 0 a *neutrális eleme*, de $+\infty$-nek nincs additív inverze. Továbbá, az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon a szorzás *asszociatív, kommutatív*, 1 a *neutrális eleme*, de a 0, $+\infty$ és $-\infty$ elemeknek nincs multiplikatív inverze. Ha $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ és az $y + z$ és $x \cdot y + x \cdot z$ elemek értelmezve vannak, akkor fennáll az $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ egyenlőség. Azonban az $x := +\infty$, $y := 2$ és $z := -1$ értékek esete mutatja, hogy előfordulhat az, hogy $y + z$ létezik és $x \cdot (y + z) = +\infty$, azonban $x \cdot y = +\infty$ és $x \cdot z = -\infty$, így $x \cdot y + x \cdot z$ nem létezik, ezért a szorzás összeadásra vonatkozó disztributivitásával vigyázni kell!

Azonban nyilvánvaló, hogy $x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+$ esetén $x+y$ és $x \cdot y$ értelmezve van és $x+y,\ x \cdot y \in \overline{\mathbb{R}}_+$, ezért az $\overline{\mathbb{R}}_+$ halmazon az összeadás és szorzás asszociatív, kommutatív, neutrális elemes, és a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

3.12. $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban haladó összetett sorozatok alsó és felső határértéke

3.12.1. Definíció. *Ha* $\mathbf{s}$ *és* $\mathbf{s}'$ *tetszőleges* $\overline{\mathbb{R}}_+$*-ban haladó sorozatok, akkor* $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$ *és* $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'$ *azok az* $\overline{\mathbb{R}}_+$*-ban haladó sorozatok, amelyekre minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $(\mathbf{s} + \mathbf{s}')(n) := \mathbf{s}(n) + \mathbf{s}'(n)$ *és* $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}')(n) := \mathbf{s}(n) \cdot \mathbf{s}'(n)$.

3.12.2. Állítás. *Legyenek* $\mathbf{s}$ *és* $\mathbf{s}'$ *tetszőleges* $\overline{\mathbb{R}}_+$*-ban haladó sorozatok.*

a) *Fennállnak a*

$$\limsup(\mathbf{s}) + \liminf(\mathbf{s}') \le \limsup(\mathbf{s} + \mathbf{s}') \le \limsup(\mathbf{s}) + \limsup(\mathbf{s}'),$$
$$\liminf(\mathbf{s}) + \liminf(\mathbf{s}') \le \liminf(\mathbf{s} + \mathbf{s}') \le \liminf(\mathbf{s}) + \limsup(\mathbf{s}')$$

egyenlőtlenségek.

b) *Fennállnak a*

$$\limsup(\mathbf{s}) \cdot \liminf(\mathbf{s}') \le \limsup(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'),$$
$$\liminf(\mathbf{s}) \cdot \liminf(\mathbf{s}') \le \liminf(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}')$$

egyenlőtlenségek, és

– *ha a* $(\limsup(\mathbf{s}), \limsup(\mathbf{s}'))$ *pár nem egyenlő sem a* $(0, +\infty)$*, sem a* $(+\infty, 0)$ *párral, akkor*

$$\limsup(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}') \le \limsup(\mathbf{s}) \cdot \limsup(\mathbf{s}'),$$

– *ha a* $(\liminf(\mathbf{s}), \limsup(\mathbf{s}'))$ *pár nem egyenlő sem a* $(0, +\infty)$*, sem a* $(+\infty, 0)$ *párral, akkor*

$$\liminf(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}') \le \liminf(\mathbf{s}) \cdot \limsup(\mathbf{s}').$$

Bizonyítás. a) A $\limsup(\mathbf{s}+\mathbf{s}') \leq \limsup(\mathbf{s}) + \limsup(\mathbf{s}')$ egyenlőtlenség bizonyításhoz feltehető, hogy $\limsup(\mathbf{s}) < +\infty$ és $\limsup(\mathbf{s}') < +\infty$. Legyen C olyan valós szám, amelyre $\limsup(\mathbf{s})+\limsup(\mathbf{s}') < C$. Léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}$ számok, hogy $S+S' < C$, $\limsup(\mathbf{s}) < S$ és $\limsup(\mathbf{s}') < S'$. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $n' \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ számra, ha $k \geq n$, akkor $\mathbf{s}(k) < S$, és ha $k \geq n'$, akkor $\mathbf{s}'(k) < S'$. Világos, hogy minden $k \geq \max(n, n')$ természetes számra $(\mathbf{s}+\mathbf{s}')(k) = \mathbf{s}(k) + \mathbf{s}'(k) < S + S'$, így

$$\limsup(\mathbf{s}+\mathbf{s}') \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,n')} (\mathbf{s}(k)+\mathbf{s}'(k)) \leq S + S' < C,$$

amiből következik, hogy $\limsup(\mathbf{s}+\mathbf{s}') \leq \limsup(\mathbf{s}) + \limsup(\mathbf{s}')$.

A $\limsup(\mathbf{s}) + \liminf(\mathbf{s}') \leq \limsup(\mathbf{s}+\mathbf{s}')$ egyenlőtlenség bizonyításhoz feltehető, hogy $\limsup(\mathbf{s}) < +\infty$. Legyen C olyan valós szám, amelyre $C < \limsup(\mathbf{s}) + \liminf(\mathbf{s}')$. Léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}$ számok, hogy $C < S + S'$, $S < \limsup(\mathbf{s})$ és $S' < \liminf(\mathbf{s}')$. Ekkor $S' < \liminf(\mathbf{s}')$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq N$ természetes számra $S' < \mathbf{s}'(k)$. Ha $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor

$$S < \limsup(\mathbf{s}) \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,N)} \mathbf{s}(k),$$

tehát van olyan $k \geq \max(n, N)$ természetes szám, hogy $S < \mathbf{s}(k)$, és ekkor $S' < \mathbf{s}'(k)$ is igaz, így

$$S + S' < \mathbf{s}(k) + \mathbf{s}'(k) = (\mathbf{s}+\mathbf{s}')(k) \leq \sup_{j\in\mathbb{N},\ j\geq\max(n,N)} (\mathbf{s}+\mathbf{s}')(j) \leq \sup_{j\in\mathbb{N},\ j\geq n} (\mathbf{s}+\mathbf{s}')(j).$$

Ebből következik, hogy

$$C < S + S' \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{j\in\mathbb{N},\ j\geq n} (\mathbf{s}+\mathbf{s}')(j) \Big) = \limsup(\mathbf{s}+\mathbf{s}'),$$

ami maga után vonja, hogy $\limsup(\mathbf{s}) + \liminf(\mathbf{s}') \leq \limsup(\mathbf{s}+\mathbf{s}')$.

A $\liminf(\mathbf{s}+\mathbf{s}') \leq \liminf(\mathbf{s}) + \limsup(\mathbf{s}')$ egyenlőtlenség bizonyításhoz feltehető, hogy $\liminf(\mathbf{s}) < +\infty$ és $\limsup(\mathbf{s}') < +\infty$. Legyen C olyan valós szám, amelyre $\liminf(\mathbf{s}) + \limsup(\mathbf{s}') < C$. Léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}$ számok, hogy $S + S' < C$, $\liminf(\mathbf{s}) < S$ és $\limsup(\mathbf{s}') < S'$. Ekkor $\limsup(\mathbf{s}') < S'$ miatt van olyan $N' \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq N'$ természetes számra $S' < \mathbf{s}'(k)$. Ha $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor

$$S > \liminf(\mathbf{s}) \geq \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,N')} \mathbf{s}(k),$$

tehát van olyan $k \geq \max(n, N')$ természetes szám, hogy $S > \mathbf{s}(k)$, és ekkor $S' > \mathbf{s}'(k)$ is igaz, így

$$S + S' > \mathbf{s}(k) + \mathbf{s}'(k) = (\mathbf{s}+\mathbf{s}')(k) \geq \inf_{j\in\mathbb{N},\ j\geq\max(n,N')} (\mathbf{s}+\mathbf{s}')(j) \geq \inf_{j\in\mathbb{N},\ j\geq n} (\mathbf{s}+\mathbf{s}')(j).$$

Ebből következik, hogy

$$C > S + S' \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\inf_{j\in\mathbb{N},\ j\geq n} (\mathbf{s}+\mathbf{s}')(j) \Big) = \liminf(\mathbf{s}+\mathbf{s}'),$$

ami maga után vonja, hogy $\liminf(\mathbf{s}+\mathbf{s}') \leq \liminf(\mathbf{s}) + \limsup(\mathbf{s}')$.

A $\liminf(\mathbf{s}) + \liminf(\mathbf{s}') \leq \liminf(\mathbf{s}+\mathbf{s}')$ egyenlőtlenség bizonyításhoz feltehető, hogy $\liminf(\mathbf{s}) < +\infty$ és $\liminf(\mathbf{s}') < +\infty$. Legyen C olyan valós szám, amelyre $C <$

$\liminf(\mathbf{s})+\liminf(\mathbf{s}')$. Léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}$ számok, hogy $C < S+S'$, $S < \liminf(\mathbf{s})$ és $S' < \liminf(\mathbf{s}')$. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $n' \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ számra, ha $k \geq n$, akkor $\mathbf{s}(k) > S$, és ha $k \geq n'$, akkor $\mathbf{s}'(k) > S'$. Világos, hogy minden $k \geq \max(n, n')$ természetes számra $(\mathbf{s}+\mathbf{s}')(k) := \mathbf{s}(k) + \mathbf{s}'(k) > S + S'$, így

$$\liminf(\mathbf{s}+\mathbf{s}') \geq \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,n')} (\mathbf{s}(k)+\mathbf{s}'(k)) \geq S + S' > C,$$

amiből következik, hogy $\liminf(\mathbf{s}) + \liminf(\mathbf{s}') \leq \liminf(\mathbf{s}+\mathbf{s}')$.

b) A $\limsup(\mathbf{s}) \cdot \liminf(\mathbf{s}') \leq \limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')$ egyenlőtlenség bizonyításhoz feltehető, hogy $\limsup(\mathbf{s}) > 0$ és $\liminf(\mathbf{s}') > 0$. Legyen $C > 0$ olyan valós szám, amelyre $C < \limsup(\mathbf{s}) \cdot \liminf(\mathbf{s}')$. Léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}$ számok, hogy $C < S \cdot S'$, $S < \limsup(\mathbf{s})$ és $S' < \liminf(\mathbf{s}')$. Ekkor $S' < \liminf(\mathbf{s}')$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq N$ természetes számra $S' < \mathbf{s}'(k)$. Ha $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor

$$S < \limsup(\mathbf{s}) \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,N)} \mathbf{s}(k),$$

tehát van olyan $k \geq \max(n, N)$ természetes szám, hogy $S < \mathbf{s}(k)$, és ekkor $S' < \mathbf{s}'(k)$ is igaz, így

$$S \cdot S' < \mathbf{s}(k) \cdot \mathbf{s}'(k) = (\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')(k) \leq \sup_{j\in\mathbb{N},\ j\geq\max(n,N)} (\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')(j) \leq \sup_{j\in\mathbb{N},\ j\geq n} (\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')(j).$$

Ebből következik, hogy

$$C < S \cdot S' \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{j\in\mathbb{N},\ j\geq n} (\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')(j) \Big) = \limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}'),$$

amiből kapjuk, hogy $\limsup(\mathbf{s}) \cdot \liminf(\mathbf{s}') \leq \limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')$.

A $\liminf(\mathbf{s}) \cdot \liminf(\mathbf{s}') \leq \liminf(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')$ egyenlőtlenség bizonyításhoz feltehető, hogy $\limsup(\mathbf{s}) > 0$ és $\liminf(\mathbf{s}') > 0$. Legyen $C > 0$ olyan valós szám, amelyre $C < \liminf(\mathbf{s}) \cdot \liminf(\mathbf{s}')$. Léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}_+^*$ számok, hogy $C < S \cdot S'$, $S < \liminf(\mathbf{s})$ és $S' < \liminf(\mathbf{s}')$. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $n' \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ számra, ha $k \geq n$, akkor $\mathbf{s}(k) > S$, és ha $k \geq n'$, akkor $\mathbf{s}'(k) > S'$. Világos, hogy minden $k \geq \max(n, n')$ természetes számra $(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')(k) := \mathbf{s}(k) \cdot \mathbf{s}'(k) > S \cdot S'$, így

$$\liminf(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') \geq \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,n')} (\mathbf{s}(k)\cdot\mathbf{s}'(k)) \geq S \cdot S' > C,$$

amiből következik, hogy $\liminf(\mathbf{s}) \cdot \liminf(\mathbf{s}') \leq \liminf(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')$.

Megmutatjuk, hogy ha a $(\limsup(\mathbf{s}), \limsup(\mathbf{s}'))$ pár nem egyenlő sem a $(0, +\infty)$, sem a $(+\infty, 0)$ párral, akkor $\limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') \leq \limsup(\mathbf{s}) \cdot \limsup(\mathbf{s}')$. Ha $\limsup(\mathbf{s}) > 0$ és $\limsup(\mathbf{s}') = +\infty$, vagy $\limsup(\mathbf{s}) = +\infty$ és $\limsup(\mathbf{s}') > 0$, akkor az egyenlőtlenség jobb oldalán $+\infty$ áll, ezért elég arra az esetre bizonyítani, amikor $\limsup(\mathbf{s})$ és $\limsup(\mathbf{s}')$ mindketten végesek. Legyen $C > 0$ olyan valós szám, hogy $\limsup(\mathbf{s}) \cdot \limsup(\mathbf{s}') < C$. Ekkor léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}_+^*$ számok, hogy $S \cdot S' < C$, $\limsup(\mathbf{s}) < S$ és $\limsup(\mathbf{s}') < S'$. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $n' \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ számra, ha $k \geq n$, akkor $\mathbf{s}(k) < S$, és ha $k \geq n'$, akkor $\mathbf{s}'(k) < S'$. Világos, hogy minden $k \geq \max(n, n')$ természetes számra $(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')(k) = \mathbf{s}(k) \cdot \mathbf{s}'(k) < S \cdot S' < C$, így

$$\limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,n')} (\mathbf{s}(k)\cdot\mathbf{s}'(k)) \leq S \cdot S' < C,$$

amiből következik, hogy $\limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') \leq \limsup(\mathbf{s})\cdot\limsup(\mathbf{s}')$.

Megmutatjuk, hogy ha a $(\liminf(\mathbf{s}), \limsup(\mathbf{s}'))$ pár nem egyenlő sem a $(0, +\infty)$, sem a $(+\infty, 0)$ párral, akkor $\liminf(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') \leq \liminf(\mathbf{s})\cdot\limsup(\mathbf{s}')$. Ha $\liminf(\mathbf{s}) > 0$ és $\limsup(\mathbf{s}') = +\infty$, vagy $\liminf(\mathbf{s}) = +\infty$ és $\limsup(\mathbf{s}') > 0$, akkor az egyenlőtlenség jobb oldalán $+\infty$ áll, ezért elég arra az esetre bizonyítani, amikor $\liminf(\mathbf{s})$ és $\limsup(\mathbf{s}')$ mindketten végesek. Legyen $C > 0$ olyan valós szám, hogy $\liminf(\mathbf{s})\cdot\limsup(\mathbf{s}') < C$. Azt akarjuk igazolni, hogy $\liminf(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') \leq C$, ami az alsó határérték definíciója szerint azzal ekvivalens, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\inf\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}(\mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k)) \leq C$. Ennek bizonyításához legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzítve és C-hez vegyünk olyan $S, S' \in \mathbb{R}_+^*$ számokat, hogy $S\cdot S' < C$, $\liminf(\mathbf{s}) < S$ és $\limsup(\mathbf{s}') < S'$. Az utolsó egyenlőtlenség alapján vehetünk olyan $n' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $\sup\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n'} \mathbf{s}'(k) \leq S'$, tehát minden $k \geq n'$ természetes számra $\mathbf{s}'(k) < S$. Ugyanakkor, $\liminf(\mathbf{s}) < S$ miatt $\inf\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq\max(n,n')} \mathbf{s}(k) < S$, tehát van olyan $k_* \in \mathbb{N}$, hogy $k_* \geq \max(n, n')$ és $\mathbf{s}(k_*) < S$. Mivel $k_* \geq n'$, így $\mathbf{s}(k_*) < S$, tehát $\mathbf{s}(k_*)\cdot\mathbf{s}'(k_*) \leq S\cdot S' < C$, továbbá $k_* \geq n$, következésképpen $\inf\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}(\mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k)) \leq C$, amit bizonyítani kellett. ■

Ha $\mathbf{s}'$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat és $\mathbf{s}$ a $+\infty$ értékű konstans-sorozat (illetve $\mathbf{s}'$ a $+\infty$ értékű konstans-sorozat és $\mathbf{s}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat), akkor $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}'$ a $+\infty$ értékű konstans-sorozat, tehát $\limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') = +\infty$, ugyanakkor $\limsup(\mathbf{s})\cdot\lim(\mathbf{s}') = (+\infty)\cdot 0 = 0$ (illetve $\limsup(\mathbf{s})\cdot\lim(\mathbf{s}') = 0\cdot(+\infty) = 0$), vagyis

$$+\infty = \limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') > \limsup(\mathbf{s})\cdot\lim(\mathbf{s}') = 0.$$

Ezért az $\limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') \leq \limsup(\mathbf{s})\cdot\limsup(\mathbf{s}')$ egyenlőtlenség megsérülhet, amennyiben a $(\limsup(\mathbf{s}), \limsup(\mathbf{s}'))$ pár egyenlő a $(0, +\infty)$ vagy $(+\infty, 0)$ párral.

3.12.3. Következmény. *Ha* $\mathbf{s}$ *és* $\mathbf{s}'$ *olyan* $\overline{\mathbb{R}}_+$*-ban haladó sorozatok, hogy* $\mathbf{s}'$ *konvergens* $\overline{\mathbb{R}}$*-ban, akkor*

$$\limsup(\mathbf{s}+\mathbf{s}') = \limsup(\mathbf{s}) + \lim(\mathbf{s}'),$$

$$\liminf(\mathbf{s}+\mathbf{s}') = \liminf(\mathbf{s}) + \lim(\mathbf{s}'),$$

és ha még $0 < \lim(\mathbf{s}') < +\infty$ *is igaz, akkor*

$$\limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') = \limsup(\mathbf{s})\cdot\lim(\mathbf{s}'),$$

$$\liminf(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') = \liminf(\mathbf{s})\cdot\lim(\mathbf{s}').$$

Bizonyítás. Az $\mathbf{s}'$-ra vonatkozó feltevés alapján $\limsup(\mathbf{s}') = \liminf(\mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s}')$, tehát az előző állítás a) pontjából következik, hogy $\limsup(\mathbf{s}+\mathbf{s}') = \limsup(\mathbf{s}) + \lim(\mathbf{s}')$ és $\liminf(\mathbf{s}+\mathbf{s}') = \liminf(\mathbf{s}) + \lim(\mathbf{s}')$.

Ha még az is igaz, hogy $0 < \lim(\mathbf{s}') < +\infty$, akkor a $(\limsup(\mathbf{s}), \limsup(\mathbf{s}'))$ pár nem egyenlő sem a $(0, +\infty)$, sem a $(+\infty, 0)$ párral, így az előző állítás b) pontjából következik, hogy $\limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') = \limsup(\mathbf{s})\cdot\lim(\mathbf{s}')$ és $\liminf(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') = \liminf(\mathbf{s})\cdot\lim(\mathbf{s}')$. ■

Az előző következmény előtt álló példa mutatja, hogy a $\limsup(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') = \limsup(\mathbf{s})\cdot\lim(\mathbf{s}')$ és $\liminf(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}') = \liminf(\mathbf{s})\cdot\lim(\mathbf{s}')$ egyenlőségek nem igazak, ha $\lim(\mathbf{s}') = 0$ és $\limsup(\mathbf{s}) = +\infty = \liminf(\mathbf{s})$.

3.13. Sorozat torlódási pontjai

3.13.1. Definíció. *Az $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó* $\mathbf{s}$ *sorozat* **torlódási pontjának** *nevezünk minden olyan $x \in \overline{\mathbb{R}}$ elemet, amelyhez létezik olyan σ indexsorozat, hogy* $\mathbf{s} \circ \sigma$ *konvergens* $\overline{\mathbb{R}}$*-ban és* $x = \lim(\mathbf{s} \circ \sigma)$.

3.13.2. Állítás. *Legyen* $\mathbf{s}$ *valós számsorozat és K az* $\mathbf{s}$ *sorozat torlódási pontjainak halmaza. Ekkor* $\limsup(\mathbf{s})$ *a K halmaz legnagyobb és* $\liminf(\mathbf{s})$ *a K halmaz legkisebb eleme.*

Bizonyítás. Elegendő a $\limsup(\mathbf{s})$ esetét vizsgálni, mert erre a $\liminf(\mathbf{s})$ problémája visszavezethető, ha áttérünk az $\mathbf{s}$ sorozatról a $-\mathbf{s}$ sorozatra.

(I) Tegyük fel, hogy $\limsup(\mathbf{s}) = +\infty$. Ekkor a limesz szuperior definíciója szerint

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} \mathbf{s}(k) \Big) = +\infty,$$

így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} \mathbf{s}(k) = +\infty,$$

következésképpen bármely $\mathbb{R} \ni c$-hez van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $k \geq n$ és $c < \mathbf{s}(k)$. Ez azt jelenti, hogy teljesül a következő:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall c \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \wedge (c < \mathbf{s}(k))).$$

Legyen $\mathbf{c}$ tetszőleges olyan valós számsorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{c}(n) = +\infty$. Az előzőek alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $n+1$ természetes számhoz és a $c := \max(\mathbf{c}(n), \mathbf{s}(n))$ valós számhoz van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $k \geq n+1$ és $c < \mathbf{s}(k)$, vagyis

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : ((k > n) \wedge (\max(\mathbf{c}(n), \mathbf{s}(n)) < \mathbf{s}(k))),$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$(\forall n \in \mathbb{N}) :\ \{k \in \mathbb{N} \mid (k > n) \wedge (\max(\mathbf{c}(n), \mathbf{s}(n)) < \mathbf{s}(k))\} \neq \emptyset.$$

A természetes számok halmazának jólrendezettsége miatt jól értelmezett az az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(n) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (k > n) \wedge (\max(\mathbf{c}(n), \mathbf{s}(n)) < \mathbf{s}(k))\}.$$

Jelölje σ a 0 kezdőpont és az f függvény által meghatározott iterációs sorozatot, tehát $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre $\sigma(0) = 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sigma(n+1) = f(\sigma(n)) \in \{k \in \mathbb{N} \mid (k > \sigma(n)) \wedge (\max(\mathbf{c}(\sigma(n)), \mathbf{s}(\sigma(n))) < \mathbf{s}(k))\}.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\sigma(n+1) > \sigma(n)$, és $\mathbf{c}(\sigma(n)) < \mathbf{s}(\sigma(n+1))$, és $\mathbf{s}(\sigma(n)) < \mathbf{s}(\sigma(n+1))$. Ebből látható, hogy σ szigorúan monoton növő (tehát indexsorozat) és $\mathbf{s} \circ \sigma$ szigorúan monoton növő részsorozata $\mathbf{s}$-nek. Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{c}(\sigma(n)) < \mathbf{s}(\sigma(n+1))$, ezért $+\infty = \liminf(\mathbf{c}) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mathbf{s}(\sigma(n+1))$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}};\ n \mapsto \mathbf{s}(\sigma(n+1))$ sorozat $+\infty$-hez konvergál $\overline{\mathbb{R}}$-ban. Ebből következik, hogy $\mathbf{s} \circ \sigma$ is $+\infty$-hez konvergál $\overline{\mathbb{R}}$-ban, mert ha $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ számra $r < \mathbf{s}(\sigma(n+1))$; ekkor

$N+1 \in \mathbb{N}$ olyan szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n \geq N+1$, akkor $n-1 \geq N$, így $r < \mathbf{s}(\sigma((n-1)+1)) = \mathbf{s}(\sigma(n))$.

Ezért $+\infty = \limsup(\mathbf{s}) \in K$, vagyis $\limsup(\mathbf{s})$ a K halmaz legnagyobb eleme.

(II) Legyen most $-\infty < \limsup_{n\to\infty} \mathbf{s}(n) < +\infty$, és jelölje c a $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{s}(n)$ számot.

Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} \mathbf{s}(k) \Big) = \limsup_{n\to\infty} \mathbf{s}(n) < c + \varepsilon,$$

így van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} \mathbf{s}(k) < c+\varepsilon$, következésképpen minden $k \geq n$ természetes számra $\mathbf{s}(k) < c+\varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \Rightarrow (\mathbf{s}(k) < c+\varepsilon))$$

teljesül. Ugyanakkor, minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} \mathbf{s}(k) \Big) = \limsup_{n\to\infty} \mathbf{s}(n) > c - \varepsilon,$$

így minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} \mathbf{s}(k) > c-\varepsilon$, tehát van olyan $k \geq n$ természetes szám, amelyre $c_k > c-\varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \wedge (\mathbf{s}(k) > c-\varepsilon))$$

teljesül.

Rögzítsünk most egy tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Az előzőek alapján ekkor teljesülnek a

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \Rightarrow (\mathbf{s}(k) < c+\varepsilon_m)),$$
$$(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \wedge (\mathbf{s}(k) > c-\varepsilon_m))$$

kijelentések. Az első állítás és a természetes számok halmazának jólrendezettsége miatt jól értelmezett az az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(m) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid (\forall k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \Rightarrow (\mathbf{s}(k) < c+\varepsilon_m))\}.$$

Ezért a második állítás és a természetes számok halmazának jólrendezettsége miatt jól értelmezett az a $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre minden $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ esetén

$$g(m,n) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (k \geq \max(f(m), n+1)) \wedge (\mathbf{s}(k) > c-\varepsilon_m)\}.$$

Jelölje σ a 0 kezdőpont és a g függvény által egyszerű rekurzióval meghatározott $\mathbb{N}$-ben haladó sorozatot. Ekkor $m \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(m+1) = g(m, \sigma(m)) \geq \max(f(m), \sigma(m)+1) > \sigma(m)$, amiből látható, hogy σ szigorúan monoton növő (tehát indexsorozat). Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\sigma(m+1) \in \{k \in \mathbb{N} \mid (k \geq \max(f(m), \sigma(m)+1)) \wedge (\mathbf{s}(k) > c-\varepsilon_m)\}$, így $\mathbf{s}(\sigma(m+1)) > c-\varepsilon_m$, valamint $\sigma(m+1) \geq f(m)$, így $\mathbf{s}(\sigma(m+1)) < c+\varepsilon_m$. Ez azt jelenti, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $|\mathbf{s}(\sigma(m+1)) - c| < \varepsilon_m$, ezért az $(\mathbf{s}(\sigma(m)))_{m\in\mathbb{N}}$ részsorozat konvergens és a határértéke egyenlő c-vel, tehát $c \in K$.

Még be kell látni, hogy c felső korlátja K-nak. Ehhez legyen $x \in K$ és rögzítsünk olyan σ indexsorozatot, amelyre $\lim_{m\to\infty} \mathbf{s}(\sigma(m)) = x$. Legyen $c' \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, amelyre $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{s}(n) < c'$. A felső határérték értelmezése alapján ekkor vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $k \geq n$ természetes számra $\mathbf{s}(k) < c'$. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq n$, akkor $\sigma(k) \geq k \geq n$, így $\mathbf{s}(\sigma(k)) < c'$. Ebből következik, hogy $x = \lim_{m\to\infty} \mathbf{s}(\sigma(m)) \leq c'$. Ezzel igazoltuk, hogy $x \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{s}(n) = c$.

(III) Végül, ha $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{s}(n) = -\infty$, akkor $\liminf_{n\to\infty} \mathbf{s}(n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{s}(n)$ miatt $\liminf_{n\to\infty} \mathbf{s}(n) = \limsup_{n\to\infty} \mathbf{s}(n) = -\infty$, így az $(\mathbf{s}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\overline{\mathbb{R}}$-ban, tehát $K = \{-\infty\}$, vagyis $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{s}(n)$ a K halmaz legnagyobb eleme. ■

3.13.3. Állítás. *Legyen* $\mathbf{s}$ *valós számsorozat, és* $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *indexsorozatok olyan véges rendszere, hogy minden* $\lambda \in \Lambda$ *esetén az* $\mathbf{s} \circ \sigma_\lambda$ *részsorozat* $\overline{\mathbb{R}}$*-ban konvergens és*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Im}\,(\sigma_\lambda) = \mathbb{N}$$

teljesül. Legyen $K := \{\lim(\mathbf{s} \circ \sigma_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$*, ahol a határértéket* $\overline{\mathbb{R}}$*-ban kell venni. Ekkor* $\limsup(\mathbf{s})$ *a* K *halmaz legnagyobb és* $\liminf(\mathbf{s})$ *a* K *halmaz legkisebb eleme.*

Bizonyítás. Az előző állítás alapján elég azt igazolni, hogy ha σ olyan indexsorozat, amelyre $\mathbf{s} \circ \sigma$ konvergens $\overline{\mathbb{R}}$-ban, akkor $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) \in K$ (vagyis K egyenlő az $\mathbf{s}$ sorozat torlódási pontjainak halmazával). A hipotézis szerint

$$\mathrm{Im}(\sigma) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (\mathrm{Im}(\sigma) \cap \mathrm{Im}\,(\sigma_\lambda)),$$

így a Λ halmaz végessége és az $\mathrm{Im}(\sigma)$ halmaz végtelensége miatt van olyan $\lambda \in \Lambda$, hogy az $\mathrm{Im}(\sigma) \cap \mathrm{Im}\,(\sigma_\lambda)$ halmaz végtelen. Rögzítünk ilyen $\lambda \in \Lambda$ indexet.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $k \in \mathrm{Im}(\sigma) \cap \mathrm{Im}\,(\sigma_\lambda)$, hogy $n < k$, ezért jól értelmezett az

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \min\{\, k \in \mathrm{Im}(\sigma) \cap \mathrm{Im}\,(\sigma_\lambda) \mid n < k \,\}$$

függvény. Jelölje σ_* a $\min\{\, k \in \mathrm{Im}(\sigma) \cap \mathrm{Im}\,(\sigma_\lambda) \mid 0 < k \,\}$ kezdőpont és f függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma_*(n+1) = f(\sigma_*(n)) \in \{\, k \in \mathrm{Im}(\sigma) \cap \mathrm{Im}\,(\sigma_\lambda) \mid \sigma_*(n) < k \,\}$, tehát $\sigma_*(n) < \sigma_*(n+1)$, vagyis σ_* indexsorozat. Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma_*(n) \in \mathrm{Im}(\sigma) \cap \mathrm{Im}\,(\sigma_\lambda)$, vagyis $\mathrm{Im}(\sigma_*) \subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$ és $\mathrm{Im}(\sigma_*) \subseteq \mathrm{Im}(\sigma_\lambda)$. Értelmezzük a

$$\sigma' := \sigma^{-1} \circ \sigma_* : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$
$$\sigma'' := \sigma_\lambda^{-1} \circ \sigma_* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

függvényeket. Ekkor σ' és σ'' olyan indexsorozatok, hogy hogy $\sigma \circ \sigma' = \sigma_\lambda \circ \sigma''$, ezért

$$\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) = \lim(\mathbf{s} \circ \sigma \circ \sigma') = \lim(\mathbf{s} \circ \sigma_\lambda \circ \sigma'') = \lim(\mathbf{s} \circ \sigma_\lambda) \in K. \ ■$$

3.14. Középsorozatok konvergenciája

3.14.1. Állítás. *Legyen* $((\lambda_{n,k})_{k\in n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan sorozat, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $(\lambda_{n,k})_{k\in n+1}$ *olyan rendszer a* $[0,1]$ *valós intervallumban, hogy* $\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} = 1$*. Tegyük fel,* *hogy minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,k} = 0$. *Ekkor minden* $\mathbb{K}$*-ban haladó* $\mathbf{s}$ *sorozatra teljesül az, hogy ha* $\mathbf{s}$ *konvergens, akkor a*

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathbf{s}(k)$$

sorozat is konvergens $\mathbb{K}$*-ban, és*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathbf{s}(k) = \lim(\mathbf{s}).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\mathbb{K}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozat konvergens. Ekkor $\mathbf{s}$ korlátos, így vehetünk olyan $M \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $|\mathbf{s}(k)| \le M$ teljesül.

Legyen most $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve, és először vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k \in \mathbb{N}$ és $k > N'$ esetén $|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon/2$. Mivel a hipotézis szerint minden $k \le N'$ természetes számra $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,k} = 0$, így vehetünk olyan $(N'_k)_{k\in N'+1}$ rendszert $\mathbb{N}$-ben, hogy minden $k \le N'$ és $n > N'_k$ természetes számra $\lambda_{n,k} < \dfrac{\varepsilon}{2(N'+1)(M + |\lim(\mathbf{s})|)}$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > \max\left(N', \max_{k\in N'+1} N'_k\right)$. Ekkor

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})\right| \overset{(1)}{=} \left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathbf{s}(k) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\lim(\mathbf{s})\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})| = \sum_{k=0}^{N'} \lambda_{n,k}|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})| + \sum_{k=N'+1}^{n} \lambda_{n,k}|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})| \overset{(2)}{\le}$$

$$\overset{(2)}{\le} \sum_{k=0}^{N'} \frac{\varepsilon|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})|}{2(N'+1)(M + |\lim(\mathbf{s})|)} + \sum_{k=N'+1}^{n} \lambda_{n,k}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \overset{(3)}{\le} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol

– az $\overset{(1)}{=}$ egyenlőségnél azt használtuk fel, hogy $\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} = 1$;

– a $\overset{(2)}{\le}$ egyenlőtlenségnél felhasználtuk azt, hogy minden $k \le N'$ természetes számra $n > N'_k$ miatt $\lambda_{n,k} < \dfrac{\varepsilon}{2(N'+1)(M + |\lim(\mathbf{s})|)}$, ezért

$$\sum_{k=0}^{N'} \lambda_{n,k}|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})| \le \sum_{k=0}^{N'} \frac{\varepsilon|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})|}{2(N'+1)(M + |\lim(\mathbf{s})|)},$$

valamint $n > N'$ miatt $|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})| < \varepsilon/2$, így

$$\sum_{k=N'+1}^{n} \lambda_{n,k}|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})| \le \sum_{k=N'+1}^{n} \lambda_{n,k}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right);$$

– a $\overset{(3)}{\le}$ egyenlőtlenségnél felhasználtuk azt, hogy minden $k \le N'$ természetes számra $|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})| \le |\mathbf{s}(k)| + |\lim(s)| \le M + |\lim(\mathbf{s})|$, ezért

$$\sum_{k=0}^{N'} \frac{\varepsilon|\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})|}{2(N'+1)(M + |\lim(\mathbf{s})|)} \le \sum_{k=0}^{N'} \frac{\varepsilon}{2(N'+1)} = \frac{\varepsilon}{2},$$

továbbá

$$\sum_{k=N'+1}^{n} \lambda_{n,k} \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} = 1$$

teljesül.

Tehát $N := \max\left(N', \max_{k \in N'+1} N'_k\right) \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $\left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathbf{s}(k) - \lim(\mathbf{s})\right| \leq \varepsilon$, így az $\mathbb{N} \to \mathbb{K};\ n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathbf{s}(k)$ sorozat konvergens $\mathbb{K}$-ban, és fennáll a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathbf{s}(k) = \lim(\mathbf{s})$ egyenlőség. ■

3.14.2. Következmény. *Ha a $\mathbb{K}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozat konvergens, akkor az*

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k)$$

aritmetikai középsorozat is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k) = \lim(\mathbf{s}).$$

Bizonyítás. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ esetén $\lambda_{n,k} := \frac{1}{n+1}$, akkor a $((\lambda_{n,k})_{k \in n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra teljesülnek a 3.14.1. állítás feltételei, és természetesen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\mathbf{s}(k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k),$$

így az állítás azonnal következik 3.14.1.-ből. ■

3.14.3. Következmény. *Ha az $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor az*

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k)}$$

geometriai középsorozat, és az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \frac{n+1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{s}(k)}}$$

harmonikus középsorozat is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{s}(k)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k) = \lim(\mathbf{s}).$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$0 < \frac{n+1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{s}(k)}} \leq \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k)} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k)$$

teljesül. Ebből, és a 3.14.2. állításból látható, hogy az állítás igaz, ha $\lim(\mathbf{s}) = 0$. Tegyük fel, hogy $\lim(\mathbf{s}) > 0$. Ekkor az $1/\mathbf{s}$ sorozat konvergens, és $\lim(1/\mathbf{s}) = 1/\lim(\mathbf{s})$, tehát ismét a 3.14.2. állítást alkalmazva $\mathbf{s}$ helyett az $1/\mathbf{s}$ sorozatra kapjuk, hogy az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{s}(k)}$$

sorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{s}(k)} = \frac{1}{\lim(\mathbf{s})}.$$

Ebből következik, hogy a

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \frac{n+1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{s}(k)}}$$

harmonikus középsorozat is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathbf{s}(k)}} = \lim(\mathbf{s})$$

teljesül, így a közrefogási elv alapján kapjuk, hogy az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k)}$$

geometriai középsorozat is konvergens, és fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k)} = \lim(\mathbf{s})$$

egyenlőség is. ■

3.14.4. Következmény. **(Stolcz-tétel.)** *Legyen* $\mathbf{a}$ *olyan* $\mathbb{K}$*-ban haladó és* $\mathbf{b}$ *olyan* $\mathbb{R}^*$*-ban haladó, szigorúan monoton növő számsorozat, hogy* $\lim(\mathbf{b}) = +\infty$*, és az*

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \frac{\mathbf{a}(n+1) - \mathbf{a}(n)}{\mathbf{b}(n+1) - \mathbf{b}(n)}$$

sorozat konvergens $\mathbb{K}$*-ban. Ekkor az*

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \frac{\mathbf{a}(n)}{\mathbf{b}(n)}$$

sorozat is konvergens $\mathbb{K}$*-ban, és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{a}(n+1) - \mathbf{a}(n)}{\mathbf{b}(n+1) - \mathbf{b}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{a}(n)}{\mathbf{b}(n)}.$$

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\mathbf{a}(n+1)}{\mathbf{b}(n+1)} = \frac{\mathbf{a}(0) + \sum_{k=0}^{n} (\mathbf{b}(k+1) - \mathbf{b}(k)) \left(\frac{\mathbf{a}(k+1) - \mathbf{a}(k)}{\mathbf{b}(k+1) - \mathbf{b}(k)} \right)}{\mathbf{b}(0) + \sum_{k=0}^{n} (\mathbf{b}(k+1) - \mathbf{b}(k))} =$$

$$= \frac{\frac{\mathbf{a}(0)}{\mathbf{b}(n+1) - \mathbf{b}(0)} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \left(\frac{\mathbf{a}(k+1) - \mathbf{a}(k)}{\mathbf{b}(k+1) - \mathbf{b}(k)} \right)}{\frac{\mathbf{b}(0)}{\mathbf{b}(n+1) - \mathbf{b}(0)} + 1}$$

teljesül, ahol minden $k \leq n$ természetes számra

$$\lambda_{n,k} := \frac{\mathbf{b}(k+1) - \mathbf{b}(k)}{\sum_{j=0}^{n} (\mathbf{b}(j+1) - \mathbf{b}(j))} \in [0, 1].$$

Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} = 1$, továbbá minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \leq n$, akkor

$$\lambda_{n,k} = \frac{\mathbf{b}(k+1) - \mathbf{b}(k)}{\mathbf{b}(n+1) - \mathbf{b}(0)},$$

tehát minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\lim_{n \to \infty} \lambda_{n,k} = 0$. Ezért 3.14.1. alapján az állítás igaz. ■

3.15. Speciális konvergens számsorozatok

3.15.1. Állítás. *Minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^m} = 0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[m]{n}}.$$

Bizonyítás. Legyen $m \in \mathbb{N}^*$ rögzítve. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, akkor $\mathbb{R}$ archimédészi rendezettsége folytán létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $N \geq \frac{1}{\varepsilon^m}$, és ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra, $n > N$ esetén $n > \frac{1}{\varepsilon^m}$, így 1.2.4. alapján $\sqrt[m]{n} > \sqrt[m]{\frac{1}{\varepsilon^m}} = \frac{1}{\varepsilon}$, vagyis $\frac{1}{\sqrt[m]{n}} < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = 0.$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n^m \geq n$, így 1.2.4. alapján $n = \sqrt[m]{n^m} \geq \sqrt[m]{n}$, következésképpen

$$0 < \frac{1}{n^m} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[m]{n}},$$

tehát az előzőek és a közrefogási elv alapján

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^m} = 0$$

is teljesül. ■

3.15.2. Állítás. *Minden $q \in \mathbb{R}_+^*$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} q^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (n+c)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1,$$

továbbá miden $z \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|z| < 1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0,$$

és $|z| > 1$ esetén a $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos.

Bizonyítás. Legyen $q \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített, és először tegyük fel, hogy $q \geq 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $q^{1/n} \geq 1$, és ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, akkor az $\mathbb{R}$ archimédészi rendezettsége folytán van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $(q-1)/\varepsilon \leq N$, és akkor minden $n > N$ természetes számra az elemi Bernoulli-egyenlőtlenség alapján $q < 1 + n \cdot \varepsilon \leq (1+\varepsilon)^n$, azaz

$$1 - \varepsilon < 1 \leq q^{1/n} < 1 + \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $q \geq 1$ valós számra $\lim\limits_{n\to\infty} q^{1/n} = 1$.

Ugyanezt az eredmény megkaphatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával is. Ugyanis $n \in \mathbb{N}^*$ esetén bevezetjük azt a $(q_k)_{k\in n}$ rendszert, amelyre minden $k < n$ természetes számra

$$q_k := \begin{cases} q & \text{, ha } k = 0, \\ 1 & \text{, ha } 0 < k < n, \end{cases}$$

és alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a $(q_k)_{k\in n}$ rendszerre. Azt kapjuk, hogy $q \geq 1$ miatt

$$1 \leq q^{1/n} = \left(\mathop{\mathrm{P}}\limits_{k=0}^{n-1} q_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q_k = \frac{1}{n}(q + (n-1)\cdot 1) = 1 + \frac{q-1}{n},$$

ezért ismét $\lim\limits_{n\to\infty} q^{1/n} = 1$ adódik.

Ha $q \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $q < 1$, akkor $q^{-1} > 1$, tehát az előzőek szerint $\lim\limits_{n\to\infty} (q^{-1})^{1/n} = 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} q^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q^{-1})^{1/n}} = 1.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. A binomiális tétel alapján minden $n > 1$ természetes számra

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + \binom{n}{1}\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2,$$

következésképpen

$$n > \frac{2}{\varepsilon^2}$$

esetén $(1+\varepsilon)^n \geq n(1+\varepsilon) > n$, tehát $1 + \varepsilon > n^{1/n} \geq 1 > 1 - \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Megjegyezzük, hogy ez az összefüggés is igazolható a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával. Ugyanis $n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$ esetén bevezetjük azt az $(x_k)_{k \in n}$ rendszert, amelyre minden $k < n$ természetes számra

$$x_k := \begin{cases} \sqrt{n} & \text{, ha } k = 0 \text{ vagy } k = 1, \\ 1 & \text{, ha } 1 < k < n, \end{cases}$$

és alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a $(x_k)_{k \in n}$ rendszerre. Azt kapjuk, hogy

$$1 \leq n^{1/n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} x_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + (n-2) \cdot 1) = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n},$$

ezért ismét $\lim\limits_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$ adódik.

Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor minden $n > \max(c, -2c)$ természetes számra

$$\frac{n^{1/n}}{2^{1/n}} \leq \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{1/n} n^{1/n} = (n + c)^{1/n} \leq (2n)^{1/n} = 2^{1/n} n^{1/n},$$

tehát az előzőek és a közrefogási elv következtében

$$\lim_{n \to \infty} (n + c)^{1/n} = 1.$$

Most megmutatjuk, hogy $z \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|z| < 1$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} z^n = 0,$$

és $|z| > 1$ esetén a $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos.

Tegyük fel, hogy $z \in \mathbb{K}$ és $|z| < 1$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor az (I) szerint $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon^{1/n} = 1$, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n > N$ természetes számra $|z| < \varepsilon^{1/n}$, vagyis

$$-\varepsilon < 0 \leq |z^n| = |z|^n < \varepsilon,$$

így $\lim\limits_{n \to \infty} z^n = 0$.

Legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $|z| > 1$. Ekkor van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $|z| > 1 + \varepsilon$, így az elemi Bernoulli-egyenlőtlenség alapján minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$|z^n| = |z|^n > (1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n \cdot \varepsilon,$$

amiből következik, hogy a $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos, hiszen az $(1 + n \cdot \varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$ valós sorozat az $\mathbb{R}$ archimédészi rendezettsége folytán nem korlátos. ■

3.15.3. Állítás. *Fennáll a*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$(n!)^2 = \left(\prod_{k=1}^{n} k \right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} (n - k) \right) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (k + 1) \right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} (n - k) \right) = \prod_{k=0}^{n-1} ((k + 1)(n - k)).$$

Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, minden $0 < k < n$ természetes számra

$$(k+1)(n-k) - n = k(n-1-k) \geq 0,$$

vagyis $(k+1)(n-k) \geq n$, ezért

$$(n!)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} ((k+1)(n-k)) \geq \prod_{k=0}^{n-1} n = n^n,$$

amiből következik, hogy $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$, így $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. ■

3.15.4. Állítás. *Minden $x \geq 0$ valós számra a*

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozatok monoton növők, korlátosak, és a határértékük egyenlő.

Bizonyítás. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy $x \in \mathbb{R}_+$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left(\frac{1}{n+1}\cdot\left(n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)+1\right)\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1},$$

tehát az $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat monoton növő.

Ismét a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy $x \in \mathbb{R}_+$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{n+[x]+1}\cdot\left(n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)+([x]+1)\cdot\left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)\right)\right)^{n+[x]+1} = 1,$$

ezért

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{\left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1}},$$

vagyis az $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat korlátos.

Tehát az

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

rendszer monoton növő és felülről korlátos, így konvergens $\mathbb{R}$-ben.

Ha $x \in \mathbb{R}_+$ és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor a binomiális tétel alapján

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} c_n(k)\cdot\frac{x^k}{k!},$$

ahol $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ esetén

$$c_n(k) := 1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right),$$

amiből a Bernoulli-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy ha $n > 1$, akkor

$$0 \le \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le \frac{x^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!}.$$

Ezért a közrefogási elv alapján elég azt igazolni, hogy minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat *felülről korlátos.*

Ennek bizonyításához legyen $x \in \mathbb{R}_+$ rögzített, és rögzítsünk olyan $q \in \mathbb{R}_+^*$ valós számot, amelyre $qx < 1$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0$, így q-hoz vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $k > N$ esetén $\dfrac{1}{k!} < q^k$, tehát minden $n > N$ természetes számra

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{x^k}{k!} \le \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} (qx)^k \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} (qx)^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{1 - (qx)^{n+1}}{1 - qx} < \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{1 - qx}.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$C := \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{1 - qx}$$

számra teljesül az, hogy *minden* $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \le \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \le C$. ■

Most bebizonyítunk egy olyan egyenlőséget, amelyet majd az elemi analitikus függvények differenciálásánál alkalmazunk (**ANA** 3.5.2.).

3.15.5. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ *tetszőleges* $\mathbb{K}$*-ban haladó sorozat, akkor minden* $m \in \mathbb{Z}$ *egész számra*

$$\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k+m)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k}.$$

Bizonyítás. Legyen $C > 0$ olyan valós szám, hogy $\limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} < C$. Ekkor vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\ge n} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} < C,$$

ezért minden $k \ge n$ természetes számra $|\mathbf{s}(k)| < C^k$. Ez azt jelenti, hogy $k \in \mathbb{N}$ és $k \ge n - m$ esetén $|\mathbf{s}(k+m)| < C^{k+m}$, vagyis

$$|\mathbf{s}(k+m)|^{1/k} \le C\,(C^m)^{1/k},$$

amiből 3.15.2. és 3.10.6. alapján következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k+m)|^{1/k} \le \limsup_{k\to\infty} \left(C\,(C^m)^{1/k}\right) = C \lim_{k\to\infty} (C^m)^{1/k} = C.$$

Ebből következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k+m)|^{1/k} \le \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k}.$$

Megfordítva, legyen $C > 0$ olyan valós szám, hogy $\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k+m)|^{1/k} < C$. Ekkor vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $n \ge -m$ és

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\ge n} |\mathbf{s}(k+m)|^{1/k} < C,$$

tehát minden $k \ge n$ természetes számra $|\mathbf{s}(k+m)| < C^k$. Ez azt jelenti, hogy $k \in \mathbb{N}$ és $k \ge n$ esetén $|\mathbf{s}(k)| < C^{k-m}$, vagyis

$$|\mathbf{s}(k)|^{1/k} \le C\left(\frac{1}{C^m}\right)^{1/k},$$

amiből 3.15.2. és 3.10.6. alapján következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \le \limsup_{k\to\infty}\left(C\left(\frac{1}{C^m}\right)^{1/k}\right) = C\lim_{k\to\infty}(C^m)^{1/k} = C.$$

Ebből következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \le \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k+m)|^{1/k}$$

teljesül. ■

Az előző állítás alkalmazásaként bebizonyítunk egy olyan egyenlőséget, amelyet majd a normált algebrák elméletében alkalmazunk (**ALN** 2.3.2.).

3.15.6. Állítás. *Legyen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszer, amelyre minden $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén $c_{m+n} \le c_m \cdot c_n$. Ekkor a $({c_n}^{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ valós sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} {c_n}^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} {c_n}^{1/n}.$$

Bizonyítás. Elég arra az esetre bizonyítani, amikor minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $c_n > 0$. Legyen $c_0 := 1$; ekkor minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $c_{m+n} \le c_m \cdot c_n$. Világos, hogy ekkor minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$c_{k\cdot n} \le c_n^k,$$

mert rögzített n esetén ez a $k := 0$ számra triviálisan igaz, és ha teljesül az $k \in \mathbb{N}$ számra akkor

$$c_{(k+1)\cdot n} = c_{k\cdot n+n} \le c_{k\cdot n}\cdot c_n \le c_n^k \cdot c_n = c_n^{k+1},$$

tehát az egyenlőtlenség a $k+1$ számra is igaz.

Euklidészi maradékos osztást (**ENS** 3.11.8.) végrehajtva: minden $m, n \in \mathbb{N}^*$ számhoz egyértelműen léteznek olyan $q(m,n), p(m,n) \in \mathbb{N}$ számok, hogy $m = p(m,n)\cdot n + q(m,n)$ és $q(m,n) < n$. Ezért minden $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$c_m \le c_{p(m,n)\cdot n}\cdot c_{q(m,n)} \le c_n^{p(m,n)}\cdot c_{q(m,n)}$$

teljesül, továbbá

$$\frac{1}{n} = \frac{p(m,n)}{m} + \frac{q(m,n)}{m\cdot n},$$

következésképpen fennáll a

$$c_m{}^{1/m} \leq c_n{}^{1/n} \cdot \left(\frac{\max\limits_{1\leq k<n} c_k}{\min\limits_{1\leq k<n} c_k^{k/n}} \right)^{1/m}$$

egyenlőtlenség. Ebből kapjuk, hogy

$$\limsup_{m\to\infty} c_m{}^{1/m} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}^*} c_n{}^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} c_n{}^{1/n}.$$

Ebből 3.10.6. alkalmazásával kapjuk az állítást. ■

3.16. Gyakorlatok

1. Egy $\mathbf{s}$ valós sorozatot *Fibonacci-sorozatnak* nevezünk, ha minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\mathbf{s}(n+2) = \mathbf{s}(n+1) + \mathbf{s}(n)$ teljesül. Ha $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ Fibonacci-sorozatok, valamint $c \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbf{s}+\mathbf{s}'$ és $c\cdot\mathbf{s}$ is Fibonacci-sorozatok. Ha $x \in \mathbb{R}_+^*$, akkor az $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor Fibonacci-sorozat, ha x egyenlő az

$$x_\pm := \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

számok valamelyikével. Minden $\mathbf{s}$ Fibonacci-sorozathoz egyértelműen léteznek olyan $c_+, c_- \in \mathbb{R}$ számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) = c_+ \cdot x_+^n + c_- \cdot x_-^n$ teljesül. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül az, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\left(\frac{a\sqrt{5}-b}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{a\sqrt{5}+b}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \in \mathbb{Z}.$$

(*Útmutatás.* Ha Fib jelöli a valós Fibonacci-sorozatok vektorterét, akkor a

$$\mathrm{Fib} \to \mathbb{R}^2; \quad \mathbf{s} \mapsto (\mathbf{s}(0), \mathbf{s}(1))$$

leképezés lineáris bijekció, továbbá az $(x_+^n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(x_-^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok lineárisan függetlenek a Fib vektortérben, tehát bázist alkotnak.)

2. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Ekkor végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül az, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ számra, ha $n \leq m$, akkor $x_m \leq x_n$ (vagyis az $\{n \in \mathbb{N} | (\forall m \in \mathbb{N})((n \leq m) \Rightarrow (x_m \leq x_n))\}$ halmaz végtelen).

3. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Ekkor végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül az, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ számra, ha $m \leq n$, akkor $x_n \leq x_m$ (vagyis az $\{n \in \mathbb{N} | (\forall m \in \mathbb{N})((m \leq n) \Rightarrow (x_n \leq x_m))\}$ halmaz végtelen).

4. Egy számsorozat konvergens részsorozatainak határértékeit a sorozat *torlódási pontjainak* nevezzük. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat, és $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $x_{n+1} \geq x_n - \varepsilon_n$. Legyen

$a := \liminf_{n\to\infty} x_n$, $b := \limsup_{n\to\infty} x_n$, és tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat torlódási pontjainak halmaza egyenlő az $[a, b]$ intervallummal.

5. Tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}_+$ esetén iterációval értelmezzük azt az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Mutassuk meg, hogy ez a sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és számítsuk ki a határértékét!

(*Útmutatás.* Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $x := \lim_{n\to\infty} x_n$, akkor $x \geq 0$ és $x^2 = x+2$, vagyis $x = 2$. Tehát csak azt kell igazolni, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n - x_{n+1} = \sqrt{x_n^2} - \sqrt{x_n + 2} = \frac{x_n^2 - x_n + 2}{x_n + \sqrt{x_n + 2}} = \frac{(x_n - 2)(x_n + 1)}{x_n + \sqrt{x_n + 2}},$$

amiből következik, hogy

– ha $x_0 > 2$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n > 2$ és az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyó, tehát konvergens;

– ha $x_0 < 2$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n < 2$ és az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növő, tehát konvergens;

– ha $x_0 = 2$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n = 2$, tehát az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens.)

6. Legyenek x_0 és y_0 olyan valós számok, hogy $0 < y_0 \leq x_0$. Mutassuk meg, hogy egyértelműen léteznek olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}; \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}.$$

Igazoljuk, hogy ezek a valós sorozatok konvergensek, és a határértékeik egyenlők. (Ezt a közös határértéket nevezzük az x_0 és y_0 számok *számtani-mértani közepének.*)

(*Útmutatás.* Teljes indukcióval belátható, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyó és az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növő, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 \leq x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{4 \cdot (x_{n+1} + y_{n+1})}$$

teljesül.)

7. Legyen $\mathbf{s}$ tetszőleges $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozat.

- Az $x \in \overline{\mathbb{R}}$ elem pontosan akkor egyenlő $\limsup(\mathbf{s})$-sel, ha minden $c \in \mathbb{R}$ számra, $c < x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} | c < \mathbf{s}(n)\}$ halmaz *végtelen*, és minden $c \in \mathbb{R}$ számra, $c > x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} | c < \mathbf{s}(n)\}$ halmaz *véges.*

- Az $x \in \overline{\mathbb{R}}$ elem pontosan akkor egyenlő $\liminf(\mathbf{s})$-sel, ha minden $c \in \mathbb{R}$ számra, $c < x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} | \mathbf{s}(n) < c\}$ halmaz *véges*, és minden $c \in \mathbb{R}$ számra, $c > x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} | \mathbf{s}(n) < c\}$ halmaz *végtelen.*

8. Minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozatra legyenek $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ azok a sorozatok, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\overline{x}_n := \max_{0\leq k\leq n} x_k, \quad \underline{x}_n := \min_{0\leq k\leq n} x_k.$$

- Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos valós sorozat, akkor az $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek.

- Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós sorozat, hogy az $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek és a határértékeik egyenlők, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és mindhárom sorozat határértéke ugyanaz.

- Létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens valós sorozat, amelyre az $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek.

9. Az $\overline{\mathbb{R}}$ felett *nem létezik* olyan kommutatív csoportművelet, amely az $\mathbb{R}$ feletti összeadás kiterjesztése.

(*Útmutatás.* Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $+$ olyan kommutatív csoportművelet $\overline{\mathbb{R}}$ felett, amelyek az $\mathbb{R}$ feletti összeadás kiterjesztése. Ekkor a $+$ szerinti neutrális elem szükségképpen 0, és minden $x \in \mathbb{R}$ számra az x inverze $+$ szerint $-x$ lesz. Ezért $x \in \mathbb{R}$ esetén $x + (+\infty)$ nem lehet valós szám, tehát $x + (+\infty) = +\infty$ vagy $x + (+\infty) = -\infty$. De ha $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x + (+\infty) = +\infty$, akkor ehhez az egyenlőséghez hozzádva a $+\infty$ elem $+$ szerinti inverzét kapjuk, hogy $x = 0$. Tehát $x \in \mathbb{R}^*$ esetén szükségképpen $x + (+\infty) = -\infty$. Ekkor viszont bármely két nem nulla valós szám egyenlő lenne (ti. megegyezne a $(-\infty) - (+\infty)$ elemmel).)

10. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{s}$ valós számsorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$F_n := \overline{\{\mathbf{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\}},$$

akkor a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ halmaz *egyenlő* az $\mathbf{s}$ konvergens részsorozatai határértékeinek halmazával.

(*Útmutatás.* Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, hogy $\mathbf{s} \circ \sigma$ konvergens. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n + m) \geq n$, tehát $\mathbf{s}(\sigma(n + m)) \in F_n$, vagyis az $\mathbb{N} \to \mathbb{N};\ m \mapsto \mathbf{s}(\sigma(n + m))$ sorozat az F_n zárt halmazban halad, így a zárt halmazok sorozatokkal való jellemzési tétele alapján

$$\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{s}(\sigma(n + m)) \in F_n$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{s}$ minden konvergens részsorozatának határértéke eleme a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ halmaznak. A fordított irányú következtetés bizonyításában ugyanúgy érvelhetünk, mint a Bolzano-Weirstrass kiválasztási tétel bizonyításának (I) részében.)

11. Mutassuk meg, hogy ha G csoport és H olyan részcsoportja G-nek, amelyre a $G \setminus H$ halmaz két elemű, akkor a következő esetek lehetségesek:

– G izomorf a $\mathbf{C}_3$ ciklikus csoporttal és H a neutrális részcsoporttal azonosul (tehát G három elemű);

– G izomorf a $\mathbf{C}_4$ csoporttal és H azonosul a G egyetlen két elemű részcsoportjával (tehát G négy elemű);

– G izomorf a $\mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{C}_2$ csoporttal és H azonosul a G valamelyik két elemű részcsoportjával (tehát G négy elemű).

(Ebből is következik, hogy $\overline{\mathbb{R}}$ felett nem létezik olyan csoportművelet, amely az $\mathbb{R}$ összeadásának kiterjesztése volna.)

12. Legyen $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} p_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *nem korlátos.* Minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozatra legyen $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a sorozat, amelyre minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\overline{x}_n := \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k} & \text{, ha } \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } \sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 0 \end{cases}.$$

Minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozatra

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} \overline{x}_n \leq \limsup_{n\to\infty} \overline{x}_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

és ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor az $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n.$$

4. fejezet

Számsorok

4.1. Számsorok és végtelen szorzatok értelmezése

4.1.1. Állítás. *A $\mathbb{K}$-ban haladó* $\mathbf{s}$ *sorozathoz egyértelműen léteznek azok a szintén $\mathbb{K}$-ban haladó* $\sum \mathbf{s}$ *és* $\mathrm{P}\,\mathbf{s}$ *sorozatok, amelyekre*

$$\left(\sum \mathbf{s}\right)(0) := \mathbf{s}(0), \quad \left(\mathrm{P}\,\mathbf{s}\right)(0) := \mathbf{s}(0),$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\sum \mathbf{s}\right)(n+1) = \left(\sum \mathbf{s}\right)(n) + \mathbf{s}(n+1), \quad \left(\mathrm{P}\,\mathbf{s}\right)(n+1) = \left(\mathrm{P}\,\mathbf{s}\right)(n) \cdot \mathbf{s}(n+1).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, és értelmezzük az

$$\begin{aligned} S &: \mathbb{N} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}; \quad (n, x) \mapsto x + \mathbf{s}(n+1) \\ P &: \mathbb{N} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}; \quad (n, x) \mapsto x \cdot \mathbf{s}(n+1) \end{aligned}$$

függvényeket. Ekkor $\sum \mathbf{s}$ azonos a $\mathbf{s}(0) \in \mathbb{K}$ kezdőpont és S függvény által meghatározott, $\mathbb{K}$-ban haladó rekurzív sorozattal, továbbá $\mathrm{P}\,\mathbf{s}$ azonos az $\mathbf{s}(0) \in \mathbb{K}$ kezdőpont és P függvény által meghatározott, $\mathbb{K}$-ban haladó rekurzív sorozattal. ■

4.1.2. Definíció. *Ha* $\mathbf{s}$ *számsorozat, akkor az előző állításban értelmezett* $\sum \mathbf{s}$ (*illetve* $\mathrm{P}\,\mathbf{s}$) *számsorozatot az* $\mathbf{s}$ *által meghatározott, vagy* $\mathbf{s}$*-hez tartozó, vagy* $\mathbf{s}$*-hez rendelt* **sornak** (*illetve* **végtelen szorzatnak**) *nevezzük. Ha* $\mathbf{s}$ *számsorozat, és $n \in \mathbb{N}$, akkor a* $\sum \mathbf{s}$ *sor* (*illetve a* $\mathrm{P}\,\mathbf{s}$ *végtelen szorzat*) *n-edik tagját, vagyis a* $\left(\sum \mathbf{s}\right)(n)$ (*illetve* $\left(\mathrm{P}\,\mathbf{s}\right)(n)$) *számot az* $\mathbf{s}$ *sorozat* n**-edik részletösszegének** (*illetve* n**-edik részletszorzatának**) *nevezzük.*

A véges műveletek általános definíciója és alaptulajdonságai (**ENS** 4.3.5.) szerint világos, hogy ha $\mathbf{s}$ számsorozat, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\sum \mathbf{s}\right)(n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k), \quad \left(\mathrm{P}\,\mathbf{s}\right)(n) = \mathop{\mathrm{P}}_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k),$$

tehát

$$\sum \mathbf{s} = \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k)\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \mathrm{P}\,\mathbf{s} = \left(\mathop{\mathrm{P}}_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k)\right)_{n \in \mathbb{N}},$$

vagyis $\sum \mathbf{s}$ (illetve $\mathrm{P}\,\mathbf{s}$) az $\mathbf{s}$ sorozat *részletösszegeinek* (illetve *részletszorzatainak*) sorozata.

4.2. Számsorok és végtelen szorzatok konvergenciája

4.2.1. Definíció. *Ha az* $\mathbf{s}$ *számsorozat által meghatározott* $\sum \mathbf{s}$ *sor (illetve* $\prod \mathbf{s}$ *végtelen szorzat) konvergens, akkor a sor (illetve szorzat) határértékét a* $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)$ *(illetve* $\prod_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)$*) szimbólum jelöli, és ezt a* $\sum \mathbf{s}$ *sor (illetve* $\prod \mathbf{s}$ *szorzat)* **összegének** *(illetve* **szorzatának***) nevezzük.*

Megjegyezzük azt, hogy ha az $\mathbf{s}$ számsorozat által meghatározott $\prod \mathbf{s}$ szorzat konvergens, de a határértéke egyenlő 0-val, akkor azt mondjuk, hogy a $\prod \mathbf{s}$ szorzat *nullához divergál.* Ezt a furcsa elnevezést az indokolja, hogy az ilyen szorzatok tulajdonságai egészen mások, mint a nem nulla számhoz konvergáló szorzatoké. A komplex sorozatokhoz tartozó szorzatokkal majd részletesebben a **HOL** 2.6. pontban foglalkozunk.

A számsorok speciális sorozatok, ezért a számsorozatokra értelmezett műveletek számsorokra is alkalmazhatók. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy ha $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ számsorozatok és $c \in \mathbb{K}$, akkor

$$\sum(\mathbf{s}+\mathbf{s}') = \sum \mathbf{s} + \sum \mathbf{s}', \quad \sum(c \cdot \mathbf{s}) = c \cdot \sum \mathbf{s}, \quad \overline{\sum \mathbf{s}} = \sum \overline{\mathbf{s}}$$

teljesül. Ebből az is következik, hogy ha $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ olyan számsorozatok $\mathbb{K}$-ban, hogy a $\sum \mathbf{s}$ és $\sum \mathbf{s}'$ sorok konvergensek, továbbá $c \in \mathbb{K}$, akkor a $\sum(\mathbf{s}+\mathbf{s}')$, $\sum(c \cdot \mathbf{s})$ és $\sum \overline{\mathbf{s}}$ sorok konvergensek, valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{s}(k)+\mathbf{s}'(k)) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{s}(k) + \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{s}'(k),$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(c \cdot \mathbf{s}(k)) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{s}(k),$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\mathbf{s}(k)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{s}(k)}.$$

Azonban vigyázzunk arra, hogy általában $\left|\sum \mathbf{s}\right| \neq \sum |\mathbf{s}|$ és $\left(\sum \mathbf{s}\right)\cdot\left(\sum \mathbf{s}'\right) \neq \sum(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')$.

A számsorok konvergenciájának legegyszerűbb *szükséges feltételét* fogalmazzuk meg a következő állításban.

4.2.2. Állítás. *Ha az* $\mathbf{s}$ *számsorozathoz tartozó* $\sum \mathbf{s}$ *sor konvergens, akkor* $\mathbf{s}$ *zérussorozat.*

Bizonyítás. Ha a $\sum \mathbf{s}$ sor konvergens és határértéke egyenlő S-sel, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ számra $\left|\left(\sum \mathbf{s}\right)(n) - S\right| < \varepsilon/2$; ekkor a $\sum \mathbf{s}$ sor *rekurzív definíciója* szerint, minden $n > N+1$ természetes számra

$$|\mathbf{s}(n)| = \left|\left(\sum \mathbf{s}\right)(n) - \left(\sum \mathbf{s}\right)(n-1)\right| \leq$$
$$\leq \left|\left(\sum \mathbf{s}\right)(n) - S\right| + \left|S - \left(\sum \mathbf{s}\right)(n-1)\right| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim \mathbf{s} = 0$. ∎

Azonban létezik olyan $\mathbf{s}$ zérussorozat, amelyre a $\sum \mathbf{s}$ sor divergens, ezért az előző állításban megfogalmazott feltétel *nem elégséges* a sor konvergencájához. Ugyanakkor, a Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján könnyen megadható nemtriviális szükséges és elégséges feltétel a sorok konvergenciájára.

4.2.3. Állítás. (Cauchy-féle konvergenciakritérium sorokra) *Az* $\mathbf{s}$ *számsorozathoz tartozó* $\sum \mathbf{s}$ *sor pontosan akkor konvergens, ha minden* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *számhoz van olyan* $N \in \mathbb{N}$*, amelyre minden* $m, n \in \mathbb{N}$ *esetén, ha* $n > m > N$*, akkor*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \mathbf{s}(k) \right| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Ha a $\sum \mathbf{s}$ sor konvergens, akkor ez Cauchy-sorozat, ezért $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m, n > N$ természetes számra $\left| \left(\sum \mathbf{s}\right)(n) - \left(\sum \mathbf{s}\right)(m) \right| < \varepsilon$. Ekkor $m, n \in \mathbb{N}$ és $n > m > N$ esetén

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \mathbf{s}(k) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k) - \sum_{k=0}^{m} \mathbf{s}(k) \right| = \left| \left(\sum \mathbf{s}\right)(n) - \left(\sum \mathbf{s}\right)(m) \right| < \varepsilon.$$

Megfordítva; tegyük fel, hogy a $\sum \mathbf{s}$ sor rendelkezik az adott tulajdonsággal és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A feltétel szerint vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > m > N$, akkor

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \mathbf{s}(k) \right| < \varepsilon.$$

Ekkor minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra, $m > N$, $n > N$ és $m \neq n$ esetén $\max(m, n) > \min(m, n) > N$, tehát

$$\left| \left(\sum \mathbf{s}\right)(m) - \left(\sum \mathbf{s}\right)(n) \right| = \left| \sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} \mathbf{s}(k) \right| < \varepsilon$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\sum \mathbf{s}$ *Cauchy-sorozat*, tehát a sorozatok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium szerint a $\sum \mathbf{s}$ sor konvergens. ∎

4.2.4. Definíció. *Az* $\mathbf{s}$ *számsorozathoz tartozó* $\sum \mathbf{s}$ *sort* **abszolút konvergensnek** *nevezzük, ha a* $\sum |\mathbf{s}|$ *sor konvergens.*

4.2.5. Következmény. *Minden abszolút konvergens számsor konvergens, és ha* $\mathbf{s}$ *olyan számsorozat, hogy a* $\sum \mathbf{s}$ *sor abszolút konvergens, akkor fennáll az*

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{s}(k)|$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ olyan számsorozat, hogy a $\sum \mathbf{s}$ sor abszolút konvergens. Ekkor a $\sum |\mathbf{s}|$ konvergens sorra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$ és $n > m > N$ esetén

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \mathbf{s}(k) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\mathbf{s}(k)| < \varepsilon,$$

tehát a $\sum \mathbf{s}$ sorra is teljesül a Cauchy-féle konvergenciakritérium, így $\sum \mathbf{s}$ konvergens. Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\left| \left(\sum \mathbf{s} \right)(n) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |\mathbf{s}(k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{s}(k)|,$$

ezért fennáll a

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k) \right| = \left| \lim \left(\sum \mathbf{s} \right) \right| = \lim \left| \sum \mathbf{s} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \left(\sum \mathbf{s} \right)(n) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{s}(k)|$$

egyenlőtlenség. ■

Azonban könnyen megadható példa konvergens és nem abszolút konvergens számsorozatokra.

4.2.6. Definíció. *A nem abszolút konvergens, de konvergens számsorozatokat* **feltételesen konvergens** *soroknak nevezzük.*

4.2.7. Állítás. (Majoráns kritérium) *Ha $\mathbf{s}$ számsorozat, és $\mathbf{s}'$ olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum \mathbf{s}'$ sor konvergens és létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq N$ esetén $|\mathbf{s}(k)| \leq \mathbf{s}'(k)$, akkor a $\sum \mathbf{s}$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is).*

Bizonyítás. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq N$ esetén $|\mathbf{s}(k)| \leq \mathbf{s}'(k)$. Ha $n > N$ tetszőleges temészetes szám, akkor

$$\begin{aligned} \left(\sum |\mathbf{s}| \right)(n) &= \sum_{k=0}^{N} |\mathbf{s}(k)| + \sum_{k=N+1}^{n} |\mathbf{s}(k)| \leq \sum_{k=0}^{N} |\mathbf{s}(k)| + \sum_{k=N+1}^{n} \mathbf{s}'(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{N} |\mathbf{s}(k)| - \sum_{k=0}^{N} \mathbf{s}'(k) + \left(\sum \mathbf{s}' \right)(n). \end{aligned}$$

A $\sum \mathbf{s}'$ sorozat monoton növő konvergens valós sorozat, így felülről korlátos. Az előző egyenlőtlenség szerint a $\sum |\mathbf{s}|$ monoton növő valós sorozat is felülről korlátos, tehát konvergens, vagyis a $\sum \mathbf{s}$ sor abszolút konvergens. ■

4.3. Hatványsorok konvergenciája

4.3.1. Definíció.

– **Hatványsorozatoknak** *nevezzük az* $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$; $n \mapsto \mathbf{a}(n) \cdot z^n$ *alakú számsorozatokat, ahol* **a** *tetszőleges* $\mathbb{K}$*-ban haladó sorozat és* $z \in \mathbb{K}$.

– **Geometriai sorozatoknak** *nevezzük az* $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$; $n \mapsto z^n$ *alakú számsorozatokat, ahol* $z \in \mathbb{K}$.

– **Komplex trigonometrikus sorozatoknak** *nevezzük azokat az* $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$; $n \mapsto \mathbf{a}(n) \cdot z^n$ *alakú hatványsorozatokat, amelyekre* $z \in \mathbb{U}$ (*azaz* $|z| = 1$).

A hatványsorozatokhoz (*illetve geometriai sorozatokhoz, illetve komplex trigonometrikus sorozatokhoz*) *tartozó sorokat* **hatványsoroknak** (*illetve* **geometriai soroknak**, *illetve* **komplex trigonometrikus soroknak**) *nevezzük.*

4.3.2. Állítás. (A geometriai sorok konvergenciája). *Tegyük fel, hogy* $z \in \mathbb{K}$.

– *Ha* $|z| < 1$, *akkor a* $\sum_{k \in \mathbb{N}} z^k$ *sor abszolút konvergens* $\mathbb{K}$*-ban, és*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z},$$

– *Ha* $|z| \geq 1$, *akkor a* $\sum_{k \in \mathbb{N}} z^k$ *sor divergens.*

Bizonyítás. Legyen $z \in \mathbb{K}$, és tegyük fel, hogy $|z| < 1$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left| \frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \left| \frac{1}{1-z} - \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} = \frac{|z|}{|1-z|} z^n,$$

és a 3.15.7. gyakorlat szerint $\lim_{n \to \infty} |z|^n = 0$, tehát a $\sum_{k \in \mathbb{N}} z^k$ sor konvergens $\mathbb{K}$-ban, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Egyidejűleg azt is megkaptuk, hogy a $\sum_{k \in \mathbb{N}} |z|^k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, vagyis a $\sum_{k \in \mathbb{N}} z^k$ sor abszolút konvergens $\mathbb{K}$-ban.

Ha $z \in \mathbb{K}$ és $|z| \geq 1$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $|z^k| = |z|^k \geq 1$, tehát a $(z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat nem konvergál nullához, ezért a $\sum_{k \in \mathbb{N}} z^k$ sor nem lehet konvergens. ■

4.3.3. Állítás. (Cauchy-féle gyökkritérium) *Legyen* **s** *tetszőleges számsorozat.*

– *Ha* $\limsup_{k \to \infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} < 1$, *akkor a* $\sum \mathbf{s}$ *sor abszolút konvergens.*

– *Ha* $\limsup_{k \to \infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} > 1$, *akkor az* **s** *sorozat nem korlátos, így a* $\sum \mathbf{s}$ *sor divergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} < 1$, és rögzítsünk olyan $q \in \mathbb{R}$ számot, amelyre

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \Big) = \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} < \ q < \ 1.$$

Ekkor vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} < q$, így minden $k \geq n$ természetes számra $|\mathbf{s}(k)| < q^k$. A $\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k$ geometriai sor konvergens, mert $q \in]0,1[$, így a majoráns kritérium szerint a $\sum \mathbf{s}$ sor abszolút konvergens.

Tegyük fel, hogy $\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/n} > 1$, és rögzítsünk olyan $q \in \mathbb{R}$ számot, amelyre

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \Big) = \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} > \ q > \ 1.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n+1} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \ > \ q,$$

tehát van olyan $k > n$ természetes szám, amelyre $|\mathbf{s}(k)| > q^k$. Ezért értelmezhetjük azt az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(n) := \min\{k \in \mathbb{N} | (k > n) \wedge (|\mathbf{s}(k)| > q^k)\}.$$

Legyen σ a $0 \in \mathbb{N}$ kezdőpont és az f függvény által meghatározott iterációs sorozat. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sigma(n+1) = f(\sigma(n)) \in \{k \in \mathbb{N} | (k > \sigma(n)) \wedge (|\mathbf{s}(k)| > q^k)\},$$

tehát $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ és $|\mathbf{s}(\sigma(n+1))| > q^{\sigma(n+1)} \geq q^{n+1}$. A $q > 1$ feltétel miatt a $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos, ugyanakkor az előzőek szerint minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén $|(\mathbf{s} \circ \sigma)(k)| > q^k$, így $\mathbf{s} \circ \sigma$ az $\mathbf{s}$-nek nem korlátos részsorozata, tehát az $\mathbf{s}$ sorozat nem korlátos. Ezért az $\mathbf{s}$ sorozat nem konvergál 0-hoz, így a $\sum \mathbf{s}$ sor nem konvergens. ■

Azonban $\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} = 1$ esetén a $\sum \mathbf{s}$ sor lehet divergens, lehet feltételesen konvergens és lehet abszolút konvergens, tehát ebben az esetben a Cauchy-féle gyökkritérium *alkalmatlan* a sor konvergenciájának eldöntésére.

4.3.4. Definíció. *Ha* $\mathbf{a}$ *számsorozat, akkor értelmezzük a következő elemet* $\overline{\mathbb{R}}_+$*-ban*

$$\mathrm{R}_{\mathbf{a}} := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k}} & , \textit{ha } 0 < \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} < +\infty, \\ 0 & , \textit{ha } \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = +\infty, \\ +\infty & , \textit{ha } \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = 0, \end{cases}$$

és $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *elemet az* $\mathbf{a}$ *sorozathoz tartozó* **Cauchy-féle konvergenciasugárnak** *nevezzük.*

4.3.5. Tétel. (Cauchy–Hadamard-tétel) *Legyen* $\mathbf{a}$ *számsorozat,* $c \in \mathbb{K}$ *és* $z \in \mathbb{K}$.

– *Ha* $|z-c| < \mathrm{R}_{\mathbf{a}}$*, akkor a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(z-c)^k$ *hatványsor abszolút konvergens.*

– *Ha* $|z-c| > \mathrm{R}_{\mathbf{a}}$*, akkor a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(z-c)^k$ *hatványsor divergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $0 < \mathrm{R}_{\mathbf{a}} < +\infty$. Ekkor $|z-c| < \mathrm{R}_{\mathbf{a}}$ esetén

$$1 > |z-c| \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} \left(|z-c||\mathbf{a}(k)|^{1/k}\right) = \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)(z-c)^k|^{1/k},$$

tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(z-c)^k$ sor abszolút konvergens. Ha viszont $|z-c| > \mathrm{R}_{\mathbf{a}}$, akkor

$$1 < |z-c| \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} \left(|z-c||\mathbf{a}(k)|^{1/k}\right) = \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)(z-c)^k|^{1/k},$$

tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(z-c)^k$ sor divergens.
Most tegyük fel, hogy $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} = 0$, vagyis $\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = +\infty$. Ha $z \neq c$, akkor

$$\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)(z-c)^k|^{1/k} = |z-c| \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = |z-c| \cdot (+\infty) := +\infty > 1,$$

tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(z-c)^k$ sor divergens.
Végül tegyük fel, hogy $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} = +\infty$, vagyis $\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = 0$. Ekkor tetszőleges $z \in \mathbb{K}$ esetén

$$\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)(z-c)^k|^{1/k} = |z-c| \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = |z-c| \cdot 0 = 0 < 1,$$

tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(z-c)^k$ sor abszolút konvergens. ■

A Cauchy–Hadamard-tétel semmit nem mond arról, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(z-c)^k$ hatványsor konvergens-e $|z-c| = \mathrm{R}_{\mathbf{a}}$ esetén? A későbbiekben szó lesz az Abel-féle konvergenciakritériumról, amely legalábbis részben választ ad erre a kérdésre.

4.3.6. Következmény. *Ha* $\mathbf{a}$ *számsorozat, akkor minden* $r > 0$ *valós számra a következő állítások ekvivalensek.*

(i) $\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} \le 1/r$.

(ii) Minden $z \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|z| < r$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)z^k$ sor abszolút konvergens.

(iii) Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, ha $0 < t < r$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)t^k$ sor konvergens.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Az (i) feltétel alapján $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} \geq r$, így $z \in \mathbb{K}$ és $|z| < r$ esetén $|z| < \mathrm{R}_{\mathbf{a}}$, tehát a Cauchy–Hadamard-tétel szerint a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)z^k$ sor abszolút konvergens, következésképpen (ii) teljesül.

(ii)⇒(iii) Triviális, mert minden abszolút konvergens sor konvergens.

(iii)⇒(i) Tegyük fel, hogy (i) nem igaz, vagyis $\limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} > 1/r$. Ekkor $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} < r$, így véve bármely $t \in]\mathrm{R}_{\mathbf{a}}, r[$ valós számot, a Cauchy–Hadamard-tétel szerint a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)t^k$ sor divergens, tehát (iii) nem igaz. ■

4.4. A gyökkritérium és a hányadoskritérium kapcsolata

4.4.1. Lemma. *Ha* $\mathbf{s}$ *olyan számsorozat, amelyre minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathbf{s}(k) \neq 0$*, akkor*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} \leq \liminf_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|}.$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha $C \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} < C$, akkor $\limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \leq C$ is igaz; ez a tény a harmadik egyenlőtlenséget igazolja.

Valóban, ha

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} \right) = \limsup_{k\to\infty} \frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} < C,$$

akkor vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ esetén

$$\frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} < C$$

teljesül. Ebből teljes indukcióval könnyen kapjuk, hogy minden $k > n$ természetes számra

$$|\mathbf{s}(k)|^{1/k} < C \cdot \left(\frac{|\mathbf{s}(n)|}{C^n} \right)^{1/k},$$

amiből következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \left(C \cdot \left(\frac{|\mathbf{s}(n)|}{C^n} \right)^{1/k} \right) = C.$$

Most megmutatjuk, hogy ha $C \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} > C$, akkor $\liminf\limits_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \geq C$ is igaz; ez a tény az első egyenlőtlenséget igazolja.

Valóban, ha

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} \right) = \liminf_{k\to\infty} \frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} > C,$$

akkor vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ esetén

$$\frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} > C$$

teljesül. Ebből teljes indukcióval könnyen kapjuk, hogy minden $k > n$ természetes számra

$$|\mathbf{s}(k)|^{1/k} > C \cdot \left(\frac{|\mathbf{s}(n)|}{C^n}\right)^{1/k},$$

amiből következik, hogy

$$\liminf_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \geq \liminf_{k\to\infty} \left(C \cdot \left(\frac{|\mathbf{s}(n)|}{C^n}\right)^{1/k}\right) = C$$

teljesül. ■

4.4.2. Következmény. *Ha* $\mathbf{s}$ *tetszőleges olyan* $\mathbb{R}_+^*$*-ban haladó számsorozat, hogy az* $\left(\frac{\mathbf{s}(k+1)}{\mathbf{s}(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens, akkor a* $((\mathbf{s}(k))^{1/k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ *sorozat is konvergens és*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{s}(k+1)}{\mathbf{s}(k)} = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{s}(k))^{1/k}.$$

Bizonyítás. Az előző lemma és a valós sorozatok konvergenciájának limsup-pal és liminf-fel való kapcsolata alapján nyilvánvaló. ■

4.4.3. Állítás. (D'Alembert-féle hányadoskritérium) *Legyen* $\mathbf{s}$ *tetszőleges olyan számsorozat, amelyre minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathbf{s}(k) \neq 0$.

– *Ha* $\limsup_{k\to\infty} \frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} < 1$*, akkor a* $\sum \mathbf{s}$ *sor abszolút konvergens.*
– *Ha* $\liminf_{k\to\infty} \frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} > 1$*, akkor az* $\mathbf{s}$ *sorozat nem korlátos, így a* $\sum \mathbf{s}$ *sor divergens.*

Bizonyítás. Az előző lemma és Cauchy-féle gyökkritérium alapján nyilvánvaló. ■

Látható, hogy ha egy számsor abszolút konvergenciája, illetve divergenciája eldönthető a hányadoskritérium alapján, akkor a gyökkritérium alapján is eldönthető; azonban ennek megfordítása nem igaz. Ez azt jelenti, hogy létezhet olyan $\mathbf{s}$ számsorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(k) \neq 0$ és $\limsup_{k\to\infty} \frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} \geq 1$ *és* $\liminf_{k\to\infty} \frac{|\mathbf{s}(k+1)|}{|\mathbf{s}(k)|} \leq 1$, vagyis a hányadoskritérium nem alkalmazható, ugyanakkor $\limsup_{k\to\infty} |\mathbf{s}(k)|^{1/k} \neq 1$, tehát a gyökkritérium alkalmazható. Például a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k+2}{2^k}$ sor a gyökkritérium szerint abszolút konvergens, mert

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^k+2}{2^k}\right|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{3^{1/k}}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{1/k}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

de a hányadoskritériummal nem dönthető el a konvergenciája, mert

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\frac{(-1)^{k+1}+2}{2^{k+1}}}{\frac{(-1)^k+2}{2^k}} = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2}\frac{(-1)^{k+1}+2}{(-1)^k+2} = \frac{3}{2} > 1,$$

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\frac{(-1)^{k+1}+2}{2^{k+1}}}{\frac{(-1)^k+2}{2^k}} = \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\frac{(-1)^{k+1}+2}{(-1)^k+2} = \frac{1}{6} < 1.$$

Viszont ez a tény nem teszi feleslegessé a hányadoskritériumot, mert sok sor konvergenciáját egyszerűbb eldönteni a hányadoskritérium alapján, mint a gyökkritérium alkalmazásával.

4.5. Sor maradéktagjai

4.5.1. Definíció. *Minden $m \in \mathbb{N}$ számra σ_m jelöli az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $n \mapsto m+n$ leképezést. Ha* $\mathbf{s}$ *számsorozat és $m \in \mathbb{N}$, akkor a* $\sum \mathbf{s}$ *sor m-edik maradéktagjának nevezzük és a* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \mathbf{s}(k)$ *vagy* $\sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq m}} \mathbf{s}(k)$ *szimbólummal jelöljük a* $\sum(\mathbf{s}\circ\sigma_m)$ *sort, továbbá ennek összegét (ha létezik) a* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \mathbf{s}(k)$ *szimbólummal jelöljük.*

Tehát ha $\mathbf{s}$ számsorozat és $m \in \mathbb{N}$, akkor $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \mathbf{s}(k)$ az a sorozat, amely minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz a $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{s}(m+k)$, vagyis a $\sum\limits_{k=m}^{m+n} \mathbf{s}(k)$ értéket rendeli. Figyeljük meg, hogy ha $\mathbf{s}$ számsorozat és $m \in \mathbb{N}$, akkor a $\sum \mathbf{s}$ sor m-edik maradéktagja *független* az $\{\mathbf{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k < m)\}$ halmaztól, vagyis ha $\mathbf{s}'$ olyan számsorozat, hogy minden $k \geq m$ természetes számra $\mathbf{s}(k) = \mathbf{s}'(k)$, akkor $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \mathbf{s}(k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \mathbf{s}'(k)$. Sőt, ha $m \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{s} : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{K}$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Dom}(\mathbf{s}) = \{k \in \mathbb{N} | k \geq m\}$, akkor minden $n \geq m$ természetes számra az $\mathbf{s}\circ\sigma_n$ függvény definíciós tartománya egyenlő $\mathbb{N}$-nel (vagyis ez sorozat), így van értelme a $\sum(\mathbf{s}\circ\sigma_n)$ sorról beszélni, amit szintén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \mathbf{s}(k)$ szimbólummal jelölünk. Például a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \frac{1}{k}$ sor az a sorozat, amely minden n természetes számhoz a $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ értéket rendeli.

A következő állítás bizonyításában felhasználjuk azt, hogy ha $\mathbf{s}$ számsorozat, és van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy az $\mathbf{s}\circ\sigma_m$ sorozat konvergens, akkor az $\mathbf{s}$ sorozat konvergens. Valóban, ha $x := \lim(\mathbf{s}\circ\sigma_m)$, akkor $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > N$ természetes számra $|x - \mathbf{s}(m+k)| < \varepsilon$; ekkor világos, hogy minden $n > m+N$ természetes számra $|x - \mathbf{s}(n)| < \varepsilon$, tehát $\mathbf{s}$ konvergens.

4.5.2. Állítás. *Ha* $\mathbf{s}$ *számsorozat, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Minden $m \in \mathbb{N}$ esetén a* $\sum \mathbf{s}$ *sor m-edik maradéktagja konvergens.*

(ii) *Létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, amelyre a* $\sum \mathbf{s}$ *sor m-edik maradéktagja konvergens.*

(iii) *A* $\sum \mathbf{s}$ *sor konvergens.*

Továbbá, ha a $\sum \mathbf{s}$ *sor konvergens, akkor minden* $m \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k) = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{s}(k) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathbf{s}(k).$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy minden $m \in \mathbb{N}^*$ számra

$$\left(\sum \mathbf{s}\right) \circ \sigma_m = \left(\sum \mathbf{s}\right)(m-1) + \sum (\mathbf{s} \circ \sigma_m),$$

ahol a jobb oldalon a $\left(\sum \mathbf{s}\right)(m-1)$ értékű konstans-sorozat és a $\sum(\mathbf{s} \circ \sigma_m)$ sorozat összege áll. Legyen $m \in \mathbb{N}^*$ rögzítve; teljes indukcióval azt fogjuk igazolni, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\left(\sum \mathbf{s}\right)(m+n) = \left(\sum \mathbf{s}\right)(m-1) + \left(\sum (\mathbf{s} \circ \sigma_m)\right)(n).$$

Ez $n = 0$ esetén nyilvánvalóan igaz, mert $\left(\sum (\mathbf{s} \circ \sigma_m)\right)(0) := \mathbf{s}(m)$, és a sorok rekurzív definíciója alapján

$$\left(\sum \mathbf{s}\right)(m) = \left(\sum \mathbf{s}\right)(m-1) + \mathbf{s}(m).$$

Ha az egyenlőség igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra, akkor

$$\begin{aligned}
\left(\sum \mathbf{s}\right)(m+n+1) &:= \left(\sum \mathbf{s}\right)(n+m) + \mathbf{s}(m+n+1) = \\
&= \left(\sum \mathbf{s}\right)(m-1) + \left(\sum (\mathbf{s} \circ \sigma_m)\right)(n) + \mathbf{s}(m+n+1) = \\
&= \left(\sum \mathbf{s}\right)(m-1) + \left(\sum (\mathbf{s} \circ \sigma_m)\right)(n) + (\mathbf{s} \circ \sigma_m)(n+1) = \\
&= \left(\sum \mathbf{s}\right)(m-1) + \left(\sum (\mathbf{s} \circ \sigma_m)\right)(n+1),
\end{aligned}$$

tehát az állítás $n+1$-re is igaz.

(i)⇒(ii) Triviális.

(ii)⇒(iii) Legyen $m \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy a $\sum \mathbf{s}$ sor m-edik maradéktagja konvergens. Ekkor

$$\left(\sum \mathbf{s}\right) \circ \sigma_m = \left(\sum \mathbf{s}\right)(m-1) + \sum (\mathbf{s} \circ \sigma_m)$$

miatt a $\left(\sum \mathbf{s}\right) \circ \sigma_m$ sorozat konvergens, tehát az állítás előtt álló megjegyzés alapján a $\sum \mathbf{s}$ sor konvergens, vagyis (iii) teljesül.

(iii)⇒(i) Minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\sum (\mathbf{s} \circ \sigma_m) = \left(\sum \mathbf{s}\right) \circ \sigma_m - \left(\sum \mathbf{s}\right)(m-1),$$

és ha a $\sum \mathbf{s}$ sor konvergens, akkor a $\left(\sum \mathbf{s}\right) \circ \sigma_m$ sorozat is konvergens, így $\sum(\mathbf{s} \circ \sigma_m)$ konvergens. Az is látható, hogy ha $m \in \mathbb{N}$ és $\sum \mathbf{s}$ konvergens, akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k) &:= \lim \left(\sum \mathbf{s}\right) = \lim \left(\left(\sum \mathbf{s}\right) \circ \sigma_{m+1}\right) = \\
&= \left(\sum \mathbf{s}\right)(m) + \lim \left(\sum (\mathbf{s} \circ \sigma_{m+1})\right) = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{s}(k) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathbf{s}(k) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

4.5.3. Következmény. *Ha az* $\mathbf{s}$ *számsorozathoz tartozó sor konvergens, akkor*

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=m}^{\infty} \mathbf{s}(k) \ = \ 0. \ \blacksquare$$

4.6. Sor átrendezései

4.6.1. Definíció. *Ha* $\mathbf{s}$ *számsorozat, akkor a* $\sum \mathbf{s}$ *sor* **átrendezésének** *nevezünk minden* $\sum(\mathbf{s} \circ \sigma)$ *alakú sort, ahol* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tetszőleges bijekció.*

4.6.2. Állítás. *Abszolút konvergens számsor minden átrendezése abszolút konvergens, és bármely átrendezésének ugyanaz az összege, mint az eredeti soré.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, hogy a $\sum \mathbf{s}$ sor abszolút konvergens, és legyen $S := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)$. Rögzítünk továbbá egy tetszőleges $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekciót. A bizonyítás során $n \in \mathbb{N}$ esetén a szemléletesebb $[\![0, n]\!]$ jelölést fogjuk alkalmazni a $\{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$ halmazra (tehát valójában $[\![0, n]\!] := n + 1$).

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\sigma\langle[\![0, n]\!]\rangle$ *véges* részhalmaza $\mathbb{N}$-nek, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $\sigma\langle[\![0, n]\!]\rangle \subseteq [\![0, N]\!]$, vagyis minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \leq n$, akkor $\sigma(k) \leq N$; ekkor

$$\left(\sum |\mathbf{s} \circ \sigma|\right)(n) = \sum_{k=0}^{n} |\mathbf{s}(\sigma(k))| \leq \sum_{k=0}^{N} |\mathbf{s}(k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{s}(k)|,$$

ami azt jelenti, hogy a $\sum |\mathbf{s} \circ \sigma|$ monoton növő valós sorozat felülről korlátos, vagyis konvergens, így a $\sum(\mathbf{s} \circ \sigma)$ sor abszolút konvergens. Megmutatjuk, hogy ha $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekció*, akkor a $\sum(\mathbf{s} \circ \sigma)$ sor összege egyenlő S-sel.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített. A $\sum |\mathbf{s}|$ sor konvergens, ezért az előző következmény alapján vehetünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$, $m > N'$ esetén

$$\sum_{k=m}^{\infty} |\mathbf{s}(k)| < \varepsilon/2.$$

Természetesen ekkor az $m := N' + 1$ választással kapjuk, hogy

$$\left| S - \sum_{k=0}^{N'} \mathbf{s}(k) \right| = \left| \sum_{k=N'+1}^{\infty} \mathbf{s}(k) \right| \leq \sum_{k=N'+1}^{\infty} |\mathbf{s}(k)| < \varepsilon/2$$

is teljesül. A $\sigma^{-1}\langle[\![0, N']\!]\rangle$ halmaz véges, ezért vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $\sigma^{-1}\langle[\![0, N']\!]\rangle \subseteq [\![0, N]\!]$, vagyis minden $j \leq N'$ természetes számhoz, van (egyetlen) olyan $k \leq N$ természetes szám, hogy $\sigma^{-1}(j) = k$, vagyis $j = \sigma(k)$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$, akkor $[\![0, N']\!] \subseteq \sigma\langle[\![0, N]\!]\rangle \subseteq \sigma\langle[\![0, n]\!]\rangle$, ezért fennáll az

$$\left(\sum(\mathbf{s} \circ \sigma)\right)(n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(\sigma(k)) = \sum_{j=0}^{N'} \mathbf{s}(j) + \sum_{k \in [\![0,n]\!],\ \sigma(k) > N'} \mathbf{s}(\sigma(k))$$

egyenlőség, amiből következik, hogy

$$\left| \left(\sum(\mathbf{s} \circ \sigma)\right)(n) - \sum_{k=0}^{N'} \mathbf{s}(k) \right| \leq \sum_{k \in [\![0,n]\!],\ \sigma(k) > N'} |\mathbf{s}(\sigma(k))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=N'+1}^{\max \sigma\langle[\![0,n]\!]\rangle} |\mathbf{s}(j)| \leq \sum_{k=N'+1}^{\infty} |\mathbf{s}(k)| < \varepsilon/2.$$

Tehát a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $n \geq N$ természetes számra

$$\left|\left(\sum(\mathbf{s}\circ\sigma)\right)(n) - S\right| \leq \left|\left(\sum(\mathbf{s}\circ\sigma)\right)(n) - \sum_{k=0}^{N'}\mathbf{s}(k)\right| + \left|S - \sum_{k=0}^{N'}\mathbf{s}(k)\right| < \varepsilon$$

is igaz. Ebből következik, hogy a $\sum(\mathbf{s}\circ\sigma)$ sor összege egyenlő S-sel. ■

4.6.3. Definíció. *Egy számsort* **feltétlen konvergensnek** *nevezünk, ha minden átrendezése konvergens.*

Tehát az abszolút konvergens számsorok feltétlen konvergensek; ennek megfordítása is igaz (*Riemann-tétel*: **4**. és **5**. gyakorlat).

4.7. Abel-féle konvergenciakritérium

4.7.1. Definíció. *Az* $\mathbf{s}$ *számsorozatot* **korlátos változásúnak** *nevezzük, ha a*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}|\mathbf{s}(k) - \mathbf{s}(k+1)|$$

sor konvergens.

4.7.2. Állítás. *Minden monoton és korlátos valós számsorozat korlátos változású.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ monoton fogyó valós számsorozat, és legyen $C \in \mathbb{R}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) \geq C$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=0}^{n}|\mathbf{s}(k) - \mathbf{s}(k+1)| = \sum_{k=0}^{n}(\mathbf{s}(k) - \mathbf{s}(k+1)) = \mathbf{s}(0) - \mathbf{s}(n+1) \leq \mathbf{s}(0) - C,$$

vagyis a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}|\mathbf{s}(k) - \mathbf{s}(k+1)|$ monoton növő sorozat felülről korlátos, tehát konvergens.

Legyen $\mathbf{s}$ monoton növő valós számsorozat, és legyen $C \in \mathbb{R}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) \leq C$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=0}^{n}|\mathbf{s}(k) - \mathbf{s}(k+1)| = \sum_{k=0}^{n}(\mathbf{s}(k+1) - \mathbf{s}(k)) = \mathbf{s}(n+1) - \mathbf{s}(0) \leq C - s(0),$$

így a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}|\mathbf{s}(k) - \mathbf{s}(k+1)|$ monoton növő sorozat felülről korlátos, tehát konvergens. ■

4.7.3. Állítás. (Abel-féle konvergenciakritérium) *Legyen* $\mathbf{a}$ *korlátos változású zérussorozat* $\mathbb{K}$*-ban, és* $\mathbf{b}$ *olyan* $\mathbb{K}$*-ban haladó sorozat, amelyre minden* $m \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$C_m := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\mathbf{b}(k)\right| < +\infty$$

teljesül. Ekkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)$ *sor konvergens, és minden* $m \in \mathbb{N}$ *esetén fennáll a*

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty}\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)\right| \leq \left(\sum_{k=m}^{\infty}|\mathbf{a}(k) - \mathbf{a}(k+1)|\right)\cdot\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\mathbf{b}(k)\right|\right)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített. Először teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\sum_{k=m}^{m+n} \mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k) = \sum_{k=m}^{m+n-1} \left((\mathbf{a}(k) - \mathbf{a}(k+1)) \cdot \left(\sum_{j=m}^{k} \mathbf{b}(j) \right) \right) + \mathbf{a}(m+n) \left(\sum_{k=m}^{m+n} \mathbf{b}(k) \right).$$

(Ezt a formulát nevezzük az egyenlőség bal oldalán álló összeg *Abel-féle átrendezésének*).

Ha $n = 1$, akkor egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az egyenlőség mindkét oldalán $\mathbf{a}(m)\mathbf{b}(m)+\mathbf{a}(m+1)\mathbf{b}(m+1)$ áll. Tegyük fel, hogy az egyenlőség igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ számra. Ekkor

$$\sum_{k=m}^{m+n+1} \mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k) = \left(\sum_{k=m}^{m+n} \mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k) \right) + \mathbf{a}(m+n+1)\mathbf{b}(m+n+1) =$$
$$= \sum_{k=m}^{m+n-1} \left((\mathbf{a}(k) - \mathbf{a}(k+1)) \cdot \left(\sum_{j=m}^{k} \mathbf{b}(j) \right) \right) + \mathbf{a}(m+n) \left(\sum_{k=m}^{m+n} \mathbf{b}(k) \right) +$$
$$+\mathbf{a}(m+n+1)\mathbf{b}(m+n+1).$$

Ugyanakkor egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}(m+n) \left(\sum_{k=m}^{m+n} \mathbf{b}(k) \right) + \mathbf{a}(m+n+1)\mathbf{b}(m+n+1) =$$
$$= (\mathbf{a}(m+n) - \mathbf{a}(m+n+1)) \left(\sum_{k=m}^{m+n} \mathbf{b}(k) \right) +$$
$$+\mathbf{a}(m+n+1) \left(\left(\sum_{k=m}^{m+n} \mathbf{b}(k) \right) + \mathbf{b}(m+n+1) \right) =$$
$$= (\mathbf{a}(m+n) - \mathbf{a}(m+n+1)) \left(\sum_{k=m}^{m+n} \mathbf{b}(k) \right) + \mathbf{a}(m+n+1) \left(\sum_{k=m}^{m+n+1} \mathbf{b}(k) \right).$$

Ezt az előző formulába helyettesítve, és végrehajtva alkalmas összevonásokat

$$\sum_{k=m}^{m+n+1} \mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k) = \sum_{k=m}^{m+n} \left((\mathbf{a}(k) - \mathbf{a}(k+1)) \cdot \left(\sum_{j=m}^{k} \mathbf{b}(j) \right) \right) + \mathbf{a}(m+n+1) \left(\sum_{k=m}^{m+n+1} \mathbf{b}(k) \right)$$

adódik, tehát az egyenlőség $n+1$-re is igaz, amivel a teljes indukciót végrehajtottuk.

A most bizonyított formula a következő ekvivalens formában is felírható: minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}, k\geq m} \mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k) \right)(n+1) =$$
$$= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}, k\geq m} \left((\mathbf{a}(k) - \mathbf{a}(k+1)) \cdot \left(\sum_{j=m}^{k} \mathbf{b}(j) \right) \right) \right)(n) \; + \; (\mathbf{a} \circ \sigma_{m+1})(n) \cdot \left(\sum_{k=m}^{m+n+1} \mathbf{b}(k) \right)$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}, k\geq m} \mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k) \right) \circ \sigma_1$$

sorozatot két sorozat összegeként állítottuk elő. Megmutatjuk, hogy a felbontásban szereplő mindkét sorozat konvergens.

a) A maradéktag-sorok értelmezése alapján

$$\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m}\left((\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{k}\mathbf{b}(j)\right)\right):=$$
$$=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left((\mathbf{a}(m+k)-\mathbf{a}(m+k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{m+k}\mathbf{b}(j)\right)\right).$$

Továbbá, minden $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$|\mathbf{a}(m+k)-\mathbf{a}(m+k+1)|\cdot\left|\sum_{j=m}^{m+k}\mathbf{b}(j)\right|\leq|\mathbf{a}(m+k)-\mathbf{a}(m+k+1)|\cdot C_m,$$

ugyanakkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}|\mathbf{a}(m+k)-\mathbf{a}(m+k+1)|$ sor konvergens, hiszen ez *egyenlő* a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},k\geq m}|\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1)|$ sorral, ami konvergens, mert az $\mathbf{a}$ sorozat korlátos változású. Ezért a majoráns kritérium alapján a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m}\left((\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{k}\mathbf{b}(j)\right)\right)$$

sor *abszolút konvergens*, így konvergens.

b) Az $\mathbf{a}$ sorozat 0-hoz konvergál, ezért $\mathbf{a}\circ\sigma_{m+1}$ is zérussorozat. A $\mathbf{b}$-re vonatkozó hipotézis szerint az

$$\mathbb{N}\to\mathbb{K};\quad n\mapsto\sum_{k=m}^{m+n+1}\mathbf{b}(k)$$

sorozat korlátos. Ebből következik, hogy az

$$\mathbb{N}\to\mathbb{K};\quad n\mapsto(\mathbf{a}\circ\sigma_{m+1})(n)\cdot\left(\sum_{k=m}^{m+n+1}\mathbf{b}(k)\right)$$

sorozat 0-hoz konvergál.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m}\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)\right)\circ\sigma_1$$

sorozat konvergens, ezért a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},k\geq m}\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)$ sor is konvergens, továbbá fennáll az

$$\sum_{k=m}^{\infty}\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k):=\lim\left(\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m}\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)\right)=\lim\left(\left(\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m}\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)\right)\circ\sigma_1\right)=$$
$$=\lim\left(\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m}\left((\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{k}\mathbf{b}(j)\right)\right)\right)=$$
$$=\sum_{k=m}^{\infty}\left((\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{k}\mathbf{b}(j)\right)\right)$$

egyenlőség. Ebből következik, hogy teljesül a

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} \mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)\right| = \left|\sum_{k=m}^{\infty}\left((\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{k}\mathbf{b}(j)\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left((\mathbf{a}(m+k)-\mathbf{a}(m+k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{m+k}\mathbf{b}(j)\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(|\mathbf{a}(m+k)-\mathbf{a}(m+k+1)|\cdot\left|\sum_{j=m}^{m+k}\mathbf{b}(j)\right|\right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}|\mathbf{a}(m+k)-\mathbf{a}(m+k+1)|\right)\cdot C_m = \left(\sum_{k=m}^{\infty}|\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1)|\right)\cdot\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\mathbf{b}(k)\right|\right)$$

egyenlőtlenség. ■

Fontos az, hogy az Abel-féle konvergenciakritérium tipikus *feltételes* konvergenciakritérium, ami azt jelenti, hogy azok a sorok, amelyek konvergenciáját az Abel-kritériummal bizonyítani lehet, általában nem abszolút konvergensek.

4.8. Alternáló sorok és a Leibniz-kritérium

4.8.1. Definíció. Alternáló *vagy* **Leibniz-típusú** *soroknak nevezzük a* $\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\mathbf{a}(k)$ *alakú számsorokat, ahol* **a** *állandó előjelű valós számsorozat.*

4.8.2. Következmény. (Leibniz-féle konvergenciakritérium) *Ha* **a** *tetszőleges* $\mathbb{R}_+$-*ban haladó monoton fogyó sorozat, akkor a* $\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\mathbf{a}(k)$ *alternáló sor pontosan akkor konvergens, ha* $\lim(\mathbf{a})=0$*; és ha* $\lim(\mathbf{a})=0$*, akkor minden* $m\in\mathbb{N}$ *esetén*

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k\mathbf{a}(k)\right| \leq \mathbf{a}(m).$$

Bizonyítás. Ha **a** monoton fogyó sorozat $\mathbb{R}_+$-ban, akkor **a** korlátos, így korlátos változású, továbbá minden $m\in\mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=m}^{\infty}|\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1)| = \sum_{k=m}^{\infty}(\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1)) = \mathbf{a}(m).$$

Ugyanakkor a $\mathbf{b}:\mathbb{N}\to\mathbb{K};\ k\mapsto(-1)^k$ sorozat olyan, hogy minden $m\in\mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\mathbf{b}(k)\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=m}^{m+n}(-1)^k\right| = 1 < +\infty.$$

Ha tehát $\lim(\mathbf{a})=0$, akkor az Abel-féle konvergenciakritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\mathbf{a}(k)$ sor konvergens, és minden $m\in\mathbb{N}$ esetén

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k\mathbf{a}(k)\right| \leq \left(\sum_{k=m}^{\infty}|\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1)|\right)\cdot\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=m}^{m+n}(-1)^k\right|\right) = \mathbf{a}(m)$$

teljesül.

Megfordítva, ha a $\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\mathbf{a}(k)$ sor konvergens, akkor az $\mathbb{N}\to\mathbb{K};\ k\mapsto(-1)^k\mathbf{a}(k)$ sorozat zérussorozat, ezért $\lim(\mathbf{a})=0$. ■

Megjegyezzük, hogy az alternáló sorok konvergenciájára vonatkozó Leibniz-féle konvergenciakritériumot közvetlenül is könnyen bizonyítani lehet, az Abel-féle konvergenciakritérium nélkül is (**8**. gyakorlat). Azonban a következő állítás közvetlen bizonyítása nehéz volna, ugyanakkor az Abel-kritérium alkalmazásával könnyen belátható.

4.9. Dirichlet-féle konvergenciakritérium

4.9.1. Következmény. (Dirichlet-féle konvergenciakritérium) *Legyen* $\mathbf{a}$ *korlátos változású komplex zérussorozat, és* $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$ *(vagyis* $z\in\mathbb{C}$ *olyan, hogy* $|z|=1$ *és* $z\neq1$*). Ekkor a* $\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{a}(k)z^k$ *hatványsor konvergens, és minden* $m\in\mathbb{N}$ *esetén*

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty}\mathbf{a}(k)z^k\right|\le\frac{2}{|1-z|}\cdot\sum_{k=m}^{\infty}|\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1)|.$$

Bizonyítás. Ha $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$, akkor minden $m\in\mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=m}^{m+n}z^k\right|=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|z^m\sum_{k=0}^{n}z^k\right|=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|\le\frac{2}{|1-z|},$$

ezért az Abel-féle konvergenciakritérium alkalmazható az $\mathbf{a}$ sorozatra és arra a $\mathbf{b}$ komplex sorozatra, amelyre minden $k\in\mathbb{N}$ esetén $\mathbf{b}(k):=z^k$. Azt kapjuk, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{a}(k)z^k$ sor konvergens, és minden $m\in\mathbb{N}$ esetén

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty}\mathbf{a}(k)z^k\right|\le\left(\sum_{k=m}^{\infty}|\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1)|\right)\cdot\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=m}^{m+n}z^k\right|\right)\le$$
$$\le\frac{2}{|1-z|}\cdot\sum_{k=m}^{\infty}|\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}(k+1)|$$

teljesül. ■

4.10. Sorok Cauchy-szorzata és a Mertens-tétel

Most a számsorok szorzásának problémájával foglalkozunk. Tegyük fel, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ számsorozatok, és készítsük el az $(\mathbf{a}(i)\mathbf{b}(j))_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ rendszert. Azt kérdezzük: ha a $\sum\mathbf{a}$ és $\sum\mathbf{b}$ sorok konvergensek, akkor hogyan kell, vagy hogyan lehet *összegezni* ezt a rendszert úgy, hogy az *összege* megegyezzen a $\sum\mathbf{a}$ és $\sum\mathbf{b}$ sorok összegének a szorzatával? Itt az a probléma, hogy a $(\mathbf{a}(i)\mathbf{b}(j))_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ rendszer *nem sorozat*, hiszen nem az $\mathbb{N}$ halmazon értelmezett, ezért e rendszer összegzését még értelmezni kell. Az összegzés definíciójára egy lehetséges módszer az, ha kijelölünk egy $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt halmazsorozatot, amelynek minden tagja nem üres véges részhalmaza $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-nek, és $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ teljesül; ezután elkészíthető a

$$\Big(\sum_{(i,j)\in E_k} \mathbf{a}(i)\mathbf{b}(j) \Big)_{k\in\mathbb{N}}$$

számsorozat, és természetesen vehetjük az ehhez tartozó

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{(i,j)\in E_k} \mathbf{a}(i)\mathbf{b}(j) \Big)$$

számsort*szorzatsort.* Ezután a pontos matematikai kérdés az, hogy milyen legyen az $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat ahhoz, hogy konvergens $\sum \mathbf{a}$ és $\sum \mathbf{b}$ számsorok esetén az előző *szorzat-sor* konvergens legyen, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{(i,j)\in E_k} \mathbf{a}(i)\mathbf{b}(j) \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}(i) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{b}(j) \right)$$

teljesüljön? Esetleg előfordulhat, hogy az $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat olyan, hogy az általa meghatározott szorzat-sor nem minden konvergens sor-párra konvergens; ilyenkor azt kérdezhetjük, hogy az eredeti sorok konvergenciája mellett milyen egyéb feltételek biztosítják a szorzat-sor konvergenciáját?

4.10.1. Definíció. *A* $\sum \mathbf{a}$ *és* $\sum \mathbf{b}$ *számsorok* **Cauchy-szorzatának** *nevezzük a*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ i+j=k}} \mathbf{a}(i)\mathbf{b}(j) \Big)$$

sort.

Tehát a Cauchy-szorzat az általános szorzat-sor fogalomnak az a speciális esete, amely ahhoz az $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozathoz tartozik, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $E_k := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | i + j = k\}$. Könnyen látható, hogy a $\sum \mathbf{a}$ és $\sum \mathbf{b}$ számsorok Cauchy-szorzata a következő alakba is írható:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j) \right).$$

4.10.2. Állítás. (**Mertens-tétel.**) *Ha a* $\sum \mathbf{a}$ *és* $\sum \mathbf{b}$ *számsorok konvergensek, és legalább az egyikük abszolút konvergens, akkor a Cauchy-szorzatuk konvergens és*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j) \right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{a}(j) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{b}(j) \right)$$

teljesül. Ha mindkét sor abszolút konvergens, akkor a Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum \mathbf{a}$ sor abszolút konvergens és a $\sum \mathbf{b}$ sor konvergens, továbbá legyenek

$$A := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{a}(j), \quad B := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{b}(j).$$

Megmutatjuk, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j) \right)$$

sor konvergens és az összege egyenlő AB-vel.

Először megjegyezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j) \right) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \mathbf{b}(k) \right).$$

Valóban, ha $n \in \mathbb{N}$ rögzített, és minden $j, k \leq n$ természetes számra bevezetjük a

$$\mathbf{c}(j,k) := \begin{cases} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j) & , \text{ha } j \leq k, \\ 0 & , \text{ha } j > k \end{cases}$$

számot, akkor **ENS** 4.4.3. lapján nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j) \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbf{c}(j,k) \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}(j,k) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j) \right) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j) \left(\sum_{k=j}^{n} \mathbf{b}(k-j) \right) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \mathbf{b}(k) \right).$$

Legyen most $n \in \mathbb{N}$ rögzített; ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j) \right) - AB = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \mathbf{b}(k) - B \right) + \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j) - A \right) \cdot B$$

A $\sum \mathbf{a}$ sor konvergens, ezért az $\mathbb{N} \to \mathbb{K};\ n \mapsto \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j) - A \right) \cdot B$ sorozat 0-hoz konvergál, így elég azt igazolni, hogy az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \mathbf{b}(k) - B \right)$$

függvény zérussorozat.

Ehhez először megjegyezzük, hogy a $\sum \mathbf{b}$ sor konvergens, ezért a $\left(\sum \mathbf{b}\right) - B$ sorozat 0-hoz konvergál, így korlátos is, tehát vehetünk olyan $C > 0$ valós számot, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\left| \sum_{k=0}^{m} \mathbf{b}(k) - B \right| \leq C$ teljesül.

Legyen most $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$, $m > N'$ esetén $\left| \sum_{k=0}^{m} \mathbf{b}(k) - B \right| < \varepsilon'$ teljesül. A $\sum \mathbf{a}$ sor abszolút konvergens, ezért van olyan $N'' \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > N''$ természetes számra $\sum_{k=m}^{\infty} |\mathbf{a}(k)| < \varepsilon'$. Legyen $N := \max(N', N'')$, és rögzítsünk egy $n > 2N$ természetes számot. Ekkor

$$\left| \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \mathbf{b}(k) - B \right) \right| \leq \sum_{j=0}^{n} |\mathbf{a}(j)| \left| \sum_{k=0}^{n-j} \mathbf{b}(k) - B \right| =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} |\mathbf{a}(j)| \left| \sum_{k=0}^{n-j} \mathbf{b}(k) - B \right| + \sum_{j=N+1}^{n} |\mathbf{a}(j)| \left| \sum_{k=0}^{n-j} \mathbf{b}(k) - B \right| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{N} |\mathbf{a}(j)| \right) \cdot \varepsilon' + \left(\sum_{j=N+1}^{n} |\mathbf{a}(j)| \right) \cdot C \leq \left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} |\mathbf{a}(j)| \right) + C \right) \cdot \varepsilon',$$

mert $j \in \mathbb{N}$, $j \leq N$ esetén $n - j > N \geq N'$, tehát $\left| \sum_{k=0}^{n-j} \mathbf{b}(k) - B \right| < \varepsilon'$. Ez azt jelenti, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges és az $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot úgy értelmezzük, hogy

$$\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} |\mathbf{a}(j)| \right) + C \right) \cdot \varepsilon' < \varepsilon$$

teljesüljön, akkor az ε'-höz imént választott $N', N'' \in \mathbb{N}$ számokra az $N := \max(N', N'')$ természetes szám olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > 2N$ esetén

$$\left| \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \mathbf{b}(k) - B \right) \right| < \varepsilon,$$

amit bizonyítani kellett.

Azt kell még igazolni, hogy ha a $\sum \mathbf{a}$ és $\sum \mathbf{b}$ sorok abszolút konvergensek, akkor a Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens. Ez valóban így van, mert ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} |\mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j)| \right) = \sum_{j=0}^{n} |\mathbf{a}(j)| \left(\sum_{k=0}^{n-j} |\mathbf{b}(k)| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} |\mathbf{a}(j)| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{b}(k)| \right) \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\mathbf{a}(j)| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{b}(k)| \right),$$

tehát még a $\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{k} |\mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j)| \right)$ sor is konvergens, így a majoráns kritérium alapján a $\sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k-j) \right|$ sor konvergens. ■

4.11. Feltétlen konvergens sorok átrendezései

Emlékeztetünk arra, hogy a konvergens, de nem abszolút konvergens számsorokat *feltételesen konvergenseknek* nevezzük (4.2.6.). Láttuk, hogy abszolút konvergens sor minden átrendezése konvergens és az átrendezett sornak ugyanaz az összege, mint az eredeti soré (4.6.2.). Meg fogjuk mutatni, hogy feltételesen konvergens sorok egészen más a helyzet.

4.11.1. Lemma. *Ha* $\mathbf{s}$ *olyan hogy valós számsorozat, hogy a* $\sum \mathbf{s}$ *sor feltételesen konvergens, akkor az* $N_+ := \{k \in \mathbb{N} | \mathbf{s}(k) > 0\}$ *és* $N_- := \{k \in \mathbb{N} | \mathbf{s}(k) < 0\}$ *halmazok végtelenek.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ olyan hogy valós számsorozat, hogy a $\sum \mathbf{s}$ sor konvergens.

Tegyük fel, hogy N_+ véges, és legyen $K_+ \in \mathbb{N}$ olyan szám, hogy minden $k \in \mathbb{N}_+$ esetén $k \leq K_+$ Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ számra, ha $k > N_+$, akkor $k \notin N_+$, tehát $\mathbf{s}(k) \leq 0$, vagyis $|\mathbf{s}(k)| = -\mathbf{s}(k)$. A hipotézis szerint a $\sum \mathbf{s}$ sor konvergens, így a $\sum(-\mathbf{s})$ sor is konvergens. Mivel pedig az $|\mathbf{s}|$ és $-\mathbf{s}$ valós számsorozatok egyenlőek a K_+-nál nagyobb természetes számok halmazán, így **??** szerint a $\sum |\mathbf{s}|$ sor konvergens. Tehát a $\sum \mathbf{s}$ sor abszolút konvergens, vagyis a $\sum \mathbf{s}$ sor nem feltételesen konvergens.

Tegyük fel, hogy N_- véges, és legyen $K_- \in \mathbb{N}$ olyan szám, hogy minden $k \in \mathbb{N}_-$ esetén $k \leq K_-$ Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ számra, ha $k > N_-$, akkor $k \notin N_-$, tehát $\mathbf{s}(k) \geq 0$, vagyis $|\mathbf{s}(k)| = \mathbf{s}(k)$. A hipotézis szerint a $\sum \mathbf{s}$ sor konvergens, és az $|\mathbf{s}|$ és $\mathbf{s}$ valós számsorozatok egyenlőek a K_--nál nagyobb természetes számok halmazán, így **??** szerint a $\sum |\mathbf{s}|$ sor konvergens. Tehát a $\sum \mathbf{s}$ sor abszolút konvergens, vagyis a $\sum \mathbf{s}$ sor nem feltételesen konvergens.

Tehát, ha az N_+ *vagy* N_- halmaz véges, akkor a $\sum \mathbf{s}$ sor nem feltételesen konvergens. Ez ekvivalens azzal, hogy ha a $\sum \mathbf{s}$ sor feltételesen konvergens, akkor N_+ és N_- végtelen halmazok. ■

4.11.2. Tétel. (**Riemann-tétel.**) *Legyen* $\mathbf{s}$ *olyan valós sorozat, amelyre a* $\sum \mathbf{s}$ *sor feltételesen konvergens. Ekkor minden* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *elemhez,* $a \leq b$ *esetén van olyan* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekció, hogy*

$$\liminf \sum (\mathbf{s} \circ \sigma) = a, \quad \limsup \sum (\mathbf{s} \circ \sigma) = b$$

teljesül.

Bizonyítás. (Vázlat) Legyen $N_+ := \{k \in \mathbb{N} | \mathbf{s}(k) > 0\}$, $N_- := \{k \in \mathbb{N} | \mathbf{s}(k) < 0\}$ és $N_0 := \{k \in \mathbb{N} | \mathbf{s}(k) = 0\}$. Először mutassuk meg, hogy N_+ és N_- *végtelen* halmazok, és elegendő arra az esetre bizonyítani, amikor $N_0 = \emptyset$.

Legyenek $\sigma_+ : \mathbb{N} \to N_+$ és $\sigma_- : \mathbb{N} \to N_-$ szigorúan monoton növő bijekciók (ilyenek egyértelműen léteznek), és rögzítsünk két olyan $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ valós számsorozatot, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{a}(n) \leq \mathbf{b}(n)$, továbbá

- ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\lim \mathbf{a} = a$, és ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\lim \mathbf{b} = b$;
- ha $a = -\infty$, akkor $\inf \mathbf{a} = a$;
- ha $b = +\infty$, akkor $\sup \mathbf{b} = b$.

Mutassuk meg, hogy a $\sum(\mathbf{s} \circ \sigma_+)$ és $\sum(\mathbf{s} \circ \sigma_-)$ állandó előjelű sorozatokhoz tartozó sorok *divergensek*, majd egyszerű rekurzióval értelmezzük azokat a $\mathbf{A}, \mathbf{B} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és $\tau_+, \tau_- : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ sorozatokat, amelyekre a következők teljesülnek:

- $\tau_+(0)$ az a legkisebb elem $\mathbb{N}^*$-ban, amelyre

$$\mathbf{B}(0) := \sum_{k=0}^{\tau_+(0)-1} \mathbf{s}(\sigma_+(k)) > \mathbf{b}(0);$$

– $\tau_-(0)$ az a legkisebb elem $\mathbb{N}^*$-ban, amelyre

$$\mathbf{A}(0) := \mathbf{B}(0) + \sum_{k=0}^{\tau_-(0)-1} \mathbf{s}(\sigma_-(k)) < \mathbf{a}(0);$$

– minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tau_+(n+1)$ az a legkisebb elem $\mathbb{N}$-ben, amely $\tau_+(n)$-nél nagyobb és olyan, hogy

$$\mathbf{B}(n+1) := \mathbf{A}(n) + \sum_{k=\tau_+(n)}^{\tau_+(n+1)-1} \mathbf{s}(\sigma_+(k)) > \mathbf{b}(n+1);$$

– minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tau_-(n+1)$ az a legkisebb elem $\mathbb{N}$-ben, amely $\tau_-(n)$-nél nagyobb és olyan, hogy

$$\mathbf{A}(n+1) := \mathbf{B}(n+1) + \sum_{k=\tau_-(n)}^{\tau_-(n+1)-1} \mathbf{s}(\sigma_-(k)) < \mathbf{a}(n+1).$$

Teljes indukcióval bizonyíthatjuk be a következő összefüggéseket: minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\mathbf{B}(n) = \sum_{k=0}^{\tau_+(n)-1} \mathbf{s}(\sigma_+(k)) + \sum_{k=0}^{\tau_-(n-1)-1} \mathbf{s}(\sigma_-(k)),$$
$$\mathbf{A}(n) = \sum_{k=0}^{\tau_+(n)-1} \mathbf{s}(\sigma_+(k)) + \sum_{k=0}^{\tau_-(n)-1} \mathbf{s}(\sigma_-(k)),$$
$$|\mathbf{B}(n) - \mathbf{b}(n)| < \mathbf{s}(\sigma_+(\tau_+(n)-1)), \quad |\mathbf{A}(n) - \mathbf{a}(n)| < \mathbf{s}(\sigma_-(\tau_-(n)-1)).$$

Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén
– ha $k \leq \tau_+(0) - 1$, akkor $\sigma(k) := \sigma_+(k)$;
– ha $\tau_+(0) \leq k \leq \tau_+(0) + \tau_-(0) - 1$, akkor $\sigma(k) := \sigma_-(k - \tau_+(0))$;
– ha $k \geq \tau_+(0)+\tau_-(0)$, akkor egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\tau_-(n)+\tau_+(n) \leq k \leq \tau_-(n+1) + \tau_+(n+1) - 1$: ekkor legyen

$$\sigma(k) := \begin{cases} \sigma_+(k - \tau_-(n)) & , \text{ha } k \leq \tau_-(n) + \tau_+(n+1) - 1 \\ \sigma_-(k - \tau_+(n+1)) & , \text{ha } k \geq \tau_-(n) + \tau_+(n+1). \end{cases}$$

Ezután belátható, hogy $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan bijekció, amelyre

$$\liminf \sum (\mathbf{s} \circ \sigma) = a, \quad \limsup \sum (\mathbf{s} \circ \sigma) = b$$

teljesül. ■

4.11.3. Tétel. *Ha* $\mathbf{s}$ *tetszőleges számsorozat, akkor a* $\sum \mathbf{s}$ *sor pontosan akkor feltétlen konvergens, ha abszolút konvergens.*

Bizonyítás. Ha a $\sum \mathbf{s}$ sor feltételesen konvergens, akkor a $\sum \Re(\mathbf{s})$ és $\sum \Im(\mathbf{s})$ valós sorok közül legalább az egyik feltételesen konvergens, tehát a Riemann-tétel szerint van olyan átrendezése, amely divergens. Ezért a $\sum \mathbf{s}$ sornak is van divergens átrendezése, vagyis a sor nem feltétlen konvergens. ■

4.12. Valós szám felbontása bázisrendszer szerint

Emlékeztetünk arra, hogy egy $\mathbb{N}$-ben haladó $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton növő sorozatot **bázisrendszernek** nevezünk, ha $d_0 = 1$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén d_k osztója d_{k+1}-nek (**ENS** 5.2.1.). Például minden $a \in \mathbb{N}$ számra, ha $a > 1$, akkor $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ bázisrendszer, és a $((k+1)!)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat szintén bázisrendszer.

Láttuk azt is, hogy ha $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bázisrendszer, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $d_k \geq 2^k$, amiből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n} = 0.$$

4.12.1. Lemma. *Legyen* $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *bázisrendszer és*

$$\mathbf{c} \in \prod_{k\in\mathbb{N}^*} \left[\!\left[0, \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right]\!\right].$$

Ekkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k}$ *sor konvergens, és* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} \in [0,1]$. *Továbbá, ha* $m, N \in \mathbb{N}$ *olyan számok, hogy* $N+1 < m$ *és* $\mathbf{c}(m) < \frac{d_m}{d_{m-1}} - 1$, *akkor*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} \leq \frac{1}{d_N} - \frac{1}{d_m}.$$

Bizonyítás. Ha $k \in \mathbb{N}^*$, akkor $\mathbf{c}(k) \leq \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1$, ezért minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{d_k}{d_{k-1}} - 1}{d_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{d_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_n} = 1 - \frac{1}{d_n} < 1,$$

ami azt jelenti, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k}$ pozitív tagú sor konvergens, és $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} \in [0,1]$.

Legyenek $m, N \in \mathbb{N}$ olyan számok, hogy $N+1 < m$ és $\mathbf{c}(m) < \frac{d_m}{d_{m-1}} - 1$, vagyis

$\mathbf{c}(m) \leq \dfrac{d_m}{d_{m-1}} - 2$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $m < n$, akkor

$$\sum_{k=N+1}^{n} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} = \sum_{k=N+1}^{m-1} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} + \frac{\mathbf{c}(m)}{d_m} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{m-1} \frac{\dfrac{d_k}{d_{k-1}} - 1}{d_k} + \frac{\dfrac{d_m}{d_{m-1}} - 2}{d_m} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\dfrac{d_k}{d_{k-1}} - 1}{d_k} =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{m-1} \left(\frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k} \right) + \left(\frac{1}{d_{m-1}} - \frac{1}{d_m} - \frac{1}{d_m} \right) + \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k} \right) =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{n} \left(\frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k} \right) - \frac{1}{d_m} = \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{d_{k-1}} - \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_m} =$$

$$= \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{d_k} - \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_m} = \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{d_k} - \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_m} = \frac{1}{d_N} - \frac{1}{d_n} - \frac{1}{d_m}.$$

Mivel $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{d_n} = 0$, ebből következik, hogy

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=N+1}^{n} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} \leq \frac{1}{d_N} - \frac{1}{d_m}. \blacksquare$$

4.12.2. Lemma. *Legyen* $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *bázisrendszer és legyenek*

$$\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \prod_{k \in \mathbb{N}^*} \left[\!\left[0, \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1 \right]\!\right]$$

olyan rendszerek, hogy a

$$\left\{ k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \mathbf{c}(k) < \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1 \right\}, \quad \left\{ k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \mathbf{c}'(k) < \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1 \right\}$$

halmazok végtelenek. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}'(k)}{d_k} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}'.$$

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\{k \in \mathbb{N} | \mathbf{c}(k) \neq \mathbf{c}'(k)\} \neq \emptyset$. Legyen k_* ennek a halmaznak a legkisebb eleme. Ekkor fennáll a

$$\sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} = \sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{\mathbf{c}'(k)}{d_k}$$

egyenlőség, mert a hipotézis szerint ez igaz, ha $k_* = 1$, és ha $k_* > 1$, akkor a k_* szám minimalitási tulajdonsága miatt minden $1 \leq k < k_*$ természetes számra $\mathbf{c}(k) = \mathbf{c}'(k)$, tehát

$$\sum_{k=1}^{k_*-1} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} + \sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}'(k)}{d_k} = \sum_{k=1}^{k_*-1} \frac{\mathbf{c}'(k)}{d_k} + \sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{\mathbf{c}'(k)}{d_k},$$

tehát egyszerűsítve a $\displaystyle\sum_{k=1}^{k_*-1} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} = \sum_{k=1}^{k_*-1} \frac{\mathbf{c}'(k)}{d_k}$ számmal kapjuk a kívánt egyenlőséget.

A k_* szám definíciója szerint $\mathbf{c}(k_*) \neq \mathbf{c}'(k_*)$, és nyilvánvaló, hogy a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{c}'$ rendszerekre vonatkozó hipotézisek szimmetriája miatt, az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{c}(k_*) < \mathbf{c}'(k_*)$, vagyis $\mathbf{c}(k_*) + 1 \leq \mathbf{c}'(k_*)$.

A $\left\{k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \mathbf{c}(k) < \dfrac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right\}$ halmaz végtelen, ezért vehetünk olyan $m \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k_* + 1 < m$ és $\mathbf{c}(m) \leq \dfrac{d_m}{d_{m-1}} - 2$. Az előző lemma alapján ekkor

$$\sum_{k=k_*+1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} \leq \frac{1}{d_{k_*}} - \frac{1}{d_m},$$

tehát

$$\begin{aligned}\sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} &= \frac{\mathbf{c}(k_*)}{d_{k_*}} + \sum_{k=k_*+1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} \leq \frac{\mathbf{c}(k_*)}{d_{k_*}} + \frac{1}{d_{k_*}} - \frac{1}{d_m} < \\ &< \frac{\mathbf{c}(k_*)}{d_{k_*}} + \frac{1}{d_{k_*}} \leq \frac{\mathbf{c}'(k_*)}{d_{k_*}} \leq \sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{\mathbf{c}'(k)}{d_k},\end{aligned}$$

így $\displaystyle\sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} < \sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{\mathbf{c}'(k)}{d_k}$, ami ellentmond a $\displaystyle\sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{\mathbf{c}(k)}{d_k} = \sum_{k=k_*}^{\infty} \frac{\mathbf{c}'(k)}{d_k}$ egyenlőségnek. ■

4.12.3. Tétel. *Legyen $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bázisrendszer, és minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ számra értelmezzük az*

$$\mathbf{s}_k(x) := \begin{cases} [d_k x] - [d_{k-1} x]\left(\dfrac{d_k}{d_{k-1}}\right) & \text{, ha } k > 0 \\ [x] & \text{, ha } k = 0 \end{cases}$$

egész számot.

a) *Minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^*$ esetén $0 \leq \mathbf{s}_k(x) < \dfrac{d_k}{d_{k-1}}$, továbbá minden x valós számra a $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\mathbf{s}_k(x)}{d_k}$ (pozitív tagú) sor konvergens és*

$$x = [x] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{s}_k(x)}{d_k}.$$

b) *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a*

$$\left\{k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \mathbf{s}_k(x) < \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right\}$$

halmaz végtelen.

c) *Ha $\mathbf{a}$ olyan $\mathbb{Z}$-ben haladó sorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}^*$ számra $0 \leq \mathbf{a}(k) < \dfrac{d_k}{d_{k-1}}$ és a $\left\{k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \mathbf{a}(k) < \dfrac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right\}$ halmaz végtelen, akkor létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{a}(k) = \mathbf{s}_k(x)$.*

Bizonyítás. a) Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^*$. Ekkor az egészrész-függvény értelmezése alapján $[d_{k-1}x] \leq d_{k-1}x$ és $d_k x < [d_k x] + 1$, tehát az első egyenlőtlenségből a $\dfrac{d_k}{d_{k-1}}$ számmal való szorzás után kapjuk, hogy $[d_{k-1}x]\left(\dfrac{d_k}{d_{k-1}}\right) \leq d_k x$, így a második egyenlőtlenséget alkalmazva $[d_{k-1}x]\left(\dfrac{d_k}{d_{k-1}}\right) < [d_k x] + 1$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $[d_{k-1}x]\left(\dfrac{d_k}{d_{k-1}}\right) \leq [d_k x]$, vagyis $\mathbf{s}_k(x) \geq 0$. Ugyancsak az egészrész-függvény értelmezése alapján $d_{k-1}x < [d_{k-1}x] + 1$ és $[d_k x] \leq d_k x$, tehát az első egyenlőtlenségből a $\dfrac{d_k}{d_{k-1}}$ számmal való szorzás után kapjuk, hogy $d_k x < [d_{k-1}x]\left(\dfrac{d_k}{d_{k-1}}\right) + \left(\dfrac{d_k}{d_{k-1}}\right)$, így a második egyenlőtlenséget alkalmazva $[d_k x] < [d_{k-1}x]\left(\dfrac{d_k}{d_{k-1}}\right) + \left(\dfrac{d_k}{d_{k-1}}\right)$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{s}_k(x) < \dfrac{d_k}{d_{k-1}}$.

Legyen most $x \in \mathbb{R}$ rögzítve. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$[x] + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{s}_k(x)}{d_k} := [x] + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{[d_k x]}{d_k} - \frac{[d_{k-1}x]}{d_{k-1}} \right) = [x] + \sum_{k=1}^{n} \frac{[d_k x]}{d_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{[d_{k-1}x]}{d_{k-1}} =$$

$$= [x] + \sum_{k=1}^{n} \frac{[d_k x]}{d_k} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[d_j x]}{d_j} = \frac{[d_n x]}{d_n} = x + \frac{[d_n x] - d_n x}{d_n} \in \left]\!\!\left] -\frac{1}{d_n}, x \right]\!\!\right],$$

tehát

$$\left| x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbf{s}_k(x)}{d_k} \right| < \frac{1}{d_k}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{d_n} = 0$, ebből következik, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{\mathbf{s}_k(x)}{d_k}$ sor konvergens és

$$x = [x] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{s}_k(x)}{d_k}.$$

b) Tegyük fel, hogy az $x \in \mathbb{R}$ számra az

$$\left\{ k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \mathbf{s}_k(x) < \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1 \right\}$$

halmaz véges. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}^*$, hogy minden $k > N$ természetes számra $\mathbf{s}_k(x) = \dfrac{d_k}{d_{k-1}} - 1$, így az a) állításban igazolt formula és $[d_N x] + 1 > d_N x$ alapján

$$x = [x] + \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathbf{s}_k(x)}{d_k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\dfrac{d_k}{d_{k-1}} - 1}{d_k} = \frac{[d_N x]}{d_N} + \frac{1}{d_N} > x,$$

ami lehetetlen.

c) Legyen $\mathbf{a}$ olyan $\mathbb{Z}$-ben haladó sorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}^*$ számra $0 \leq \mathbf{a}(k) < \dfrac{d_k}{d_{k-1}}$ és a $\left\{ k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \mathbf{a}(k) < \dfrac{d_k}{d_{k-1}} - 1 \right\}$ halmaz végtelen.

Ha $k \in \mathbb{N}^*$, akkor $0 \le \mathbf{a}(k) \le \dfrac{d_k}{d_{k-1}} - 1$, ezért a 4.12.1. lemma szerint a $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathbf{a}(k)}{d_k}$ pozitív tagú sor konvergens és $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{a}(k)}{d_k} \in [0,1]$. Valójában $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{a}(k)}{d_k} < 1$ is teljesül, mert az $\mathbf{a}$-ra vonatkozó hipotézis alapján van olyan $m > 1$ természetes szám, hogy $\mathbf{a}(m) < \dfrac{d_m}{d_{m-1}} - 1$, ezért 4.12.1. alapján

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{a}(k)}{d_k} \le \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_m} = 1 - \frac{1}{d_m} < 1.$$

Vezessük be az

$$x := \mathbf{a}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{a}(k)}{d_k}$$

valós számot. Ekkor $\mathbf{a}(0) \in \mathbb{Z}$ és az előzőek szerint $\mathbf{a}(0) \le x < \mathbf{a}(0)+1$, vagyis $\mathbf{a}(0) = [x]$. Ebből az a) állítás alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{a}(k)}{d_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{s}_k(x)}{d_k}.$$

De b) szerint a $\left\{k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \mathbf{s}_k(x) < \dfrac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right\}$ halmaz végtelen, és az $\mathbf{a}$-ra vonatkozó hipotézis alapján a $\left\{k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \mathbf{a}(k) < \dfrac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right\}$ halmaz is végtelen. Ebből 4.12.2. alkalmazásával nyerjük, hogy minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén $\mathbf{s}_k(x) = \mathbf{a}(k)$, és mivel $\mathbf{s}_0(x) := [x] = \mathbf{a}(0)$ is igaz, így minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\mathbf{s}_k(x) = \mathbf{a}(k)$.

Ebből már következik az x valós szám egyértelműsége is, mert a) alapján az $(\mathbf{s}_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat meghatározza az x számot. ■

4.12.4. Definíció. *Legyen $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bázisrendszer, és minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ számra értelmezzük az*

$$\mathbf{s}_k(x) := \begin{cases} [d_k x] - [d_{k-1} x]\left(\dfrac{d_k}{d_{k-1}}\right) & , \text{ ha } k > 0 \\ [x] & , \text{ ha } k = 0 \end{cases}$$

egész számot. Ekkor az $(\mathbf{s}_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot az x valós szám **felbontásának** *nevezzük a $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bázisrendszer szerint.*

4.12.5. Tétel. *Az $\mathbb{R}$ és $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ halmazok ekvipotensek (vagyis az $\mathbb{R}$ halmaz kontinuum-számosságú).*

Bizonyítás. Rögzítsünk bármilyen $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bázisrendszert, és vezessük be a következő halmazt:

$$S := \left\{\mathbf{a} \in \prod_{k\in\mathbb{N}^*} \left[\!\left[0, \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right]\!\right] \,\middle|\, \text{a } \{k \in \mathbb{N}^* | \mathbf{a}(k) < (d_k/d_{k-1}) - 1\} \text{ halmaz végtelen}\right\}.$$

Az 4.12.3. tétel alapján az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times S; \quad x \mapsto ([x], (\mathbf{s}_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*})$$

leképezés *bijekció.* Az S halmaz kontinuum-számosságú, mert

– *kisebb-egyenlő számosságú* az $\mathscr{F}(\mathbb{N}^*;\mathbb{N})$ függvényhalmaznál, így $\mathscr{P}(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N})$-nél is kisebb-egyenlő számosságú, viszont ez utóbbi halmaz $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-nel ekvipotens, mert $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ ekvipotensek;

– *nagyobb-egyenlő számosságú* az

$$\{\mathbf{a} \in \mathscr{F}(\mathbb{N}^*;\{0,1\}) | \text{ a } \{k \in \mathbb{N}^* | \mathbf{a}(k) = 0\} \text{ halmaz végtelen}\}$$

halmaznál, amely ekvipotens az $\mathbb{N}^*$ végtelen részhalmazainak halmazával, vagyis $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-nel (**ENS** 6.3.14.), ezért a Schröder–Bernstein tétel (**ENS** 2.5.5.) és a számosságaritmetika alaptétele (**ENS** 6.3.1.) szerint $\mathbb{Z} \times S$ ekvipotens $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-nel. ■

4.13. Gyakorlatok

1. Legyen S azon $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvények halmaza, amelyekre $\sigma(0) = 0$. Minden $\mathbb{K}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozatra és $\sigma \in S$ függvényre legyen $\mathbf{s}_\sigma$ az a $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, amely minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz az

$$\mathbf{s}_\sigma(n) := \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} \mathbf{s}(k)$$

értéket rendeli.

a) Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, hogy a $\sum \mathbf{s}$ sor konvergens, akkor *minden* $\sigma \in S$ függvényre a $\sum \mathbf{s}_\sigma$ sor is konvergens és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}_\sigma(k)$$

teljesül.

b) Van olyan $\mathbf{s}$ számsorozat, amelyhez léteznek olyan $\sigma, \sigma' \in S$ függvények, hogy $\sum \mathbf{s}_\sigma$ konvergens és $\sum \mathbf{s}_{\sigma'}$ divergens (ekkor az a) alapján $\sum \mathbf{s}$ nem lehet konvergens).

c) Legyen $S' \subseteq S$ olyan *véges* halmaz, hogy

$$\bigcup_{\sigma \in S'} \mathrm{Im}(\sigma) = \mathbb{N}.$$

Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, amelyre minden $\sigma \in S'$ esetén a $\sum \mathbf{s}_\sigma$ sor konvergens *és az összege független* σ-tól, akkor a $\sum \mathbf{s}$ sor konvergens.

2. Az $e := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ szám *irracionális*, továbbá a $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{\frac{k(k+1)}{2}}}$ valós sor konvergens, és az összege szintén irracionális szám.

(*Útmutatás.* Mindkét esetben indirekt bizonyíthatunk.)

3. Mutassuk meg, hogy a $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ sor feltételesen konvergens, és az önmagával vett

Cauchy-szorzata divergens sor.

(*Útmutatás.* Minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \leq n$, akkor

$$(k+1)(n-k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2,$$

következésképpen

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right)\right| = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{n+1}{\frac{n}{2}+1}$$

teljesül, így a

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

sorozat nem tart 0-hoz, így a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right)\right)$$

sor divergens.)

4. (*Általánosított kondenzációs kritérium*) Legyen $p \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $p \geq 2$, és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $\mathbb{R}_+$-ban haladó monoton fogyó sorozat. Ekkor az $\mathbb{R}_+$-ban haladó

$$\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}; \qquad n \mapsto s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \qquad n \mapsto s'_n := \sum_{k=0}^{n} p^k x_{p^k}$$

monoton növő sorozatokra teljesülnek a következők:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists m \in \mathbb{N}): \; s_n \leq (p-1)s'_m,$$

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}^*): \; s'_m \leq \frac{p}{p-1}s_n,$$

tehát a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} x_k \quad \text{és} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} p^k x_{p^k}$$

sorok *ekvikonvergensek*, vagyis egyszerre konvergensek, vagy egyszerre divergensek. (Nyilvánvaló, hogy a kondenzációs kritérium ennek az a speciális esete, amikor $p = 2$.)

(*Útmutatás.* Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$s_{p^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=p^k}^{p^{k+1}-1} x_j\right), \qquad s_{p^n} = x_1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=p^k+1}^{p^{k+1}} x_j\right)$$

teljesül. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyása miatt minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\sum_{j=p^k}^{p^{k+1}-1} x_j \leq (p-1)p^k x_{p^k},$$

valamint
$$\sum_{j=p^k+1}^{p^{k+1}} x_j \geq (p-1)p^k x_{p^{k+1}} = \left(\frac{p-1}{p}\right) p^{k+1} x_{p^{k+1}},$$
amiből kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:
$$s_{p^n-1} \leq (p-1)\sum_{k=0}^{n-1} p^k x_{p^k} = (p-1)s'_{n-1},$$
$$s_{p^n} \geq x_1 + \left(\frac{p-1}{p}\right)\sum_{k=0}^{n-1} p^{k+1} x_{p^{k+1}} = x_1 + \left(\frac{p-1}{p}\right)(s'_n - x_1).$$
Az utolsó egyenlőtlenségből adódik, hogy $n \in \mathbb{N}^*$ esetén
$$s'_n \leq x_1 + \left(\frac{p}{p-1}\right)(s_{p^n} - x_1) = -\frac{x_1}{p-1} + \left(\frac{p}{p-1}\right) s_{p^n} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) s_{p^n},$$
mert $x_1 \geq 0$.

Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor $n \leq p^n - 1$ miatt $s_n \leq s_{p^n-1} \leq (p-1)s'_{n-1}$, tehát az $m := n-1$ számra $s_n \leq (p-1)s'_m$ teljesül. Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor véve olyan $n \in \mathbb{N}^*$ számot, amelyre $p^m \leq n$ kapjuk, hogy $s'_m \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) s_{p^m} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) s_n$.)

5. Adjunk olyan bizonyítást a Leibniz-féle konvergenciakritériumra, amely nem használja fel az Abel-kritériumot!

(*Útmutatás.* Legyen $\mathbf{a}$ monoton fogyó, $\mathbb{R}_+$-ban haladó zérussorozat, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen
$$\mathbf{S}(n) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathbf{a}(k).$$
Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor
$$\begin{aligned}\mathbf{S}(2n+1) &= \mathbf{S}(2n) - \mathbf{a}(2n+1) \leq \mathbf{S}(2n),\\ \mathbf{S}(2n+2) &= \mathbf{S}(2n) - \mathbf{a}(2n+1) + \mathbf{a}(2n+2) \leq \mathbf{S}(2n),\\ \mathbf{S}(2n+3) &= \mathbf{S}(2n+1) + \mathbf{a}(2n+2) - \mathbf{a}(2n+3) \geq \mathbf{S}(2n+1).\end{aligned}$$
Ez azt jelenti, hogy az $(\mathbf{S}(2n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növő, az $(\mathbf{S}(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyó, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{S}(2n+1) \leq \mathbf{S}(2n)$. Ezért a Cantor-féle közösrész-tételt alkalmazva az $([\mathbf{S}(2n+1), \mathbf{S}(2n)])_{n\in\mathbb{N}}$ intervallum-sorozatra kapjuk, hogy
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\mathbf{S}(2n+1), \mathbf{S}(2n)] \neq \emptyset.$$
Ha x eleme ennek a halmaznak, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{S}(2n+1) \leq x \leq \mathbf{S}(2n)$, ugyanakkor $\mathbf{S}(2n) - \mathbf{S}(2n+1) = \mathbf{a}(2n+1)$, és a hipotézis alapján $\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}(2n+1) = 0$, ezért az $(\mathbf{S}(2n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\mathbf{S}(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok x-hez konvergálnak, tehát $\mathbf{S}$ konvergens sorozat, vagyis a $\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \mathbf{a}(k)$ alternáló sor konvergens.

Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzítve; ekkor minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re
$$\sum_{k=m}^{m+2n+1} (-1)^k \mathbf{a}(k) = (-1)^m \sum_{j=0}^{n} \left(\mathbf{a}(m+2j) - \mathbf{a}(m+2j+1)\right),$$

és $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$ esetén $\mathbf{a}(m+2j) - \mathbf{a}(m+2j+1) \geq 0$, ezért

$$\left|\sum_{k=m}^{m+2n+1} (-1)^k \mathbf{a}(k)\right| = \sum_{j=0}^{n} (\mathbf{a}(m+2j) - \mathbf{a}(m+2j+1)) =$$

$$= \mathbf{a}(m) - \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{a}(m+2j+1) - \mathbf{a}(m+2j+2)) - \mathbf{a}(m+2n+1) \leq \mathbf{a}(m),$$

hiszen $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n-1$ esetén $\mathbf{a}(m+2j+1) - \mathbf{a}(m+2j+2) \geq 0$, valamint $\mathbf{a}(m+2n+1) \geq 0$. Ebből következik, hogy

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \mathbf{a}(k)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=m}^{m+2n+1} (-1)^k \mathbf{a}(k)\right| \leq \mathbf{a}(m)$$

teljesül.)

6. Minden $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ számsorozatra értelmezzük azt a $\mathbf{a}\top\mathbf{b}$ számsorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\mathbf{a}\top\mathbf{b})(n) := \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ \max(j,k)=n} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k).$$

Mutassuk meg, hogy ha a $\sum \mathbf{a}$ és $\sum \mathbf{b}$ sorok konvergensek, akkor a $\sum(\mathbf{a}\top\mathbf{b})$ sor is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{a}\top\mathbf{b})(n) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} \mathbf{a}(k)\right) \cdot \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} \mathbf{b}(k)\right)$$

teljesül. (Megjegyezzük, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ számsorozathoz rendelt $\sum(\mathbf{a}\top\mathbf{b})$ sort a $\sum \mathbf{a}$ és $\sum \mathbf{b}$ sorok *téglányszorzatának* nevezzük.)

(*Útmutatás.* Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ számsorozatok. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=0}^{N} (\mathbf{a}\top\mathbf{b})(n) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ j,k\leq N} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}^{N} \mathbf{a}(k)\right) \cdot \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}^{N} \mathbf{b}(k)\right),$$

amiből azonnal következik az állítás.)

7. Minden $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ számsorozatra értelmezzük azt az $\mathbf{a}*\mathbf{b}$-vel jelölt számsorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\mathbf{a}*\mathbf{b})(n) := \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ j+k=n} \mathbf{a}(j)\mathbf{b}(k) \quad \left(= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}(k)\mathbf{b}(n-k)\right).$$

a) Mutassuk meg, hogy a

$$\mathscr{F}(\mathbb{N};\mathbb{K}) \times \mathscr{F}(\mathbb{N};\mathbb{K}) \to \mathscr{F}(\mathbb{N};\mathbb{K}); \quad (\mathbf{a},\mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a}*\mathbf{b}$$

művelet asszociatív, kommutatív, neutrális elemes és disztributív az összeadásra nézve. Zérusosztómentes-e ez a művelet?

b) Igazoljuk, hogy ha **a** és **b** számsorozatok, akkor

$$\sum(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = \mathbf{a} * \left(\sum \mathbf{b}\right),$$

és ha $c \in \mathbb{K}$ esetén $\widehat{c}$ jelöli a c értékű konstans-sorozatot, akkor

$$\sum(\widehat{c} * \mathbf{b}) = c \cdot \left(\sum \mathbf{b}\right).$$

c) Ha **a** és **b** olyan számsorozatok, hogy a $\sum \mathbf{a}$ sor abszolút konvergens, és **b** zérussorozat, akkor $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ zérussorozat.

(Megjegyezzük, hogy az **a** és **b** számsorozathoz rendelt $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ sorozatot az **a** és **b** sorozatok *konvolúciós szorzatának* nevezzük. Világos, hogy ha **a** és **b** számsorozatok, akkor a $\sum(\mathbf{a} * \mathbf{b})$ sor megegyezik a $\sum \mathbf{a}$ és $\sum \mathbf{b}$ sorok Cauchy-szorzatával.)

(*Útmutatás.* A c) állítás bizonyításánál kövessük a Mertens-tétel bizonyításában bemutatott gondolatmenetet!)

8. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ valós számoknak olyan rendszere, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $x_n \geq 0$, és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ sor konvergens.

a) Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k x_k = 0.$$

b) Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k x_k\right)$$

sor konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k x_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

c) Bizonyítsuk be hogy

$$\lim_{n\to\infty} n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} = 0,$$

továbbá a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

sor konvergens és fennáll a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

egyenlőtlenség.

(*Útmutatás.* A c) állítás nyilvánvalóan következik a)-ból, b)-ből és a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből.

Az a) állítás bizonyításához először megjegyezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} kx_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} x_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} x_k\right).$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ sor konvergenciája miatt vehetünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $j > N'$ természetes számra $\sum\limits_{k=j}^{\infty} x_k < \dfrac{\varepsilon}{2}$, tehát minden $n \geq j$ természetes számra $\sum\limits_{k=j}^{n} x_k < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > N'$. Ekkor

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kx_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} x_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N'}\left(\sum_{k=j}^{n} x_k\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=N'+1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} x_k\right).$$

Világos, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{j=N'+1}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} x_k\right) < \frac{1}{n}(n-N')\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

továbbá

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N'}\left(\sum_{k=j}^{n} x_k\right) \leq \frac{1}{n}N'\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $N \geq N'$ és $\dfrac{N'}{N}\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az előzőek alapján minden $n > N$ természetes számra

$$0 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kx_k < \varepsilon,$$

amivel az a) állítást igazoltuk.
A b) állítás bizonyításához legyen $N \in \mathbb{N}^*$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} kx_k\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{kx_k}{n(n+1)}\right) = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=k}^{N}\frac{kx_k}{n(n+1)}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\right)kx_k = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)kx_k = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1}\right)kx_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} x_k - \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N} kx_k.$$

Az a) állítás alapján

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N} kx_k = 0,$$

amiből az előző egyenlőségek alapján következik a b) állítás.)

4. SZÁMSOROK

5. fejezet

Alkalmazás: Elemi függvények

5.1. Elemi analitikus függvények

5.1.1. Definíció. *Legyen* **a** *tetszőleges* $\mathbb{K}$*-ban haladó sorozat és* $c \in \mathbb{K}$*. Ekkor* $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ *jelöli azt a* $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvényt, amelyre*

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}) := \left\{ z \in \mathbb{K} \;\middle|\; \text{"}a \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(z-c)^k \text{ sor konvergens"} \right\},$$

és minden $z \in \mathrm{Dom}(\mathrm{P}_{\mathbf{a},c})$ *esetén*

$$\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k)(z-c)^k.$$

A $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ *függvényt* **a-együtthatójú**, c **centrumú elemi analitikus függvénynek** *nevezzük.* **Polinomiális függvényeknek** *nevezzük azokat a* $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ *alakú függvényeket, amelyekre a* $\{k \in \mathbb{N} | \mathbf{a}(k) \neq 0\}$ *halmaz véges.*

Míg a polinomiális függvények előállításához elegendőek a $\mathbb{K}$ test algebrai műveletei, addig az általános elemi analitikus függvények konstrukciója megköveteli a határérték analitikus fogalmát.

A Cauchy–Hadamard-tétel szerint az **a** együtthatójú, c centrumú elemi analitikus függvény definíciós tartománya tartalmazza a $\{z \in \mathbb{K} | |z-c| < \mathrm{R}_{\mathbf{a}}\}$ halmazt, ahol

$$\mathrm{R}_{\mathbf{a}} := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k}} & \text{, ha } 0 < \limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} < +\infty, \\ 0 & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = +\infty, \\ +\infty & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = 0, \end{cases}$$

az **a** sorozathoz tartozó Cauchy-féle konvergenciasugár. Sőt azt is tudjuk, hogy a $\{z \in \mathbb{K} | |z-c| < \mathrm{R}_{\mathbf{a}}\}$ halmaz minden pontjában a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(z-c)^k$ sor *abszolút konvergens*, ezért a $\{z \in \mathbb{K} | |z-c| < \mathrm{R}_{\mathbf{a}}\}$ halmazt a $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ elemi analitikus függvény *abszolútkonvergencia-tartományának* nevezzük. Továbbá, az $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ elemet a $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ elemi analitikus függvény *konvergenciasugarának* nevezzük. Szintén a Cauchy–Hadamard-tételből következik, hogy a $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ elemi analitikus függvény definíciós tartománya részhalmaza a $\{z \in \mathbb{K} | |z-c| \leq \mathrm{R}_{\mathbf{a}}\}$ halmaznak.

5.2. A komplex és a valós exponenciális függvény

5.2.1. Definíció. **Komplex exponenciális függvénynek** *nevezzük és az* Exp *szimbólummal jelöljük azt a* $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ *elemi analitikus függvényt, amelyre* $c := 0$ *és minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathbf{a}(k) := \frac{1}{k!}$. *Az* Exp *függvény* $\mathbb{R}$*-re vett leszűkítését a* **valós exponenciális függvénynek** *nevezzük és az* exp *szimbólummal jelöljük.*

5.2.2. Állítás. *A komplex exponenciális függvény definíciós tartománya egyenlő* $\mathbb{C}$*-vel, és minden* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *számra*

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},\\ \overline{\mathrm{Exp}(z)} &= \mathrm{Exp}(\overline{z}),\\ \mathrm{Exp}(z_1+z_2) &= \mathrm{Exp}(z_1)\mathrm{Exp}(z_2).\end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{a}$ az a sorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{a}(k) := \frac{1}{k!}$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\frac{\mathbf{a}(k+1)}{\mathbf{a}(k)} = \frac{1}{k+1}$, ezért

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{a}(k+1)}{\mathbf{a}(k)} = 0,$$

amiből 4.4.2. alapján következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{a}(k))^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} = +\infty$, tehát az Exp függvény definíciós tartománya egyenlő $\mathbb{C}$-vel, és minden $z \in \mathbb{C}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}$$

sor abszolút konvergens, és az összege egyenlő $\mathrm{Exp}(z)$-vel.

Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor

$$\overline{\mathrm{Exp}(z)} := \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \mathrm{Exp}(\overline{z}).$$

Ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z_1^k}{k!}$ és $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z_2^k}{k!}$ sorok abszolút konvergenciáját, a Mertens-tételt, valamint a binomiális tételt alkalmazva:

$$\mathrm{Exp}(z_1)\cdot\mathrm{Exp}(z_2) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^j}{j!}\frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k} k!\frac{z_1^j}{j!}\frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_1^j z_2^{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = \mathrm{Exp}(z_1+z_2)$$

adódik. ■

5.2.3. Következmény. *Teljesülnek az* $\mathrm{Im}(\mathrm{Exp}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *és* $\mathrm{Im}(\exp) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ *összefüggések. Továbbá, minden* $z \in \mathbb{C}$ *esetén* $\mathrm{Exp}(-z) = (\mathrm{Exp}(z))^{-1}$.

Bizonyítás. Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor

$$\mathrm{Exp}(z) \cdot \mathrm{Exp}(-z) = \mathrm{Exp}(z + (-z)) = \mathrm{Exp}(0) = 1,$$

ezért $\mathrm{Exp}(z) \neq 0$ és $\mathrm{Exp}(-z) = (\mathrm{Exp}(z))^{-1}$. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\overline{\exp(x)} := \overline{\mathrm{Exp}(x)} = \mathrm{Exp}(\overline{x}) = \mathrm{Exp}(x) = \exp(x),$$

ezért $\exp(x) \in \mathbb{R}$. Továbbá, $x \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x > 1,$$

tehát $\exp(x) > 1$. Ha $x \in \mathbb{R}$ és $x < 0$, akkor $-x > 0$, tehát $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x) > 1$, így $1 > \exp(x) > 0$. ■

5.2.4. Következmény. *A valós exponenciális függvény szigorúan monoton növő (ezért injektív).*

Bizonyítás. Ha $x, x' \in \mathbb{R}$ és $x < x'$, akkor $x' - x > 0$, és az előző állítás bizonyításában láttuk, hogy $\exp(x' - x) > 1$, ezért $\exp(x) > 0$ miatt

$$\exp(x') = \exp(x + (x' - x)) = \exp(x)\exp(x' - x) > \exp(x)$$

teljesül. ■

5.2.5. Állítás. *Minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén, ha* $\alpha, \beta \in [0, 1]$ *olyan valós számok, hogy* $\alpha + \beta = 1$, *akkor*

$$\exp(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \cdot \exp(x) + \beta \cdot \exp(y).$$

Bizonyítás. (I) Először 1-től indított n-szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén, minden olyan $\alpha, \beta \in [0, 1]$ olyan valós számokra, amelyekre $\alpha + \beta = 1$, teljesül az

$$(\alpha x + \beta y)^n \leq \alpha x^n + \beta y^n$$

egyenlőtlenség. Ez $n := 1$ esetén triviálisan igaz.

Tegyük fel, hogy igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ számra és legyenek $x, y \in \mathbb{R}_+$ valamint $\alpha, \beta \in [0, 1]$ olyan valós számok, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ekkor az indukciós hipotézist alkalmazva kapjuk, hogy

$$(\alpha x + \beta y)^{n+1} = (\alpha x + \beta y)^n (\alpha x + \beta y) \leq (\alpha x^n + \beta y^n)(\alpha x + \beta y),$$

tehát elegendő azt igazolni, hogy

$$\Delta := \alpha x^{n+1} + \beta y^{n+1} - (\alpha x^n + \beta y^n)(\alpha x + \beta y) \geq 0.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\Delta = \alpha x^{n+1} + \beta y^{n+1} - \alpha^2 x^{n+1} - \beta^2 y^{n+1} - \alpha\beta(x^n y + x y^n) =$$

$$= \alpha(1 - \alpha) x^{n+1} + \beta(1 - \beta) y^{n+1} - \alpha\beta(x^n y + x y^n) \overset{(1)}{=} \alpha\beta x^{n+1} + \beta\alpha y^{n+1} - \alpha\beta(x^n y + x y^n) =$$

$$= \alpha\beta \left(x^{n+1} + y^{n+1} - x^n y - x y^n \right) = \alpha\beta \left(x^n - y^n \right) (x - y) \overset{(2)}{\geq} 0,$$

ahol az $\stackrel{(1)}{=}$ egyenlőségnél azt használtuk fel, hogy $1-\alpha=\beta$ és $1-\beta=\alpha$, és a $\stackrel{(2)}{=}$ egyenlőtlenségnél alkalmaztuk az **ALG** 7.1.2. állítást, amely szerint az $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+;\ z \mapsto z^n$ függvény monoton növő, ezért $(x^n-y^n)(x-y) \geq 0$.

(II) Az exp függvény definícióját alkalmazva (I)-ből kapjuk, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}_+$ és $\alpha, \beta \in [0,1]$ olyan valós számok, hogy $\alpha+\beta=1$, akkor

$$\exp(\alpha x+\beta y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\alpha x+\beta y)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\alpha x^k+\beta y^k\right)=\alpha\cdot\exp(x)+\beta\cdot\exp(y).$$

(III) Ha $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok és $\alpha, \beta \in [0,1]$ olyan valós számok, hogy $\alpha+\beta=1$, akkor vehetünk olyan $z \in \mathbb{R}$ számot, hogy $x+z, y+z \in \mathbb{R}_+$, így (II)-t alkalmazva $x+z$-re, $y+z$-re, valamint α-ra és β-ra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\exp(\alpha x+\beta y)\cdot\exp(z)&=\exp(\alpha x+\beta y+z)=\exp(\alpha(x+z)+\beta(y+z))\leq\\ &\leq \alpha\cdot\exp(x+z)+\beta\cdot\exp(y+z)=(\alpha\cdot\exp(x)+\beta\cdot\exp(y))\exp(z),\end{aligned}$$

amiből az $\exp(z)>0$ számmal osztva kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. ■

5.3. Valós logaritmusfüggvény és a hatványozás

5.3.1. Definíció. *A valós exponenciális függvény inverzét valós logaritmusfüggvénynek nevezzük és a* log *szimbólummal jelöljük.*

Tehát $\log := \exp^{-1}$ az az $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$\mathrm{Dom}(\log) := \mathrm{Im}(\exp) \subseteq \mathbb{R}_+^*,$$

és minden $x \in \mathrm{Dom}(\log)$ esetén $\log(x) \in \mathbb{R}$ az a szám, amelyre $\exp(\log(x))=x$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{Im}(\log)=\mathrm{Dom}(\exp)=\mathbb{R},$$

vagyis a log függvény *ráképez* $\mathbb{R}$-re.

5.3.2. Állítás. *A valós logaritmusfüggvény szigorúan monoton növő, és minden* $x, x' \in \mathrm{Dom}(\log)$ *esetén* $x\cdot x' \in \mathrm{Dom}(\log)$, *valamint*

$$\log(x\cdot x')=\log(x)+\log(x').$$

Bizonyítás. A log függvény definíciója szerint $x, x' \in \mathrm{Dom}(\log)$ esetén (egyértelműen) léteznek azok az $y, y' \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre $x=\exp(y)$ és $x'=\exp(y')$. Ekkor $x\cdot x'=\exp(y)\cdot\exp(y')=\exp(y+y') \in \mathrm{Im}(\exp)=\mathrm{Dom}(\log)$, és az is látszik, hogy $\log(x\cdot x')=y+y'=\log(x)+\log(x')$. A log függvény szigorú monoton növése triviálisan következik abból, hogy exp szigorúan monoton növő és $\log := \exp^{-1}$. ■

Később megmutatjuk, hogy $\mathrm{Im}(\exp)=\mathbb{R}_+^*$, tehát $\mathrm{Dom}(\log)=\mathbb{R}_+^*$ (**ANA** 2.7.4.). Azonban az analízis kifejtésének jelenlegi szintjén ez még egyáltalán nem látható. Addig is beszélünk Dom(log)-ról, de – a hiperharmonikus sorok abszolút konvergenciájáról szóló állítás kivételével – *nem tesszük fel*, hogy ez egyenlő $\mathbb{R}_+^*$-gal.

5.3.3. Definíció. *Ha* $a \in \mathrm{Dom}(\log)$ *és* $z \in \mathbb{C}$, *akkor*

$$a^z := \mathrm{Exp}(z\cdot\log(a)),$$

és az $a^z \in \mathbb{C}$ *számot a* **alapú**, z **kitevőjű hatványnak** *nevezzük.*

Az Exp és log függvényekre levezetett egyenlőségekből könnyen származtathatók a *hatványozás tulajdonságai.*

5.3.4. Állítás. (A hatványozás tulajdonságai)

a) *Ha* $a \in \mathrm{Dom}(\log)$*, akkor* $a^0 = 1$ *és* $a^1 = a$*.*

b) *Ha* $a \in \mathrm{Dom}(\log)$ *és* $x \in \mathbb{R}$*, akkor* $a^x \in \mathrm{Dom}(\log)$ *és minden* $\mathbb{C} \ni z$*-re*

$$(a^x)^z = a^{x \cdot z}.$$

c) *Ha* $a \in \mathrm{Dom}(\log)$ *és* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*, akkor*

$$a^{z_1+z_2} = a^{z_1} \cdot a^{z_2}.$$

d) *Ha* $a, b \in \mathrm{Dom}(\log)$ *és* $z \in \mathbb{C}$*, akkor*

$$(a \cdot b)^z = a^z \cdot b^z.$$

e) *Ha* $a \in \mathrm{Dom}(\log)$*, akkor minden* $\mathbb{N} \ni n$*-re* $\mathrm{Exp}(n \cdot \log(a))$ *megyezik az* $a \in \mathbb{R}$ *elem* n*-edik algebrai hatványával az* $\mathbb{R}$ *testben (ami azt jelenti, hogy az* a^n *jelölés nem vezet félreértésre).*

Bizonyítás. a) Ha $a \in \mathrm{Dom}(\log)$, akkor $\mathrm{Exp}(0) = 1$ miatt $a^0 := \mathrm{Exp}(0 \cdot \log(a)) = \mathrm{Exp}(0) = 1$, valamint a log definíciója alapján $a^1 := \mathrm{Exp}(1 \cdot \log(a)) = \exp(\log(a)) = a$.

b) Ha $a \in \mathrm{Dom}(\log)$ és $x \in \mathbb{R}$, akkor $a^x := \mathrm{Exp}(x \cdot \log(a)) = \exp(x \cdot \log(a)) \in \mathrm{Im}(\exp) = \mathrm{Dom}(\log)$. Tehát, ha $a \in \mathrm{Dom}(\log)$ és $x \in \mathbb{R}$, akkor $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$(a^x)^z := \mathrm{Exp}(z \cdot \log(a^x)) = \mathrm{Exp}(z \cdot x \cdot \log(a)) = a^{x \cdot z}$$

teljesül, hiszen a log függvény definíciója alapján nyilvánvaló, hogy $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$.

c) Ha $a \in \mathrm{Dom}(\log)$ és $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor az Exp függvényre vonatkozó függvényegyenlet alapján:

$$\begin{aligned} a^{z_1+z_2} &:= \mathrm{Exp}((z_1 + z_2) \cdot \log(a)) = \mathrm{Exp}(z_1 \cdot \log(a) + z_2 \cdot \log(a)) = \\ &= \mathrm{Exp}(z_1 \cdot \log(a)) \cdot \mathrm{Exp}(z_2 \cdot \log(a)) = a^{z_1} \cdot a^{z_2}. \end{aligned}$$

d) Ha $a, b \in \mathrm{Dom}(\log)$ és $z \in \mathbb{C}$, akkor a log és Exp függvényekre vonatkozó függvényegyenletek alapján:

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^z &:= \mathrm{Exp}(z \cdot \log(a \cdot b)) = \mathrm{Exp}(z \cdot (\log(a) + \log(b))) = \\ &= \mathrm{Exp}(z \cdot \log(a)) \cdot \mathrm{Exp}(z \cdot \log(a)) = a^z \cdot b^z. \end{aligned}$$

e) Legyen $a \in \mathrm{Dom}(\log)$, és értelmezzük az

$$\mathbf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \mathrm{Exp}(n \cdot \log(a))$$

sorozatot. Ekkor a) szerint $\mathbf{s}(0) = 1$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, a) és c) alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(n+1) &:= \mathrm{Exp}((n+1) \cdot \log(a)) = \mathrm{Exp}(n \cdot \log(a)) \cdot \mathrm{Exp}(1 \cdot \log(a)) = \\ &= \mathrm{Exp}(n \cdot \log(a)) \cdot a = \mathbf{s}(n) \cdot a \end{aligned}$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{s}$ megegyezik az $a \in \mathbb{R}$ elem által iterációval meghatározott algebrai hatványsorozattal az $\mathbb{R}$ testben. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha $a \in \mathrm{Dom}(\log)$ és $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor az $a^{z_1 \cdot z_2}$ szám értelmezve van, azonban lehetséges az, hogy a^{z_1} nem valós szám, így az $(a^{z_1})^{z_2}$ kifejezés *értelmetlen.*

Megjegyezzük még, hogy az

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

számot a *természetes logaritmus alapszámának* szokták nevezni, és ez a valós szám azért jelentős, mert $e \in \mathrm{Im}(\exp) = \mathrm{Dom}(\log)$ és $\log(e) = 1$, tehát a hatványozás definíciója szerint minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$e^z = \mathrm{Exp}(z \cdot \log(e)) = \mathrm{Exp}(z)$$

teljesül.

5.3.5. Állítás. *Minden $x, y \in \mathrm{Dom}(\log)$ esetén, ha $\alpha, \beta \in [0,1]$ olyan valós számok, hogy $\alpha + \beta = 1$, akkor*

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y.$$

Bizonyítás. A hatványozás definíciója szerint

$$\begin{aligned} x^\alpha y^\beta &= \exp(\alpha \log(x)) \cdot \exp(\beta \log(y)) = \exp\left(\alpha \log(x) + \beta \log(y)\right) \overset{(*)}{\leq} \\ &\overset{(*)}{\leq} \alpha \cdot \exp\left(\log(x)\right) + \beta \cdot \exp(\log(y)) = \alpha x + \beta y, \end{aligned}$$

ahol a $\overset{(*)}{\leq}$ egyenlőtlenségnél felhasználtuk a 5.2.5. állítást. ■

Fontos tény az, hogy a valós logaritmusfüggvény és a valós alapú hatványozás fogalma nagymértékben általánosítható. A *komplex logaritmusfüggvényről* és a *komplex alapú hatványozásról* a holomorf függvények elméletében (**HOL** 2.5.) lesz szó. További általánosítás található a funkcionálanalízisben (**FUN** 1.6.8. gyakorlat), a Banach-algebrák elméletében (**ALN** 2.7.6. állítás), a differenciálható sokaságok elméletben (**VEC** 2.5.), és a Banach–Lie-csoportok elméletében (**LIE** 6. fejezet).

5.4. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények

5.4.1. Definíció. Komplex trigonometrikus függvényeknek *nevezzük a következő függvényeket*

$$\begin{aligned} \mathrm{Sin} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad & z \mapsto \frac{\mathrm{Exp}(\mathbf{i}z) - \mathrm{Exp}(-\mathbf{i}z)}{2\mathbf{i}}, \\ \mathrm{Cos} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad & z \mapsto \frac{\mathrm{Exp}(\mathbf{i}z) + \mathrm{Exp}(-\mathbf{i}z)}{2}. \end{aligned}$$

A komplex trigonometrikus függvények $\mathbb{R}$-re vett leszűkítéseit **valós trigonometrikus függvényeknek** *nevezzük, és azokat a* sin, *illetve* cos *szimbólummal jelöljük.*

Komplex hiperbolikus függvényeknek *nevezzük a következő függvényeket*

$$\mathrm{Sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{\mathrm{Exp}(z) - \mathrm{Exp}(-z)}{2},$$
$$\mathrm{Ch} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{\mathrm{Exp}(z) + \mathrm{Exp}(-z)}{2}.$$

A komplex hiperbolikus függvények $\mathbb{R}$*-re vett leszűkítéseit* **valós hiperbolikus függvényeknek** *nevezzük, és azokat a* sh, *illetve* ch *szimbólummal jelöljük.*

Az Exp függvény tulajdonságaiból következik, hogy a valós trigonometrikus és hiperbolikus függvények értékei valósak, tehát ezek $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények. Továbbá, minden $z \in \mathbb{C}$ esetén nyilvánvalóak a

$$\mathrm{Sh}(\mathbf{i}z) = \mathbf{i}\mathrm{Sin}(z), \quad \mathrm{Ch}(\mathbf{i}z) = \mathrm{Cos}(z)$$

egyenlőségek, amelyek kapcsolatot teremtenek a trigonometrikus és a hiperbolikus függvények között. Továbbá, minden $z, z' \in \mathbb{C}$ esetén érvényesek a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sin}(z+z') &= \mathrm{Sin}(z)\mathrm{Cos}(z') + \mathrm{Sin}(z')\mathrm{Cos}(z),\\
\mathrm{Cos}(z+z') &= \mathrm{Cos}(z)\mathrm{Cos}(z') - \mathrm{Sin}(z)\mathrm{Sin}(z'),\\
\mathrm{Sh}(z+z') &= \mathrm{Sh}(z)\mathrm{Ch}(z') + \mathrm{Sh}(z')\mathrm{Ch}(z),\\
\mathrm{Ch}(z+z') &= \mathrm{Ch}(z)\mathrm{Ch}(z') + \mathrm{Sh}(z)\mathrm{Sh}(z')
\end{aligned}$$

addíciós formulák, amelyek nyilvánvalóan következnek az Exp függvényre vonatkozó addíciós formulából. A definíciókból az is nyilvánvalóan következik, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\mathrm{Cos}^2(z) + \mathrm{Sin}^2(z) \ = \ 1 \ = \ \mathrm{Ch}^2(z) - \mathrm{Sh}^2(z).$$

Megjegyezzük még, hogy a definíció alapján minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\mathrm{Exp}(\mathbf{i}z) = \mathrm{Cos}(z) + \mathbf{i}\mathrm{Sin}(z),$$

(**Euler–de Moivre-formula**), ezért, ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\Re(\mathrm{Exp}(\mathbf{i}x)) = \cos(x), \quad \Im(\mathrm{Exp}(\mathbf{i}x)) = \sin(x),$$

következésképpen

$$|\mathrm{Exp}(\mathbf{i}x)| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$$

teljesül. Később azt is látni fogjuk, hogy minden z komplex számhoz, $|z| = 1$ esetén létezik olyan x valós szám, amelyre $z = \mathrm{Exp}(\mathbf{i}x)$.

5.4.2. Állítás. *Minden* $z \in \mathbb{C}$ *esetén a*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

sorok abszolút konvergensek, és

$$\mathrm{Sin}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \mathrm{Cos}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$
$$\mathrm{Sh}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \mathrm{Ch}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Bizonyítás. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\frac{\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}\right|}{\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right|} = \frac{\left|\frac{1}{(2(k+1)+1)!}\right|}{\left|\frac{1}{(2k+1)!}\right|} = \frac{1}{(2k+2)(2k+3)},$$

valamint

$$\frac{\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!}\right|}{\left|\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right|} = \frac{\left|\frac{1}{(2(k+1))!}\right|}{\left|\frac{1}{(2k)!}\right|} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)},$$

ezért 4.4.2. szerint:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(2k+1)!}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(2k)!}\right|^{1/k} = 0,$$

így a Cauchy–Hadamard-tétel alapján minden $w \in \mathbb{C}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{w^k}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{w^k}{(2k)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{w^k}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{w^k}{(2k)!}$$

sorok abszolút konvergensek. Ugyanakkor minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z\cdot\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{(z^2)^k}{(2k+1)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{(z^2)^k}{(2k)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z\cdot\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(z^2)^k}{(2k+1)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(z^2)^k}{(2k)!}.$$

Ebből következik, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

sorok abszolút konvergensek.

Legyen $z \in \mathbb{C}$ rögzített; ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}(z) &:= \frac{\mathrm{Exp}(\mathbf{i}z) - \mathrm{Exp}(-\mathbf{i}z)}{2\mathbf{i}} := \frac{1}{2\mathbf{i}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{i}z)^k}{k!} - \frac{1}{2\mathbf{i}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mathbf{i}z)^k}{k!} = \\ &= \frac{1}{\mathbf{i}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^k}{2}\right)\left(\frac{(\mathbf{i}z)^k}{k!}\right) = \frac{1}{\mathbf{i}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\left(\frac{1-(-1)^k}{2}\right)\left(\frac{(\mathbf{i}z)^k}{k!}\right) = \\ &= \frac{1}{\mathbf{i}}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(\mathbf{i}z)^{2j+1}}{(2j+1)!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

A többi formula teljesen hasonló meggondolásokkal kapható. ■

5.5. Kondenzációs kritérium és hiperharmonikus sorok

5.5.1. Állítás. (Kondenzációs kritérium) *Ha* $\mathbf{s}$ *monoton fogyó,* $\mathbb{R}_+$*-ban haladó sorozat, akkor a*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{s}(k) \qquad \textit{és} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}}2^k\mathbf{s}(2^k)$$

sorok **ekvikonvergensek***, vagyis egyszerre konvergensek, vagy egyszerre divergensek (azonban természetesen egészen más lehet az összegük, ha konvergensek).*

Bizonyítás. A bizonyításban minden $a, b \in \mathbb{N}$ esetén a

$$\begin{aligned}[\![a,b[\![&:= \{k\in\mathbb{N} \mid a \le k < b\},\\ ]\!]a,b]\!] &:= \{k\in\mathbb{N} \mid a < k \le b\},\\ [\![a,b]\!] &:= \{k\in\mathbb{N} \mid a \le k \le b\}\end{aligned}$$

definíciókat alkalmazzuk.

Értelmezzük az $\mathbf{S}$ és $\mathbf{S}'$ valós sorozatokat úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\mathbf{S}(n) := \sum_{k=0}^{n}\mathbf{s}(k), \quad \mathbf{S}'(n) := \sum_{k=0}^{n}2^k\mathbf{s}(2^k),$$

ami a sorok definíciója szerint pontosan azt jelenti, hogy

$$\mathbf{S} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{s}(k), \quad \mathbf{S}' = \sum_{k\in\mathbb{N}}2^k\mathbf{s}(2^k).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(n) \overset{(1)}{\le} \mathbf{S}(2^n) = \mathbf{s}(0) + \sum_{k\in[\![1,2^n[\![}\mathbf{s}(k) + \mathbf{s}(2^n) \overset{(2)}{=} \mathbf{s}(0) + \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\sum_{j\in[\![2^k,2^{k+1}[\![}\mathbf{s}(j)\Big) + \mathbf{s}(2^n) \overset{(3)}{\le}\\ \overset{(3)}{\le} \mathbf{s}(0) + \sum_{k=0}^{n-1}2^k\mathbf{s}(2^k) + 2^n\mathbf{s}(2^n) = \mathbf{s}(0) + \mathbf{S}'(n), \qquad (1)\end{aligned}$$

ahol

– az $\overset{(1)}{\le}$ egyenlőtlenségnél felhasználtuk az $n \le 2^n$ egyenlőtlenséget és azt, hogy az $\mathbf{S}$

sorozat monoton növő, mert $\mathbf{s}$ a pozitív valós számok halmazában halad;

– a $\overset{(2)}{=}$ egyenlőségnél alkalmaztuk a $+$ művelet általános asszociativitásának tételét (**ENS** 4.7.1.), figyelembe véve, hogy a $([\![2^k, 2^{k+1}[\![)_{k\in[\![0,n[\![}$ halmazrendszer diszjunkt és $[\![1, 2^n[\![= \bigcup_{k=0}^{n-1}[\![2^k, 2^{k+1}[\![$;

– a $\overset{(3)}{\leq}$ egyenlőtlenségnél felhasználtuk az $\mathbf{s}$ sorozat monoton fogyását, amiből következik, hogy minden $k < n$ természetes számra $\sum_{j\in[\![2^k,2^{k+1}[\![}\mathbf{s}(j) \leq \mathrm{Card}([\![2^k, 2^{k+1}[\![)\mathbf{s}(k) = 2^k\mathbf{s}(2^k)$.

Hasonlóan kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(2^n) &= \mathbf{s}(0) + \mathbf{s}(1) + \sum_{k\in[\![2,2^n]\!]}\mathbf{s}(k) \overset{(4)}{=} \mathbf{s}(0) + \mathbf{s}(1) + \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j\in]\!]2^{k-1},2^k]\!]}\mathbf{s}(j)\Big) \overset{(5)}{\geq} \\ &\overset{(5)}{\geq} \mathbf{s}(0) + \mathbf{s}(1) + \sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\mathbf{s}(2^k) = \mathbf{s}(0) + \mathbf{s}(1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}2^k\mathbf{s}(2^k) = \\ &= \mathbf{s}(0) + \mathbf{s}(1) + \frac{1}{2}(\mathbf{S}'(n) - 2^0\mathbf{s}(2^0)) = \mathbf{s}(0) + \frac{1}{2}\mathbf{s}(1) + \frac{1}{2}\mathbf{S}'(n),\end{aligned} \tag{2}$$

ahol

– a $\overset{(4)}{=}$ egyenlőségnél alkalmaztuk a $+$ művelet általános asszociativitásának tételét (**ENS** 4.7.1.), figyelembe véve, hogy a $(]\!]2^{k-1}, 2^k]\!])_{k\in[\![1,n]\!]}$ halmazrendszer diszjunkt és $[\![2, 2^n]\!] = \bigcup_{k=1}^{n}]\!]2^{k-1}, 2^k]\!]$;

– az $\overset{(5)}{\geq}$ egyenlőtlenségnél felhasználtuk az $\mathbf{s}$ sorozat monoton fogyását, amiből következik, hogy minden $1 \leq k \leq n$ természetes számra $\sum_{j\in]\!]2^{k-1},2^k]\!]}\mathbf{s}(j) \geq \mathrm{Card}(]\!]2^{k-1}, 2^k)]\!])\mathbf{s}(2^k) = 2^{k-1}\mathbf{s}(2^k)$.

Az (1) és (2) összefüggésekből látszik, hogy az $\mathbf{S}$ és $\mathbf{S}'$ monoton növő valós sorozatok egyszerre korlátosak (vagyis konvergensek), vagy egyszerre nem korlátosak (vagyis divergensek), ezért a $\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{s}(k)$ és $\sum_{k\in\mathbb{N}}2^k\mathbf{s}(2^k)$ sorok ekvikonvergensek. ■

A következő állításban feltesszük, hogy $\mathrm{Dom}(\log) = \mathbb{R}_+^*$, így minden $k \in \mathbb{N}^*$ és $z \in \mathbb{C}$ esetén a k^z hatvány jól értelmezett.

5.5.2. Állítás. (A hiperharmonikus sorok abszolút konvergenciája) *Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor a*

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1}\frac{1}{k^z}$$

hiperharmonikus sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha $\Re(z) > 1$.

Bizonyítás. Minden $k \in \mathbb{N}^*$ és $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\begin{aligned}|k^z| &:= |\mathrm{Exp}(z\cdot\log(k))| = |\mathrm{Exp}(\Re(z)\cdot\log(k))||\mathrm{Exp}(i\Im(z)\cdot\log(k))| = \\ &= |\mathrm{Exp}(\Re(z)\cdot\log(k))| = k^{\Re(z)},\end{aligned}$$

ezért a $\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1}\frac{1}{k^z} := \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{(k+1)^z}$ sor abszolút konvergenciájának problémája arra az esetre redukálódik, amikor $z\in\mathbb{R}$. Ha $z\in\mathbb{R}$ és $z\leq 0$, akkor az $\left(\frac{1}{(k+1)^z}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz, ezért a $\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1}\frac{1}{k^z}$ sor divergens. Ha $z\in\mathbb{R}_+^*$, akkor az $\left(\frac{1}{(k+1)^z}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyó, tehát a kondenzációs kritérium szerint a $\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1}\frac{1}{k^z}$ sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum_{k\in\mathbb{N}}2^k\frac{1}{(2^k+1)^z}$ sor konvergens. Ha $z\in\mathbb{R}_+^*$ és $k\in\mathbb{N}$, akkor

$$0\leq 2^k\frac{1}{(2^k+1)^z}=\left(\frac{1}{2^{z-1}}\right)^k\cdot\frac{1}{(1+2^{-k})^z}\leq\left(\frac{1}{2^{z-1}}\right)^k$$

és $\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2^{z-1}}\right)^k$ konvergens geometriai sor, ha $z>1$. ■

5.6. Gyakorlatok

1. Mutassuk meg, hogy minden $a\in\mathrm{Dom}(\log)$ számra az $\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton növő, ha $a>1$ és szigorúan monoton fogyó, ha $a<1$. Ha $a\in\mathrm{Dom}(\log)$ és $a\neq 1$, akkor ennek az injektív függvénynek az inverzét $\log_a$ jelöli, és ezt a függvényt *a-alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük. Igazoljuk, hogy $a\in\mathrm{Dom}(\log)$ és $a\neq 1$ esetén $\mathrm{Im}(\log_a)=\mathbb{R}$ és $\mathrm{Dom}(\log_a)=\mathrm{Dom}(\log)$, valamint $\log(a)\neq 0$ és minden $\mathrm{Dom}(\log)\ni x$-re:

$$\log_a(x)=\frac{\log(x)}{\log(a)}$$

teljesül. (Megjegyezzük, hogy az általunk értelmezett log függvényt olykor az ln szimbólummal jelölik, és úgy nevezik, hogy *természetes alapú logaritmusfüggvény*, vagyis "*logaritmus naturalis*". A 10-es alapú logaritmus-függvényt, tehát a $\log_{10}$ függvényt az lg szimbólummal is jelöljük.)

VII. rész

Egyváltozós függvények analízise

BEVEZETÉS

Ebben a részben a függvényanalízis három alapvetően fontos fogalmáról: a *határértékről*, a *folytonosságról* és a *differenciálhatóságról* lesz szó; egyelőre valós változós és valós értékű, vagy komplex változós és komplex értékű függvények esetében.

Az "egyváltozós" függvények speciális esetének külön tárgyalását többféleképpen lehet indokolni. Egyrészt; ez az elmélet olyan konkrét, csakis analitikus eszközökkel előállítható objektumok létezéséről szól, amelyek viszonylag egyszerűen kezelhetők és könnyen áttekinthetők. Másrészt; az egyváltozós esetben megfigyelhető matematikai jelenségek egy része általánosítható többváltozós esetre, ezért e speciális elméletnek fontos motiváló szerep jut. Azonkívül természetesen az egyváltozós esetben megadható néhány érdekes fogalom, és bebizonyítható néhány érdekes állítás, amelyek általánosabb körülmények között vagy értelmezhetetlenek, vagy csak egyszerűen nem igazak.

Irodalomjegyzék

[1] N. Bourbaki, **Éleménts de mathématique. Fonctions d'une variable réelle.** Hermann, Paris

[2] W. Rudin, **Principles of Mathematical Analysis**, McGraw Hill Book Comp., 1964.

[3] L. Schwartz, **Analyse mathématique**, I., Hermann, Paris, 1967.

[4] Г. Е. Шилов, **Математический анализ, Функции одного переменного**, Наука, Москва, 1969.

[5] M. Zamansky, **Introduction a l'algébre et l'analyse modernes**, Dunod, 1963.

IRODALOMJEGYZÉK

1. fejezet

Függvény határértéke

1.1. A határérték értelmezése és lokalitása

1.1.1. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvény és* $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$. *Azt mondjuk, hogy* f**-nek létezik határértéke az** $\mathfrak{a}$ *pontban, ha* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, és létezik olyan* $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$*, amelyre*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*) \quad f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \backslash \{\mathfrak{a}\} \rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K})$$

teljesül. Minden ilyen tulajdonságú $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$ *pontot az* f *függvény* **határértékének** *nevezünk az* $\mathfrak{a}$ *pontban.*

Természetesen a határérték létezésének fogalma könnyen megadható a gömbök fogalmának alkalmazása nélkül is: az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvénynek pontosan akkor létezik határértéke az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek és van olyan $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$, amelyre

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f)) \quad (0 < |x - \mathfrak{a}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \mathfrak{b}| < \varepsilon)$$

teljesül. Figyeljük meg, hogy ez a formula nyilvánvalóan akkor is *értelmes*, ha $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. De ha $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor könnyen belátható, hogy *minden* $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$ pontra teljesül a fenti kijelentés, tehát akkor minden pont határértéke volna f-nek $\mathfrak{a}$-ban. Ezzel szemben érvényes a következő állítás.

1.1.2. Állítás. (A határérték egyértelműsége) *Ha* $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvény és* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, akkor legfeljebb egy határértéke létezik* f*-nek az* $\mathfrak{a}$ *pontban.*

Bizonyítás. Legyenek $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathbb{K}$ az f határértékei az $\mathfrak{a}$ pontban, továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Ekkor van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \backslash \{\mathfrak{a}\} \rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K})$, valamint van olyan $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $f\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \backslash \{\mathfrak{a}\} \rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b}';\mathbb{K})$. Ha $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $r \le \min(\delta, \delta')$, akkor $(\mathrm{B}_r(\mathfrak{a};K) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset$, mert $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. Ha x eleme ennek a halmaznak, akkor $f(x) \in \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K}) \cap \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b}';\mathbb{K})$, következésképpen $|\mathfrak{b} - \mathfrak{b}'| < 2\varepsilon$ teljesül. Ezért $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, mivel az előző egyenlőtlenség *minden* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számra igaz. ■

1.1.3. Definíció. *Ha* $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvény,* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek és létezik* f*-nek határértéke az* $\mathfrak{a}$ *pontban, akkor*

$$\lim_{\mathfrak{a}} f \quad \textit{vagy} \quad \lim_{x \to \mathfrak{a}} f(x)$$

jelöli az f *egyértelműen meghatározott határértékét az* $\mathfrak{a}$ *pontban.*

A határérték létezése "lokális" tulajdonság, tehát csak azon múlik, hogy a függvény hogyan viselkedik a pont közelében.

1.1.4. Állítás. (A határérték lokalitása) *Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$-nek, és tegyük fel, hogy létezik olyan $r > 0$ valós szám, amelyre $(\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(f) = (\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(g)$, és $f = g$ ezen a halmazon. Ekkor f-nek pontosan akkor létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ha g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Továbbá, ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor*

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}} g.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Vegyünk olyan $\delta' > 0$ valós számot, amelyre $f\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{a}} f; \mathbb{K})$. Ekkor az r definíciója alapján bármely $\delta \in]0, \min(r, \delta')[$ valós számra

$$g\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{a}} f; \mathbb{K}),$$

ami azt jelenti, hogy g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim_{\mathfrak{a}} g = \lim_{\mathfrak{a}} f$. ■

1.2. Átviteli elv határértékekre

1.2.1. Állítás. (Átviteli elv határértékekre) *Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. Az f-nek pontosan akkor létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ha minden $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozatra, $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens. Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor bármely $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozatra, $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$ esetén*

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim(f \circ \mathbf{s}).$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\mathbf{s}$ tetszőleges olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Ekkor vehetünk olyan $\delta > 0$ számot, amelyre $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{a}} f; \mathbb{K})$. A δ-hoz legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\mathbf{s}(n) - \mathfrak{a}| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}(n) \in (\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(f)$, ezért $f(\mathbf{s}(n)) \in \mathrm{B}_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{a}} f; \mathbb{K})$. Ez azt jelenti, hogy $f \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozat és $\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim(f \circ \mathbf{s})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozatra, $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens. Legyenek $\mathbf{s}'$ és $\mathbf{s}''$ olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozatok, hogy $\lim(\mathbf{s}') = \mathfrak{a}$ és $\lim(\mathbf{s}'') = \mathfrak{a}$. Képezzük azt az $\mathbf{s}$ számsorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(2k) := \mathbf{s}'(k)$ és $\mathbf{s}(2k+1) := \mathbf{s}''(k)$. Ekkor $\mathbf{s}$ szintén olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, ezért a hipotézis szerint $f \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozat. Azonban $f \circ \mathbf{s}'$ és $f \circ \mathbf{s}''$ részsorozatai $f \circ \mathbf{s}$-nek, így $\lim(f \circ \mathbf{s}') = \lim(f \circ \mathbf{s}'')$. Továbbá *létezik* olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, mert $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. Ezért jól értelmezett az $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$ pont, amelyre $\mathfrak{b} := \lim(f \circ \mathbf{s})$ bármely olyan $\mathbf{s}$ sorozatra, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál és $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban halad. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{b}$ az f határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, vagyis, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*) \;\; f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b}; \mathbb{K})$$

teljesül. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy ez nem igaz, vagyis

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*) \quad f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}\rangle \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K}) \neq \emptyset.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy minden $\delta > 0$ valós számra $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}\rangle\setminus\mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K}) \neq \emptyset$, vagyis

$$(\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle \mathbb{K} \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K})\rangle \neq \emptyset.$$

Legyen $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat. Ekkor ε definíciója szerint a

$$\Big((\mathrm{B}_{\delta_n}(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle \mathbb{K} \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K})\rangle\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

halmazsorozat minden tagja nem üres halmaz, így a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \Big((\mathrm{B}_{\delta_n}(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle \mathbb{K} \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K})\rangle\Big) \neq \emptyset.$$

Legyen $\mathbf{s}$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\mathbf{s}(n) - \mathfrak{a}| < \delta_n$ és $|f(\mathbf{s}(n)) - \mathfrak{b}| \geq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, tehát a feltevés szerint $f \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozat, továbbá a $\mathfrak{b}$ pont definíciója alapján $\mathfrak{b} = \lim(f \circ \mathbf{s})$. Ez viszont ellentmond annak, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(\mathbf{s}(n)) - \mathfrak{b}| \geq \varepsilon$. ■

1.2.2. Következmény. *Legyen* $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvény,* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, és* $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$*. A* $\mathfrak{b}$ *elem pontosan akkor határértéke* f*-nek az* $\mathfrak{a}$ *pontban, ha minden* $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$*-ban haladó* $\mathbf{s}$ *sorozatra,* $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$ *esetén az* $\lim(f \circ \mathbf{s}) = \mathfrak{b}$ *teljesül.*

Bizonyítás. Közvetlenül látszik az előző állítás alapján. ■

Az átviteli elv alkalmazható annak bizonyítására, hogy egy függvénynek *nem létezik* határértéke egy adott pontban. Ugyanis, ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor ahhoz, hogy f-nek ne létezzen határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban *elégséges*

– egy olyan $\mathrm{Dom}(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozatot találni, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, de az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat *nem konvergens*, vagy

– két olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ sorozatot találni, amelyekre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a} = \lim(\mathbf{s}')$, és az $f \circ \mathbf{s}$ és $f \circ \mathbf{s}'$ sorozatok konvergensek, de $\lim(f \circ \mathbf{s}) \neq \lim(f \circ \mathbf{s}')$.

Az átviteli elv alkalmazható függvény határértékének *kiszámítására*, ha már tudjuk, hogy a függvénynek létezik határértéke az adott pontban. Ugyanis, ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és f-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ egyenlő az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat határértékével, ahol $\mathbf{s}$ *tetszőleges* olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$.

1.3. Összetett függvények határértéke

Nem létezik olyan eljárás, amely tetszőleges $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényről és a $\mathrm{Dom}(f)$ bármely $\mathfrak{a}$ torlódási pontjáról eldöntené, hogy létezik-e f-nek határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban. Éppen ezért fontosak azok az állítások, amelyek visszavezetik a bonyolultabb alakú függvények határértéke létezésének problémáját egyszerűbb függvényekre.

1.3.1. Definíció. (A függvényműveletek értelmezése) *Legyenek* $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvények és* $c \in \mathbb{K}$.

a) $f + g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(f+g) := \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(f+g)$ *esetén* $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$;

b) $f \cdot g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(f \cdot g) := \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(f \cdot g)$ *esetén* $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$;

c) $1/g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(1/g) := \{x \in \mathrm{Dom}(g) | g(x) \neq 0\}$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(1/g)$ *esetén* $(1/g)(x) := 1/g(x)$;

d) $c \cdot f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(c \cdot f) := \mathrm{Dom}(f)$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(c \cdot f)$ *esetén* $(c \cdot f)(x) := c \cdot f(x)$;

e) $|f| : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{R}_+$ *az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(|f|) := \mathrm{Dom}(f)$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(|f|)$ *esetén* $(|f|)(x) := |f(x)|$;

f) $\overline{f} : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(\overline{f}) := \mathrm{Dom}(f)$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(\overline{f})$ *esetén* $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$.

1.3.2. Állítás. *Legyenek* $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvények,* $c \in \mathbb{K}$ *és* $\mathfrak{a} \in \overline{\mathbb{K}}$ *tetszőleges pont.*

a) *Ha* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$*-nek, továbbá* f*-nek és* g*-nek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, akkor* $f+g$*-nek és* $f \cdot g$*-nek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, és*

$$\lim_{\mathfrak{a}}(f+g) = \lim_{\mathfrak{a}} f + \lim_{\mathfrak{a}} g,$$
$$\lim_{\mathfrak{a}}(f \cdot g) = \left(\lim_{\mathfrak{a}} f\right) \cdot \left(\lim_{\mathfrak{a}} g\right).$$

b) *Ha* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(1/g)$*-nek, továbbá* g*-nek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, és* $\lim_{\mathfrak{a}} g \neq 0$*, akkor* $1/g$*-nek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, és*

$$\lim_{\mathfrak{a}}(1/g) = 1/\left(\lim_{\mathfrak{a}} g\right).$$

c) *Ha* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, továbbá* f*-nek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, akkor* $c \cdot f$*-nek,* $|f|$*-nek és* $\overline{f}$*-nak létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, és*

$$\lim_{\mathfrak{a}}(c \cdot f) = c \cdot \lim_{\mathfrak{a}} f,$$
$$\lim_{\mathfrak{a}} |f| = |\lim_{\mathfrak{a}} f|,$$
$$\lim_{\mathfrak{a}} \overline{f} = \overline{\lim_{\mathfrak{a}} f}.$$

Bizonyítás. a) Ha $\mathbf{s}$ olyan $(\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint $f \circ \mathbf{s}$ és $g \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozatok, így az $(f+g) \circ \mathbf{s} = (f \circ \mathbf{s}) + (g \circ \mathbf{s})$ és $(f \cdot g) \circ \mathbf{s} = (f \circ \mathbf{s}) \cdot (g \circ \mathbf{s})$ sorozatok is konvergensek. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $f+g$-nek és $f \cdot g$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\mathbf{s}$ olyan $(\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(f+g) = \lim((f+g) \circ \mathbf{s}) = \lim(f \circ \mathbf{s}) + \lim(g \circ \mathbf{s}) = \lim_{\mathfrak{a}} f + \lim_{\mathfrak{a}} g,$$
$$\lim_{\mathfrak{a}}(f \cdot g) = \lim((f \cdot g) \circ \mathbf{s}) = \lim(f \circ \mathbf{s}) \cdot \lim(g \circ \mathbf{s}) = \left(\lim_{\mathfrak{a}} f\right) \cdot \left(\lim_{\mathfrak{a}} g\right).$$

b) Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(1/g) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint a $g \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens, és $\lim(g \circ \mathbf{s}) = \lim_{\mathfrak{a}} g \neq 0$, így az $(1/g) \circ \mathbf{s} = 1/(g \circ \mathbf{s})$

sorozat konvergens. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy az $1/g$ függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(1/g) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(1/g) = \lim((1/g) \circ \mathbf{s}) = 1/\lim(g \circ \mathbf{s}) = 1/\lim_{\mathfrak{a}} g.$$

c) Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens, és $\lim(f \circ \mathbf{s}) = \lim_{\mathfrak{a}} f$, így a $(c \cdot f) \circ \mathbf{s} = c \cdot (f \circ \mathbf{s})$, $|f| \circ \mathbf{s} = |f \circ \mathbf{s}|$ és $\overline{f} \circ \mathbf{s} = \overline{f \circ \mathbf{s}}$ sorozatok is konvergensek. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $c \cdot f$-nek, $|f|$-nek és $\overline{f}$-nak létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(c \cdot f) = \lim((c \cdot f) \circ \mathbf{s}) = c \cdot \lim(f \circ \mathbf{s}) = c \cdot \lim_{\mathfrak{a}} f,$$
$$\lim_{\mathfrak{a}} |f| = \lim(|f| \circ \mathbf{s}) = |\lim(f \circ \mathbf{s})| = |\lim_{\mathfrak{a}} f|,$$
$$\lim_{\mathfrak{a}} \overline{f} = \lim(\overline{f \circ \mathbf{s}}) = \overline{\lim(f \circ \mathbf{s})} = \overline{\lim_{\mathfrak{a}} f}$$

teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy ha $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, akkor $f/g := f \cdot (1/g)$, tehát $f/g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ az a függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f/g) := \{x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) | g(x) \neq 0\}$, és minden $x \in \mathrm{Dom}(f/g)$ esetén $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$. Az előző állítás a) és b) pontjából következik, hogy ha $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f/g)$-nek, továbbá f-nek és g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim_{\mathfrak{a}} g \neq 0$, akkor f/g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}}(f/g) = \Big(\lim_{\mathfrak{a}} f\Big)/\Big(\lim_{\mathfrak{a}} g\Big).$$

1.3.3. Állítás. *Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f \cdot g)$-nek. Tegyük fel, hogy f-nek létezik határéréke $\mathfrak{a}$-ban, $\lim_{\mathfrak{a}} f = 0$, és létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy $g\langle \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle$ korlátos halmaz. Ekkor $f \cdot g$-nek létezik hatérértéke az $\mathfrak{a}$ pontban és $\lim_{\mathfrak{a}}(f \cdot g) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, hogy $g\langle \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle$ korlátos halmaz. Ekkor vehetünk olyan $R > 0$ valós számot, amelyre $g\langle \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_R(0; \mathbb{K})$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és $\delta > 0$ olyan valós szám, hogy $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon/R}(0; \mathbb{K})$, akkor minden $x \in \mathrm{Dom}(f \cdot g) \cap (\mathrm{B}_{\min(\delta,r)}(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\})$ esetén $|f \cdot g|(x) = |f(x)| \cdot |g(x)| < (\varepsilon/R) \cdot R = \varepsilon$, vagyis $(f \cdot g)\langle \mathrm{B}_{\min(\delta,r)}(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(0; \mathbb{K})$, ami éppen azt jelenti, hogy $f \cdot g$-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban és $\lim_{\mathfrak{a}}(f \cdot g) = 0$. ■

1.4. Függvények kompozíciójának határértéke

Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, valamint $\lim_{\mathfrak{a}} f$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(g)$-nek. A következő kérdésekre keressük a választ:

– Az $\mathfrak{a}$ pont torlódási pontja-e $\mathrm{Dom}(g \circ f)$-nek?

– Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(g \circ f)$-nek, és g-nek létezik határértéke a $\lim_{\mathfrak{a}} f$ pontban, akkor létezik-e $g \circ f$-nek határértéke $\mathfrak{a}$-ban?

– Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(g \circ f)$-nek, és g-nek létezik határértéke a $\mathfrak{b} := \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ pontban, továbbá létezik-e $g \circ f$-nek határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor fennáll-e a

$$\lim_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \lim_{\mathfrak{b}} g$$

egyenlőség?

Mindhárom kérdésre nemleges választ kapunk (**1.** gyakorlat). Azonban könnyen megadhatók olyan mellékfeltételek, amelyek biztosítják azt, hogy mindhárom kérdésre pozitív választ lehessen adni.

1.4.1. Állítás. (Függvények kompozíciójának határértéke) *Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények és tegyük fel, hogy*

- *az $\mathfrak{a}$ pont torlódási pontja $\mathrm{Dom}(g \circ f)$-nek,*
- *f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban,*
- *a $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ pont torlódási pontja $\mathrm{Dom}(g)$-nek,*
- *a g függvénynek létezik határéréke a $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ pontban.*

Tegyük fel, hogy a következő feltételek valamelyike teljesül:

a) $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f \notin \mathrm{Dom}(g)$;

b) $\mathfrak{b} := \lim\limits_{\mathfrak{a}} f \in \mathrm{Dom}(g)$ *és* $\lim\limits_{\mathfrak{b}} g = g(\mathfrak{b})$.

Ekkor $g \circ f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és fennáll a

$$\lim_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \lim_{\mathfrak{b}} g$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Először az a) és b) feltevések nélkül tekintsünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számot. A g függvénynek van határértéke $\mathfrak{b}$-ben, tehát vehetünk olyan $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre

$$g\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{b}} g; \mathbb{K}).$$

Ugyanakkor $\mathfrak{b} := \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$, ezért δ'-höz vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre

$$f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K}).$$

Ekkor nyilvánvalóan teljesül az, hogy

$$(g \circ f)\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = g\langle f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle\rangle \subseteq g\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K})\rangle.$$

Ha most a) teljesül, vagyis $\mathfrak{b} \notin \mathrm{Dom}(g)$ akkor

$$g\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K})\rangle = g\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{b}} g; \mathbb{K}).$$

Ha viszont b) teljesül, vagyis $\mathfrak{b} \in \mathrm{Dom}(g)$ és $\lim\limits_{\mathfrak{b}} g = g(\mathfrak{b})$, akkor

$$g\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K})\rangle = g\langle \{\mathfrak{b}\} \cup (\mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{b}\})\rangle =$$
$$= \{g(\mathfrak{b})\} \cup g\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle = \{\lim_{\mathfrak{b}} g\} \cup g\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{b}} g; \mathbb{K}).$$

Tehát akár a), akár b) teljesül, az adódik, hogy a $\delta > 0$ valós számra

$$(g \circ f)\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{b}} g; \mathbb{K}),$$

vagyis $g \circ f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \lim\limits_{\mathfrak{b}} g$. ■

1.5. Elemi analitikus függvények határérékei

1.5.1. Állítás. *Legyen* **a** *tetszőleges* $\mathbb{K}$*-ban haladó sorozat és* $c \in \mathbb{K}$*. Ekkor a* $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ *elemi analitikus függvénynek* (**NUM** 5.1.1.) *minden* $z_0 \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ *pontban létezik határértéke, és*

$$\lim_{z_0} \mathrm{P}_{\mathbf{a},c} = \mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z_0).$$

Bizonyítás. Legyen $z_0 \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ rögzített és vegyünk egy $r \in]0, \mathrm{R}_{\mathbf{a}} - |z_0 - c|[$ számot. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $C > 0$ valós szám, amelyre teljesül az, hogy minden $z \in \mathrm{B}_r(z_0;\mathbb{K})$ esetén

$$|\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z) - \mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z_0)| \leq C \cdot |z - z_0|.$$

Ebből már következik az állítás, mert ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és a $\delta > 0$ valós számot úgy választjuk meg, hogy $C \cdot \delta < \varepsilon$ és $\delta < r$ egyszerre teljesüljön, akkor még a

$$\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}\langle \mathrm{B}_\delta(z_0;\mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z_0);\mathbb{K})$$

tartalmazás is igaz.

Legyen $z \in \mathrm{B}_r(z_0;\mathbb{K})$ tetszőleges. Ekkor

$$\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z) - \mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k)(z-c)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k)(z_0-c)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}(k)\left((z-c)^k - (z_0-c)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}(k)\left((z-z_0)\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j}\right).$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z) - \mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z_0)$ egyenlő a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \mathbf{a}(k)\left((z-z_0)\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j}\right)$$

konvergens sor összegével. Most megmutatjuk, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \mathbf{a}(k)\left(\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j}\right) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k+1)\left(\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j}\right)$$

sor abszolút konvergens. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor a binomiális tétel alapján

$$\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k}((z-z_0)+(z_0-c))^j(z_0-c)^{k-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}(z_0-c)^{k-j}\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{j-m}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m}\right).$$

Most $k \in \mathbb{N}$ esetén minden $j, m \leq k$ természetes számra legyen

$$S_{j,m} := \begin{cases} \binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m} & \text{, ha } m \leq j \\ 0 & \text{, ha } m > j; \end{cases}$$

ekkor

$$\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m}\right)=\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{m=0}^{k}S_{j,m}\right)=\sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{k}S_{j,m}\right)=$$
$$\sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=m}^{k}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m}\right)=\sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=m}^{k}\binom{j}{m}\right)(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m}.$$

Ugyanakkor teljes indukcióval könnyen belátható, hogy $k,m\in\mathbb{N}$ és $m\leq k$ esetén

$$\sum_{j=m}^{k}\binom{j}{m}\leq(k-m+1)\binom{k}{m}\leq(k+1)\binom{k}{m}.$$

Ezért minden $k\in\mathbb{N}$ számra

$$\left|\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j}\right|=\left|\sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=m}^{k}\binom{j}{m}\right)(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m}\right|\leq$$
$$\leq\sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=m}^{k}\binom{j}{m}\right)|z-z_0|^m|z_0-c|^{k-m}\leq(k+1)\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}|z-z_0|^m|z_0-c|^{k-m}=$$
$$=(k+1)(|z-z_0|+|z_0-c|)^k<(k+1)(r+|z_0-c|)^k.$$

Ebből következik, hogy minden $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$\left|\mathbf{a}(k+1)\left(\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j}\right)\right|\leq|\mathbf{a}(k+1)|(k+1)(r+|z_0-c|)^k.$$

Tudjuk, hogy

$$\limsup_{k\to\infty}|\mathbf{a}(k+1)|^{1/k}=\limsup_{k\to\infty}|\mathbf{a}(k)|^{1/k},$$

továbbá $\lim\limits_{k\to\infty}(k+1)^{1/k}=1$ (**NUM** 3.15.5.). Ebből következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\mathbf{a}(k+1)\left(\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j}\right)\right|^{1/k}\leq$$
$$\leq\limsup_{k\to\infty}\left|\mathbf{a}(k+1)(k+1)(r+|z_0-c|)^k\right|^{1/k}\leq\left(\limsup_{k\to\infty}|\mathbf{a}(k)|^{1/k}\right)(r+|z_0-c|)<1,$$

ahol kihasználtuk azt, hogy $r\in]0,\mathrm{R}_{\mathbf{a}}-|z_0-c|[$ és alkalmaztuk az $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}$ Cauchy-féle konvergenciasugár definícióját (**NUM** 4.3.4.). Tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq1}\mathbf{a}(k)\left(\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j}\right)$$

sor abszolút konvergens, sőt az is látszik, hogy

$$|\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z)-\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z_0)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{a}(k)(z-z_0)\left(\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j}\right)\right|=$$

$$=|z-z_0|\left|\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{a}(k+1)\left(\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j}\right)\right|\leq$$

$$\leq|z-z_0|\sum_{k=0}^{\infty}|\mathbf{a}(k+1)|\left|\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j}\right|\leq|z-z_0|\sum_{k=0}^{\infty}|\mathbf{a}(k+1)|(k+1)(r+|z_0-c|)^k.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$C:=\sum_{k=0}^{\infty}|\mathbf{a}(k+1)|(k+1)(r+|z_0-c|)^k\in\mathbb{R}_+$$

számra minden $z\in\mathrm{B}_r(z_0;\mathbb{K})$ esetén

$$|\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z)-\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z_0)|\leq C\cdot|z-z_0|$$

teljesül. ■

Az előző állításból következik, hogy az Exp, Sin, Cos, Sh és Ch függvényeknek, valamint a komplex polinomiális függvényeknek mindenütt létezik határértéke, és a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel.

Nevezetes határértékek a következők:

$$\lim_{z\to\mathbf{0}}\frac{\mathrm{Exp}(z)-1}{z}=1,\quad\lim_{z\to\mathbf{0}}\frac{1-\mathrm{Cos}(z)}{z^2}=\frac{1}{2},\quad\lim_{z\to\mathbf{0}}\frac{\mathrm{Ch}(z)-1}{z^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{z\to\mathbf{0}}\frac{\mathrm{Sin}(z)}{z}=1,\quad\lim_{z\to\mathbf{0}}\frac{\mathrm{Sh}(z)}{z}=1,\quad\lim_{x\to\mathbf{0}}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

Ezek bizonyítása megtalálható a **6**. gyakorlatban.

1.6. Határérték a végtelenben

Egy $\mathbb{K}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozat olyan $\mathbb{K}\rightarrowtail\mathbb{K}$ függvény, amelynek definíciós tartománya az $\mathbb{N}$ halmaz, tehát $\mathrm{Dom}(\mathbf{s})$-nek egyáltalán nem létezik torlódási pontja $\mathbb{K}$-ban, így $\mathbf{s}$-nek, mint $\mathbb{K}\rightarrowtail\mathbb{K}$ függvénynek semmilyen $\mathbb{K}$-beli pontban nem létezhet határértéke. Ugyanakkor bevezettük a sorozatok határértékének a fogalmát, ami – ezek szerint – nem speciális esete a függvények e pontban értelmezetett határérték-fogalmának. Azonban a függvények határértékének fogalma könnyen általánosítható úgy, hogy annak speciális esete legyen a valós sorozatok határértékének fogalma is.

1.6.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $E\subseteq\mathbb{R}$ halmaznak $+\infty$ (illetve $-\infty$)* **torlódási pontja***, ha minden $r\in\mathbb{R}$ esetén $]r,\to[\cap E\neq\emptyset$ (illetve $]\leftarrow,r[\cap E\neq\emptyset$). Azt mondjuk, hogy az $f:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvénynek* **létezik határértéke** *$+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben), ha $+\infty$ (illetve $-\infty$) torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és létezik olyan $\mathfrak{b}\in\mathbb{R}$, amelyre*

$$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*)(\exists r\in\mathbb{R})\quad f\langle]r,\to[\rangle\subseteq]\mathfrak{b}-\varepsilon,\mathfrak{b}+\varepsilon[,$$

(*illetve*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists r \in \mathbb{R}) \quad f\langle]\leftarrow, r[\rangle \subseteq]\mathfrak{b} - \varepsilon, \mathfrak{b} + \varepsilon[\quad)$$

teljesül. Minden ilyen tulajdonságú $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}$ *pontot az* f *függvény* **határértékének** *nevezünk* $+\infty$*-ben* (*illetve* $-\infty$*-ben*).

Könnyen belátható, hogy ha $+\infty$ (illetve $-\infty$) torlódási pontja az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény definíciós tartományának, akkor f-nek legfeljebb egy határértéke létezhet $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben); ezt a határértéket (amennyiben létezik) a

$$\lim_{+\infty} f \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad (\text{illetve } \lim_{-\infty} f \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \ )$$

szimbólummal jelöljük. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{s}$ valós sorozatnak pontosan akkor létezik határértéke az itt bevezetett értelemben, ha létezik határértéke a 2. pontban meghatározott értelemben, továbbá, ha $\mathbf{s}$-nek van határértéke, akkor

$$\lim_{+\infty} \mathbf{s} = \lim(\mathbf{s})$$

teljesül.

1.7. Egyoldali határértékek

1.7.1. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény és* $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy* f*-nek létezik* **jobboldali** (*illetve* **baloldali**) **határértéke az** $\mathfrak{a}$ **pontban**, *ha az* $f|_{]\mathfrak{a},\rightarrow[\cap \mathrm{Dom}(f)}$ (*illetve* $f|_{]\leftarrow,\mathfrak{a}[\cap \mathrm{Dom}(f)}$) *függvénynek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban. Ha* f*-nek létezik jobboldali* (*illetve baloldali*) *határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, akkor a*

$$\lim_{\mathfrak{a}} f|_{]\mathfrak{a},\rightarrow[\cap \mathrm{Dom}(f)} \quad (\text{illetve } \lim_{\mathfrak{a}} f|_{]\leftarrow,\mathfrak{a}[\cap \mathrm{Dom}(f)})$$

határértéket az f *függvény* **jobboldali** (*illetve* **baloldali**) $\mathfrak{a}$ **határértékének** *nevezzük az* $\mathfrak{a}$ *pontban, és a*

$$\lim_{\mathfrak{a}+0} f \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to \mathfrak{a},\ x > \mathfrak{a}} f(x) \quad (\text{illetve } \lim_{\mathfrak{a}-0} f \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to \mathfrak{a},\ x < \mathfrak{a}} f(x) \ )$$

szimbólummal jelöljük.

Tehát ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$, akkor f-nek pontosan akkor létezik jobboldali (illetve baloldali) határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja a $]\mathfrak{a}, \rightarrow [\cap \mathrm{Dom}(f)$ (illetve $]\leftarrow, \mathfrak{a}[\cap \mathrm{Dom}(f)$) halmaznak, és

$$(\exists \mathfrak{b} \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f)) \quad (\mathfrak{a} < x < \mathfrak{a} + \delta \Rightarrow |f(x) - \mathfrak{b}| < \varepsilon)$$

(illetve

$$(\exists \mathfrak{b} \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f)) \quad (\mathfrak{a} - \delta < x < \mathfrak{a} \Rightarrow |f(x) - \mathfrak{b}| < \varepsilon) \ )$$

teljesül.

1.7.2. Állítás. *Legyen* $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény és* $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ *belső pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Az* f *függvénynek pontosan akkor létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, ha* f*-nek létezik a jobboldali és baloldali határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban és* $\lim_{\mathfrak{a}+0} f = \lim_{\mathfrak{a}-0} f$. *Ha* f*-nek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, akkor*

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}+0} f = \lim_{\mathfrak{a}-0} f.$$

Bizonyítás. Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $f\langle]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq]\lim\limits_{\mathfrak{a}} f - \varepsilon, \lim\limits_{\mathfrak{a}} f + \varepsilon[$; ekkor minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén, ha $\mathfrak{a} < x < \mathfrak{a}+\delta$ vagy $\mathfrak{a}-\delta < x < \mathfrak{a}$, akkor $|f(x) - \lim\limits_{\mathfrak{a}} f| < \varepsilon$, tehát f-nek létezik a jobboldali és baloldali határértéke, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f-nek létezik a jobboldali és baloldali határértéke, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$; jelöle $\mathfrak{b}$ ezt az elemet. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $\delta_+, \delta_- \in \mathbb{R}_+^*$ számokat, amelyekre minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén, ha $\mathfrak{a} < x < \mathfrak{a}+\delta_+$, akkor $|f(x)-\mathfrak{b}| < \varepsilon$, és ha $\mathfrak{a}-\delta_- < x < \mathfrak{a}$, akkor $|f(x)-\mathfrak{b}| < \varepsilon$. Nyilvánvaló. hogy minden $\delta \in]0, \min(\delta_-, \delta_+)]$ számra teljesül az, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén, ha $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}$, akkor $|f(x)-\mathfrak{b}| < \varepsilon$, tehát f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$, akkor lehetséges az, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, így $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$-nek, azonban $\mathfrak{a}$ *nem torlódási* Z *pontja* a $]\mathfrak{a}, \rightarrow[\cap \mathrm{Dom}(f)$ vagy a $]\leftarrow, \mathfrak{a}[\cap \mathrm{Dom}(f)$ halmaznak, tehát az f jobboldali vagy baloldali határértéke *nem létezik.*

1.7.3. Állítás. (**Monoton függvény egyoldali határértéke.**) *Legyen* $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény.*

a) *Ha* $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ *és* $c > \mathfrak{a}$ *olyan valós szám, hogy* $]\mathfrak{a}, c[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$ *és* f *monoton növő és alulról korlátos* (*illetve monoton fogyó és felülről korlátos*) *az* $]\mathfrak{a}, c[$ *intervallumon, akkor* $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f$ *létezik, és*

$$\lim_{\mathfrak{a}+0} f = \begin{cases} \inf(f\langle]\mathfrak{a}, c[\rangle) & , \textit{ha } f \textit{ monoton növő }]\mathfrak{a}, c[\textit{-n}, \\ \sup(f\langle]\mathfrak{a}, c[\rangle) & , \textit{ha } f \textit{ monoton fogyó }]\mathfrak{a}, c[\textit{-n}. \end{cases}$$

b) *Ha* $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}$ *és* $c < \mathfrak{b}$ *olyan valós szám, hogy* $]c, \mathfrak{b}[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$ *és* f *monoton növő és felülről korlátos* (*illetve monoton fogyó és alulról korlátos*) *a* $]c, \mathfrak{b}[$ *intervallumon, akkor* $\lim\limits_{\mathfrak{b}-0} f$ *létezik, és*

$$\lim_{\mathfrak{b}-0} f = \begin{cases} \sup(f\langle]c, \mathfrak{b}[\rangle) & , \textit{ha } f \textit{ monoton növő }]c, \mathfrak{b}[\textit{-n}, \\ \inf(f\langle]c, \mathfrak{b}[\rangle) & , \textit{ha } f \textit{ monoton fogyó }]c, \mathfrak{b}[\textit{-n}. \end{cases}$$

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy f monoton növő és alulról korlátos az $]\mathfrak{a}, c[$ intervallumon. Ekkor $f\langle]\mathfrak{a}, c[\rangle$ nem üres, alulról korlátos halmaz $\mathbb{R}$-ben, így létezik az $y := \inf(f\langle]\mathfrak{a}, c[\rangle)$ valós szám. Megmutatjuk, hogy y egyenlő az f függvény jobboldali határértékével az $\mathfrak{a}$ pontban.

Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Ekkor $\inf(f\langle]\mathfrak{a}, c[\rangle) = y < y + \varepsilon$, így az infimum definíciója szerint létezik olyan $c' \in]\mathfrak{a}, c[$, hogy $f(c') < y + \varepsilon$. Ekkor minden $x \in]\mathfrak{a}, c']$ esetén $y - \varepsilon < y = \inf(f\langle]\mathfrak{a}, c[\rangle) \leq f(x) \leq f(c') < y + \varepsilon$, hiszen $x, c' \in]\mathfrak{a}, c'] \subseteq]\mathfrak{a}, c[$ és f monoton növő az $]\mathfrak{a}, c[$ intervallumon. Ez azt jelenti, minden $x \in]\mathfrak{a}, c']$ esetén $|f(x) - y| < \varepsilon$, ezért $y = \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f$.

Ha f monoton fogyó és felülről korlátos az $]\mathfrak{a}, c[$ intervallumon, akkor $-f$ monoton növő és alulról korlátos az $]\mathfrak{a}, c[$ intervallumon, így az előzőek szerint $-f$-nek létezik jobboldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0}(-f) = \inf(-f\langle]\mathfrak{a}, c[\rangle)$, tehát $\inf(-f\langle]\mathfrak{a}, c[\rangle) = -\sup(f\langle]\mathfrak{a}, c[\rangle)$ és $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0}(-f) = -\lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f$ miatt $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \sup(f\langle]\mathfrak{a}, c[\rangle)$.

b) Tegyük fel, hogy f monoton növő és felülről korlátos a $]c, \mathfrak{b}[$ intervallumon. Ekkor

$f\langle]c,\mathfrak{b}[\rangle$ nem üres, felülről korlátos halmaz $\mathbb{R}$-ben, így képezhető az $y := \sup(f\langle]c,\mathfrak{b}[\rangle)$ valós szám. Megmutatjuk, hogy y egyenlő az f függvény baloldali határértékével a $\mathfrak{b}$ pontban.

Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Ekkor $y - \varepsilon < y = \sup(f\langle]c,\mathfrak{b}[\rangle)$, így a szuprémum definíciója szerint létezik olyan $c' \in]c,\mathfrak{b}[$, hogy $y - \varepsilon < f(c')$. Ekkor minden $x \in]c',\mathfrak{b}]$ esetén $y - \varepsilon < f(c') \leq f(x) \leq \sup(f\langle]c,\mathfrak{b}[\rangle = y < y + \varepsilon$, hiszen $x, c' \in [c',\mathfrak{b}] \subseteq]c,\mathfrak{b}[$ és f monoton növő a $]c,\mathfrak{b}[$ intervallumon. Ez azt jelenti, minden $x \in]c',\mathfrak{b}]$ esetén $|f(x) - y| < \varepsilon$, ezért $y = \lim\limits_{\mathfrak{b}-0} f$.

Ha f monoton fogyó és alulról korlátos az $]c,\mathfrak{b}[$ intervallumon, akkor $-f$ monoton növő és alulról korlátos az $]c,\mathfrak{b}[$ intervallumon, így az előzőek szerint $-f$-nek létezik baloldali határértéke $\mathfrak{b}$-ben, és $\lim\limits_{\mathfrak{b}-0}(-f) = \sup(-f\langle]c,\mathfrak{b}[\rangle)$, tehát $\sup(-f\langle]c,\mathfrak{b}[\rangle) = -\inf(f\langle]c,\mathfrak{b}[\rangle)$ és $\lim\limits_{\mathfrak{b}-0}(-f) = -\lim\limits_{\mathfrak{b}-0} f$ miatt $\lim\limits_{\mathfrak{b}-0} f = \inf(f\langle]c,\mathfrak{b}[\rangle)$. ■

2. fejezet

Folytonos függvények

2.1. A folytonosság értelmezése és lokalitása

2.1.1. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvény és* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvény* **folytonos az** $\mathfrak{a}$ **pontban**, *ha*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*) \quad f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy f*-nek* **szakadása van** *az* $\mathfrak{a}$ *pontban, ha* f *nem folytonos* $\mathfrak{a}$*-ban. Azt mondjuk, hogy az* $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvény* **folytonos**, *ha* f *a definíciós tartományának minden pontjában folytonos.*

Tehát az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f)) \ \ ((|x - \mathfrak{a}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\mathfrak{a})| < \varepsilon)$$

teljesül. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény a definíciós tartományának minden *izolált* pontjában folytonos. Speciálisan, minden olyan $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény folytonos, amelynek a definíciós tartománya *véges.*

2.1.2. Állítás. (A folytonosság lokalitása) *Legyenek* $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvények,* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$, *és tegyük fel, hogy létezik olyan* $r > 0$ *valós szám, amelyre* $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \cap \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \cap \mathrm{Dom}(g)$ *és* $f = g$ *ezen a halmazon. Az* f *függvény pontosan akkor folytonos* $\mathfrak{a}$*-ban, ha* g *folytonos* $\mathfrak{a}$*-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Vegyünk olyan $\delta' > 0$ valós számot, amelyre $f\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$. Ekkor az r definíciója alapján bármely $\delta \in]0, \min(r, \delta')[$ valós számra

$$g\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle = f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq f\langle \mathrm{B}_{\delta'}(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}) = \mathrm{B}_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); \mathbb{K}),$$

ami azt jelenti, hogy g folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

2.2. A határérték és a folytonosság kapcsolata

A pontbeli folytonosság és a pontbeli határérték létezésének fogalma logikailag *összehasonlíthatatlan.* Ennek az az egyszerű oka, hogy

– pontbeli határértékről beszélhetünk akkor is, ha a pont nem eleme a függvény definíciós tartományának, hanem annak torlódási pontja; ilyen pontban a függvény folytonossága értelmetlen;

– pontbeli folytonosságról beszélhetünk akkor is, ha a pont nem torlódási pontja a függvény definíciós tartományának, hanem csak eleme annak; ilyen pontban a függvény határértéke értelmetlen.

Ha azonban egy pont egyszerre eleme és torlódási pontja a függvény definíciós tartományának, akkor a pontbeli határérték létezésének és a pontbeli folytonosságnak szoros kapcsolata van.

2.2.1. Állítás. *Legyen* $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvény és* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Az* f *függvény pontosan akkor folytonos* $\mathfrak{a}$*-ban, ha létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban és* $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = f(\mathfrak{a})$.

Bizonyítás. Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}; \mathbb{K}))$; ekkor $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle$ miatt f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = f(\mathfrak{a})$. Megfordítva; ha $f(\mathfrak{a})$ az f-nek határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}))$; ekkor $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle = \{f(\mathfrak{a})\} \cup f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}))$, következésképpen f folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

2.2.2. Következmény. *Legyen* $\mathbf{a}$ *tetszőleges* $\mathbb{K}$*-ban haladó sorozat,* $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}$ *az* $\mathbf{a}$*-hoz tartozó Cauchy-féle konvergenciasugár, és* $c \in \mathbb{K}$*. A* $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ *elemi analitikus függvény a* $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c; \mathbb{K})$ *halmaz minden pontjában folytonos.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy a $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ elemi analitikus függvénynek minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c; \mathbb{K})$ pontban létezik határértéke, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \mathrm{P}_{\mathbf{a},c} = \mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(\mathfrak{a})$, ezért az előző állítás szerint $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Speciálisan: minden polinomiális függvény, a valós és komplex exponenciális függvények, valamint a valós és komplex trigonometrikus és hiperbolikus függvények folytonosak.

2.2.3. Állítás. *Legyen* $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *függvény,* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, és tegyük fel, hogy* f*-nek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban. Ha* $g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ *az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(g) := \mathrm{Dom}(f) \cup \{\mathfrak{a}\}$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(g)$ *esetén*

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & , \textit{ha } x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}, \\ \lim\limits_{\mathfrak{a}} f & , \textit{ha } x = \mathfrak{a}, \end{cases}$$

akkor g *folytonos a* $\mathfrak{a}$ *pontban.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f; \mathbb{K})$. Ekkor a g értelmezése alapján

$$g\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle = \{g(\mathfrak{a})\} \cup g\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = \{\lim_{\mathfrak{a}} f\} \cup f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq$$
$$\subseteq \{\lim_{\mathfrak{a}} f\} \cup \mathrm{B}_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{a}} f; \mathbb{K}) = \mathrm{B}_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); \mathbb{K}),$$

tehát g folytonos a $\mathfrak{a}$ pontban. ■

2.3. Konvex és konkáv függvények folytonossága

2.3.1. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ intervallum. Azt mondjuk, hogy f az I intervallumon* **konvex***, ha minden $x, x' \in I$ pontra és $\alpha \in [0,1]$ valós számra*

$$f((1-\alpha)x + \alpha x') \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x').$$

Azt mondjuk, hogy f az I intervallumon **konkáv***, ha minden $x, x' \in I$ pontra és $\alpha \in [0,1]$ valós számra*

$$f((1-\alpha)x + \alpha x') \geq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x').$$

Nyilvánvaló, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ intervallum, akkor f pontosan akkor konvex az I halmazon, ha a $-f$ függvény konkáv I-n.

2.3.2. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ intervallum. Az f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra és minden $(x_k)_{k\in n}$ I-ben haladó rendszerre és minden $(\alpha_k)_{k\in n}$ $[0,1]$-ben haladó rendszerre, ha $\sum_{k\in n} \alpha_k = 1$, akkor*

$$f\Big(\sum_{k\in n} \alpha_k x_k\Big) \leq \sum_{k\in n} \alpha_k f(x_k).$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{A}(n)$ azt a kijelentést, hogy $n \in \mathbb{N}^*$ és minden $(x_k)_{k\in n}$ I-ben haladó rendszerre és minden $(\alpha_k)_{k\in n}$ $[0,1]$-ben haladó rendszerre, ha $\sum_{k\in n} \alpha_k = 1$, akkor

$$f\Big(\sum_{k\in n} \alpha_k x_k\Big) \leq \sum_{k\in n} \alpha_k f(x_k).$$

Világos, hogy az $\mathscr{A}(1)$ kijelenetés triviálisan igaz, és $\mathscr{A}(2)$ *ekvivalens* az f függvény I halmazon való konvexitásával. Ezért elég azt igazolni, hogy ha f konvex az I halmazon, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra $\mathscr{A}(n)$ teljesül. Ezt n szerinti teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ és $\mathscr{A}(n)$ igaz. Legyen $(x_k)_{k\in n+1}$ I-ben haladó rendszer és $(\alpha_k)_{k\in n+1}$ valós számoknak olyan $[0,1]$-ben haladó rendszere, hogy $\sum_{k\in n+1} \alpha_k = 1$. Ha minden $k \in n+1$ esetén $\alpha_k = 0$ vagy $\alpha_k = 1$, akkor triviális, hogy

$$f\Big(\sum_{k\in n} \alpha_k x_k\Big) = \sum_{k\in n} \alpha_k f(x_k),$$

ezért feltehető, hogy van olyan $k \in n+1$, amelyre $\alpha_k \in]0,1[$. Továbbá az is feltehető, hogy $\alpha_n \in]0,1[$; ez mindig elérhető, ha az $(x_k)_{k\in n+1}$ rendszert alkalmasan választott $n+1 \to n+1$ bijekcióval komponáljuk. Ekkor

$$\left(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}\right)_{k\in n}$$

valós számoknak olyan $[0,1]$-ben haladó rendszere, amelyre

$$\sum_{k\in n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} = 1,$$

továbbá $(x_k)_{k\in n}$ I-ben haladó rendszer, így $\mathscr{A}(n)$ (vagyis az indukciós hipotézis) miatt

$$f\Big(\sum_{k\in n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k\Big)\leq\sum_{k\in n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}f(x_k).$$

Ebből f konvexitása miatt kapjuk, hogy

$$f\Big(\sum_{k\in n+1}\alpha_k x_k\Big)=f\Big((1-\alpha_n)\sum_{k\in n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k+\alpha_n x_n\Big)\leq$$
$$\leq(1-\alpha_n)\sum_{k\in n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}f(x_k)+\alpha_n f(x_n)=\sum_{k\in n+1}\alpha_k f(x_k),$$

tehát $\mathscr{A}(n+1)$ is igaz. ■

2.3.3. Állítás. *Legyen* $f:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ *függvény és* $I\subseteq\mathrm{Dom}(f)$ *intervallum. A következő állítások ekvivalesek.*

(i) *Az* f *függvény konvex* (*illetve konkáv*) *az* I *intervallumon.*

(ii) *Minden* $c\in I$ *pontra az*

$$I\setminus\{c\}\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

függvény monoton növő (*illetve fogyó*).

(iii) *Minden* $c\in I$ *esetén az*

$$]c,\to[\cap I\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

függvény monoton növő (*illetve fogyó*).

Bizonyítás. A konkáv függvény esete visszavezethető a konvexre, ha f-ről áttérünk a $-f$ függvényre, ezért elég a konvex esetet nézni.

(i)⇒(ii) Tegyük fel, hogy az f függvény konvex az I intervallumon. Legyen $c\in I$ és vegyünk tetszőleges $x,x'\in I\setminus\{c\}$ pontokat úgy, hogy $x<x'$. Ekkor három eset lehetséges.

1) $x'<c$. Ekkor

$$x'=\left(\frac{c-x'}{c-x}\right)x+\left(\frac{x'-x}{c-x}\right)c,$$

így f konvexitása miatt

$$f(x')\leq\left(\frac{c-x'}{c-x}\right)f(x)+\left(\frac{x'-x}{c-x}\right)f(c),$$

amit átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq\frac{f(x')-f(c)}{x'-c}.$$

2) $x<c<x'$. Ekkor

$$c=\left(\frac{x'-c}{x'-x}\right)x+\left(\frac{c-x}{x'-x}\right)x',$$

így f konvexitása miatt

$$f(c) \leq \left(\frac{x'-c}{x'-x}\right) f(x) + \left(\frac{c-x}{x'-x}\right) f(x'),$$

amit átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq \frac{f(x')-f(c)}{x'-c}.$$

3) $c < x$. Ekkor

$$x = \left(\frac{x'-x}{x'-c}\right) c + \left(\frac{x-c}{x'-c}\right) x',$$

így f konvexitása miatt

$$f(x) \leq \left(\frac{x'-x}{x'-c}\right) f(c) + \left(\frac{x-c}{x'-c}\right) f(x'),$$

amit átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq \frac{f(x')-f(c)}{x'-c}.$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

függvény monoton növő.

(ii)⇒(iii) Triviális.

(iii)⇒(i) Legyenek $x, x' \in I$, $x \leq x'$ és $\alpha \in [0,1]$. Ha $x = x'$ vagy $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 1$, akkor nyilvánvaló, hogy $f((1-\alpha)x + \alpha x') = (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x')$, ezért feltesszük, hogy $x < x'$ és $0 < \alpha < 1$. Ekkor az $x'' := (1-\alpha)x + \alpha x'$ elemre $x < x'' < x'$ és $\alpha = \dfrac{x''-x}{x'-x}$ teljesül, így a hipotézis szerint

$$\frac{f(x'')-f(x)}{x''-x} \leq \frac{f(x')-f(x)}{x'-x},$$

amit átrendezve kapjuk, hogy

$$f((1-\alpha)x + \alpha x') = f(x'') \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x'),$$

tehát f konvex az I intervallumon. ■

2.3.4. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan nyílt intervallum, amelyen f konvex vagy konkáv, akkor f folytonos az I intervallum minden pontjában.*

Bizonyítás. Elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor f konvex az I intervallumon. Ha $c \in I$, akkor az I intervallum nyíltsága miatt léteznek olyan $a, b \in I$ pontok, hogy $a < c < b$. Az előző állítás szerint az

$$I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

függvény monoton növő, ezért minden $x \in [a,b] \setminus \{c\}$ pontra

$$\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c},$$

amiből következik, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén

$$|f(x) - f(c)| \leq M|x - c|,$$

ahol $M := \max\left(-\left(\dfrac{f(a)-f(c)}{a-c}\right), \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}\right)$. Ebből látható, hogy f folytonos a c pontban, mert ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges és $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\delta < \min\left(c-a, b-c, \dfrac{\varepsilon}{M+1}\right)$, akkor minden $x \in]c-\delta, c+\delta[$ pontra $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $a, b \in \mathbb{R}$ olyan pontok, hogy $a < b$, $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és f konvex vagy konkáv az $[a,b]$ intervallumon, akkor f folytonos az $]a,b[$ nyílt intervallum minden pontjában, de szakadása lehet az $[a,b]$ intervallum *végpontjaiban.* Erre egyszerű példa a következő függvény:

$$[0,1] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \in]0,1[; \\ 1 & \text{, ha } x \in \{0,1\}, \end{cases}$$

amely nyilvánvalóan konvex a $[0,1]$ intervallumon, de szakadása van 0-ban és 1-ben.

2.3.5. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan korlátos és zárt intervallum, amelyen f konvex vagy konkáv, akkor f korlátos a K halmazon.*

Bizonyítás. Elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor f konvex az $[a,b]$ intervallumon, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ olyan pontok, hogy $a \leq b$, $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Feltehető továbbá, hogy $a < b$. Ha $x \in [a,b]$, akkor $x = \left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)a + \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)b$, ezért f konvexitása miatt

$$f(x) \leq \left(\frac{b-x}{b-a}\right)f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)f(b) \leq \max(f(a), f(b)),$$

vagyis f felülről korlátos az $[a,b]$ halmazon.

Az f függvény alulról korlátosságának bizonyításához legyen $c \in]a,b[$ rögzített pont. Mivel f konvex $[a,b]$-n, így az előző tétel alapján az

$$[a,b[\to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

függvény monoton növő, ezért $x \in [a,c]$ esetén

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b},$$

amit átrendezve és figyelembe véve, hogy $x - b < 0$ kapjuk, hogy

$$f(x) \geq f(b) + (x-b)\left(\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy az

$$[a,c] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(b) + (x-b)\left(\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)$$

függvény folytonos, ezért alulról korlátos $[a, c]$-n. Tehát, ha

$$C_- := \inf_{x \in [a,c]} \left(f(b) + (x - b) \left(\frac{f(c) - f(b)}{c - b} \right) \right),$$

akkor minden $x \in [a, c]$ esetén $f(x) \geq C_-$.
Mivel f konvex $[a, b]$-n, így az előző tétel alapján az

$$]a, b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

függvény monoton növő, ezért $x \in [c, b]$ esetén

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

amit átrendezve és figyelembe véve, hogy $x - a > 0$ kapjuk, hogy

$$f(x) \geq f(a) + (x - a) \left(\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right).$$

Nyilvánvaló, hogy az

$$[c, b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(a) + (x - a) \left(\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right)$$

függvény folytonos, ezért alulról korlátos $[c, b]$-n. Tehát, ha

$$C_+ := \inf_{x \in [c,b]} \left(f(a) + (x - a) \left(\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right) \right),$$

akkor minden $x \in [c, b]$ esetén $f(x) \geq C_+$.
Ez azt jelenti, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \geq \min(C_-, C_+)$, tehát f alulról korlátos az $[a, b]$ intervallumon. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha az előző állításban a $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ intervallum nem korlátos, vagy nem zárt, akkor f már nem feltétlenül korlátos K-n. Például az $1/\mathrm{id}_{\mathbb{R}^*_+}$ függvény konvex, de nem korlátos felülről semmilyen $]0, b]$ alakú intervallumon, ahol $b > 0$ valós szám.

2.4. Átviteli elv folytonosságra

2.4.1. Állítás. (Átviteli elv folytonosságra) *Az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor folytonos az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban, ha minden $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó, $\mathfrak{a}$-hoz konvergáló $\mathbf{s}$ sorozatra az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens és a határértéke egyenlő $f(\mathfrak{a})$-val.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ számot, amelyre $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$. Ekkor $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}(n) \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})$, ezért $f(\mathbf{s}(n)) \in \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens és a határértéke egyenlő $f(\mathfrak{a})$-val.

Megfordítva; tegyük fel, hogy f *nem folytonos* $\mathfrak{a}$-ban, vagyis létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K}) \neq \emptyset$, vagyis

$$\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap \overset{-1}{f}\langle \mathbb{K} \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})\rangle \neq \emptyset.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ilyen és rögzítsünk egy $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{B}_{\delta_n}(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap \overset{-1}{f}\langle \mathbb{K} \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})\rangle \right) \neq \emptyset.$$

Ha $\mathbf{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\mathbf{s}(n) - \mathfrak{a}| < \delta_n$, így $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, ugyanakkor minden n természetes számra $f(\mathbf{s}(n)) \notin \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$, ezért az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat biztosan *nem konvergál* az $f(\mathfrak{a})$ ponthoz (vagyis $f \circ \mathbf{s}$ nem konvergens, vagy konvergens, de $\lim(f \circ \mathbf{s}) \neq f(\mathfrak{a})$). ∎

2.5. Összetett függvények folytonossága

2.5.1. Állítás. *Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények.*

a) *Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$, továbbá f és g folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor az $f + g$ és $f \cdot g$ függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban.*

b) *Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f/g)$, továbbá f és g folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor az f/g függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban.*

c) *Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, továbbá f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor az $|f|$ és $\overline{f}$ függvény, valamint minden $c \in \mathbb{K}$ számra a $c.f$ függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. Ha f és g folytonos az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ pontban és $\mathbf{s}$ olyan sorozat, amely $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$-ben halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, akkor a folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv szerint az $f \circ \mathbf{s}$ és $g \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens, továbbá $\lim(f \circ \mathbf{s}) = f(\mathfrak{a})$ és $\lim(g \circ \mathbf{s}) = g(\mathfrak{a})$; ezért az $(f+g) \circ \mathbf{s} = (f \circ \mathbf{s}) + (g \circ \mathbf{s})$ és $(f \cdot g) \circ \mathbf{s} = (f \circ \mathbf{s}) \cdot (g \circ \mathbf{s})$ sorozat is konvergens, valamint $\lim((f+g) \circ \mathbf{s}) = \lim(f \circ \mathbf{s}) + \lim(g \circ \mathbf{s}) = (f+g)(\mathfrak{a})$ és $\lim((f \cdot g) \circ \mathbf{s}) = \lim(f \circ \mathbf{s}) \cdot \lim(g \circ \mathbf{s}) = (f \cdot g)(\mathfrak{a})$. A folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv alapján ez a)-t igazolja.

Ha f és g folytonos az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f/g)$ pontban és $\mathbf{s}$ olyan sorozat, amely $\mathrm{Dom}(f/g)$-ben halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, akkor a folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv szerint az $f \circ \mathbf{s}$ és $g \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens, továbbá $\lim(f \circ \mathbf{s}) = f(\mathfrak{a})$ és $\lim(g \circ \mathbf{s}) = g(\mathfrak{a}) \neq 0$; ezért az $(f/g) \circ \mathbf{s} = (f \circ \mathbf{s})/(g \circ \mathbf{s})$ sorozat is konvergens, valamint $\lim((f/g) \circ \mathbf{s}) = \lim(f \circ \mathbf{s})/\lim(g \circ \mathbf{s}) = (f/g)(\mathfrak{a})$. A folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv alapján ez b)-t igazolja.

Ha f folytonos az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban, $c \in \mathbb{K}$ és $\mathbf{s}$ olyan sorozat, amely $\mathrm{Dom}(f)$-ben halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, akkor a folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv szerint az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens, továbbá $\lim(f \circ \mathbf{s}) = f(\mathfrak{a})$; ezért az $|f| \circ \mathbf{s} = |f \circ \mathbf{s}|$, $\overline{f} \circ \mathbf{s} = \overline{f \circ \mathbf{s}}$ és $(c.f) \circ \mathbf{s} = c.(f \circ \mathbf{s})$ sorozat is konvergens, valamint $\lim(|f| \circ \mathbf{s}) = |\lim(f \circ \mathbf{s})| = |f|(\mathfrak{a})$, $\lim(\overline{f \circ \mathbf{s}}) = \overline{\lim(f \circ \mathbf{s})} = \overline{f}(\mathfrak{a})$ és $\lim((c.f) \circ \mathbf{s}) = c.\lim(f \circ \mathbf{s}) = (c.f)(\mathfrak{a})$. A folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv alapján ez c)-t igazolja. ∎

2.5.2. Állítás. (Függvények kompozíciójának folytonossága) *Ha $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$, továbbá f folytonos $\mathfrak{a}$-ban és g folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban, akkor $g \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(g \circ f)$-ben haladó sorozat, amely konvergál $\mathfrak{a}$-hoz. Ekkor az f függvény $\mathfrak{a}$-beli folytonossága és az átviteli elv szerint az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergál $f(\mathfrak{a})$-hoz. Ugyanakkor az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat $\mathrm{Dom}(g)$-ben halad, így a g függvény $f(\mathfrak{a})$-beli folytonossága és az átviteli elv szerint a $g \circ (f \circ \mathbf{s}) = (g \circ f) \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergál a $g(f(\mathfrak{a})) = (g \circ f)(\mathfrak{a})$ ponthoz. Az átviteli elv alapján ez azt jelenti, hogy $g \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Az állítást könnyen igazolhatjuk az átviteli elv nélkül is, közvetlenül a folytonosság definícióját alkalmazva. Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és a g függvény $f(\mathfrak{a})$ pontbeli folytonossága alapján vegyünk olyan $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $g\langle \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(g(f(\mathfrak{a})); \mathbb{K})$. Az f függvény $\mathfrak{a}$-beli folytonossága miatt van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$; ekkor nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned}(g \circ f)\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle = g\langle f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle\rangle \subseteq g\langle \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})\rangle \subseteq \\ \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(g(f(\mathfrak{a})); \mathbb{K}) = \mathrm{B}_\varepsilon((g \circ f)(\mathfrak{a}); \mathbb{K}),\end{aligned}$$

így $g \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

2.5.3. Állítás. *Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, és $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan korlátos és zárt halmaz, amelynek minden pontjában f folytonos, akkor $f\langle K\rangle$ is korlátos és zárt halmaz.*

Bizonyítás. A $\mathbb{K}$-ra vonatkozó Bolzano-Weierstrass-tételt fogjuk alkalmazni. Ehhez legyen $\mathbf{s}$ tetszőleges $f\langle K\rangle$-ban haladó sorozat; az $\mathbf{s}$-nek olyan részsorozatát keressük, amely konvergens és a határértéke eleme $f\langle K\rangle$-nak. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) \in f\langle K\rangle$, tehát $K \cap \overset{-1}{f}\langle\{\mathbf{s}(n)\}\rangle \neq \emptyset$. Ebből a kiválasztási axióma alapján kapjuk, hogy

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(K \cap \overset{-1}{f}\langle\{\mathbf{s}(n)\}\rangle\right) \neq \emptyset.$$

Legyen $\mathbf{s}'$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\mathbf{s}'$ olyan K-ban haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(\mathbf{s}'(n)) = \mathbf{s}(n)$, vagyis $f \circ \mathbf{s}' = \mathbf{s}$. A K halmaz a feltevés szerint korlátos és zárt, tehát a Bolzano-Weierstrass-tétel alapján van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan növő függvény, hogy az $\mathbf{s}' \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(\mathbf{s}' \circ \sigma) \in K$. Az f függvény folytonos a $\lim(\mathbf{s}' \circ \sigma)$ pontban, ezért az átviteli elv alapján az $f \circ (\mathbf{s}' \circ \sigma) = (f \circ \mathbf{s}') \circ \sigma = \mathbf{s} \circ \sigma$ sorozat konvergens, és $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) = \lim(f \circ (\mathbf{s}' \circ \sigma)) = f(\lim(\mathbf{s}' \circ \sigma)) \in f\langle K\rangle$. A Bolzano-Weierstrass-tételből következik, hogy $f\langle K\rangle$ is korlátos és zárt halmaz. ■

2.5.4. Állítás. (Weierstrass-féle maximum-minimum elv) *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan nem üres, korlátos és zárt halmaz, amelynek minden pontjában f folytonos, akkor léteznek olyan x_{min} és x_{max} pontok K-ban, amelyekre minden $x \in K$ esetén $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ teljesül (tehát f az x_{min} pontban felveszi a legkisebb értékét K-ban, és az x_{max} pontban felveszi a legnagyobb értékét K-ban).*

Bizonyítás. Az $f\langle K\rangle \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem üres és korlátos $\mathbb{R}$-ben, így léteznek a $\sup f\langle K\rangle$ és $\inf f\langle K\rangle$ számok. Tudjuk, hogy ezek benne vannak az $\overline{f\langle K\rangle}$ lezártban. Azonban az $f\langle K\rangle$ halmaz zárt is, így $\sup f\langle K\rangle, \inf f\langle K\rangle \in f\langle K\rangle$, vagyis léteznek olyan $x_{min}, x_{max} \in K$, hogy $f(x_{min}) = \inf f\langle K\rangle$ és $f(x_{max}) = \sup f\langle K\rangle$ teljesül. Ezek a pontok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy minden $x \in K$ esetén $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$. ■

2.6. Az inverzfüggvény folytonossága

2.6.1. Állítás. (Az inverzfüggvény folytonossága) *Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ folytonos injekció, továbbá* $\mathrm{Dom}(f)$ *korlátos és zárt halmaz, akkor az f^{-1} inverzfüggvény folytonos.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\mathfrak{b} \in \mathrm{Dom}(f^{-1}) := \mathrm{Im}(f)$ olyan pont, amelyben f^{-1} *nem folytonos.* Legyen $\mathfrak{a} := f^{-1}(\mathfrak{b})$ és az átviteli elv alapján vegyünk olyan $\mathbf{s}$ sorozatot, amely az $\mathrm{Im}(f)$ halmazban halad, $\mathfrak{b}$-hez konvergál, és az $\mathbf{s}' := f^{-1} \circ \mathbf{s}$ sorozat nem konvergál $\mathfrak{a}$-hoz. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $n > N$ természetes szám, amelyre $|\mathbf{s}'(n) - \mathfrak{a}| \geq \varepsilon$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ilyen szám és jelölje g azt az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyre minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$g(N) := \min\{n \in \mathbb{N} | (n > N) \wedge (|\mathbf{s}'(n) - \mathfrak{a}| \geq \varepsilon)\}.$$

Legyen σ a 0 kezdőpont és a g függvény által meghatározott iterációs sorozat. Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+1) = g(\sigma(n)) > \sigma(n)$ és $|\mathbf{s}'(\sigma(n+1)) - \mathfrak{a}| \geq \varepsilon$. Tehát az $\mathbf{s}'' : \mathbb{N} \to \mathbb{K};\ n \mapsto \mathbf{s}'(\sigma(n+1))$ függvény az $\mathbf{s}'$-nek olyan részsorozata, amely a $\mathrm{Dom}(f) \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{a}; \mathbb{K})$ korlátos és zárt halmazban halad. Ezért a Bolzano-Weierstrass-tétel alapján vehetünk olyan $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan növő függvényt, amelyre az $\mathbf{s}'' \circ \sigma'$ sorozat konvergens és $\mathfrak{a}' := \lim(\mathbf{s}'' \circ \sigma') \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{a}; \mathbb{K})$. Az f függvény folytonos $\mathfrak{a}'$-ben, ezért az átviteli elv alapján az $f \circ \mathbf{s}'' \circ \sigma'$ sorozat konvergens és $\lim(f \circ \mathbf{s}'' \circ \sigma') = f(\mathfrak{a}')$. Világos, hogy $f \circ \mathbf{s}'' = \mathbf{s} \circ \sigma \circ \sigma_1$, ahol σ_1 jelöli az $\mathbb{N} \to \mathbb{N};\ n \mapsto n+1$ sorozatot, ilymódon $\mathbf{s} \circ (\sigma \circ \sigma_1 \circ \sigma')$ az $\mathbf{s}$-nek olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke $f(\mathfrak{a}')$-vel egyenlő. De az $\mathbf{s}$ sorozat $\mathfrak{b}$-hez konvergál, ezért $f(\mathfrak{a}') = \mathfrak{b} = f(\mathfrak{a})$, így az f injektivitása folytán $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$. Ez viszont $\mathfrak{a}' \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{a}; \mathbb{K})$ miatt lehetetlen. ■

Az előző állításban egészen lényeges az, hogy a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz *korlátos és zárt*; e nélkül az állítás általában nem igaz (ld. **21**. gyakorlat).

2.7. Bolzano-tétel és alkalmazásai

2.7.1. Lemma. (Bolzano-lemma) *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ekkor van olyan $c \in]a, b[$, amelyre $f(c) = 0$.*

Bizonyítás. (*I. bizonyítás.*) Feltehető, hogy $f(a) < 0 < f(b)$, hiszen a másik eset (amikor $f(a) > 0 > f(b)$) erre visszavezethető, áttérve f-ről a $-f$ függvényre.

Értelmezzük az $E := \{x \in [a, b] | f(x) < 0\}$ halmazt, amely természetesen nem üres, hiszen $a \in E$, továbbá felülről korlátos, hiszen b felső korlátja. Ezért tekinthetjük a $c := \sup(E)$ pontot, amelyre $c \in \overline{E} \subseteq [a, b]$ teljesül, ugyanis $E \subseteq [a, b]$ és $[a, b]$ zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben.

Az f függvény folytonos a-ban, ezért a $-f(a) \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $f\langle]a - \delta, a + \delta[\rangle \subseteq]f(a) - (-f(a)), f(a) + (-f(a))[=]2f(a), 0[$, vagyis minden $x \in]a, \min(a+\delta, b)[$ pontra $f(x) < 0$. Ebből következik, hogy E-nek létezik a-nál nagyobb eleme, így $c := \sup(E) > a$. Ugyanakkor létezik olyan $\mathbf{s}$ sorozat, amely E-ben halad és c-hez konvergál, mert $c := \sup(E) \in \overline{E}$. Az f függvény folytonos c-ben, ezért az átviteli elv alapján $f \circ \mathbf{s}$ konvergál $f(c)$-hez. Ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(\mathbf{s}(n)) < 0$, tehát $f(c) \leq 0$, amiből az is látszik, hogy $c < b$.

A bizonyítás befejezéséhez megmutatjuk, hogy $f(c) < 0$ lehetetlen. Valóban, ha $f(c) < 0$ igaz volna, akkor az f függvény c pontbeli folytonossága miatt az $-f(c) \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\delta < \min(c-a, b-c)$ és $f\langle]c-\delta, c+\delta[\rangle \subseteq]f(c)-(-f(c)), f(c)+(-f(c))[=]2f(c), 0[$, így minden $x \in]c-\delta, c+\delta[$ pontra $f(x) < 0$, vagyis $x \in E$. Ez azt jelenti, hogy E-nek van c-nél nagyobb pontja (a $]c, c+\delta[$ intervallum minden eleme ilyen), ami ellentmond annak, hogy c felső korlátja E-nek.

(*II. bizonyítás.*) Az $f(a) \cdot f(b) < 0$ feltétel alapján $f(a) < 0 < f(b)$ vagy $f(a) > 0 > f(b)$ teljesül.

Tegyük fel, hogy $f(a) < 0 < g(b)$, és vezessük be a következő halmazt:

$$\mathfrak{S} \;:=\; \{\ (a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (a \leq a' < b' \leq b) \wedge (f(a') \leq 0 \leq f(b'))\},$$

továbbá értelmezzük az

$$S : \mathfrak{S} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad (a', b') \mapsto \begin{cases} (a', (a'+b')/2) & \text{, ha } f(a') \leq 0 \leq f((a'+b')/2), \\ ((a'+b')/2, b') & \text{, ha } f(a') > 0 \text{ vagy } f((a'+b')/2) < 0 \end{cases}$$

leképezést.

Könnyen látható, hogy minden $(a', b') \in \mathfrak{S}$ esetén $S(a', b') \in \mathfrak{S}$. Valóban, ha $(a', b') \in \mathfrak{S}$ és $(a'', b'') := S(a', b')$, akkor $f(a') \leq 0 \leq f((a'+b')/2)$ esetén nyilvánvalóan $(a'', b'') = (a', (a'+b')/2) \in \mathfrak{S}$, míg $f(a') > 0$ vagy $f((a'+b')/2) < 0$ esetén $f(a') \leq 0$ miatt szükségképpen $f((a'+b')/2) < 0$, így $0 \leq f(b')$ következtében $(a'', b'') = ((a'+b')/2, b') \in \mathfrak{S}$.

Tehát $S : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ függvény és nyilvánvalóan $(a, b) \in \mathfrak{S}$, ezért képezhetjük az (a, b) kezdőpont és S függvény által meghatározott $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ iterációs sorozatot. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(a_n, b_n) \in \mathfrak{S}$, vagyis $a \leq a_n < b_n \leq b$ és $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, továbbá $a_0 = a$, $b_0 = b$ és $(a_{n+1}, b_{n+1}) = S(a_n, b_n)$.

Nyilvánvaló, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton növő, és a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton fogyó, mert minden $n \in \mathbb{N}$ számra

– ha $f(a_n) \leq 0 \leq f((a_n+b_n)/2)$, akkor $(a_{n+1}, b_{n+1}) = S(a_n, b_n) = (a_n, (a_n+b_n)/2)$, tehát $a_n = a_{n+1}$ és $b_{n+1} = (a_n+b_n)/2 < b_n$,

– ha $f(a_n) > 0$ vagy $f((a_n+b_n)/2) < 0$, akkor $f(a_n) \leq 0$ miatt szükségképpen $f((a_n+b_n)/2) < 0$, így $(a_{n+1}, b_{n+1}) = S(a_n, b_n) = ((a_n+b_n)/2, b_n)$, tehát $a_n < (a_n+b_n)/2 = a_{n+1}$ és $b_{n+1} = b_n$.

Tehát az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton növő és felülről b által korlátos, valamint a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton fogyó és alulról a által korlátos, így léteznek az $a_* := \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ és $b_* := \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ határértékek. Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor minden $n \geq m$ természetes számra $a_n < b_n \leq b_m$, ezért $a_* \leq b_m$. tehát minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $a_* \leq b_m$, ezért $a_* \leq b_*$. Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}$ számra $a_n \leq a_* \leq b_* \leq b_n$, tehát $0 \leq b_* - a_* \leq b_n - a_n$. Ugyanakkor S definíciója alapján teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n - a_n = (b-a)/2^n$, tehát $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$. Ebből következik, hogy $a_* = b_*$. Mivel f folytonos ebben a pontban, így az átviteli elv alapján $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(a_*) = f(b_*) = \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n)$. Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}$ számra $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, ezért $f(a_*) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) \leq \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) = f(b_*)$, ami azt jelenti, hogy $f(a_*) \leq 0 \leq f(b_*) = f(a_*)$, vagyis $c := a_* \in [a, b]$ olyan pont, hogy $f(c) = 0$. Természetesen $c \in]a, b[$, mert $f(a) \neq 0$ és $f(b) \neq 0$.

Ha $f(a) > 0 > f(b)$, akkor a $-f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény szintén folytonos, valamint $(-f)(a) = -f(a) < 0 < -f(b) = (-f)(b)$, így az előzőek szerint van olyan $c \in]a, b[$, hogy $-f(c) = (-f)(c) = 0$, tehát $f(c) = 0$. ■

2.7.2. Tétel. (Bolzano-tétel) *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan intervallum, amelynek minden pontjában f folytonos, akkor az $f\langle I\rangle$ halmaz is intervallum.*

Bizonyítás. Legyenek $a', b' \in f\langle I\rangle$ olyanok, hogy $a' < b'$; megmutatjuk, hogy ekkor $]a', b'[\subseteq f\langle I\rangle$, következésképpen az $f\langle I\rangle$ halmaz intervallum. Valóban, legyenek $a, b \in I$ olyan pontok, hogy $a' = f(a)$ és $b' = f(b)$. Világos, hogy $a' \neq b'$ miatt $a \neq b$.

Tegyük fel, hogy $a < b$. Vegyünk tetszőleges $y \in]a', b'[$ pontot, és képezzük a $g : [a, b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) - y$ függvényt. Az f folytonos az $[a, b]$ minden pontjában, ezért a g függvény folytonos, továbbá nyilvánvalóan $g(a) := f(a) - y = a' - y < 0$ és $g(b) := f(b) - y = b' - y > 0$. Ezért az előző lemma szerint van olyan $x \in]a, b[$, amelyre $g(x) = 0$, azaz $f(x) = y$ teljesül, így $y \in f\langle I\rangle$. Ez azt jelenti, hogy $]a', b'[\subseteq f\langle I\rangle$.

Ha $b < a$, akkor az előző érvelést megismételve az a és b felcserélésével, szintén azt kapjuk, hogy $]a', b'[\subseteq f\langle I\rangle$. ■

2.7.3. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvény, $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt intervallum, továbbá f az I halmazon szigorúan monoton, akkor $f\langle I\rangle$ nyílt intervallum és az $(f|_I)^{-1}$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy f szigorúan monoton növő az I intervallumon; a szigorúan monoton fogyó függvények esete erre visszavezethető.

Legyen $\mathfrak{a} \in I$ tetszőleges, és válasszunk olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $[\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r] \subseteq I$. Az f monoton növése és a Bolzano-tétel alapján $f\langle[\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r]\rangle = [f(\mathfrak{a} - r), f(\mathfrak{a} + r)]$. Ugyanakkor f szigorúan monoton növő, tehát ha $\delta \in]0, \min(f(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{a} - r), f(\mathfrak{a} + r) - f(\mathfrak{a}))[$ tetszőleges valós szám, akkor

$$f(\mathfrak{a}) \in]f(\mathfrak{a}) - \delta, f(\mathfrak{a}) + \delta[\subseteq [f(\mathfrak{a} - r), f(\mathfrak{a} + r)] = f\langle[\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r]\rangle \subseteq f\langle I\rangle,$$

így $f(\mathfrak{a})$ belső pontja $f\langle I\rangle$-nek, és az is látszik, hogy az $(f|_I)^{-1}$ és $(f|_{[\mathfrak{a}-r,\mathfrak{a}+r]})^{-1}$ függvények egyenlők a $]f(\mathfrak{a}) - \delta, f(\mathfrak{a}) + \delta[$ nyílt intervallumon. De az $f|_{[\mathfrak{a}-r,\mathfrak{a}+r]}$ függvény folytonos injekció, és $[\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r]$ korlátos és zárt halmaz, ezért az $(f|_{[\mathfrak{a}-r,\mathfrak{a}+r]})^{-1}$ inverzfüggvény folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban. A folytonosság lokalitásából következik, hogy az $(f|_I)^{-1}$ függvény is folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban. ■

Az előző állítást alkalmazva az exp függvényre kapjuk, hogy a $\log := \exp^{-1}$ függvény folytonos.

2.7.4. Következmény. *A valós logaritmusfüggvény definíciós tartománya egyenlő az $\mathbb{R}_+^*$ halmazzal.*

Bizonyítás. Elegendő azt igazolni, hogy $\mathbb{R}_+^* \subseteq \mathrm{Dom}(\log) := \mathrm{Im}(\exp)$, vagyis hogy minden $y \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre $y = \exp(x)$. Ha $x > 0$, akkor $\exp(x) \geq 1 + x$, ezért bármely $y \in \mathbb{R}$ esetén, minden $x > \max(y - 1, 0)$ valós számra $y < \exp(x)$ teljesül. Ha tehát $y \in \mathbb{R}_+^*$, akkor az y-hoz van olyan $b \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $y < \exp(b)$, továbbá az $1/y$-hoz van olyan $b' \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $1/y < \exp(b')$, vagyis $\exp(-b') < y$. Ha tehát $a := -b'$, akkor $a < 0 < b$ és $\exp(a) < y < \exp(b)$. Az exp függvény folytonossága és a Bolzano-tétel szerint $\exp\langle[a, b]\rangle$ intervallum, tehát $y \in]\exp(a), \exp(b)[\subseteq \exp\langle[a, b]\rangle \subseteq \mathrm{Im}(\exp)$, így van olyan $x \in \mathbb{R}$ (sőt $x \in]a, b[$), amelyre $y = \exp(x)$. ■

Ebből az is következik, hogy minden $a \in \mathbb{R}_+^*$ és $z \in \mathbb{C}$ esetén az $a^z := \mathrm{Exp}(z \cdot \log(a))$ hatvány jól értelmezett.

2.8. Abszolútérték-függvények $\mathbb{Q}$ felett

A következő tételben meghatározzuk az összes $\mathbb{Q}$ feletti abszolútérték-függvényt.

2.8.1. Tétel. *Legyen $\omega : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ tetszőleges abszolútérték-függvény a $\mathbb{Q}$ test felett, és jelölje $\mathbb{P}$ a prímszámok halmazát.*

a) *Ha létezik olyan $p \in \mathbb{P}$, hogy $\omega(p) < 1$, akkor pontosan egy olyan $p \in \mathbb{P}$ létezik, amelyre $\omega(p) < 1$, továbbá ekkor minden $x \in \mathbb{Q}^*$ számra $\omega(x) = \omega(p)^{\nu_p(x)}$ teljesül* (**NUM** 2.10.1. gyakorlat).

b) *Ha minden $p \in \mathbb{P}$ számra $\omega(p) \geq 1$ és ω nem az improprius abszolútérték-függvény, akkor minden $p \in \mathbb{P}$ esetén $\omega(p) > 1$ teljesül, továbbá bármely két $p, q \in \mathbb{P}$ prímszámra*

$$\frac{\log(\omega(p))}{\log(p)} = \frac{\log(\omega(q))}{\log(q)};$$

és ha ϱ jelöli ezt a hányadost, akkor $\varrho \in]0, 1]$ és minden $x \in \mathbb{Q}^*$ számra $\omega(x) = |x|^\varrho$ teljesül.

c) *Ha $p \in \mathbb{P}$, $a \in]0, 1[$ és $\varrho \in]0, 1]$, akkor a*

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \begin{cases} a^{\nu_p(x)} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0; \end{cases}$$

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \begin{cases} |x|^\varrho & , \text{ ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0; \end{cases}$$

függvények nem improprius abszolútérték-függvények $\mathbb{Q}$ felett. Ezek közül az első ultrametrikus, és minden $\mathbb{Q}$ feletti nem improprius ultrametrikus abszolútérték-függvény ilyen alakú.

Bizonyítás. (I) Legyen $p \in \mathbb{P}$ olyan, hogy $\omega(p) \leq 1$; megmutatjuk, hogy ekkor minden $q \in \mathbb{P}$ esetén $\omega(q) \leq 1$. Legyen $q \in \mathbb{P}$ rögzített. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\sigma(n)$ az a természetes szám, amelyre $p^{\sigma(n)} \leq q^n < p^{\sigma(n)+1}$, továbbá legyen $(a_n(k))_{0 \leq k \leq \sigma(n)}$ az az $\mathbb{N}$-ben haladó rendszer, amelyre $0 \leq k \leq \sigma(n)$ esetén $0 \leq a_n(k) < p$ és

$$q^n = \sum_{k=0}^{\sigma(n)} a_n(k) p^k$$

teljesül (ez a q^n szám előállítása a p alapú számrendszerben). Legyen $C := \max_{0 \leq m < p} \omega(m)$; ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\omega(q))^n = \omega(q^n) \leq \sum_{k=0}^{\sigma(n)} \omega(a_n(k))(\omega(p))^k \leq C \cdot (\sigma(n) + 1),$$

továbbá $\sigma(n)$ definíciója szerint

$$\sigma(n) \leq n \frac{\log(q)}{\log(p)} \leq \sigma(n) + 1,$$

amiből következik, hogy

$$\omega(q) \leq \lim_{n \to \infty} C^{1/n} (\sigma(n) + 1)^{1/n} = 1.$$

Ha $n \in \mathbb{Z}$ és $n \neq 0$, akkor van olyan $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, hogy

$$n = \varepsilon \cdot \prod_{q \in \mathbb{P}} q^{\nu_q(n)}$$

(II. fejezet, 2. pont, **1**. gyakorlat), továbbá ekkor minden $q \in \mathbb{P}$ esetén $\nu_q(n) \geq 0$, ezért

$$\omega(n) = \prod_{q \in \mathbb{P}} (\omega(q))^{\nu_q(n)} \leq 1.$$

Tehát beláttuk, hogy ha van olyan $p \in \mathbb{P}$, hogy $\omega(p) < 1$, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ számra $\omega(n) \leq 1$ teljesül.

(II) Tegyük fel, hogy $p, q \in \mathbb{P}$ olyanok, amelyekre $p \neq q$ és $\omega(p) < 1$, valamint $\omega(q) < 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén p^n és q^n relatív prímek, így a Bézout-tétel (**ALG** 4.6.14) szerint léteznek olyan $a, b \in \mathbb{Z}$, hogy $ap^n + bq^n = 1$, tehát az (I) alapján

$$1 = \omega(1) \leq \omega(a)\omega(p)^n + \omega(b)\omega(q)^n \leq \omega(p)^n + \omega(q)^n.$$

Ugyanakkor $\omega(p) < 1$ és $\omega(q) < 1$, így $(\omega(p)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(\omega(q)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ zérussorozatok, ami az előző egyenlőtlenség miatt lehetetlen. Ezért *legfeljebb egy* olyan $p \in \mathbb{P}$ létezhet, amelyre $\omega(p) < 1$.

(III) Ha létezik olyan $p \in \mathbb{P}$, hogy $\omega(p) < 1$, akkor az (I) és (II) alapján egyetlen ilyen $p \in \mathbb{P}$ létezik, és minden $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$ számra $\omega(q) = 1$, ezért ha $x \in \mathbb{Q}^*$, és $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ olyan, hogy

$$x = \varepsilon \cdot \prod_{q \in \mathbb{P}} q^{\nu_q(n)},$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$\omega(x) = \prod_{q \in \mathbb{P}} \omega(q)^{\nu_q(n)} = \omega(p)^{\nu_p(n)},$$

amivel a)-t igazoltuk.

(IV) Most tegyük fel, hogy minden $p \in \mathbb{P}$ esetén $\omega(p) \geq 1$. Ha van olyan $p \in \mathbb{P}$, hogy $\omega(p) = 1$, akkor az (I) alapján minden $q \in \mathbb{P}$ esetén $\omega(q) = 1$ teljesül, amiből következik, hogy ω az improprius abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett. Ha tehát feltesszük, hogy ω nem az improprius abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett, akkor minden $p \in \mathbb{P}$ esetén $\omega(p) > 1$. Legyen $p, q \in \mathbb{P}$ rögzítettek. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén ismét vegyük a q^n szám előállítását a p alapú számrendszerben, tehát legyen $\sigma(n)$ az a természetes szám, amelyre $p^{\sigma(n)} \leq q^n < p^{\sigma(n)+1}$, továbbá legyen $(a_n(k))_{0 \leq k \leq \sigma(n)}$ az az $\mathbb{N}$-ben haladó rendszer, amelyre $0 \leq k \leq \sigma(n)$ esetén $0 \leq a_n(k) < p$ és

$$q^n = \sum_{k=0}^{\sigma(n)} a_n(k) p^k$$

teljesül. Legyen ismét $C := \max\limits_{0 \leq m < p} \omega(m)$; ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\omega(q)^n = \omega(q^n) \leq \sum_{k=0}^{\sigma(n)} \omega(a_n(k))\omega(p)^k \leq C \cdot \frac{\omega(p)^{\sigma(n)+1} - 1}{\omega(p) - 1} \leq \frac{C \cdot \omega(p)}{\omega(p) - 1} \cdot \omega(p)^{\sigma(n)},$$

tehát

$$\omega(q) \leq \left(\frac{C \cdot \omega(p)}{\omega(p) - 1} \right)^{1/n} \cdot \omega(p)^{\sigma(n)/n}.$$

Továbbá, a $\sigma(n)$ definíciója szerint $\frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{\log(q)}{\log(p)}$, amiből $\omega(p) > 1$ miatt következik, hogy

$$\omega(q) \leq \left(\frac{C \cdot \omega(p)}{\omega(p) - 1}\right)^{1/n} \cdot \omega(p)^{\log(q)/\log(p)}.$$

Ebből határátmenettel kapjuk, hogy

$$\omega(q) \leq \omega(p)^{\log(q)/\log(p)}.$$

Ez *bármely két* p és q prímszámra igaz, ezért a p és q felcserélésével kapjuk, hogy

$$\omega(p) \leq \omega(q)^{\log(p)/\log(q)}.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $p, q \in \mathbb{P}$ esetén

$$\frac{\log(\omega(p))}{\log(p)} = \frac{\log(\omega(q))}{\log(q)},$$

tehát ha ϱ jelöli ezt a hányadost, akkor minden p prímszámra $\omega(p) = p^{\varrho}$. Ha $x \in \mathbb{Q}^*$, és $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ olyan, hogy

$$x = \varepsilon \cdot \prod_{q \in \mathbb{P}} q^{\nu_q(n)},$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$\omega(x) = \prod_{q \in \mathbb{P}} \omega(q)^{\nu_q(n)} = \prod_{q \in \mathbb{P}} q^{\varrho\nu_q(n)} = \left(\prod_{q \in \mathbb{P}} q^{\nu_q(n)}\right)^{\varrho} = |x|^{\varrho},$$

ahol $|\cdot|$ az euklidészi abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett. Ugyanakkor

$$2 = \omega(1) + \omega(1) \geq \omega(1+1) = \omega(2) = 2^{\varrho},$$

ezért $\varrho \in]0, 1]$. Ezzel b)-t igazoltuk.

(V) Legyen most $p \in \mathbb{P}$, $a \in]0, 1[$, $\varrho \in]0, 1]$, és

- $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amely 0-hoz 0-t rendel, és minden $x \in \mathbb{Q}_+^*$ számra $\omega_{a,p}(x) := a^{\nu_p(x)}$;

- $\omega_{\varrho} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amely 0-hoz 0-t rendel, és minden $x \in \mathbb{Q}_+^*$ számra $\omega_{\varrho}(x) := |x|^{\varrho}$, ahol $|\cdot|$ az euklidészi abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett.

Megmutatjuk, hogy az $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ és $\omega_{\varrho} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ függvények olyan abszolútérték-függvények $\mathbb{Q}$ felett, hogy $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ ultrametikus és $\omega_{\varrho} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ nem ultrametrikus.

Valóban, az $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ és $\omega_{\varrho} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ függvények $\mathbb{Q}_+^*$-ra vett leszűkítései $\exp \circ h$ alakúak, ahol a $h : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy minden $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ esetén $h(xy) = h(x) + h(y)$. Ezért az $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ és $\omega_{\varrho} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ függvényekre ($\mathrm{VA_{II}}$) teljesül.

Az $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ függvényre ($\mathrm{VA_{III}}$) teljesül, mert $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ és $x + y \in \mathbb{Q}_+^*$ esetén $\nu_p(x+y) \geq \min(\nu_p(x), \nu_p(y))$, ezért $a \in]0, 1[$ miatt $\nu_p(x+y) \cdot \log(a) \leq \max(\nu_p(x) \cdot \log(a), \nu_p(y) \cdot \log(a))$, tehát

$$\omega_{a,p}(x+y) := \exp(\nu_p(x+y) \cdot \log(a)) \leq \max(\omega_{a,p}(x), \omega_{a,p}(y)) \leq \omega_{a,p}(x) + \omega_{a,p}(y).$$

Ez azt jelenti, hogy $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ ultrametrikus abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett.

Az $\omega_\varrho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ függvényre (VA$_{\text{III}}$) teljesül, mert $\varrho \in]0,1]$ miatt $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ és $x+y \in \mathbb{Q}_+^*$ esetén

$$\omega_\varrho(x+y) = |x+y|^\varrho \leq (|x|+|y|)^\varrho \leq |x|^\varrho + |y|^\varrho = \omega_\varrho(x) + \omega_\varrho(y),$$

hiszen ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\alpha/(\alpha+\beta) \in [0,1]$ és $\beta/(\alpha+\beta) \in [0,1]$, így

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^\varrho, \quad \frac{\beta}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^\varrho,$$

és ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva

$$1 \leq \frac{\alpha^\varrho + \beta^\varrho}{(\alpha+\beta)^\varrho}$$

adódik. Ezért az $\omega_\varrho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ is abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett, és ez nem ultrametrikus, mert $\omega_\varrho(1+1) = \omega_\varrho(2) = 2^\varrho > 1 = \max(\omega_\varrho(1), \omega_\varrho(1))$, hiszen a feltevés szerint $\varrho > 0$. ■

2.9. Egyenletesen folytonos függvények

Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ folytonos függvény, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ ponthoz létezik olyan ε-tól és $\mathfrak{a}$-tól függő $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ szám, amelyre $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$ teljesül. Könnyen látható, hogy ha $\mathrm{Dom}(f)$ *véges* halmaz, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy *minden* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$ teljesül. Azonban *végtelen* $\mathrm{Dom}(f)$ esetén előfordulhat, hogy adott $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén nem létezik olyan közös $\delta > 0$ valós szám, hogy minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$ teljesül. Ezért nemtriviális tulajdonság a következő.

2.9.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény* **egyenletesen folytonos**, *ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$ teljesül.*

2.9.2. Állítás. (Az egyenletes folytonosság jellemzése) *Az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $x, x' \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén, ha $|x - x'| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Ha f egyenletesen folytonos és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$ teljesül; ekkor $x, x' \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén, ha $|x - x'| < \delta$, akkor $x' \in \mathrm{B}_\delta(x; \mathbb{K}) \cap \mathrm{Dom}(f)$, így $f(x') \in \mathrm{B}_\varepsilon(f(x); \mathbb{K})$, vagyis $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Megfordítva, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, amelyre minden $x, x' \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén, ha $|x - x'| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ és $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra $|x - \mathfrak{a}| < \delta$, így $|f(x) - f(\mathfrak{a})| < \varepsilon$, vagyis minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$ teljesül, ami azt jelenti, hogy f egyenletesen folytonos. ■

2.9.3. Állítás. *Ha az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény egyenletesen folytonos, akkor folytonos.*

Bizonyítás. Az f függvény egyenletes folytonossága azt jelenti, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall \mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f))\ f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}),$$

amiből következik az, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\forall \mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f))(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*): \ f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}).$$

Ez utóbbi állítás viszont ekvivalens azzal, hogy

$$(\forall \mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f))(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*): \ f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}),$$

ami pontosan azt jelenti, hogy f a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz minden pontjában folytonos. ■

2.10. Heine-tétel

Könnyen adható példa folytonos, de nem egyenletesen folytonos függvényre. Azonban bizonyos esetekben a folytonosságból következtethetünk az egyenletes folytonosságra; ilyen esetről szól a következő állítás.

2.10.1. Állítás. (Heine-tétel) *Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ folytonos függvény és $\mathrm{Dom}(f)$ korlátos és zárt halmaz, akkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ folytonos függvény, $\mathrm{Dom}(f)$ korlátos és zárt halmaz, továbbá f nem egyenletesen folytonos. Az egyenletes folytonosság jellemzése szerint ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $\delta > 0$ valós számhoz létezik olyan $(x, x') \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f)$ pár, amelyre $|x - x'| < \delta$ és $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ egy ilyen szám és rögzítsünk egy $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{(x, x') \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f) | (|x - x'| < \delta_n) \wedge (|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)\} \neq \emptyset,$$

ezért a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (\{(x, x') \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f) | (|x - x'| < \delta_n) \wedge (|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)\}) \neq \emptyset.$$

Legyen $\mathbf{S}$ eleme ennek a szorzathalmaznak, és vezessük be a

$$\mathrm{p} : \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Dom}(f); \quad (x, y) \mapsto x,$$
$$\mathrm{p}' : \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Dom}(f); \quad (x, y) \mapsto y$$

leképezéseket. Ekkor $\mathbf{s} := \mathrm{p} \circ \mathbf{S}$ és $\mathbf{s}' := \mathrm{p}' \circ \mathbf{S}$ olyan függvények, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\mathbf{S}(n) = (\mathbf{s}(n), \mathbf{s}'(n))$, tehát $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozatok, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}'(n)| < \delta_n$ és $|f(\mathbf{s}(n)) - f(\mathbf{s}'(n))| \geq \varepsilon$. A $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz korlátos és zárt, ezért a Bolzano-Weierstrass-tétel alapján van olyan $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre $\mathbf{s} \circ \sigma'$ konvergens és $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma') \in \mathrm{Dom}(f)$. Ismét a Bolzano-Weierstrass-tételt alkalmazva kapjuk olyan $\sigma'' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény létezését, amelyre $(\mathbf{s}' \circ \sigma') \circ \sigma''$ konvergens és $\lim((\mathbf{s}' \circ \sigma') \circ \sigma'') \in \mathrm{Dom}(f)$. Ekkor $\sigma := \sigma' \circ \sigma''$ olyan $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre az $\mathbf{s} \circ \sigma$ és $\mathbf{s}' \circ \sigma$ sorozatok mindketten konvergensek, és a határértékük eleme a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaznak. Legyenek $\mathfrak{a} := \lim(\mathbf{s} \circ \sigma)$ és $\mathfrak{a}' := \lim(\mathbf{s}' \circ \sigma)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\mathbf{s}(\sigma(n)) - \mathbf{s}'(\sigma(n))| < \delta_{\sigma(n)}$, és $(\delta_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is zérussorozat, ezért $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma - \mathbf{s}' \circ \sigma) = 0$. Ebből következik, hogy $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$. Az f függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért az átviteli elv alapján $\lim(f \circ (\mathbf{s} \circ \sigma)) = f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a}') = \lim(f \circ (\mathbf{s}' \circ \sigma))$. Ez azt jelenti, hogy $\lim(f \circ (\mathbf{s} \circ \sigma) - f \circ (\mathbf{s}' \circ \sigma)) = 0$, ami viszont lehetetlen, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(\mathbf{s}(\sigma(n))) - f(\mathbf{s}'(\sigma(n)))| \geq \varepsilon$. ■

2.11. Reguláris függvények

2.11.1. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ belső pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Az f függvény pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha f-nek létezik a jobboldali és baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $f(\mathfrak{a}) = \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor torlódási pontja is $\mathrm{Dom}(f)$-nek, ezért f pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha létezik f-nek határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $f(\mathfrak{a}) = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ (2.2.1.). Ez utóbbi tulajdonság viszont a 1.7.2. állítás szerint ekvivalens azzal, hogy f-nek létezik a jobboldali és baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $f(\mathfrak{a}) = \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$. ■

2.11.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvénynek* **elsőfajú szakadása** *van az $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ belső pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, f nem folytonos $\mathfrak{a}$-ban, de f-nek mind a jobboldali, mind a baloldali határértéke létezik $\mathfrak{a}$-ban. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvénynek* **másodfajú szakadása** *van az $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ belső pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, f nem folytonos $\mathfrak{a}$-ban és f-nek nem elsőfajú szakadása van $\mathfrak{a}$-ban* (*vagyis* $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f$ *vagy* $\lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$ *nem létezik*)*.*

2.11.3. Definíció. *Az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényt* **regulárisnak** *nevezzük, ha* $\mathrm{Dom}(f)$ *nyílt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, és* $\mathrm{Dom}(f)$ *minden pontjában f folytonos vagy elsőfajú szakadása van* (*vagyis ha f-nek a* $\mathrm{Dom}(f)$ *halmaz minden pontjában létezik a jobboldali és létezik a baloldali határértéke*)*.*

2.11.4. Állítás. *Minden nyílt intervallumon értelmezett, monoton $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény reguláris.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ monoton növő függvény és $\mathrm{Dom}(f)$ nyílt intervallum. Rögzítsünk egy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontot.

Az $f\langle]\mathfrak{a}, \rightarrow[\rangle \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem üres, mert $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és alulról korlátos, mert az f monoton növése miatt $f(\mathfrak{a})$ alsó korlátja ennek a halmaznak. Ezért képezhető a $\mathfrak{b}_+ := \inf(f\langle]\mathfrak{a}, \rightarrow[\rangle)$ valós szám. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{b}_+$ az f-nek jobboldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Valóban, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\mathfrak{b}_+ + \varepsilon$ már nem alsó korlátja $f\langle]\mathfrak{a}, \rightarrow[\rangle$-nak, tehát van olyan $\mathfrak{a}' \in \mathrm{Dom}(f) \cap]\mathfrak{a}, \rightarrow[$, amelyre $f(\mathfrak{a}') < \mathfrak{b}_+ + \varepsilon$; ekkor a $\delta := \mathfrak{a}' - \mathfrak{a} \in \mathbb{R}_+^*$ szám olyan, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra, ha $\mathfrak{a} < x < \mathfrak{a} + \delta := \mathfrak{a}'$, akkor az f monoton növése miatt

$$\mathfrak{b}_+ - \varepsilon < \mathfrak{b}_+ \leq f(x) \leq f(\mathfrak{a}') < \mathfrak{b}_+ + \varepsilon,$$

tehát $|f(x) - \mathfrak{b}_+| < \varepsilon$.

Az $f\langle] \leftarrow, \mathfrak{a}[\rangle \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem üres, mert $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és felülről korlátos, mert az f monoton növése miatt $f(\mathfrak{a})$ felső korlátja ennek a halmaznak. Ezért képezhető a $\mathfrak{b}_- := \sup(f\langle]\leftarrow, \mathfrak{a}[\rangle)$ valós szám. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{b}_-$ az f-nek baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Valóban, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\mathfrak{b}_- - \varepsilon$ már nem felső korlátja $f\langle] \leftarrow, \mathfrak{a}[\rangle$-nak, tehát van olyan $\mathfrak{a}'' \in \mathrm{Dom}(f) \cap] \leftarrow, \mathfrak{a}[$, amelyre $\mathfrak{b}_- - \varepsilon < f(\mathfrak{a}'')$; ekkor a $\delta := \mathfrak{a} - \mathfrak{a}'' \in \mathbb{R}_+^*$ szám olyan, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra, ha $\mathfrak{a} - \delta = \mathfrak{a}'' < x < \mathfrak{a}$, akkor az f monoton növése miatt

$$\mathfrak{b}_- - \varepsilon < f(\mathfrak{a}'') \leq f(x) \leq \mathfrak{b}_- < \mathfrak{b}_- + \varepsilon,$$

tehát $|f(x) - \mathfrak{b}_-| < \varepsilon$. Ezzel beláttuk, hogy f reguláris függvény.

Ha f monoton fogyó, akkor $-f$ monoton növő, tehát $-f$ reguláris függvény, ezért f is reguláris. ■

2.11.5. Állítás. *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ reguláris függvény, akkor az f szakadási pontjainak halmaza megszámlálható.*

Bizonyítás. Értelmezzük azt az $\omega : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $\mathrm{Dom}(\omega) := \mathrm{Dom}(f)$, és minden $x \in \mathrm{Dom}(\omega)$ esetén

$$\omega(x) := \max\left(\left|f(x) - \lim_{x-0} f\right|, \left|f(x) - \lim_{x+0} f\right|\right).$$

Világos, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén az $\omega(x) = 0$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy f-nek x-ben létezik határértéke és az megegyezik $f(x)$-szel, vagyis az f folytonos x-ben. Tehát az f függvény szakadási pontjainak halmaza egyenlő az $\{x \in \mathrm{Dom}(f) | \omega(x) > 0\}$ halmazzal: ennek a megszámlálhatóságát kell igazolni.

Megmutatjuk, hogy ω-nak a definíciós tartománya minden pontjában létezik határértéke, és minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\omega)$ esetén $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \omega = 0$.

Legyen $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\omega)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített. Az $\mathfrak{a}$ pont belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek és f-nek létezik $\mathfrak{a}$-ban jobboldali és baloldali határértéke, ezért van olyan $\delta \in \mathbb{R}$, hogy $]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + \delta[$ pontra $|f(x) - \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f| < \varepsilon/2$, továbbá minden $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a}[$ pontra $|f(x) - \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f| < \varepsilon/2$. Legyen $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ ilyen szám és vegyünk egy $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + \delta[$ pontot. Ha $\mathbf{s}_+$ olyan számsorozat, amely $]x, \mathfrak{a} + \delta[$-ban halad és x-hez konvergál, akkor az átviteli elv szerint

$$\begin{aligned}\lim_{x+0} f := \lim_{x} \left(f|_{]x,\to[\cap \mathrm{Dom}(f)}\right) = \lim\left(\left(f|_{]x,\to[\cap \mathrm{Dom}(f)}\right) \circ \mathbf{s}_+\right) = \\ = \lim(f \circ \mathbf{s}_+) \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon],\end{aligned}$$

hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(\mathbf{s}_+(n)) - \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f| < \varepsilon/2$ és $|f(x) - \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f| < \varepsilon/2$, tehát $|f(\mathbf{s}_+(n)) - f(x)| < \varepsilon$. Hasonlóan kapjuk, hogy ha $\mathbf{s}_-$ olyan számsorozat, amely $]\mathfrak{a}, x[$-ben halad és x-hez konvergál, akkor az átviteli elv szerint

$$\begin{aligned}\lim_{x-0} f := \lim_{x} \left(f|_{]\leftarrow,x[\cap \mathrm{Dom}(f)}\right) = \lim\left(\left(f|_{]\leftarrow,x[\cap \mathrm{Dom}(f)}\right) \circ \mathbf{s}_-\right) = \\ = \lim(f \circ \mathbf{s}_-) \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon],\end{aligned}$$

hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(\mathbf{s}_-(n)) - \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f| < \varepsilon/2$ és $|f(x) - \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f| < \varepsilon/2$, tehát $|f(\mathbf{s}_-(n)) - f(x)| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + \delta[$ esetén

$$0 \leq \omega(x) = \max\left(\left|f(x) - \lim_{x-0} f\right|, \left|f(x) - \lim_{x+0} f\right|\right) \leq \varepsilon.$$

Teljesen hasonló meggondolások arra vezetnek, hogy $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a}[$ esetén is $0 \leq \omega(x) \leq \varepsilon$, ezért minden $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra $-\varepsilon < 0 \leq \omega(x) \leq \varepsilon$, vagyis ω-nak van határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \omega = 0$.

Most megmutatjuk, hogy minden $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ korlátos és zárt halmazra, és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számra az $\{x \in K | \omega(x) \geq \varepsilon\}$ halmaz *véges*. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ korlátos és zárt halmaz, továbbá $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, de az $\{x \in K | \omega(x) \geq \varepsilon\}$ halmaz végtelen. Ekkor van olyan $\mathbf{s}$ sorozat, amely $\{x \in K | \omega(x) \geq \varepsilon\}$-ban halad és *injektív*. Az $\mathbf{s}$ sorozat a K korlátos és zárt halmazban halad, ezért a Bolzano-Weierstrass-tétel alapján van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre az $\mathbf{s} \circ \sigma$ részsorozat konvergens és $\mathfrak{a} := \lim(\mathbf{s} \circ \sigma) \in K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Az $\mathbf{s} \circ \sigma$ függvény injektív, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ természetes számra $(\mathbf{s} \circ \sigma)(n) \neq \mathfrak{a}$. Ugyanakkor az ω függvénynek az $\mathfrak{a}$ pontban a határértéke 0, ezért a határértékekre vonatkozó átviteli elv alapján $\lim(\omega \circ (\mathbf{s} \circ \sigma)) = \lim\limits_{\mathfrak{a}} \omega = 0$. Azonban minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(m) \in \{x \in K | \omega(x) \geq \varepsilon\}$, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\omega(\mathbf{s}(\sigma(n))) \geq \varepsilon$, ami lehetetlen, mert $\lim(\omega \circ (\mathbf{s} \circ \sigma)) = 0$.

A $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz nyílt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, ezért a II. fejezet, 2. pont, **5**. gyakorlat szerint vehetünk olyan $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ halmazsorozatot, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén K_m korlátos és zárt, valamint

$$\mathrm{Dom}(f) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m.$$

Legyen $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat. Ekkor

$$\{x \in \mathrm{Dom}(f) | \omega(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathrm{Dom}(f) | \omega(x) \geq \varepsilon_n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{x \in K_m | \omega(x) \geq \varepsilon_n\}$$

teljesül, ugyanakkor láttuk, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $\{x \in K_m | \omega(x) \geq \varepsilon_n\}$ véges halmaz, továbbá tudjuk azt, hogy megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható. Ezért $\{x \in \mathrm{Dom}(f) | \omega(x) > 0\}$, vagyis az f függvény szakadási pontjainak halmaza megszámlálható. ■

2.12. Gyakorlatok

1. A függvények kompozíciójának határértékével kapcsolatban tekintsük a következő példákat!

a) Legyen g az azonosan 0 függvény a $]\leftarrow, 0]$ intervallumon és $f := \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2$. Ekkor $\lim\limits_0 g$ létezik és $g(0) = \lim\limits_0 g$ is teljesül, továbbá $\lim\limits_0 f$ létezik és $f(0) = \lim\limits_0 f \in \mathrm{Dom}(g)$, azonban 0 *nem torlódási pontja* a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak.

b) Legyen $f := \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$ és $g := \chi_{\mathbb{R}^*}$. Ekkor $\lim\limits_0 f = f(0) \in \mathrm{Dom}(g)$ és $\lim\limits_0 g = 1$ és 0 torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak, de $\lim\limits_0 (g \circ f)$ *nem létezik* (mert $\lim\limits_0 g \neq g(0)$).

c) Legyen $f := \chi_{\{1\}}$ és $g := \chi_{\mathbb{R}^*}$. Ekkor $\lim\limits_0 f \in \mathrm{Dom}(g)$ és $\lim\limits_0 g = 1$ és 0 torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak és $\lim\limits_0 (g \circ f)$ létezik, de *nem egyenlő* $\lim\limits_0 g$-vel (mert $\lim\limits_0 g \neq g(0)$).

2. Legyen E halmaz, $f : E \to \mathbb{R}$ függvény, és $A \subseteq E$ olyan nem üres halmaz, hogy $f\langle A \rangle \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz. Ha $g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan monoton növő folytonos függvény, hogy $\overline{f\langle A \rangle} \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, akkor

$$\sup((g \circ f)\langle A \rangle) = g(\sup(f\langle A \rangle)).$$

(*Útmutatás.* Tudjuk, hogy $\sup(f\langle A \rangle) \in \overline{f\langle A \rangle}$, ezért van olyan A-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozat, hogy $f \circ \mathbf{s}$ konvergens valós sorozat és $\lim(f \circ \mathbf{s}) = \sup(f\langle A \rangle)$. A g függvény folytonos a $\sup(f\langle A \rangle)$ pontban, így az átviteli elv következtében $\lim(g \circ f \circ \mathbf{s}) = g(\sup(f\langle A \rangle))$ és természetesen $\lim(g \circ f \circ \mathbf{s}) \leq \sup((g \circ f)\langle A \rangle)$ teljesül. Tehát a $g(\sup(f\langle A \rangle)) \leq \sup((g \circ f)\langle A \rangle)$ egyenlőtlenséghez nem szükséges a g monoton növése, csak a folytonosságát használtuk ki. A fordított egyenlőtlenség viszont nyilvánvalóan következik a g monoton növéséből, még akkor is, ha g nem folytonos.)

3. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ intervallum. Az f függvény pontosan akkor injektív az I halmazon, ha szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó az I-n. Ha f injektív az I intervallumon, akkor az $(f|_I)^{-1}$ inverzfüggvény folytonos.

4. Legyen $E \subseteq \mathbb{K}$ tetszőleges halmaz. Egy $\Omega \subseteq E$ halmazt *E-ben nyíltnak* nevezünk, ha létezik olyan $\Omega' \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, hogy $\Omega = \Omega' \cap E$. Egy $F \subseteq E$ halmazt *E-ben zártnak* nevezünk, ha létezik olyan $F' \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, hogy $F = F' \cap E$. Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek:

a) Minden $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazra az $\overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle$ halmaz nyílt $\mathrm{Dom}(f)$-ben.

b) Minden $F \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazra az $\overset{-1}{f}\langle F\rangle$ halmaz zárt $\mathrm{Dom}(f)$-ben.

c) f folytonos.

(Ez a folytonosság *topologikus jellemzése*.)

5. A $+\infty$ pont torlódási pontja a log függvény definíciós tartományának és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^n(x)}{x} = 0$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Minden $x \geq 1$ számra fennállnak a

$$0 \leq \frac{\log^n(x)}{x} \leq \sqrt{\frac{(2n)!}{x}}$$

egyenlőtlenségek, mert ha $x \geq 1$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(x) := \dfrac{\log^n(x)}{x}$, akkor

$$x = \exp\left(\sqrt[n]{xf(x)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{xf(x)}\right)^k}{k!} \geq \frac{\left(\sqrt[n]{xf(x)}\right)^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^2 f(x)^2}{(2n)!},$$

amiből következik az $f(x) \leq \sqrt{\dfrac{(2n)!}{x}}$ egyenlőtlenség.)

6. Legyen $\mathbf{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, $c \in \mathbb{K}$, és tegyük fel, hogy $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} > 0$. Ha $m \in \mathbb{N}$ és minden $k < m$ természetes számra $\mathbf{a}(k) = 0$, akkor

$$\lim_{c} \frac{\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}}{(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^m} = \mathbf{a}(m).$$

Ennek alkalmazásával igazoljuk az exponenciális, trigonometrikus és hiperbolikus függvényekre vonatkozó nevezetes határérték-egyenlőségeket!

(*Útmutatás.* Minden $r \in]0, R_{\mathbf{a}}[$ esetén a

$$K_r := \frac{\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |\mathbf{a}(k)| r^k}{r^{m+1}}$$

szám olyan, hogy minden $z \in \mathrm{B}_r(c;\mathbb{K}) \setminus \{c\}$ pontra fennáll a

$$\left|\frac{\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z)}{(z-c)^m} - \mathbf{a}(m)\right| \leq K_r|z-c|$$

egyenlőtlenség.)

7. Mutassuk meg, hogy $\lim_{x\to 0}\log(1+x) = 0$, és ennek alkalmazásával igazoljuk a log függvény folytonosságát! Bizonyítsuk be a log függvény folytonosságát a Bolzano-tételt és az inverzfüggvény folytonosságának tételét alkalmazva az exp függvényre!

8. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

és ebből igazoljuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ számra

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

(*Útmutatás.* Legyen $f := \dfrac{\log\circ(1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}})}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$. Nyilvánvalóan fennáll az

$$f = \frac{1}{\left(\dfrac{\exp - 1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\right)\circ(f\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}})}$$

egyenőség, ezért ha f korlátos volna a 0 valamely gömbi környezetén, akkor teljesülne az, hogy $\lim_0(f\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = 0$, és $0 \notin \mathrm{Dom}\left(\dfrac{\exp-1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\right)$, továbbá $\lim_0\left(\dfrac{\exp-1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\right) = 1$, így a függvények kompozíciójának határértéktétele szerint

$$\lim_0\left(\left(\frac{\exp-1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\right)\circ(f\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}})\right) = 1,$$

amiből következne, hogy $\lim_0 f = 1$.

Ha $x \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\exp(x) > 1+x$, így $x > \log(1+x)$, vagyis $f(x) < 1$. Továbbá, ha $x \in]-1/2, 0[$, akkor

$$\exp(2x) = 1 + x + x(1+2x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(1+\frac{2x}{2k+2}\right) < 1+x,$$

tehát $2x \leq \log(1+x)$, vagyis $f(x) \leq 2$. Ugyanakkor minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra nyilvánvalóan $f(x) > 0$, ezért $f\langle]-1/2, 1/2[\rangle \subseteq [0,2]$.)

9. (*Raabe-féle konvergenciakritérium.*) Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) \neq 0$, akkor

$$\liminf_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\left|\frac{\mathbf{s}(n)}{\mathbf{s}(n+1)}\right| - 1\right)\right) > 1$$

esetén a $\sum \mathbf{s}$ sor abszolút konvergens, és

$$\limsup_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\left|\frac{\mathbf{s}(n)}{\mathbf{s}(n+1)}\right|-1\right)\right)<1$$

esetén a $\sum \mathbf{s}$ sor nem abszolút konvergens (de lehet feltételesen konvergens).

(*Útmutatás.* Legyen q olyan valós szám, hogy

$$1<q<\liminf_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\left|\frac{\mathbf{s}(n)}{\mathbf{s}(n+1)}\right|-1\right)\right).$$

Ekkor a $\liminf$ értelmezése alapján van olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $n>N$ természetes számra

$$\left|\frac{\mathbf{s}(n+1)}{\mathbf{s}(n)}\right|<\frac{1}{1+\frac{q}{n}}.$$

Legyen $\alpha\in]1,q[$ tetszőleges valós szám. Ekkor minden $n>N$ természetes számra

$$\frac{(n+1)^\alpha|\mathbf{s}(n+1)|}{n^\alpha|\mathbf{s}(n)|}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{1+\frac{q}{n}}=\frac{n+n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)}{n+q},$$

ugyanakkor

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)=\alpha,$$

tehát $\alpha<q$ miatt létezik olyan $N'\in\mathbb{N}$, hogy minden $n>N'$ természetes számra

$$n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)<q,$$

következésképpen minden $n>\max(N,N')$ természetes számra

$$\frac{(n+1)^\alpha|\mathbf{s}(n+1)|}{n^\alpha|\mathbf{s}(n)|}<\frac{n+n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)}{n+q}<1.$$

Ez azt jelenti, hogy az $(n^\alpha|\mathbf{s}(n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a $\max(N,N')$ indextől kezdve *monoton fogyó*, tehát ez a sorozat *korlátos* is, vagyis vehetünk olyan $C\geq 0$ valós számot, amelyre minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén

$$|\mathbf{s}(n)|\leq\frac{C}{n^\alpha}.$$

Az $\alpha>1$ feltétel alapján a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$$

hiperharmonikus sor konvergens, így a majoráns kritérium szerint a $\sum \mathbf{s}$ sor abszolút konvergens.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\left|\frac{\mathbf{s}(n)}{\mathbf{s}(n+1)}\right|-1\right)\right)<1$$

esetén létezik olyan $\alpha\in]0,1[$ valós szám és $M\in\mathbb{N}^*$, hogy az $(n^\alpha|\mathbf{s}(n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az M indextől kezdve *monoton növő*, tehát minden $n\geq M$ esetén a $C:=M^\alpha|\mathbf{s}(M)|$ számra

$$|\mathbf{s}(n)|\geq\frac{C}{n^\alpha}$$

teljesül. Ekkor az $\alpha < 1$ feltétel alapján a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

hiperharmonikus sor divergens, így a majoráns kritérium szerint a $\sum \mathbf{s}$ sor nem abszolút konvergens.

Azonban a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$$

sor példája mutatja, hogy lehet a $\sum \mathbf{s}$ sor feltételesen konvergens úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \left(\left| \frac{\mathbf{s}(n)}{\mathbf{s}(n+1)} \right| - 1 \right) \right) = \frac{1}{2} < 1$$

teljesül.)

10. A $]0,2]$ intervallumon a sin függvény szigorúan pozitív, és a $[0,2]$ intervallumon a cos függvény szigorúan monoton fogyó, továbbá $\cos(0) = 1$ és $\cos(2) < -1/3$. Létezik egyetlen olyan $\pi \in]0,4[$ valós szám, amelyre $\cos(\pi/2) = 0$ teljesül (ezt nevezzük *Ludolf-számnak*). A cos és sin függvények 2π szerint *periodikusak*, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ és $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Az Exp függvény $2\pi\mathbf{i}$ szerint periodikus, vagyis minden $z \in \mathbb{C}$ esetén $\mathrm{Exp}(z + 2\pi\mathbf{i}) = \mathrm{Exp}(z)$.

(*Útmutatás.* Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)} \right),$$

és nyilvánvaló, hogy minden $x \in]0,\sqrt{6}[$ valós számra és $k \geq 1$ természetes számra

$$\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)} \right) > 0.$$

Ebből következik, hogy minden $x \in]0,\sqrt{6}[$ esetén

$$\begin{aligned}
\sin(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)} \right) = \\
= x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} &\left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)} \right) \geq x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) > 0,
\end{aligned}$$

ezért a sin függvény szigorúan pozitív a $]0,\sqrt{6}[$ intervallumon, így a $]0,2]$ intervallumon is szigorúan pozitív.

Ha $x, y \in]0,2[$ és $x < y$, akkor $(y+x)/2, (y-x)/2 \in]0,2[$, tehát

$$\cos(y) - \cos(x) = -2\sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) < 0,$$

ami azt jelenti, hogy a cos függvény szigorúan monoton fogyó a $]0,2[$ intervallumon. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right),$$

és nyilvánvaló, hogy minden $x \in]0, 2\sqrt{3}[$ valós számra és $k \geq 1$ természetes számra

$$\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right) > 0.$$

Ebből következik, hogy minden $x \in]0, 2\sqrt{3}[$ esetén

$$\begin{aligned}\cos(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} &= 1 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right) = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right) = \\ = 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}&\left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.\end{aligned}$$

Ebből látható, hogy $\cos(2) \leq -1/3$, továbbá világos, hogy $\cos(0) = 1$, így a cos függvény folytonossága és a Bolzano-tétel alapján van olyan $p \in]0,2[$, amelyre $\cos(p) = 0$. A cos függvény injektív a $]0,2[$ intervallumon, ezért ez a $p \in]0,2[$ szám egyértelműen van meghatározva. Tehát $\pi := 2p$ az egyetlen valós szám, amely a $]0,4[$ intervallumba esik és $\cos(\pi/2) = 0$ teljesül.

Tudjuk, hogy $\cos^2(\pi/2) + \sin^2(\pi/2) = 1$, ezért $\sin(\pi/2) \in \{-1, +1\}$. Azonban a sin függvény pozitív a $]0,2[$ intervallumon, így $\sin(\pi/2) = 1$. Ebből, valamint a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulákból a periodikussági tulajdonságok könnyen levezethetők.)

11. Minden $u \in \mathbb{U}$ (vagyis egységnyi abszolút értékű) komplex számhoz létezik olyan $\theta \in [-\pi, \pi]$ valós szám, hogy $u = \mathrm{Exp}(\mathbf{i}\theta)$ teljesül. Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén van olyan $r \in \mathbb{R}_+$ és $\theta \in [-\pi, \pi]$, hogy $z = r(\cos(\theta) + \mathbf{i} \cdot \sin(\theta))$ (ez a komplex számok *trigonometrikus alakja*).

(*Útmutatás.* Elég az első állítást igazolni, ahhoz pedig elegendő megvizsgálni a sin és cos függvények menetét a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.)

12. Minden *páratlan fokszámú* valós polinomiális függvénynek létezik gyöke.

13. Ha $a \in \mathbb{R}$ és $f : [a, \to [\to \mathbb{R}$ folytonos függvény, továbbá $\lim\limits_{+\infty} f$ létezik, akkor f egyenletesen folytonos.

14. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos, monoton és folytonos függvény, akkor f egyenletesen folytonos.

(*Útmutatás.* Feltehető, hogy $I \neq \emptyset$ (különben $f = \emptyset$, tehát f egyenletes folytonossága logikai trivialitás), és $y_- := \inf(\mathrm{Im}(f)) < \sup(\mathrm{Im}(f)) =: y_+$ (különben f konstansfüggvény, tehát egyenletesen folytonos). Az is feltehető, hogy f monoton növő az I intervallumon, mert a monoton fogyó függvények esete erre visszavezethető, ha f-ről áttérünk a $-f$ függvényre. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és rögzítsünk olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\varepsilon' < \min\big(\varepsilon/2, (y_+ - y_-)/2\big)$. Vegyünk olyan $x_+ \in I$ és $x_- \in I$ pontokat, hogy $f(x_+) > y_+ - \varepsilon'$ és $f(x_-) < y_- + \varepsilon'$. Ha $x_- > x_+$, akkor f monoton növése miatt $y_- + \varepsilon' > f(x_-) \geq f(x_+) > y_+ - \varepsilon'$, ezért $\varepsilon' > (y_+ - y_-)/2$, holott $\varepsilon' < (y_+ - y_-)/2$. Tehát $x_- \leq x_+$ és mivel I intervallum és $x_-, x_+ \in I$, így $[x_-, x_+] \subseteq I$, tehát f folytonos az $[x_-, x_+]$ korlátos és zárt intervallum minden pontjában. A Heine-tétel szerint f egyenletesen folytonos az $[x_-, x_+]$ intervallumon, tehát ε'-höz létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre minden $x_1, x_2 \in [x_-, x_+]$ és $|x_1 - x_2| < \delta'$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon'$. Legyen $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, amelyre $\delta < \min(\delta', x_+ - x_-)$. Ekkor esetszétválasztással könnyen ellenőrizhető, hogy minden $x_1, x_2 \in I$ pontra, ha $|x_1 - x_2| < \delta$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, hiszen:

1) ha $x_1, x_2 \leq x_-$ (illetve $x_1, x_2 \geq x_+$), akkor f monotonitása és x_- (illetve x_+) definíciója szerint $f(x_1), f(x_2) \in [y_-, y_- + \varepsilon'[$ (illetve $f(x_1), f(x_2) \in [y_+ - \varepsilon', y_+[$), ezért $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon' < \varepsilon/2 < \varepsilon$;

2) ha $x_1, x_2 \in [x_-, x_+]$, akkor $|x_1 - x_2| < \delta < \delta'$ és δ' definíciója szerint $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon' < \varepsilon$;

3) ha $x_1 < x_- \leq x_2$ (illetve $x_1 \leq x_+ < x_2$), akkor $x_1, x_- \leq x_-$ (illetve $x_+, x_2 \geq x_+$), tehát 1) miatt $|f(x_1) - f(x_-)| < \varepsilon' < \varepsilon/2$ (illetve $|f(x_+) - f(x_2)| < \varepsilon' < \varepsilon/2$), ugyanakkor $\delta < x_+ - x_-$ és $|x_1 - x_2| < \delta$ miatt $x_-, x_2 \in [x_-, x_+]$ (illetve $x_1, x_+ \in [x_-, x_+]$) és mivel $\delta < \delta'$, így 2) szerint $|f(x_-) - f(x_2)| < \varepsilon' < \varepsilon/2$ (illetve $|f(x_1) - f(x_+)| < \varepsilon' < \varepsilon/2$), amiből a háromszög-egyenlőtlenség alapján $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_-)| + |f(x_-) - f(x_2)| < \varepsilon$ (illetve $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_+)| + |f(x_+) - f(x_2)| < \varepsilon$ következik.)

15. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ folytonos függvény, Az f pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha $\lim_a f$ és $\lim_b f$ létezik.

16. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény olyan, hogy $\mathrm{Dom}(f)$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, és minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban létezik f-nek határértéke és $\lim_{\mathfrak{a}} f = 0$. Ekkor az $\{x \in \mathrm{Dom}(f) | f(x) \neq 0\}$ halmaz *megszámlálható.*

(*Útmutatás.* Könnyen belátható, hogy minden $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ korlátos és zárt halmazra és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számra az $\{x \in K | |f(x)| \geq \varepsilon\}$ halmaz véges.)

17. Minden $x \in \mathbb{Q}^*$ számhoz egyértelműen léteznek olyan $p(x) \in \mathbb{Z}$ és $q(x) \in \mathbb{N}^*$ számok, hogy $x = p(x)/q(x)$, továbbá $p(x)$ és $q(x)$ relatív prímek. Legyen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 1/q(x) & \text{, ha } x \in \mathbb{Q}^* \\ 1 & \text{, ha } x = 0 \\ 0 & \text{, ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(Ezt nevezzük *Riemann-függvénynek.*) Az f függvény reguláris és minden irracionális pontban folytonos, és minden $\mathfrak{a}$ racionális pontban szakadása van úgy, hogy létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim_{\mathfrak{a}} f = 0$ teljesül.

(*Útmutatás.* Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, továbbá $C > 0$ tetszőleges valós szám. Megmutatjuk, hogy az $\{x \in \mathbb{Q}^* | (a \leq x \leq b) \wedge (q(x) \leq C)\}$ halmaz *véges*. Valóban, ha $x \in \mathbb{Q}^*$, $a \leq x = p(x)/q(x) \leq b$ és $q(x) \leq C$, akkor

$$-|a| \cdot C \leq -|a| \cdot q(x) \leq a \cdot q(x) \leq p(x) \leq b \cdot q(x) \leq |b| \cdot q(x) \leq |b| \cdot C,$$

ami azt jelenti, hogy $\{x \in \mathbb{Q}^* | (a \leq x \leq b) \wedge (q(x) \leq C)\} \subseteq \{m/n | (m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \mathbb{N}^*) \wedge (m \in [-|a|C, |b|C]) \wedge (n \leq C)\}$, és a jobb oldalon álló halmaz nyilvánvalóan véges. Legyen most $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az előzőek szerint az

$$E := \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Q}^* | (|x - \mathfrak{a}| \leq 1) \wedge (q(x) \leq 1/\varepsilon)\}$$

halmaz véges, ezért van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\delta < 1$ és $E \cap (]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus \{\mathfrak{a}\}) = \emptyset$. Ha $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor $x \neq 0$, és ha x racionális, akkor $x \notin E$ miatt $q(x) > 1/\varepsilon$, azaz $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = 0$.)

18. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények halmaza kontinuum-számosságú, míg az összes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza ekvipotens $\mathscr{P}(\mathbb{R})$-rel.

(*Útmutatás.* A $\mathbb{Q}$ halmaz sűrű $\mathbb{R}$-ben, ezért ha $\mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ jelöli az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények halmazát, akkor az átviteli elv alapján a $\mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{Q};\mathbb{R})$; $f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ leképezés *injektív*, ezért $\mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathscr{F}(\mathbb{Q};\mathbb{R})$-nél. Ugyanakkor $\mathbb{Q}$ ekvipotens $\mathbb{N}$-nel és $\mathbb{R}$ ekvipotens $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-rel, ezért $\mathscr{F}(\mathbb{Q};\mathbb{R})$ ekvipotens $\mathscr{F}(\mathbb{N};\mathscr{P}(\mathbb{N}))$-nel, és az **ENS** 6.3.5. állítás szerint $\mathscr{F}(\mathbb{N};\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ ekvipotens $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-nel, vagyis ekvipotens $\mathbb{R}$-rel.)

19. Minden $z \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen

$$\binom{z}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (z - j),$$

továbbá legyen:

$$\binom{z}{0} := 1.$$

Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{z}{k}$$

sor $\Re(z) > 0$ esetén abszolút konvergens, és $\Re(z) < 0$ esetén nem abszolút konvergens.

(*Útmutatás.* Mutassuk meg, hogy ha $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, akkor

$$\lim_{k \to \infty} k \left(\frac{\left| \binom{z}{k} \right|}{\left| \binom{z}{k+1} \right|} - 1 \right) = 1 + \Re(z),$$

és alkalmazzuk a Raabe-kritériumot!)

20. Tekintsük azt az $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{, ha } -1 \leq x < 0, \\ 1-x & \text{, ha } \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Ekkor f folytonos injekció, és $\mathrm{Im}(f) = [-1,1[$, továbbá $f^{-1} : [-1,1[\to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre minden $y \in \mathrm{Dom}(f^{-1})$ esetén:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{, ha } -1 \leq y < 0, \\ 1-y & \text{, ha } \quad 0 \leq y < 1, \end{cases}$$

tehát f^{-1} nem folytonos a 0 pontban. (Természetesen $\mathrm{Dom}(f)$ *nem zárt*, bár korlátos halmaz.)

21. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

a) Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor létezik az f-nek jobboldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ *vagy* létezik az f-nek baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$.

b) Ha létezik f-nek jobboldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban, *és* létezik az f-nek baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban, *és* $\lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f$, akkor f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban.

3. fejezet

Differenciálható függvények

3.1. A differenciálhatóság értelmezése és alaptulajdonságai

3.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény* **differenciálható** *az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ belső pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, és létezik olyan $c \in \mathbb{K}$, amelyre*

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - c \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} = 0.$$

Az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli **deriváltjának** *nevezünk minden olyan $c \in \mathbb{K}$ számot, amelyre a fenti határérték-tulajdonság teljesül.*

3.1.2. Állítás. *Ha $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ belső pontja az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény definíciós tartományának, akkor legfeljebb egy olyan $c \in \mathbb{K}$ szám létezik, amelyre*

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - c \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} = 0.$$

Bizonyítás. Legyenek $c, c' \in \mathbb{K}$ olyan elemek, hogy

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - c \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} = 0 = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - c' \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|}.$$

Ebből kivonással kapjuk, hogy

$$0 = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \left(\frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - c \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} - \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - c' \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \mathfrak{a}} (c' - c) \cdot \left(\frac{x - \mathfrak{a}}{|x - \mathfrak{a}|} \right)$$

Ha $c \neq c'$ teljesülne, akkor ebből az $1/(c' - c)$ számmal való szorzással következne, hogy

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \left(\frac{x - \mathfrak{a}}{|x - \mathfrak{a}|} \right) = 0,$$

ami lehetetlen, különben

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \left| \frac{x - \mathfrak{a}}{|x - \mathfrak{a}|} \right| = 0$$

is igaz volna, pedig ez a határérték nyilvánvalóan 1. ■

3.1.3. Definíció. *Ha az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény differenciálható a $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban, akkor az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli* **deriváltjának** *nevezzük és a $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ szimbólummal jelöljük azt az elemet $\mathbb{K}$-ban, amelyre*

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\cdot(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|} = 0.$$

3.1.4. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. Az f függvény pontosan akkor differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha létezik a*

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}$$

határérték. Ha f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}.$$

Bizonyítás. Ha $c \in \mathbb{K}$, akkor $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\left|\frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - c\cdot(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|}\right| = \left|\frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} - c\right|.$$

Ebből azonnal következik az állítás, ha figyelembe vesszük azt, hogy ha $g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(g)$-nek, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}} g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\mathfrak{a}} |g| = 0$$

teljesül. ■

3.1.5. Definíció. *Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor az*

$$\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}$$

függvényt az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli **különbségihányados-függvényének** *vagy* **differenciahányados-függvényének** *nevezzük.*

3.1.6. Definíció. *Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, akkor az f* **deriváltfüggvényének** *nevezzük és $\mathrm{D}f$-fel jelöljük azt a $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényt, amelyre $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ azon pontok halmaza, ahol f differenciálható, és minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ esetén $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$ az f deriváltja az $\mathfrak{a}$ pontban. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény* **differenciálható**, *ha $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}f) = \mathrm{Dom}(f)$, vagyis f a definíciós tartományának minden pontjában differenciálható.*

3.1.7. Állítás. *Ha az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám, akkor az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli differenciálhatósága miatt létezik olyan $\eta > 0$ valós szám, amelyre minden $x \in \mathrm{B}_\eta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap (\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\})$ esetén

$$\left|\frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\cdot(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|}\right| < \varepsilon.$$

Ekkor minden $x \in \mathrm{B}_\eta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra

$$|f(x) - f(\mathfrak{a})| \leq (\varepsilon + |(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|) \cdot |x - \mathfrak{a}|,$$

tehát ha $\delta > 0$ olyan valós szám, hogy $\delta \leq \min\left(\eta, \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + |(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|}\right)$, akkor minden $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra $|f(x) - f(\mathfrak{a})| < \varepsilon$, vagyis $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$. Ez azt jelenti, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

Természetesen folytonos függvény nem szükségképpen differenciálható. Létezik olyan függvény, amely nyílt halmazon értelmezett, folytonos és sehol sem differenciálható (**MET** 11. fejezet, 11. gyakorlat).

3.1.8. Állítás. (A differenciálhatóság lokalitása) *Ha $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ és létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $f = g$ a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{K})$ halmazon, akkor az f függvény $\mathfrak{a}$-beli differenciálhatósága ekvivalens a g függvény $\mathfrak{a}$-beli differenciálhatóságával, és ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})$.*

Bizonyítás. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor az r szám tulajdonságai miatt minden $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra

$$\frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} = \frac{g(x) - g(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|},$$

és a baloldali függvénynek 0 a határértéke, így a határérték lokalitása miatt

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{g(x) - g(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} = 0,$$

vagyis g differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $(\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$. Ebből az f és g felcserélésével nyerjük, hogy ha g differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor f is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. ■

3.2. Összetett függvények differenciálása

3.2.1. Állítás. *Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\lambda \cdot f$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és*

$$(\mathrm{D}(\lambda \cdot f))(\mathfrak{a}) = \lambda \cdot (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}).$$

Ha f és g differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f + g$ és $f \cdot g$ is differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(\mathrm{D}(f + g))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) + (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}),$$
$$(\mathrm{D}(f \cdot g))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \cdot g(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{a}) \cdot (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}).$$

Ha f és g differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, és $g(\mathfrak{a}) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és

$$\left(\mathrm{D}\left(\frac{f}{g}\right)\right)(\mathfrak{a}) = \frac{(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \cdot g(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{a}) \cdot (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})}{g(\mathfrak{a})^2}.$$

Bizonyítás. Ha $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $x \neq \mathfrak{a}$, akkor

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} + \frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}},$$

ezért, ha f és g differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f+g$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}(f+g))(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \\ = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} + \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) + (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}).\end{aligned}$$

Ha $x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor

$$\frac{(\lambda\cdot f)(x)-(\lambda\cdot f)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \lambda \cdot \left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right),$$

ezért, ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\lambda \cdot f$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(\mathrm{D}(\lambda\cdot f))(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \lambda \cdot \left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right) = \lambda \cdot \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \lambda \cdot (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$$

Ha $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és $x \neq \mathfrak{a}$, akkor

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right)\cdot g(x) + f(\mathfrak{a}) \cdot \left(\frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right),$$

ezért, ha f és g differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f \cdot g$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}(f\cdot g))(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \\ = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \left(\left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right)\cdot g(x)\right) + f(\mathfrak{a}) \cdot \lim_{x\to\mathfrak{a}} \left(\frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right) = \\ = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \cdot g(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{a}) \cdot (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}),\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk azt, hogy g folytonos is az $\mathfrak{a}$ pontban.
Ha $x \in \mathrm{Dom}(f/g)$ és $x \neq \mathfrak{a}$, akkor

$$\frac{(f/g)(x)-(f/g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right)\cdot \frac{1}{g(x)} - \frac{f(\mathfrak{a})}{g(x)g(\mathfrak{a})} \cdot \left(\frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right),$$

ezért, ha f és g differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, akkor f/g is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}(f/g))(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{(f/g)(x)-(f/g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \\ = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right) \cdot \lim_{x\to\mathfrak{a}} \left(\frac{1}{g(x)}\right) - \left(\frac{f(\mathfrak{a})}{g(\mathfrak{a})}\right) \cdot \lim_{x\to\mathfrak{a}} \left(\frac{1}{g(x)}\right) \cdot \lim_{x\to\mathfrak{a}} \left(\frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right) = \\ = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \cdot \left(\frac{1}{g(\mathfrak{a})}\right) - \left(\frac{f(\mathfrak{a})}{g(\mathfrak{a})}\right) \cdot \left(\frac{1}{g(\mathfrak{a})}\right) \cdot (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a}) = \frac{(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \cdot g(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{a}) \cdot (\mathrm{D}g)(\mathfrak{a})}{g(\mathfrak{a})^2},\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk azt, hogy g folytonos is az $\mathfrak{a}$ pontban és $g(\mathfrak{a}) \neq 0$. ■

3.3. Függvények kompozíciójának differenciálása

3.3.1. Állítás. (Függvények kompozíciójának differenciálása) *Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és g differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, akkor $g \circ f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és*

$$(\mathrm{D}(g \circ f))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})) \cdot (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}).$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(g \circ f)$-nek. A g differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért $f(\mathfrak{a})$ belső pontja $\mathrm{Dom}(g)$-nek, így vehetünk olyan $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$. Az f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, tehát folytonos is ebben a pontban, így van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$. Világos, hogy ekkor $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Dom}(g \circ f)$ teljesül, vagyis $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(g \circ f)$-nek.

Most vezessük be azt a

$$h : \mathrm{Dom}(g \circ f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{K}$$

függvényt, amelyre minden $x \in \mathrm{Dom}(h)$ esetén

$$h(x) := \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(\mathfrak{a}))}{f(x) - f(\mathfrak{a})} & \text{, ha } f(x) \neq f(\mathfrak{a}) \\ (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})) & \text{, ha } f(x) = f(\mathfrak{a}). \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy fennáll a

$$\frac{g \circ f - (g \circ f)(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a}} = h \cdot \left(\frac{f - f(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a}} \right)$$

függvény-egyenlőség, ezért a $g \circ f$ függvény pontosan akkor differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha a jobb oldalon álló függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. A hipotézis szerint f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, így az

$$\frac{f - f(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a}}$$

függvénynek létezik határértéke $f(\mathfrak{a})$-ban és az egyenlő $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$-val. Ezért a $g \circ f$ függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli differenciálhatóságához *elégséges* az, ha létezik h-nak határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Továbbá, ha létezik h-nak határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor a függvényszorzat határértéktétele alapján

$$(\mathrm{D}(g \circ f))(\mathfrak{a}) = \lim_{\mathfrak{a}} \left(\frac{g \circ f - (g \circ f)(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a}} \right) = \left(\lim_{\mathfrak{a}} h \right) \cdot (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$$

is teljesül.

Tehát elég azt igazolni, hogy létezik h-nak határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és az egyenlő $(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))$-val. Ehhez a határértékekre vonatkozó átviteli elvet fogjuk alkalmazni. Legyen tehát $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(h)$-ban haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál. (Mivel $\mathfrak{a} \notin \mathrm{Dom}(h)$, így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) \neq \mathfrak{a}$.) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges; olyan $N \in \mathbb{N}$ számot keresünk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, $n > N$ esetén $|h(\mathbf{s}(n)) - (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))| < \varepsilon$. A hipotézis szerint a g függvény differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre minden $y \in \mathrm{B}_\delta(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}) \setminus \{f(\mathfrak{a})\}$ esetén

$$\left| \frac{g(y) - g(f(\mathfrak{a}))}{y - f(\mathfrak{a})} - (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})) \right| < \varepsilon$$

teljesül. Az $\mathbf{s}$ sorozat $\mathrm{Dom}(f)$-ben halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, továbbá f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergál $f(\mathfrak{a})$-hoz. Ezért vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N$, akkor $|f(\mathbf{s}(n)) - f(\mathfrak{a})| < \delta$, vagyis $f(\mathbf{s}(n)) \in \mathrm{B}_\delta(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor

– $f(\mathbf{s}(n)) \neq f(\mathfrak{a})$ esetén $f(\mathbf{s}(n)) \in \mathrm{B}_\delta(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}) \setminus \{f(\mathfrak{a})\}$, tehát a δ szám és a h definíciója szerint

$$|h(\mathbf{s}(n)) - (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))| := \left| \frac{g(f(\mathbf{s}(n))) - g(f(\mathfrak{a}))}{f(\mathbf{s}(n)) - f(\mathfrak{a})} - (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a})) \right| < \varepsilon;$$

– $f(\mathbf{s}(n)) = f(\mathfrak{a})$ esetén szintén a h definíciója szerint

$$|h(\mathbf{s}(n)) - (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))| := 0 < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a $h \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergál $(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))$-hoz. ■

3.4. Az inverzfüggvény differenciálhatósága és deriváltja

3.4.1. Állítás. (Az inverzfüggvény differenciálhatósága és deriváltja) *Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ injektív függvény. Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pont, hogy f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \neq 0$, valamint $f(\mathfrak{a})$ belső pontja $\mathrm{Im}(f)$-nek és f^{-1} folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban, akkor f^{-1} differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, és fennáll a*

$$(\mathrm{D}f^{-1})(f(\mathfrak{a})) = \frac{1}{(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{f^{-1} - f^{-1}(f(\mathfrak{a}))}{\mathrm{id}_\mathbb{K} - f(\mathfrak{a})} = \frac{f^{-1} - \mathfrak{a}}{\mathrm{id}_\mathbb{K} - f(\mathfrak{a})} = \frac{1}{\left(\dfrac{f - f(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_\mathbb{K} - \mathfrak{a}}\right) \circ f^{-1}}$$

teljesül, ezért f^{-1} pontosan akkor differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, ha az

$$\frac{1}{\left(\dfrac{f - f(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_\mathbb{K} - \mathfrak{a}}\right) \circ f^{-1}} \; : \; \mathrm{Im}(f) \setminus \{f(\mathfrak{a})\} \to \mathbb{R}$$

függvénynek létezik határértéke $f(\mathfrak{a})$-ban, továbbá, ha ez a határérték létezik, akkor az egyenlő $(\mathrm{D}f^{-1})(f(\mathfrak{a}))$-val.

Először a függvények kompozícójának határértékére vonatkozó tételt fogjuk alkalmazni. A hipotézis szerint $f(\mathfrak{a})$ belső pontja $\mathrm{Im}(f)$-nek és f^{-1} folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért a folytonosság és a határérték kapcsolatának ismeretében állíthatjuk, hogy f^{-1}-nek létezik határértéke $f(\mathfrak{a})$-ban, és az egyenlő az $f^{-1}(f(\mathfrak{a}))$, vagyis az $\mathfrak{a}$ ponttal. Ez a határérték nem eleme az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli különbségihányados-függvénye értelmezési tartományának. Továbbá, a hipotézis szerint f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ezért ennek a különbségihányados-függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és az egyenlő $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$. Ezért az

$$\left(\frac{f - f(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_\mathbb{K} - \mathfrak{a}}\right) \circ f^{-1}$$

függvénynek létezik határértéke $f(\mathfrak{a})$-ban, és az egyenlő $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$-val. A feltevés alapján $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \neq 0$, ezért a függvényhányados határértékére vonatkozó tétel szerint az

$$\frac{1}{\left(\frac{f - f(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}}\right) \circ f^{-1}}$$

függvénynek létezik határértéke $f(\mathfrak{a})$-ban, és az egyenlő $\frac{1}{(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})}$-val. Ezt kellett bizonyítani. ■

3.4.2. Következmény. (A valós inverzfüggvény differenciálhatósága és deriváltja) *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény. Ha f az $\mathfrak{a} \in I$ pontban differenciálható és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \neq 0$, akkor az $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ inverzfüggvény differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, és fennáll a*

$$(\mathrm{D}f^{-1})(f(\mathfrak{a})) = \frac{1}{(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Korábban láttuk, hogy a feltételek mellett $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és az f^{-1} függvény folytonos. Tehát, ha f az $\mathfrak{a} \in I$ pontban differenciálható és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) \neq 0$, akkor teljesül az előző tétel összes feltétele, hiszen $f(\mathfrak{a})$ belső pontja $\mathrm{Im}(f)$-nek, és f^{-1} folytonos ebben a pontban. Ezért az f^{-1} függvény differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, és

$$(\mathrm{D}f^{-1})(f(\mathfrak{a})) = \frac{1}{(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})}$$

teljesül. ■

Az előző állítás ekvivalens megfogalmazása az, hogy ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény, továbbá $y \in \mathrm{Im}(f)$ olyan pont, hogy f differenciálható az $f^{-1}(y)$ pontban és $(\mathrm{D}f)(f^{-1}(y)) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható y-ban, és

$$(\mathrm{D}f^{-1})(y) = \frac{1}{(\mathrm{D}f)(f^{-1}(y))}$$

teljesül.

Később sokkal általánosabb típusú függvényekre is igazoljuk az inverzfüggvény differenciálhatóságát (**DIF** 12.2.1. tétel).

3.5. Elemi analitikus függvények differenciálhatósága és deriváltja

3.5.1. Definíció. *Ha* $\mathbf{a}$ *számsorozat, akkor* $\mathrm{d}\mathbf{a}$ *jelöli azt a számsorozatot, amelyre minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $(\mathrm{d}\mathbf{a})(k) := (k+1)\mathbf{a}(k+1)$.

3.5.2. Állítás. *Legyen* $\mathbf{a}$ *tetszőleges* $\mathbb{K}$*-ban haladó sorozat és* $c \in \mathbb{K}$. *Ekkor* $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} = \mathrm{R}_{\mathrm{d}\mathbf{a}}$ *és a* $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ *elemi analitikus függvény a* $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ *halmaz minden pontjában differenciálható, és minden* $z_0 \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ *pontra*

$$(\mathrm{D}\mathrm{P}_{\mathbf{a},c})(z_0) = \mathrm{P}_{\mathrm{d}\mathbf{a},c}(z_0).$$

Bizonyítás. Ha $k \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$|(\mathrm{d}\mathbf{a})(k)|^{1/k} = (k+1)^{1/k}|\mathbf{a}(k+1)|^{1/k},$$

továbbá 3.15.5. és 3.15.2. alapján tudjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty}(k+1)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} k^{1/k} = 1,$$
$$\limsup_{k\to\infty}|\mathbf{a}(k+1)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty}|\mathbf{a}(k)|^{1/k},$$

amiből következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty}|\mathrm{d}\mathbf{a})(k)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty}|\mathbf{a}(k)|^{1/k},$$

vagyis $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} = \mathrm{R}_{\mathrm{d}\mathbf{a}}$.
Legyen $z_0 \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ és rögzítsünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $r + |z_0 - c| < \mathrm{R}_{\mathbf{a}}$; ekkor $\mathrm{B}_r(z_0;\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ és minden $z \in \mathrm{B}_r(z_0;\mathbb{K})$ pontra

$$\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z) - \mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z_0) - \mathrm{P}_{\mathrm{d}\mathbf{a},c}(z_0)\cdot(z-z_0) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{a}(k)(z-c)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{a}(k)(z_0-c)^k - \left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mathbf{a}(k+1)(z_0-c)^k\right)\cdot(z-z_0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{a}(k)\left((z-c)^k - (z_0-c)^k - k(z_0-c)^{k-1}\cdot(z-z_0)\right) =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty}\mathbf{a}(k)(z-z_0)\left(\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j} - k(z_0-c)^{k-1}\right) = (z-z_0)\cdot\varphi_{z_0}(z),$$

ahol bevezettük a

$$\varphi_{z_0} : \mathrm{B}_r(z_0;\mathbb{K}) \to \mathbb{K};\quad z \mapsto \sum_{k=2}^{\infty}\mathbf{a}(k)\left(\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j} - k(z_0-c)^{k-1}\right)$$

függvényjelölést. Az állítás bizonyításához elég azt megmutatni, hogy $\lim_{z\to z_0}\varphi_{z_0}(z) = 0$ teljesül. Azt fogjuk megmutatni, hogy létezik olyan $K_r > 0$ valós szám, hogy minden $z \in \mathrm{B}_r(z_0;\mathbb{K})$ esetén $|\varphi_{z_0}(z)| \le K_r|z-z_0|$. (Megjegyezzük, hogy $\lim_{z\to z_0}\varphi_{z_0}(z) = 0$ akkor is teljesülhetne, ha ilyen K_r szám nem létezne, azonban itt φ_{z_0} olyan speciális alakú függvény, hogy van ilyen állandó.)
Ha $z \in \mathrm{B}_r(z_0;\mathbb{K})$ tetszőleges pont, akkor minden $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$ számra a binomiális tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j} - k(z_0-c)^{k-1} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{j-m}\right)(z_0-c)^{k-1-j} - k(z_0-c)^{k-1} =$$
$$= \sum_{m=0}^{k-1}\left(\sum_{j=m}^{k-1}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-1-m}\right) - k(z_0-c)^{k-1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} \left(\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \right) (z - z_0)^m (z_0 - c)^{k-1-m} - k(z_0 - c)^{k-1} =$$

$$= \sum_{m=1}^{k-1} \left(\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \right) (z - z_0)^m (z_0 - c)^{k-1-m}.$$

Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $k, m \in \mathbb{N}$ számra, ha $k \geq m+1$, akkor

$$\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \leq (k-m)\binom{k-1}{m} \leq k\binom{k-1}{m},$$

továbbá $k, m \in \mathbb{N}$ és $k \geq m+2$ esetén

$$\binom{k-1}{m+1} = \left(\frac{k-1}{m+1}\right)\binom{k-2}{m} \leq k\binom{k-2}{m}.$$

Ezért minden $z \in \mathrm{B}_r(z_0; \mathbb{K})$ pontra és $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ számra

$$\sum_{m=1}^{k-1} \left(\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \right) |z-z_0|^m |z_0-c|^{k-1-m} \leq k \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k-1}{m} |z-z_0|^m |z_0-c|^{k-1-m} =$$

$$= |z - z_0| k \sum_{m=0}^{k-2} \binom{k-1}{m+1} |z - z_0|^m |z_0 - c|^{k-2-m} \leq$$

$$\leq |z - z_0| k^2 \sum_{m=0}^{k-2} \binom{k-2}{m} |z - z_0|^m |z_0 - c|^{k-2-m} =$$

$$= |z - z_0| k^2 \left(|z - z_0| + |z_0 - c|\right)^{k-2} \leq |z - z_0| k^2 \left(r + |z_0 - c|\right)^{k-2}.$$

Ebből a következő egyenlőtlenségre jutunk: minden $z \in \mathrm{B}_r(z_0; \mathbb{K})$ pontra:

$$|\varphi_{z_0}(z)| \leq |z - z_0| \sum_{k=2}^{\infty} |\mathbf{a}(k)| k^2 \left(r + |z_0 - c|\right)^{k-2} = K_r |z - z_0|,$$

ahol nyilvánvalóan

$$K_r := \sum_{k=2}^{\infty} |\mathbf{a}(k)| k^2 \left(r + |z_0 - c|\right)^{k-2},$$

és természetesen ez jól értelmezett valós szám, hiszen $r + |z_0 - c| < R_{\mathbf{a}}$. Ezzel az állítást igazoltuk. ■

3.5.3. Következmény. *A valós és komplex exponenciális, trigonometrikus, valamint hiperbolikus függvények differenciálhatók, továbbá*

$$\mathrm{D}(\mathrm{Exp}) = \mathrm{Exp}, \quad \mathrm{D}(\mathrm{Sin}) = \mathrm{Cos}, \quad \mathrm{D}(\mathrm{Cos}) = -\mathrm{Sin}, \quad \mathrm{D}(\mathrm{Sh}) = \mathrm{Ch}, \quad \mathrm{D}(\mathrm{Ch}) = \mathrm{Sh}$$

$$\mathrm{D}(\exp) = \exp, \quad \mathrm{D}(\sin) = \cos, \quad \mathrm{D}(\cos) = -\sin, \quad \mathrm{D}(\mathrm{sh}) = \mathrm{ch}, \quad \mathrm{D}(\mathrm{ch}) = \mathrm{sh}$$

$$\mathrm{D}(\log) = \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}}.$$

Bizonyítás. Ha $\mathbf{a}$ jelöli azt a számsorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{a}(k) = \dfrac{1}{k!}$, akkor könnyen látható, hogy $\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{a}$, tehát az előző állítás szerint $\mathrm{D}(\mathrm{Exp}) = \mathrm{Exp}$ és $\mathrm{D}(\exp) = \exp$ teljesül. A többi egyenlőség a definíciók szerint ebből nyilvánvalóan következik. Az utolsó egyenlőségnél felhasználjuk a log függvény definícióját és az inverzfüggvény differenciálhatóságának tételét. ■

3.6. Rolle-tétel és a differenciálszámítás középértéktételei

3.6.1. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény. Azt mondjuk, hogy* f*-nek* **lokális maximuma** (*illetve* **lokális minimuma**) *van az* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ *pontban, ha létezik olyan* $r > 0$ *valós szám, hogy minden* $x \in]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\cap \mathrm{Dom}(f)$ *pontra* $f(x) \leq f(\mathfrak{a})$ (*illetve* $f(x) \geq f(\mathfrak{a})$)*. Azt mondjuk, hogy* f*-nek* **szigorú lokális maximuma** (*illetve* **szigorú lokális minimuma**) *van az* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ *pontban, ha létezik olyan* $r > 0$ *valós szám, hogy minden* $x \in]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\cap \mathrm{Dom}(f)$ *pontra, ha* $x \neq \mathfrak{a}$*, akkor* $f(x) < f(\mathfrak{a})$ (*illetve* $f(x) > f(\mathfrak{a})$)*. Azt mondjuk, hogy* f*-nek* **lokális szélsőértéke** (*illetve* **szigorú lokális szélsőértéke**) *van az* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ *pontban, ha* f*-nek lokális maximuma vagy lokális minimuma* (*illetve szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma*) *van* $\mathfrak{a}$*-ban.*

3.6.2. Állítás. (A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele) *Legyen* $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény és* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$*. Ha* f*-nek lokális szélsőértéke van* $\mathfrak{a}$*-ban, és* f *differenciálható* $\mathfrak{a}$*-ban, akkor* $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = 0$*.*

Bizonyítás. A feltevés szerint van olyan $r > 0$ valós szám, hogy minden $x \in]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra $f(x) - f(\mathfrak{a})$ *állandó előjelű.* Ugyanakkor $\mathfrak{a}$ belső pontja is $\mathrm{Dom}(f)$-nek, tehát r megválasztható úgy, hogy $]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$ teljesüljön. Ekkor az $]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a}[$ és a $]\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + r[$ nyílt intervallumokon az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli differenciahányados-függvénye állandó előjelű, és egymással ellentétes előjelűek. Ezért a differenciahányados-függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli baloldali és jobboldali határértékei ellentétes előjelűek, így $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = 0$. ■

A lokális szélsőérték imént megfogalmazott szükséges feltétele *nem elégséges*; ezt jól mutatja az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^3$ függvény, amelynek sehol sincs lokális szélsőértéke, mert szigorúan monoton növő, ugyanakkor $(\mathrm{D}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^3))(0) = 0$. Később (3.15.1.), a magasabb rendű deriváltak segítségével bebizonyítunk egy feltételt, amely elégséges lesz a *szigorú* lokális szélsőérték létezéséhez.

3.6.3. Állítás. (Rolle-tétel) *Ha* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$ *és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvény, amely az* $]a, b[$ *nyílt intervallum minden pontjában differenciálható, és amelyre* $f(a) = f(b)$*, akkor létezik olyan* $c \in]a, b[$ *pont, hogy* $(\mathrm{D}f)(c) = 0$*.*

Bizonyítás. Ha az f függvény állandó, akkor az $]a, b[$ intervallum *minden* c pontjára $(\mathrm{D}f)(c) = 0$ teljesül, ezért feltehető, hogy f nem konstansfüggvény. A Weierstrass-féle maximum-minimum elv alapján léteznek olyan $c_-, c_+ \in [a, b]$ pontok, hogy $f(c_-) = \inf(f\langle[a, b]\rangle)$ és $f(c_+) = \sup(f\langle[a, b]\rangle)$. Ha $c_- = c_+$, akkor $f(c_-) = f(c_+)$, tehát f állandó. Ha $c_- = a$ és $c_+ = b$, vagy $c_- = b$ és $c_+ = a$, akkor $f(a) = f(b)$ miatt ismét $f(c_-) = f(c_+)$ adódik, tehát f állandó. Ezért $c_- \in]a, b[$ vagy $c_+ \in]a, b[$ teljesül, és f-nek lokális szélsőértéke van c_--ban és c_+-ban is, így a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele alapján: ha $c_- \in]a, b[$, akkor $(\mathrm{D}f)(c_-) = 0$, és ha $c_+ \in]a, b[$, akkor $(\mathrm{D}f)(c_+) = 0$ teljesül. ■

3.6.4. Állítás. (Cauchy-féle középértéktétel) *Legyenek* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$ *és* $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *olyan függvények, amelyekre* $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$*, és* f *és* g *az* $[a, b]$ *intervallum minden pontjában folytonos, továbbá az* $]a, b[$ *intervallum minden pontjában differenciálható. Ekkor létezik olyan* $c \in]a, b[$*, amelyre*

$$(f(b) - f(a))(\mathrm{D}g)(c) = (g(b) - g(a))(\mathrm{D}f)(c)$$

teljesül. Ha minden $x \in]a, b[$ pontban $(\mathrm{D}g)(x) \neq 0$, akkor $g(b) \neq g(a)$, és létezik olyan $c \in]a, b[$, amelyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{(\mathrm{D}f)(c)}{(\mathrm{D}g)(c)}.$$

Bizonyítás. Jelölje h az $(f(b) - f(a)) \cdot g - (g(b) - g(a)) \cdot f$ függvény leszűkítését az $[a, b]$ intervallumra. Ekkor a $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a, b]$ minden pontjában és differenciálható az $]a, b[$ minden pontjában. Továbbá könnyen ellenőrizhető, hogy $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$, ezért a Rolle-tétel alkalmazható h-ra. Tehát létezik olyan $c \in]a, b[$ pont, amelyre $(\mathrm{D}h)(c) = 0$. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy minden $x \in]a, b[$ pontra $(\mathrm{D}h)(x) = (f(b) - f(a))(\mathrm{D}g)(x) - (g(b) - g(a))(\mathrm{D}f)(x)$, így a c pontra teljesül az $(f(b) - f(a))(\mathrm{D}g)(c) = (g(b) - g(a))(\mathrm{D}f)(c)$ egyenlőség.

Ha minden $x \in]a, b[$ esetén $(\mathrm{D}g)(x) \neq 0$, akkor a Rolle-tétel alapján kapjuk, hogy $g(a) \neq g(b)$, így ha $c \in]a, b[$ olyan pont, hogy $(f(b) - f(a))(\mathrm{D}g)(c) = (g(b) - g(a))(\mathrm{D}f)(c)$, akkor ebből egyszerű átrendezéssel nyerjük a

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{(\mathrm{D}f)(c)}{(\mathrm{D}g)(c)}$$

egyenlőséget. ■

3.6.5. Állítás. (Lagrange-féle középértéktétel) *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $a, b \in \mathbb{R}$ olyan számok, hogy $a < b$, $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és f az $[a, b]$ intervallum minden pontjában folytonos és az $]a, b[$ intervallum minden pontjában differenciálható. Ekkor van olyan $c \in]a, b[$, hogy*

$$f(b) - f(a) = (\mathrm{D}f)(c)(b - a).$$

Bizonyítás. Elég a Cauchy-féle középértéktételt alkalmazni f-re és a $g := \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ függvényre, hiszen minden $x \in]a, b[$ pontra $(\mathrm{D}g)(x) = 1$. ■

3.7. A differenciálszámítás középértéktételeinek elemi alkalmazásai

3.7.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : K \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény* **Lipschitz-függvény** *az $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ intervallumon, ha létezik olyan $C \geq 0$ valós szám, amelyre minden $a, b \in I$ esetén*

$$|f(b) - f(a)| \leq C \cdot |b - a|$$

teljesül.

3.7.2. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan intervallum, amelynek minden pontjában f folytonos, és minden belső pontjában differenciálható. Ha $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy az I minden x belső pontjában $|(\mathrm{D}f)(x)| \leq C$, akkor minden $a, b \in I$ esetén $|f(b) - f(a)| \leq C \cdot |b - a|$ teljesül, tehát f Lipschitz-függvény az I intervallumon.*

Bizonyítás. Ha $a, b \in I$ és $a < b$, akkor az f függvény az $[a, b]$ minden pontjában folytonos és az $]a, b[$ minden pontjában differenciálható, így a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $c \in]a, b[$, hogy $f(b) - f(a) = (\mathrm{D}f)(c) \cdot (b - a)$; ekkor a hipotézis szerint

$$|f(b) - f(a)| = |(\mathrm{D}f)(c)| \cdot |b - a| \leq C \cdot |b - a|$$

is teljesül, hiszen c belső pontja I-nek. ■

3.7.3. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan intervallum, amelynek minden pontjában f folytonos, és minden x belső pontjában az f differenciálható, és $(\mathrm{D}f)(x) = 0$, akkor f az I intervallumon állandó.*

Bizonyítás. Az előző állításból nyilvánvalóan következik a $C := 0$ választással. ■

3.7.4. Következmény. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $g : I \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ha $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyek az I minden belső pontjában differenciálhatóak, és az I belsején kielégítik a $\mathrm{D}f_1 = g$ és $\mathrm{D}f_2 = g$ függvényegyenleteket, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $f_2 = f_1 + c$.*

Bizonyítás. Az előző állításból nyilvánvalóan következik, ha $f := f_2 - f_1$. ■

3.7.5. Állítás. (**L'Hospital-szabály**) *Legyenek $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ és $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy létezik $b' \in]a, b[$, amelyre f és g differenciálhatók a $]b', b[$ minden pontjában és minden $x \in]b', b[$ pontban $(\mathrm{D}g)(x) \neq 0$. Ha létezik a $\lim\limits_b(\mathrm{D}f/\mathrm{D}g)$ határérték és $\lim\limits_b f = 0 = \lim\limits_b g$, akkor létezik a $\lim\limits_b(f/g)$ határérték is, és fennáll az*

$$\lim_b \left(\frac{f}{g}\right) = \lim_b \left(\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}g}\right)$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $y := \lim\limits_b(\mathrm{D}f/\mathrm{D}g)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Vegyünk olyan $b(\varepsilon) \in]b', b[$ valós számot, amelyre minden $x \in]b(\varepsilon), b[$ esetén

$$y - \varepsilon < \frac{(\mathrm{D}f)(x)}{(\mathrm{D}g)(x)} < y + \varepsilon$$

teljesül. A Lagrange-féle középértéktétel szerint g a $]b', b[$ intervallumon injektív, hiszen minden $x \in]b', b[$ pontban $(\mathrm{D}g)(x) \neq 0$. A Cauchy-féle középértéktétel szerint minden $x, x' \in]b(\varepsilon), b[$ esetén, ha $x < x'$, akkor létezik olyan $z \in]x, x'[$, hogy

$$\frac{f(x') - f(x)}{g(x') - g(x)} = \frac{(\mathrm{D}f)(z)}{(\mathrm{D}g)(z)} \in]y - \varepsilon, y + \varepsilon[.$$

Ezért $x \in]b(\varepsilon), b[$ esetén, $\lim\limits_b f = 0 = \lim\limits_b g$ miatt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x' \to b} \frac{f(x') - f(x)}{g(x') - g(x)} \in [y - \varepsilon, y + \varepsilon],$$

amiből következik, hogy

$$\lim_b \left(\frac{f}{g}\right) = y$$

teljesül. ■

3.8. A monotonitás differenciális jellemzése

3.8.1. Tétel. (A monotonitás differenciális jellemzése) *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan intervallum, amelynek minden pontjában f folytonos, és minden belső pontjában differenciálható.*

a) *Az f függvény pontosan akkor monoton növő (illetve monoton fogyó) az I intervallumon, ha I minden x belső pontjára $(\mathrm{D}f)(x) \geq 0$ (illetve $(\mathrm{D}f)(x) \leq 0$).*

b) *Ha az I intervallum minden x belső pontjára $(\mathrm{D}f)(x) > 0$ (illetve $(\mathrm{D}f)(x) < 0$), akkor f az I intervallumon szigorúan monoton növő (illetve szigorúan monoton fogyó).*

Bizonyítás. Legyenek $a, b \in I$ olyan pontok, hogy $a < b$. Az I halmaz intervallum, így $[a, b] \subseteq I$, tehát f az $[a, b]$ intervallum minden pontjában folytonos, és az $]a, b[$ nyílt intervallum részhalmaza az I belsejének, így f az $]a, b[$ minden pontjában differenciálható. Ezért a Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $c \in]a, b[$, amelyre $f(b) - f(a) = (\mathrm{D}f)(c)(b - a)$. Ez azt mutatja, hogy ha az I minden x belső pontjára $(\mathrm{D}f)(x) \geq 0$ (illetve $(\mathrm{D}f)(x) \leq 0$), akkor $f(b) - f(a) \geq 0$ (illetve $f(b) - f(a) \leq 0$), vagyis f az I intervallumon monoton növő (illetve monoton fogyó). Sőt az is látszik, hogy ha az I minden x belső pontjára $(\mathrm{D}f)(x) > 0$ (illetve $(\mathrm{D}f)(x) < 0$), akkor $f(b) - f(a) > 0$ (illetve $f(b) - f(a) < 0$), vagyis f az I intervallumon szigorúan monoton növő (illetve szigorúan monoton fogyó). Ezzel igazoltuk b)-t és az a) egyik felét.

Tegyük fel, hogy f az I intervallumon monoton növő (illetve monoton fogyó), és legyen x tetszőleges belső pontja I-nek. Ekkor $x' \in I$ és $x' < x$ esetén $f(x') - f(x) \leq 0$ (illetve $f(x') - f(x) \geq 0$), és $x' - x < 0$, így $(f(x') - f(x))/(x' - x) \geq 0$ (illetve $(f(x') - f(x))/(x' - x) \leq 0$). Ugyanakkor

$$(\mathrm{D}f)(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \lim_{x' \to x-0} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x},$$

ezért $(\mathrm{D}f)(x) \geq 0$ (illetve $(\mathrm{D}f)(x) \leq 0$) teljesül. ■

Azonban vigyázzunk arra, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan nyílt intervallum, amelynek minden pontjában az f differenciálható, és f az I intervallumon szigorúan monoton, akkor létezhetnek olyan pontjai I-nek, amelyekben $\mathrm{D}f$ a 0 értéket veszi fel. Erre egyszerű példa az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^3$ függvény, amely differenciálható és szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en, de $(\mathrm{D}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^3))(0) = 0$.

3.8.2. Következmény. (A differenciálszámítás első középértéktétele) *Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények, és $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olyan pontok, amelyekre $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$, és az f és g függvények az $[a, b]$ intervallum minden pontjában folytonosak, továbbá az $]a, b[$ intervallum minden pontjában differenciálhatók. Tegyük fel, hogy m és M olyan valós számok, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén*

$$m \cdot (\mathrm{D}g)(x) \leq (\mathrm{D}f)(x) \leq M \cdot (\mathrm{D}g)(x)$$

teljesül. Ekkor fennálnak az

$$m \cdot (g(b) - g(a)) \leq f(b) - f(a) \leq M \cdot (g(b) - g(a))$$

egyenlőtlenségek.

Bizonyítás. A hipotézisek alapján az $M \cdot g - f$ és $f - m \cdot g$ függvények az $[a,b]$ intervallum minden pontjában folytonosak, és minden $x \in]a,b[$ pontban differenciálhatók és $(\mathrm{D}(M \cdot g - f))(x) \geq 0$, valamint $(\mathrm{D}(f - m \cdot g))(x) \geq 0$ teljesül. Ezért a monotonitás differenciális jellemzése alapján az $M \cdot g - f$ és $f - m \cdot g$ függvények mindketten monoton növők az $[a,b]$ intervallumon. Ezért $(M \cdot g - f)(a) \leq (M \cdot g - f)(b)$ és $(f - m \cdot g)(a) \leq (f - m \cdot g)(b)$ teljesül. Ezeket az egyenlőtlenségeket átrendezve kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenségeket. ■

3.8.3. Következmény. *Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények, és $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olyan pontok, amelyekre $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$, és az f és g függvények az $[a,b]$ intervallum minden pontjában folytonosak, továbbá az $]a,b[$ intervallum minden pontjában differenciálhatók. Ha minden $x \in]a,b[$ esetén*

$$|(\mathrm{D}f)(x)| \leq (\mathrm{D}g)(x)$$

teljesül, akkor fennáll az

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A differenciálszámítás első középértéktételéből azonnal következik az $m := -1$ és $M := 1$ választással. ■

3.9. A konvexitás differenciális jellemzése

3.9.1. Tétel. (A konvexitás differenciális jellemzése) *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan intervallum, amelynek minden pontjában az f folytonos és minden belső pontjában differenciálható. Az f függvény pontosan akkor konvex (illetve konkáv) az I intervallumon, ha a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény az I halmaz belsején monoton növő (illetve monoton fogyó).*

Bizonyítás. Először feltesszük, hogy f konvex az I intervallumon. Legyenek a és b olyan belső pontjai I-nek, hogy és $a < b$; megmutatjuk, hogy $(\mathrm{D}f)(a) \leq (\mathrm{D}f)(b)$. Ehhez elegendő volna azt igazolni, hogy minden $x \in]a,b[$ pontra

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

hiszen ha ez igaz volna, akkor ebből

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}f)(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \\ \leq \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = (\mathrm{D}f)(b)\end{aligned}$$

következne. Ha $x \in]a,b[$, akkor $(x - a)/(b - a) \in [0,1]$, tehát az f konvexitása miatt

$$f(x) = f\left(\left(1 - \frac{x - a}{b - a}\right) a + \left(\frac{x - a}{b - a}\right) b\right) \leq \left(1 - \frac{x - a}{b - a}\right) f(a) + \left(\frac{x - a}{b - a}\right) f(b),$$

amiből átrendezéssel nyerjük, hogy

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Továbbá, ha $x \in]a,b[$, akkor $(b-x)/(b-a) \in [0,1]$, tehát az f konvexitása miatt

$$f(x) = f\left(\left(1 - \frac{b-x}{b-a}\right)b + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)a\right) \leq \left(1 - \frac{b-x}{b-a}\right)f(b) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)f(a),$$

amiből átrendezéssel nyerjük, hogy

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathrm{D}f$ az I intervallum belsején monoton növő; megmutatjuk, hogy f konvex az I halmazon. Ehhez azt kell igazolni, hogy ha $a, b \in I$ és $a < b$, akkor minden $x \in [a,b]$ pontra

$$f(x) \leq \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)f(b),$$

vagyis a

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

függvényre minden $x \in [a,b]$ esetén $g(x) \leq 0$ teljesül. Ennek bizonyításához először megjegyezzük, hogy g az $[a,b]$ minden pontjában folytonos, és az $]a,b[$ minden pontjában differenciálható, továbbá minden $x \in]a,b[$ pontra

$$(\mathrm{D}g)(x) = (\mathrm{D}f)(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

így $\mathrm{D}g$ az $]a,b[$ intervallumon szintén monoton növő. A Weierstrass-féle maximum-elv alapján van olyan $c \in [a,b]$, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $g(x) \leq g(c)$, így elég volna azt igazolni, hogy $g(c) \leq 0$. Ha $c = a$ vagy $c = b$, akkor $g(a) = 0 = g(b)$ miatt ez teljesül, ezért feltehető, hogy $c \in]a,b[$. Ekkor g a c-ben differenciálható, és itt maximuma van, tehát $(\mathrm{D}g)(c) = 0$. A Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $x \in]c,b[$, amelyre $g(b) - g(c) = (\mathrm{D}g)(x)(b-c)$. De $\mathrm{D}g$ monoton növő $]a,b[$-n, ezért $0 = (\mathrm{D}g)(c) \leq (\mathrm{D}g)(x)$, ugyanakkor $g(b) = 0$, ezért $-g(c) \geq 0$.

A konkáv függvényekre vonatkozó állítás visszavezethető az előzőre, ha f helyére $-f$-t helyettesítünk. ■

3.9.2. Következmény. *Az* exp *függvény konvex* $\mathbb{R}$*-en és a* log *függvény konkáv* $\mathbb{R}_+^*$*-on. Minden* $p \in \mathbb{R}_+^*$ *számra, az* $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^p$ *leképezés konvex* $\mathbb{R}_+$*-n, ha* $p \geq 1$*, és konkáv* $\mathbb{R}_+$*-n, ha* $p < 1$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\mathrm{D}(\exp) = \exp$, és az exp függvény monoton növő $\mathbb{R}$-en, ezért exp az $\mathbb{R}$ intervallumon konvex.

Tudjuk, hogy $\mathrm{D}(\log) = 1/\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$, és ez a függvény monoton fogyó $\mathbb{R}_+^*$-on, ezért log konkáv az $\mathbb{R}_+^*$ intevallumon.

Ha $p \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\mathrm{D}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}^p) = p \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}^{p-1}$, és ez a függvény $p \geq 1$ (illetve $p \leq 1$) esetén monoton növő (illetve fogyó) az $\mathbb{R}_+^*$ intervallumon, ezért az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}^p$ függvény konvex (illetve konkáv) az $\mathbb{R}_+$ intervallumon. ■

3.10. Konvexitás egyenlőtlenségek

3.10.1. Állítás. *Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_k)_{k\in n}$ $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó rendszer, és $(\alpha_k)_{k\in n}$ valós számok olyan rendszere, hogy minden $k \in n$ esetén $\alpha_k \in [0,1]$ és $\sum\limits_{k\in n} \alpha_k = 1$. Ekkor*

$$\prod_{k\in n} x_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k\in n} \alpha_k x_k$$

teljesül. **(A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség általánosítása)**

Bizonyítás. A hatványozás definíciója, az exp függvényre vonatkozó nevezetes függvényegyenlőség, valamint az exp függvény konvexitása miatt

$$\prod_{k\in n} x_k^{\alpha_k} := \prod_{k\in n} \exp(\alpha_k \log(x_k)) = \exp\Big(\sum_{k\in n} \alpha_k \log(x_k)\Big) \leq$$
$$\leq \sum_{k\in n} \alpha_k \exp(\log(x_k)) = \sum_{k\in n} \alpha_k x_k. \ \blacksquare$$

Most bemutatjuk az általánosított számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség két nevezetes alkalmazását.

3.10.2. Állítás. (Elemi Hölder-egyenlőtlenség) *Legyenek $\alpha, \beta \in]0,1[$ olyan valós számok, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ekkor minden $(x_i)_{i\in I}$ és $(y_i)_{i\in I}$ véges $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszerre*

$$\sum_{i\in I} x_i^{\alpha} y_i^{\beta} \leq \Big(\sum_{i\in I} x_i\Big)^{\alpha} \Big(\sum_{i\in I} y_i\Big)^{\beta}.$$

Bizonyítás. Természetesen elég arra az esetre bizonyítani, amikor az $X := \sum\limits_{i\in I} x_i$ és $Y := \sum\limits_{i\in I} y_i$ számok mindketten nullánál nagyobbak. Minden $i \in I$ esetén az α és β exponensekre, valamint az x_i/X és y_i/Y számokra felírhatjuk a számtani és mértani közép közötti általánosított egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{x_i}{X}\right)^{\alpha} \left(\frac{y_i}{Y}\right)^{\beta} \leq \alpha\left(\frac{x_i}{X}\right) + \beta\left(\frac{y_i}{Y}\right),$$

amiből összegzéssel kapjuk, hogy

$$\frac{\sum\limits_{i\in I} x_i^{\alpha} y_i^{\beta}}{X^{\alpha} Y^{\beta}} = \sum_{i\in I} \left(\frac{x_i}{X}\right)^{\alpha} \left(\frac{y_i}{Y}\right)^{\beta} \leq \frac{\alpha}{X} \sum_{i\in I} x_i + \frac{\beta}{Y} \sum_{i\in I} y_i = \alpha + \beta = 1,$$

amiből átrendezéssel nyerhető a bizonyítandó egyenlőtlenség. $\blacksquare$

3.10.3. Következmény. (Elemi Minkowski-egyenlőtlenség) *Legyen $p \geq 1$ tetszőleges valós szám. Ekkor minden $(x_i)_{i\in I}$ és $(y_i)_{i\in I}$ véges $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszerre*

$$\Big(\sum_{i\in I} (x_i + y_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i\in I} x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i\in I} y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Bizonyítás. Az egyenlőtlenség nyilvánvalóan igaz akkor, ha $p = 1$ vagy $\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p = 0$, ezért feltesszük, hogy $p > 1$ és $\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p > 0$. Egyszerű átalakítások és az elemi Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk a következő egyenlőtlenség-láncot:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p &= \sum_{i\in I}(x_i + y_i)^{p-1}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I}(x_i + y_i)^{p-1}x_i + \sum_{i\in I}(x_i + y_i)^{p-1}y_i = \\ &= \sum_{i\in I}\left((x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}(x_i^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i\in I}\left((x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}(y_i^p)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \Big(\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p\Big)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i\in I}x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i\in I}y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \Big(\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p\Big)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\Big(\sum_{i\in I}x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i\in I}y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big),\end{aligned}$$

amiből átrendezéssel nyerhető a bizonyítandó egyenlőtlenség. ■

3.10.4. Következmény. *Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó rendszer. Ha $p, q \in \mathbb{R}$ és $1 \leq q \leq p$, akkor*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az elemi Hölder-egyenlőtlenség és $q/p \in [0, 1]$ miatt

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^q = \sum_{i=1}^{n}(x_i^p)^{q/p}1^{1-q/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{q/p}\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)^{1-q/p} = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{q/p},$$

amiből n-nel osztva, majd $1/q$-adik hatványra emelve kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. ■

3.10.5. Definíció. *Ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó rendszer, akkor minden $p \geq 1$ valós számra a*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p} \tag{$*$}$$

*számot az $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ rendszer p-***edik hatványközepének** *nevezzük. Ha $p \in \mathbb{N}^*$ páros szám, akkor tetszőleges $\mathbb{R}$-ben haladó $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ rendszerre értelmes a $(*)$ formulával értelmezett szám, amelyet ekkor szintén az $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ rendszer p-***edik hatványközepének** *nevezünk. Ha $p = 2$, akkor* **négyzetes középről** *beszélünk.*

3.11. A megszüntethető szingularitások tétele valós változós függvényekre

3.11.1. Tétel. (A megszüntethető szingularitások tétele valós változós függvényekre) *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pont, amelyhez létezik $r \in \mathbb{R}_+^*$ úgy, hogy f differenciálható az $]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ halmaz minden pontjában, és a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor f differenciálható is $\mathfrak{a}$-ban, és*

$$(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = \lim_{\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f).$$

Bizonyítás. Vezessük be a $c := \lim_{\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f)$ jelölést, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A definíció alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\delta \leq r$ és minden $z \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ esetén $|(\mathrm{D}f)(z) - c| \leq \varepsilon$ teljesül.

Legyen $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + \delta[$ tetszőleges. Az f függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ezért az $f - c(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a})$ függvény folytonos az $[\mathfrak{a}, x]$ intervallumon, és differenciálható az $]\mathfrak{a}, x[$ intervallumon, így a Lagrange-középértéktétel alapján vehetünk olyan $z \in]\mathfrak{a}, x[$ pontot, amelyre

$$(f(x) - c(x - \mathfrak{a})) - f(\mathfrak{a}) = ((\mathrm{D}f)(z) - c)(x - \mathfrak{a})$$

teljesül, tehát $|(\mathrm{D}f)(z) - c| \leq \varepsilon$ miatt fennáll az

$$|f(x) - f(\mathfrak{a}) - c(x - \mathfrak{a})| \leq \varepsilon|x - \mathfrak{a}|$$

egyenlőtlenség.

Legyen $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a}[$ tetszőleges. Az f függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ezért az $f - c(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a})$ függvény folytonos az $[x, \mathfrak{a}]$ intervallumon, és differenciálható az $]x, \mathfrak{a}[$ intervallumon, így a Lagrange-középértéktétel alapján vehetünk olyan $z \in]x, \mathfrak{a}[$ pontot, amelyre

$$f(\mathfrak{a}) - (f(x) - c(x - \mathfrak{a})) = ((\mathrm{D}f)(z) - c)(\mathfrak{a} - x)$$

teljesül, tehát $|(\mathrm{D}f)(z) - c| \leq \varepsilon$ miatt fennáll az

$$|f(x) - f(\mathfrak{a}) - c(x - \mathfrak{a})| \leq \varepsilon|x - \mathfrak{a}|$$

egyenlőtlenség.

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ esetén $\left|\dfrac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - c(x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|}\right| \leq \varepsilon$ teljesül. Tehát f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban és $(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = c$. ■

3.12. Magasabb rendű deriváltfüggvények

3.12.1. Állítás. *Minden $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényhez létezik egyetlen olyan $(\mathrm{D}^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre teljesül az, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\mathrm{D}^n f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, és $\mathrm{D}^0 f = f$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\mathrm{D}^{n+1} f = \mathrm{D}(\mathrm{D}^n f).$$

Bizonyítás. Jelölje E az összes $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények halmazát, és jelölje D azt az $E \to E$ függvényt, amely minden $f \in E$ függvényhez a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvényt rendeli. Ekkor $f \in E$ esetén az f kezdőpont és D függvény által meghatározott iterációs sorozat éppen az a függvénysorozat, amelynek egyértelmű létezését állítottuk. ■

3.12.2. Definíció. *Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra az előző állításban értelmezett $\mathrm{D}^n f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényt az f n-**edik deriváltfüggvényének** nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban n-**szer differenciálható** (ahol $n \in \mathbb{N}$), ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f)$. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban* **végtelenszer differenciálható**, *ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f az $\mathfrak{a}$ pontban n-szer differenciálható.*

Nyilvánvaló, hogy egy $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor 1-szer differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban, ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban; továbbá világos, hogy $\mathrm{D}^1 f = \mathrm{D}f$ teljesül. Az is könnyen látható, hogy ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^{n+1} f) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f))$, és természetesen létezhet olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^n f) = \emptyset$.

3.12.3. Állítás. *Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $m, n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathrm{D}^{m+n} f = \mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f)$.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $n \in \mathbb{N}$ rögzített. m szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $\mathrm{D}^{m+n} f = \mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f)$. Ez $m = 0$ esetén nyilvánvaló, mert a definíció szerint $\mathrm{D}^{0+n} f = \mathrm{D}^n f = \mathrm{D}^0(\mathrm{D}^n f)$. Ha $m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\mathrm{D}^{m+n} f = \mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f)$, akkor a definíció szerint

$$\mathrm{D}^{(m+1)+n} f = \mathrm{D}^{(m+n)+1} f = \mathrm{D}(\mathrm{D}^{m+n} f) = \mathrm{D}(\mathrm{D}^m(\mathrm{D}^n f)) = \mathrm{D}^{m+1}(\mathrm{D}^n f)$$

teljesül. ■

3.12.4. Következmény. *Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az f függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.*

(ii) *Minden $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ számra a $\mathrm{D}^k f$ függvény $n-k$-szor differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban; ekkor $(\mathrm{D}^{n-k}(\mathrm{D}^k f))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})$.*

(iii) *Létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ szám, hogy a $\mathrm{D}^k f$ függvény $n - k$-szor differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban; ekkor $(\mathrm{D}^{n-k}(\mathrm{D}^k f))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})$.*

Bizonyítás. Ha $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, akkor az előző állítás szerint $\mathrm{D}^n f = \mathrm{D}^{n-k}(\mathrm{D}^k f)$, ezért az adott pontbeli magasabb rendű differenciálhatóság definíciója alapján az állítás nyilvánvaló. ■

3.12.5. Állítás. *Ha $\mathbf{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat és $c \in \mathbb{K}$, akkor a $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ elemi analitikus függvény végtelenszer differenciálható az abszolútkonvergencia-tartományán, és minden $z \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}_\mathbf{a}}(c; \mathbb{K})$ pontra és $n \in \mathbb{N}^*$ számra*

$$(\mathrm{D}^n \mathrm{P}_{\mathbf{a},c})(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathop{\mathrm{P}}_{j=1}^{n} (k+j) \right) \mathbf{a}(k+n)(z-c)^k.$$

Bizonyítás. Az elemi analitikus függvények differenciálhatóságának tételéből n szerinti teljes indukcióval kapható. ■

3.12.6. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nyílt intervallum. Ha f az I minden pontjában kétszer differenciálható, akkor f pontosan akkor konvex (illetve konkáv) az I halmazon, ha minden $x \in I$ pontra $(\mathrm{D}^2 f)(x) \geq 0$ (illetve $(\mathrm{D}^2 f)(x) \leq 0$).*

Bizonyítás. A konvexitás és a monotonitás differenciális jellemzéséből nyilvánvalóan következik. ■

3.13. Taylor-polinomok

3.13.1. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ olyan pont, amelyben az f függvény n-szer differenciálható. Ekkor a*

$$\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f) : \mathbb{K} \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k$$

leképezést az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli n-ed rendű **Taylor-polinomjának** *nevezzük.*

3.13.2. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ olyan pont, amelyben az f függvény $n+1$-szer differenciálható. Ekkor*

$$\mathrm{D}(\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)) = \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{D}(\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)) := \mathrm{D}\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}\mathrm{D}((\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^k) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}k(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{(k-1)!}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^{k+1} f)(\mathfrak{a})}{k!}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k (\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})}{k!}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^k = \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f)$$

teljesül. ■

3.14. Infinitezimális Taylor-formula

3.14.1. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $n \in \mathbb{N}^*$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ olyan pont, amelyben az f függvény n-szer differenciálható. Ekkor*

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x - \mathfrak{a})^n} = 0$$

teljesül, vagyis

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x - \mathfrak{a})^k}{(x - \mathfrak{a})^n} = 0.$$

(Infinitezimális Taylor-formula)

Bizonyítás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban, akkor a differenciálhatóság és a derivált definíciója alapján

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a})}{(x - \mathfrak{a})} = 0$$

teljesül, és nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{T}_{1,\mathfrak{a}}(f) := f(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}),$$

így az állítás igaz, ha $n = 1$.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^*$ olyan szám, amelyre teljesül az állítás, és legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$

függvény $n+1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban. Ekkor a $\mathrm{D}f$ függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban, így az indukciós hipotézis és az előző állítás alapján

$$0 = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{(\mathrm{D}f)(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(\mathrm{D}f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^n} = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{(\mathrm{D}f)(x) - \mathrm{D}(\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)}{(x-\mathfrak{a})^n} = \\ = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)}{(x-\mathfrak{a})^n}$$

teljesül.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az iménti határérték-egyenlőség alapján vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$, és minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\left| \frac{\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)}{(x-\mathfrak{a})^n} \right| \leq \varepsilon,$$

tehát minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[$ esetén

$$|\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)| \leq \varepsilon |x-\mathfrak{a}|^n.$$

Legyen $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+\delta[$. Ekkor az $f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)$ függvény folytonos az $[\mathfrak{a}, x]$ zárt intervallum minden pontjában és differenciálható az $]\mathfrak{a}, x[$ nyílt intervallum minden pontjában, ezért a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z \in]\mathfrak{a}, x[$, amelyre

$$(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x) - (f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(\mathfrak{a}) = \mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)(x-\mathfrak{a})$$

teljesül. De $(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(\mathfrak{a}) = 0$ és

$$|\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)| \leq \varepsilon |z-\mathfrak{a}|^n \leq \varepsilon |x-\mathfrak{a}|^n,$$

amiből következik, hogy

$$|(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)| = |\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)||x-\mathfrak{a}| \leq \varepsilon |x-\mathfrak{a}|^{n+1}.$$

Legyen most $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}[$. Ekkor az $f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)$ függvény folytonos az $[x, \mathfrak{a}]$ zárt intervallum minden pontjában és differenciálható az $]x, \mathfrak{a}[$ nyílt intervallum minden pontjában, ezért a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z \in]x, \mathfrak{a}[$, amelyre

$$(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(\mathfrak{a}) - (f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x) = \mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)(\mathfrak{a}-x)$$

teljesül. De $(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(\mathfrak{a}) = 0$ és

$$|\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)| \leq \varepsilon |z-\mathfrak{a}|^n \leq \varepsilon |x-\mathfrak{a}|^n,$$

amiből következik, hogy

$$|(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)| = |\mathrm{D}(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)||x-\mathfrak{a}| \leq \varepsilon |x-\mathfrak{a}|^{n+1}.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\left| \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^{n+1}} \right| \leq \varepsilon$$

teljesül. Tehát fennáll a

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^{n+1}} = 0$$

egyenlőség, vagyis az állítás $n+1$-re is igaz. ■

3.14.2. Következmény. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ olyan pont, amelyben az f függvény $n+1$-szer differenciálható. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és az*

$$]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\setminus\{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^{n+1}}$$

függvény korlátos, vagyis

$$\sup_{x \in]\mathfrak{a}-r,\mathfrak{a}+r[\setminus\{\mathfrak{a}\}} \frac{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k \right|}{|x-\mathfrak{a}|^{n+1}} < +\infty.$$

Bizonyítás. Minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)(x) = \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x) + \frac{(\mathrm{D}^{n+1}f)(\mathfrak{a})}{(n+1)!}(x-\mathfrak{a})^{n+1},$$

ezért ha $x \neq \mathfrak{a}$, akkor

$$\frac{f(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^{n+1}} = \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^{n+1}} + \frac{(\mathrm{D}^{n+1}f)(\mathfrak{a})}{(n+1)!}.$$

Legyen $C \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített szám. Az infinitezimális Taylor-formula szerint

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^n} = 0,$$

ezért van olyan $r' \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra, ha $0 < |x - \mathfrak{a}| < r'$, akkor $\left| \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^n} \right| < C$. Az $\mathfrak{a}$ pont belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, így van olyan $r'' \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $]\mathfrak{a} - r'', \mathfrak{a} + r''[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Tehát ha $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $r \leq \min(r', r'')$, akkor $]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\left| \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^{n+1}} \right| \leq \left| \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^n} \right| + \left| \frac{(\mathrm{D}^{n+1}f)(\mathfrak{a})}{(n+1)!} \right| \leq C + \left| \frac{(\mathrm{D}^{n+1}f)(\mathfrak{a})}{(n+1)!} \right|,$$

amiből következik az állítás. ■

3.15. A lokális szélsőértékek differenciális jellemzése

3.15.1. Tétel. A lokális szélsőértékek differenciális jellemzése) *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $n \in \mathbb{N}^*$, és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ olyan pont, amelyben az f függvény n-szer differenciálható, és minden $0 < k < n$ esetén $(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a}) = 0$, valamint $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) \neq 0$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az f függvénynek szigorú lokális maximuma (illetve szigorú lokális minimuma) van $\mathfrak{a}$-ban.*

(ii) *Az f függvénynek lokális maximuma (illetve lokális minimuma) van $\mathfrak{a}$-ban.*

(iii) *n páros szám és $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) < 0$ (illetve $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) > 0$).*

Bizonyítás. Vezessük be a

$$\varphi : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x)}{(x-\mathfrak{a})^n} & \text{, ha } x \neq \mathfrak{a} \\ 0 & \text{, ha } x = \mathfrak{a} \end{cases}$$

függvényt. A definíció és az $\mathfrak{a}$ pontbeli deriváltakra vonatkozó feltételek alapján minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra

$$f(x) = \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x) + \varphi(x)(x-\mathfrak{a})^n = f(\mathfrak{a}) + \left(\frac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!} + \varphi(x)\right)(x-\mathfrak{a})^n.$$

Az $\mathfrak{a}$ pont belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és az infinitezimális Taylor-formula szerint

$$\lim_{\mathfrak{a}} \varphi = 0,$$

ezért vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy $]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[$ esetén

$$|\varphi(x)| < \left|\frac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!}\right|.$$

Ha $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) > 0$, akkor minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[$ esetén

$$-\varphi(x) \leq |\varphi(x)| < \left|\frac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!}\right| = \frac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!},$$

amiből következik, hogy

$$\frac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!} + \varphi(x) > 0.$$

Ha $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) < 0$, akkor minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[$ esetén

$$\varphi(x) \leq |\varphi(x)| < \left|\frac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!}\right| = -\frac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!},$$

amiből következik, hogy

$$\frac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!} + \varphi(x) < 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\dfrac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!} + \varphi$ függvény az $]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[$ intervallumon sehol sem 0 és *állandó előjelű*, éspedig $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) > 0$ esetén szigorúan pozitív, és $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) < 0$ esetén szigorúan negatív.

Az (i)⇒(ii) következtetés triviális.

A (ii)⇒(iii) implikáció bizonyításához tegyük fel, hogy f-nek lokális maximuma van $\mathfrak{a}$-ban. Ekkor van olyan $r > 0$ valós szám, hogy $r \leq \delta$ és minden $x \in]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[$ esetén $f(x) \leq f(\mathfrak{a})$, vagyis

$$0 \geq f(x) - f(\mathfrak{a}) = \left(\frac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!} + \varphi(x)\right)(x-\mathfrak{a})^n.$$

Mivel a $\dfrac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!} + \varphi$ függvény az $]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[$ intervallumon sehol sem 0 és *állandó előjelű*, és páratlan n esetén minden $x > \mathfrak{a}$ pontra $(x-\mathfrak{a})^n > 0$ és esetén minden $x < \mathfrak{a}$ pontra $(x-\mathfrak{a})^n < 0$, így n szükségképpen páros. Ekkor viszont minden $x \neq \mathfrak{a}$ valós számra

$(x-\mathfrak{a})^n > 0$, ezért szükségképpen minden $x \in]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[$ esetén $\dfrac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!} + \varphi(x) < 0$. Ebből következik, hogy $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) < 0$.

Hasonlóan kapjuk, hogy ha f-nek lokális minimuma van $\mathfrak{a}$-ban, akkor n páros és $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) > 0$.

(iii)⇒(i) Tegyük fel, hogy n páros és $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) < 0$. Ekkor minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ pontra

$$f(x) - f(\mathfrak{a}) = \left(\frac{(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a})}{n!} + \varphi(x)\right)(x-\mathfrak{a})^n < 0,$$

tehát f-nek szigorú lokális maximuma van $\mathfrak{a}$-ban. Hasonlóan kapjuk, hogy ha n páros és $(\mathrm{D}^n f)(\mathfrak{a}) > 0$, akkor f-nek szigorú lokális minimuma van $\mathfrak{a}$-ban. ∎

3.16. Lagrange-maradéktagos Taylor-formula

3.16.1. Lemma. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$ és $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olyan pontok, hogy $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Tegyük fel, hogy*

– *az f függvény n-szer differenciálható az $[a,b]$ intervallum minden pontjában, és $\mathrm{D}^n f$ folytonos az $[a,b]$ intervallum minden pontjában;*

– *az f függvény $n+1$-szer differenciálható az $]a,b[$ intervallum minden pontjában.*

Ekkor léteznek olyan $c_+, c_- \in]a,b[$ pontok, amelyekre teljesülnek az

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(\mathrm{D}^{n+1} f)(c_+)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$
$$f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(b)}{k!}(a-b)^k + \frac{(\mathrm{D}^{n+1} f)(c_-)}{(n+1)!}(a-b)^{n+1}$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ számra értelmezzük a g_α függvényt a következő módon:

$$[a,b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(x)}{k!}(b-x)^k - \alpha(b-x)^{n+1}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a g_α függvény az $[a,b]$ minden pontjában folytonos, és az $]a,b[$ intervallum minden pontjában differenciálható. Világos az is, hogy bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ számra $g_\alpha(b) = 0$, továbbá létezik egyetlen olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $g_\alpha(a) = 0$ teljesül, ugyanis

$$\alpha := \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(a)}{k!}(b-a)^k \right)$$

ez a szám. Ha α ezt a számot jelöli, akkor a Rolle-tétel alapján létezik olyan $c \in]a,b[$

pont, amelyre $(\mathrm{D}g_\alpha)(c) = 0$. Ugyanakkor minden $x \in]a, b[$ esetén

$$(\mathrm{D}g_\alpha)(x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}(\mathrm{D}^k f))(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(x)}{k!} k(b-x)^{k-1} +$$

$$+\alpha(n+1)(b-x)^n = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^{k+1} f)(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} +$$

$$+\alpha(n+1)(b-x)^n = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^{k+1} f)(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathrm{D}^{k+1} f)(x)}{k!}(b-x)^k +$$

$$+\alpha(n+1)(b-x)^n = -\frac{(\mathrm{D}^{n+1} f)(x)}{n!}(b-x)^n + \alpha(n+1)(b-x)^n.$$

Tehát ha $c \in]a, b[$ olyan, hogy $(\mathrm{D}g_\alpha)(c) = 0$, akkor

$$\alpha = \frac{(\mathrm{D}^{n+1} f)(c)}{(n+1)!},$$

következésképpen

$$\frac{1}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(a)}{k!}(b-a)^k \right) = \frac{(\mathrm{D}^{n+1} f)(c)}{(n+1)!}.$$

Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy $c_+ := c \in]a, b[$ éppen olyan pont, amelynek létezését állítottuk.

A c_- pont létezésének bizonyítása a fenti bizonyítás mintájára történik, ha $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a g_α függvényt a:

$$[a, b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(x)}{k!}(a-x)^k - \alpha(a-x)^{n+1}$$

definícióval értelmezzük. ■

3.16.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$, és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ olyan pont, valamint $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy f az $]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[$ nyílt intervallum minden pontjában $n+1$-szer differenciálható. Ekkor minden $x \in]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[$ ponthoz létezik olyan $\theta \in]0, 1[$ valós szám, amelyre*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k + \frac{(\mathrm{D}^{n+1} f)(\mathfrak{a} + \theta(x-\mathfrak{a}))}{(n+1)!}(x-\mathfrak{a})^{n+1}.$$

(Lagrange-maradéktagos Taylor-formula)

Bizonyítás. Legyen $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + r[$. Ekkor $\mathfrak{a} < x$, $[\mathfrak{a}, x] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és f az $[\mathfrak{a}, x]$ minden pontjában $n+1$-szer differenciálható, így n-szer is differenciálható, és $\mathrm{D}^n f$ folytonos az $[\mathfrak{a}, x]$ minden pontjában, továbbá f az $]\mathfrak{a}, x[$ minden pontjában $n+1$-szer differenciálható. Ezért az előző lemma első formuláját alkalmazhatjuk az f függvényre és az $a := \mathfrak{a}$, $b := x$ pontokra. Tehát azt kapjuk, hogy létezik olyan $c \in]\mathfrak{a}, x[$ pont, amelyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k + \frac{(\mathrm{D}^{n+1} f)(c)}{(n+1)!}(x-\mathfrak{a})^{n+1}$$

teljesül. Ekkor a $\theta := (c-\mathfrak{a})/(x-\mathfrak{a}) \in]0,1[$ számra $c = \mathfrak{a} + \theta(x-\mathfrak{a})$ teljesül, így θ olyan szám, amelynek létezését állítottuk.

Legyen $x \in]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}[$. Ekkor $x < \mathfrak{a}$, $[x,\mathfrak{a}] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, és f az $[x,\mathfrak{a}]$ minden pontjában $n+1$-szer differenciálható, így n-szer is differenciálható, és $\mathrm{D}^n f$ folytonos az $[x,\mathfrak{a}]$ minden pontjában, továbbá f az $]x,\mathfrak{a}[$ minden pontjában $n+1$-szer differenciálható. Ezért az előző lemma második formuláját alkalmazhatjuk az f függvényre és az $a := x$, $b := \mathfrak{a}$ pontokra. Tehát azt kapjuk, hogy létezik olyan $c \in]x,\mathfrak{a}[$ pont, amelyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k + \frac{(\mathrm{D}^{n+1} f)(c)}{(n+1)!}(x-\mathfrak{a})^{n+1}$$

teljesül. Ekkor a $\theta := (c-\mathfrak{a})/(x-\mathfrak{a}) \in]0,1[$ számra $c = \mathfrak{a} + \theta(x-\mathfrak{a})$ teljesül, így θ olyan szám, amelynek létezését állítottuk. ■

3.17. A valós elemi függvények inverzei

3.17.1. Állítás. (**A valós exponenciális függvény inverze**) *Az* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény szigorúan monoton növő és* $\mathrm{Im}(\exp) = \mathbb{R}_+^*$*, továbbá a*

$$\log := \exp^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

inverzfüggvény végtelenszer differenciálható és

$$\mathrm{D}(\log) = \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}}.$$

Bizonyítás. A 2.7.4., 3.4.2. és 3.5.3. állítások nyilvánvaló következménye, mert minden $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$(\mathrm{D}\log)(\exp(y)) = (\mathrm{D}\exp^{-1})(\exp(y)) = \frac{1}{(\mathrm{D}\exp)(y)} = \frac{1}{\exp(y)},$$

amiből minden $x \in \mathbb{R}_+^*$ esetén az $y := \log(x)$ választással kapjuk, hogy $(\mathrm{D}\log)(x) = \dfrac{1}{x}$.■

3.17.2. Állítás. *Minden* $x \in]-1,1[$ *valós számra*

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\, x^{k+1}.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\frac{1}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k + (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$$

teljesül az $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ halmazon, továbbá nyilvánvaló, hogy a $]-1,\to[$ intervallumon

$$\mathrm{D}(\log \circ (1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}})) = \frac{1}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}},$$

$$\mathrm{D}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$$

teljesül. Tehát ha $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\mathrm{R}_n := \log \circ (1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{k+1},$$

akkor nyilvánvaló, hogy $\mathrm{R}_n(0) = 0$, továbbá a $]-1, \to[$ intervallumon fennáll a

$$\mathrm{DR}_n = (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n}{1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$$

egyenlőség.

Ha $x \in]0,1[$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z \in]0, x[$, hogy $\mathrm{R}_n(x) = (\mathrm{DR}_n)(z)x$, tehát

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \ x^{k+1} \right| = |(\mathrm{DR}_n)(z)|x = \frac{z^n}{1+z} \ x \leq x^{n+1}.$$

Ha $x \in]-1, 0[$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z \in]x, 0[$, hogy $\mathrm{R}_n(x) = (\mathrm{DR}_n)(z)x$, tehát

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \ x^{k+1} \right| = |(\mathrm{D}R_n)(z)||x| = \frac{|z|^n}{1+z}|x| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1+x}.$$

Tehát minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \ x^{k+1}$. ■

3.17.3. Állítás. (**A valós trigonometrikus függvények inverzei**)

a) *A* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény szigorúan monoton növő a* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallumon, valamint* $\sin\langle\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\rangle = [-1, 1]$, *továbbá az*

$$\mathrm{Arcsin} := \left(\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

inverzfüggvény folytonos, a $]-1, 1[$ *intervallumon végtelenszer differenciálható és*

$$\mathrm{D}(\mathrm{Arcsin}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{id}_{]-1,1[}^2}}.$$

b) *A* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény szigorúan monoton fogyó a* $[0, \pi]$ *intervallumon, valamint* $\cos\langle[0, \pi]\rangle = [-1, 1]$, *továbbá az*

$$\mathrm{Arccos} := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

inverzfüggvény folytonos, a $]-1, 1[$ *intervallumon végtelenszer differenciálható és*

$$\mathrm{D}(\mathrm{Arccos}) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{id}_{]-1,1[}^2}}.$$

c) *A* $\mathrm{tg} := \sin/\cos : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény definíciós tartománya az* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ *halmaz,* *és minden* $k \in \mathbb{Z}$ *esetén a* tg *függvény szigorúan monoton növő a* $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ *intervallumon és fennáll a* $\mathrm{tg}\langle\left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[\rangle = \mathbb{R}$ *egyenlőség. Az*

$$\mathrm{Arctg} := \left(\mathrm{tg}|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

inverzfüggvény végtelenszer differenciálható és minden $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^*$ *esetén*

$$(\mathrm{D}^n(\mathrm{Arctg}))(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\sin\left(n \cdot \mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Bizonyítás. Mindegyik esetben elegendő az inverzfüggvény differenciálhatóságának tételére hivatkozni. Az Arctg deriváltjaira vonatkozó formulát teljes indukcióval lehet bizonyítani ■

3.17.4. Állítás. (**A valós hiperbolikus függvények inverzei**)

a) *A* $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény szigorúan monoton növő és* $\mathrm{Im}(\mathrm{sh}) = \mathbb{R}$, *továbbá az*

$$\mathrm{Arsh} := \mathrm{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

inverzfüggvény végtelenszer differenciálható és

$$\mathrm{D}(\mathrm{Arsh}) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 + 1}}.$$

Minden $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\mathrm{Arsh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

b) *A* $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény szigorúan monoton növő a* $[0, \to[$ *intervallumon, valamint* $\mathrm{ch}\langle[0,\to[\rangle = [1,\to[$, *továbbá az*

$$\mathrm{Arch} := \left(\mathrm{ch}|_{[0,\to[}\right)^{-1} : [1,\to[\to \mathbb{R}$$

inverzfüggvény folytonos, a $]1,\to[$ *intervallumon végtelenszer differenciálható és*

$$\mathrm{D}(\mathrm{Arch}) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{id}_{]1,\to[}^2 - 1}}.$$

Minden $x \in [1,\to[$ *esetén*

$$\mathrm{Arch}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

c) *A* $\mathrm{th} := \mathrm{sh}/\mathrm{ch} : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény definíciós tartománya* $\mathbb{R}$, *és szigorúan monoton növő, és* $\mathrm{Im}(\mathrm{th}) =]-1,1[$, *továbbá az*

$$\mathrm{Arth} := \mathrm{th}^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$$

inverzfüggvény végtelenszer differenciálható és

$$\mathrm{D}(\mathrm{Arth}) = \frac{1}{1 - \mathrm{id}_{]-1,1[}^2}.$$

Minden $x \in [-1,1[$ *esetén*

$$\mathrm{Arth}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Bizonyítás. Mindegyik esetben az inverzfüggvény differenciálhatóságának tételére hivatkozhatunk. ■

3.17.5. Állítás. *Minden $x \in]-1,1[$ valós számra*

$$\mathrm{Arctg}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1}.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\frac{1}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k} + (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2n}}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$$

teljesül $\mathbb{R}$-en, továbbá

$$\mathrm{D}(\mathrm{Arctg}) = \frac{1}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2},$$

$$\mathrm{D}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k}$$

teljesül. Tehát ha $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\mathrm{R}_n := \mathrm{Arctg} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2k+1},$$

akkor nyilvánvaló, hogy $\mathrm{R}_n(0) = 0$, továbbá fennáll a

$$\mathrm{DR}_n = (-1)^n \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{2n}}{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$$

egyenlőség.

Ha $x \in]0,1[$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z \in]0,x[$, hogy $\mathrm{R}_n(x) = (\mathrm{DR}_n)(z)x$, tehát

$$\left|\mathrm{Arctg}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1}\right| = |(\mathrm{DR}_n)(z)|x = \frac{z^{2n}}{1+z^2}\ x \leq x^{2n+1}.$$

Ha $x \in]-1,0[$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z \in]x,0[$, hogy $\mathrm{R}_n(x) = (\mathrm{DR}_n)(z)x$, tehát

$$\left|\mathrm{Arctg}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1}\right| = |(\mathrm{DR}_n)(z)||x| = \frac{z^{2n}}{1+z^2}|x| \leq |x|^{2n+1}.$$

Tehát minden $x \in]-1,1[$ esetén $\mathrm{Arctg}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1}$. ■

Figyeljük meg, hogy a fentiek szerint minden $\delta \in]0,1[$ valós számra

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]}\left|\mathrm{Arctg}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1}\right|\right) = 0$$

is teljesül, mert ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$, vagyis $|x| \leq 1-\delta$, akkor

$$\left|\mathrm{Arctg}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1}\right| \leq |x|^{2n+1} \leq (1-\delta)^{2n+1},$$

tehát minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]} \left|\mathrm{Arctg}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1}\right| \leq (1-\delta)^{2n+1},$$

és $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\delta)^{2n+1} = 0$.

3.18. Általánosított binomiális formula

3.18.1. Definíció. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, és minden $k \in \mathbb{N}^*$ számra értelmezzük a*

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j),$$

számot, továbbá legyen

$$\binom{\alpha}{0} := 1.$$

(*Ezek a számok az* **általánosított binomiális együtthatók.**)

3.18.2. Állítás. *Ha $x \in \mathbb{R}_+^*$ és $y \in \left]-\frac{x}{2}, x\right[$, akkor minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k.$$

(**Általánosított binomiális formula.**)

Bizonyítás. Elegendő azt igazolni, hogy minden $z \in]-1/2, 1[$ valós számra, minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k.$$

Valóban, ha ez igaz, és $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in]-x/2, x[$, valamint $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\frac{y}{x} \in]-1/2, 1[$, így a valós hatványozás tulajdonságai (**NUM** 5.3.4.) szerint

$$(x+y)^\alpha = x^\alpha \left(1 + \frac{y}{x}\right)^\alpha = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \left(\frac{y}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k.$$

Legyen

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; \quad z \mapsto z^\alpha.$$

Ez a függvény végtelenszer differenciálható, és minden $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$(\mathrm{D}^k f)(z) = k! \binom{\alpha}{k} z^{\alpha-k}.$$

Az f függvényre alkalmazva a Lagrange-maradéktagos Taylor-formulát kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz van olyan $\theta_n :]-1,1[\to]0,1[$ függvény, amelyre minden $z \in]-1,1[$ esetén

$$(1+z)^\alpha = f(1+z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(1)}{k!}\, z^k + \frac{(\mathrm{D}^{n+1} f)(1+\theta_n(z)z)}{(n+1)!}\, z^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} z^k + \mathrm{R}_{n+1}(z),$$

ahol bevezettük az

$$\mathrm{R}_{n+1}(z) := \binom{\alpha}{n+1} \left(\frac{z}{1+\theta_n(z)z} \right)^{n+1} (1+\theta_n(z)z)^\alpha$$

jelölést. Világos, hogy azt kell megvizsgálni, hogy mely $z \in]-1,1[$ pontokban igaz a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{R}_{n+1}(z) = 0$ egyenlőség.

Ehhez először megjegyezzük, hogy $k \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\binom{\alpha}{k} = (-1)^k \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right),$$

amiből következik, hogy

$$\left| \binom{\alpha}{k} \right| \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{|\alpha+1|}{j}\right).$$

Legyen most $\mathrm{P}_\alpha :]-1,1[\to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $z \in]-1,1[$ esetén $\mathrm{P}_\alpha(z) := (1+|z|)^\alpha$, ha $\alpha \geq 0$, illetve $\mathrm{P}_\alpha(z) := (1-|z|)^\alpha$, ha $\alpha < 0$. Ha $r \in]0,1[$ tetszőleges valós szám és $s \in]r,1[$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$1 + \frac{|\alpha+1|}{n} < \frac{1}{s}.$$

Ekkor az előzőek szerint minden $z \in [0,r]$ valós számra és $n > N$ természetes számra:

$$|\mathrm{R}_{n+1}(z)| \leq \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| z^{n+1} \mathrm{P}_\alpha(z) \leq \left(\prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{|\alpha+1|}{j}\right) \right) \left(\frac{1}{s}\right)^{n-N+1} r^{n+1} \mathrm{P}_\alpha(z) \leq$$
$$\leq \left(\prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{|\alpha+1|}{j}\right) \right) \left(\sup_{t\in[0,z]} \mathrm{P}_\alpha(t) \right) s^N \left(\frac{r}{s}\right)^{n+1},$$

ezért még az is igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{z\in[0,r]} |\mathrm{R}_{n+1}(z)| \right) = 0.$$

Legyen most $\mathrm{N}_\alpha :]-1,1[\to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $z \in]-1,1[$ esetén $\mathrm{N}_\alpha(z) := (1-|z|)^\alpha$, ha $\alpha \geq 0$, illetve $\mathrm{N}_\alpha(z) := (1+|z|)^\alpha$, ha $\alpha < 0$. Ha $r \in]0,1/2[$ tetszőleges valós szám és $s \in]0,1[$ olyan valós szám, hogy $r < s/(s+1)$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$1 + \frac{|\alpha+1|}{n} < \frac{1}{s}.$$

Ekkor az előzőek szerint minden $z \in [-r, 0[$ valós számra és $n > N$ természetes számra

$$|\mathrm{R}_{n+1}(z)| \leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \left(\frac{|z|}{1-|z|}\right)^{n+1} \mathrm{N}_\alpha(z) \leq$$
$$\leq \left(\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{|\alpha+1|}{j}\right)\right)\left(\frac{1}{s}\right)^{n-N+1}\left(\frac{r}{1-r}\right)^{n+1} \mathrm{N}_\alpha(z) \leq$$
$$\leq \left(\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{|\alpha+1|}{j}\right)\right) s^N \left(\sup_{t\in[-r,0]} \mathrm{N}_\alpha(t)\right)\left(\frac{r/s}{1-r}\right)^{n+1},$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{z\in[-r,0]} |\mathrm{R}_{n+1}(z)|\right) = 0,$$

hiszen $(r/s)/(1-r) \in]0, 1[$. ■

Megjegyezzük, hogy az általánosított binomiális formula minden olyan $x, y \in \mathbb{R}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ számokra érvényes, amelyekre $x > 0$ és $y \in]-x, x[$, de ennek bizonyításához *nem elégségesek* az eddig tanultak. Az *integrálmaradéktagos Taylor-formula* alkalmazásával ezt később bizonyítani fogjuk (**INR** 3.4.1.).

3.19. Szigorú primitív függvények

3.19.1. Definíció. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény* **szigorú primitív függvényének** *nevezünk minden olyan $F : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre $f = \mathrm{D}F$ teljesül. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény szigorú primitív függvényeinek halmazát $\int f$ jelöli.*

Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nem üres nyílt intervallum, akkor egyáltalán nem minden $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik szigorú primitív függvénye. Ez világosan látható a következő állításból.

3.19.2. Állítás. *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, akkor minden $J \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ intervallumra a $(\mathrm{D}f)\langle J\rangle$ halmaz intervallum $\mathbb{R}$-ben.*

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$ és $(\mathrm{D}f)(a) < (\mathrm{D}f)(b)$, akkor minden $y \in](\mathrm{D}f)(a), (\mathrm{D}f)(b)[$ számhoz létezik olyan $x \in [a, b]$, amelyre $(\mathrm{D}f)(x) = y$.

Ehhez legyen $c := (a + b)/2$, és legyenek $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ azok a függvények, amelyekre minden $t \in [a, c[$ esetén $\alpha(t) := a$ és $\beta(t) := 2t - a$, továbbá minden $t \in [c, b]$ esetén $\alpha(t) := 2t - b$ és $\beta(t) := b$. Világos, hogy minden $t \in]a, b[$ esetén $a \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b$. Legyen

$$g :]a, b[\to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}.$$

A g függvény folytonos és

$$\lim_a g = (\mathrm{D}f)(a), \quad \lim_b g = (\mathrm{D}f)(b),$$

hiszen a definíció szerint

$$g = \left(\frac{f - f(a)}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - a}\right) \circ \beta$$

az $]a, c[$ intervallumon, valamint

$$g = \left(\frac{f - f(b)}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - b}\right) \circ \alpha$$

a $]c, b[$ intervallumon, így elegendő a függvények kompozícójának határértékére vonatkozó tételt alkalmazni. Ezért az a $\tilde{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos, amely $]a, b[$-n egyenlő g-vel, és $\tilde{g}(a) := (\mathrm{D}f)(a)$, $\tilde{g}(b) := (\mathrm{D}f)(b)$. Ebből a Bolzano-tétel alapján következik olyan $t \in]a, b[$ pont létezése, amelyre $g(t) = \tilde{g}(t) = y$. Az f függvény differenciálható az $[\alpha(t), \beta(t)]$ intervallumon, ezért a Lagrange-féle középértéktétel alapján létezik olyan $x \in]\alpha(t), \beta(t)[$, hogy $f(\beta(t)) - f(\alpha(t)) = (\mathrm{D}f)(x)(\beta(t) - \alpha(t))$, ami a g függvény definíciója szerint azt jelenti, hogy $(\mathrm{D}f)(x) = g(t) = y$. ■

3.19.3. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pont, amely belső pontja az f deriváltfüggvénye definíciós tartományának, akkor $\mathrm{D}f$-nek nem lehet a-ban elsőfajú szakadása* (2.11.2.).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathrm{D}f$-nek a-ban elsőfajú szakadása van, és legyen $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $]a - \delta, a + \delta[\subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{D}f)$. Tegyük fel, hogy

$$y_- := \lim_{a-0} \mathrm{D}f < \lim_{a+0} \mathrm{D}f = y_+.$$

Ekkor az $\varepsilon := (y_+ - y_-)/3$ számhoz van olyan $\delta_- \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\delta_- < \delta$ és minden $t \in]a - \delta_-, a[$ esetén $(\mathrm{D}f)(t) \in]y_- - \varepsilon, y_- + \varepsilon[$. Hasonlóan, ε-hoz van olyan $\delta_+ \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\delta_+ < \delta$ és minden $t \in]a, a + \delta_+[$ esetén $(\mathrm{D}f)(t) \in]y_+ - \varepsilon, y_+ + \varepsilon[$. Ha $t_- \in]a - \delta_-, a[$ és $t_+ \in]a, a + \delta_+[$, akkor $(\mathrm{D}f)(t_-) < y_- + \varepsilon < y_+ - \varepsilon < (\mathrm{D}f)(t_+)$, és 3.19.2. szerint a $(\mathrm{D}f)\langle[t_-, t_+]\rangle$ halmaz intervallum, tehát $]y_- + \varepsilon, y_+ - \varepsilon[\subseteq (\mathrm{D}f)\langle[t_-, t_+]\rangle$, holott az $]y_- + \varepsilon, y_+ - \varepsilon[$ intervallum a $(\mathrm{D}f)\langle[t_-, t_+]\rangle$ halmaznak legfeljebb egy pontját tartalmazhatja (természetesen $(\mathrm{D}f)(a)$-t). Ez az ellentmondás mutatja, hogy $\mathrm{D}f$-nek a-ban nem lehet elsőfajú szakadása. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állítás feltételei mellett $\mathrm{D}f$-nek a-ban lehet másodfajú szakadása. Erre példa az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény, amely mindenütt differenciálható, de a deriváltfüggvényének a 0 pontban másodfajú szakadása van.

Tehát ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, akkor csak olyan $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek létezhet szigorú primitív függvénye, amely Darboux-tulajdonságú, vagyis minden $J \subseteq I$ intervallumra az $f\langle J\rangle$ halmaz intervallum $\mathbb{R}$-ben. Például, ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek az I valamelyik pontjában elsőfajú szakadása van, akkor $\displaystyle\int f = \emptyset$.

3.19.4. Definíció. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $P, Q \subseteq \mathscr{F}(I;\mathbb{R})$, valamint $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor a*

$$\begin{aligned} P+Q &:= \{f+g \mid (f \in P) \wedge (g \in Q)\}, \\ P-Q &:= \{f-g \mid (f \in P) \wedge (g \in Q)\}, \\ \alpha P &:= \{\alpha f \mid f \in P\} \end{aligned}$$

jelöléseket alkalmazzuk, tehát $P+Q, P-Q, \alpha P \subseteq \mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ szintén teljesül.

Ha $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumok és $\sigma : J \to I$ függvény, akkor minden $P \subseteq \mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ függvényhalmazra

$$P \circ \sigma := \{f \circ \sigma \mid f \in P\},$$

tehát ekkor $P \circ \sigma \subseteq \mathscr{F}(J;\mathbb{R})$.

3.19.5. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum.*

a) *Ha $I \neq \emptyset$, akkor van olyan $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\int f = \emptyset$. (Később megmutatjuk, hogy ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor szükségképpen $\int f \neq \emptyset$.)*

b) *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és $F \in \int f$, akkor*

$$\int f = \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

c) *Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvények, akkor*

$$\int f + \int g \subseteq \int (f+g),$$

és ha $\int f \neq \emptyset$ és $\int g \neq \emptyset$, akkor itt egyenlőség áll.

d) *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\alpha \int f \subseteq \int \alpha f,$$

és ha $\alpha \neq 0$, akkor itt egyenlőség áll.

e) *Ha $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\sigma : J \to I$ differenciálható függvény, akkor minden $f : I \to \mathbb{R}$ függvényre*

$$\left(\int f\right) \circ \sigma \subseteq \int (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma),$$

és ha $\int f \neq \emptyset$, akkor itt egyenlőség áll.

f) *Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, akkor*

$$\int f(\mathrm{D}g) = \{fg\} - \int g(\mathrm{D}f).$$

Bizonyítás. a) Legyen $c \in I$ rögzítve, és tekintsük az

$$f : I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & , \text{ha } c \leq x \\ 0 & , \text{ha } c > x \end{cases}$$

függvényt. Az f függvény nem Darboux-tulajdonságú, mert $f\langle I\rangle = \{0,1\}$ nem intervallum. Ezért 3.19.2. alapján nem létezik olyan $F : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre $\mathrm{D}F = f$, vagyis $\displaystyle\int f = \emptyset$.

b) Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és $F \in \displaystyle\int f$. Ha $G \in \displaystyle\int f$, akkor F és G olyan I-n értelmezett, valós értékű differenciálható függvények, hogy $\mathrm{D}F = f = \mathrm{D}G$, tehát 3.7.4. szerint van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $G = F + c$. Ez azt jelenti, hogy $\displaystyle\int f \subseteq \{F + c | c \in \mathbb{R}\}$, és a fordított tartalmazás nyilván igaz, mert minden I-n értelmezett, valós értékű konstansfüggvény deriváltfüggvénye a I-n értelmezett, 0 értékű konstansfüggvény.

c) Legyenek $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvények, és $F \in \displaystyle\int f$, valamint $G \in \displaystyle\int g$. Ekkor $F + G : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $\mathrm{D}(F + G) = \mathrm{D}F + \mathrm{D}G = f + g$, tehát $F + G \in \displaystyle\int (f + g)$. Ez azt jelenti, hogy $\displaystyle\int f + \int g \subseteq \int (f + g)$.

Tegyük fel, hogy $F_0 \in \displaystyle\int f$ és $G_0 \in \displaystyle\int g$. Ha $H \in \displaystyle\int (f + g)$, akkor $\mathrm{D}H = f + g = \mathrm{D}F_0 + \mathrm{D}G_0 = \mathrm{D}(F_0 + G_0)$, tehát 3.7.4. alapján van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $H = (F_0 + G_0) + c = F_0 + (G_0 + c) \in \displaystyle\int f + \int g$. Ez azt jelenti, hogy ha $\displaystyle\int f \neq \emptyset \neq \int g$, akkor $\displaystyle\int (f + g) \subseteq \int f + \int g$ is teljesül.

d) Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ha $F \in \displaystyle\int f$, akkor $\alpha F : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $\mathrm{D}(\alpha F) = \alpha \mathrm{D}F = \alpha f$, tehát $\alpha F \in \displaystyle\int \alpha f$. Ez azt jelenti, hogy $\alpha \displaystyle\int f \subseteq \int \alpha f$.

Tegyük fel, hogy $F_0 \in \displaystyle\int f$ és $\alpha \neq 0$. Ha $H \in \displaystyle\int \alpha f$, akkor $\mathrm{D}H = \alpha f = \alpha \mathrm{D}F_0 = \mathrm{D}(\alpha F_0)$, tehát 3.7.4. alapján van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $H = \alpha F_0 + c = \alpha(F_0 + \alpha^{-1}c) \in \alpha \displaystyle\int f$. Ez azt jelenti, hogy ha $\displaystyle\int f \neq \emptyset$ és $\alpha \neq 0$, akkor $\displaystyle\int \alpha f \subseteq \alpha \int f$ is teljesül.

e) Legyen $F \in \displaystyle\int f$. Ekkor a függvények kompozíciójának differenciálási szabálya (3.3.1.) szerint az $F \circ \sigma : J \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, és $\mathrm{D}(F \circ \sigma) = ((\mathrm{D}F) \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma) = (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma)$, tehát $F \circ \sigma \in \displaystyle\int (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma)$. Ez azt jelenti, hogy $\left(\displaystyle\int f\right) \circ \sigma \subseteq \displaystyle\int (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma)$.

Tegyük fel, hogy $F_0 \in \displaystyle\int f$, és legyen $G \in \displaystyle\int (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma)$ tetszőleges. Ekkor ismét a függvények kompozíciójának differenciálási szabályát (3.3.1.) alkalmazva kapjuk, hogy $\mathrm{D}G = (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma) = ((\mathrm{D}F_0) \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma) = \mathrm{D}(F_0 \circ \sigma)$, így 3.7.4. alapján van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $G = F_0 \circ \sigma + c = (F_0 + c) \circ \sigma \in \left(\displaystyle\int f\right) \circ \sigma$. Ez azt jelenti, hogy $\displaystyle\int f \neq \emptyset$ esetén $\displaystyle\int (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma) \subseteq \left(\int f\right) \circ \sigma$ is teljesül.

f) Legyen $F \in \int (\mathrm{D}f)g$ és $G \in \int f(\mathrm{D}g)$. Ekkor a c) állításból következik, hogy $F + G \in \int ((\mathrm{D}f)g + f(\mathrm{D}g)) = \int \mathrm{D}(fg)$, ahol felhasználtuk a függvények szorzatának differenciálási szabályát (3.2.1.). Tehát $\mathrm{D}(F+G) = \mathrm{D}(fg)$, így 3.7.4. alapján van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $fg = F + G + c$, vagyis $F = fg - (G + c) \in \{fg\} - \int g(\mathrm{D}f)$, ugyanakkor $fg - G = F + c \in \int (\mathrm{D}f)g$. Ez azt jelenti, hogy $\int f(\mathrm{D}g) = \{fg\} - \int g(\mathrm{D}f)$. ■

3.20. Gyakorlatok

1. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan függvény és $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan intervallum, amelyekhez léteznek olyan $C \geq 0$ és $\alpha > 1$ valós számok, hogy minden $x, x' \in I$ esetén

$$|f(x') - f(x)| \leq C|x' - x|^{\alpha},$$

akkor f az I intervallumon állandó.

(*Útmutatás.* A feltevésből következik, hogy f az I minden x belső pontjában differenciálható és $(\mathrm{D}f)(x) = 0$. Ezért f az I belsején állandó, továbbá I-n folytonos is.)

2. Legyen $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ olyan kétszer differenciálható függvény, hogy az f és $\mathrm{D}^2 f$ függvények korlátosak. Ekkor $\mathrm{D}f$ is korlátos függvény, és ha $k \in \{0, 1, 2\}$ esetén

$$C_k := \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |(\mathrm{D}^k f)(x)|,$$

akkor fennáll a $C_1^2 \leq 4C_0C_2$ egyenlőtlenség.

(*Útmutatás.* A Taylor-formula szerint minden $x, z \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $y \in]x, x+2z[$ pont, hogy

$$(\mathrm{D}f)(x) = \frac{f(x + 2z) - f(x)}{2z} - z(\mathrm{D}^2 f)(y),$$

amiből következik, hogy $x, z \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $|(\mathrm{D}f)(x)| \leq z^{-1}C_0 + zC_2$, így minden $x \in \mathbb{R}_+^*$ pontra

$$|(\mathrm{D}f)(x)| \leq \inf_{z \in \mathbb{R}_+^*} \left(z^{-1}C_0 + zC_2\right)$$

teljesül. Ugyanakkor a szélsőértékek differenciális jellemzésének tételét alkalmazva könnyen belátható, hogy az

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; \quad z \mapsto z^{-1}C_0 + zC_2$$

függvény minimuma $\mathbb{R}_+^*$-on egyenlő $2\sqrt{C_0C_2}$-vel; ebből már következik az állítás.)

3. Legyen $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ olyan kétszer differenciálható függvény, amelyre $\mathrm{D}^2 f$ korlátos és $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Ekkor $\mathrm{D}f$ is korlátos függvény és $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{D}f = 0$.

(*Útmutatás.* Alkalmazzuk az előző gyakorlatban megfogalmazott állítást minden $r > 0$ valós szám esetén az $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x + r)$ függvényre!)

4. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre $\mathrm{D}f$ alulról korlátos, akkor létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ valós számra az $\mathrm{id}_\mathbb{R} + \varepsilon' f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növő.

5. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ mindketten n-szer differenciálható függvények, ahol $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $fg : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ szorzatfüggvény is n-szer differenciálható és

$$\mathrm{D}^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{D}^k f)(\mathrm{D}^{n-k} g)$$

teljesül. (**Leibniz-formula.**)
(*Útmutatás.* n szerinti teljes indukcióval bizonyíthatunk.)

6. Legyen $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $\lim\limits_0 f$ létezik. Ha a $\mathrm{D}f$ deriváltfüggvény monoton növő, akkor az $\dfrac{f - \lim\limits_0 f}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}}$ függvény is monoton növő.
(*Útmutatás.* Alkalmazzuk a monotonitás differenciális jellemzését, majd $x \in \mathbb{R}_+^*$ esetén minden $0 < \varepsilon < x$ számra írjuk fel a Lagrange középértéktételt az f függvényre és az $[\varepsilon, x]$ intervallumra, és a nyert egyenlőségben használjuk ki $\mathrm{D}f$ monoton növését, és tartsunk ε-nal felülről nullához.)

7. Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Vizsgáljuk meg a következő függvények monotonitását:

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+p};$$

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \left(1 + \frac{p}{x}\right);$$

$$]1, \to [\to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-p};$$

$$]-p, \to [\cap \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \left(1 + \frac{p}{x}\right)^{x+1}.$$

(*Útmutatás.* Mindegyik esetben alkalmazhatjuk a monotonitás differenciális jellemzését.)

8. a) Ha $\alpha \geq 1$ és $x \geq 0$ tetszőleges valós számok, akkor

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

b) Ha $\alpha \in [0, 1]$ és $x \geq 0$ tetszőleges valós számok, akkor

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x.$$

c) Ha $\alpha \geq 0$ és $x \in [0, 1]$ tetszőleges valós számok, akkor

$$(1-x)^\alpha \leq \frac{1}{1 + \alpha x}.$$

(*Útmutatás.* Az a) és b) esetben $\alpha \in \mathbb{R}_+$ esetén tekintsük az

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$$

függvényt, és vizsgáljuk ennek előjelét, miután meghatároztuk az f monotonitási tulajdonságát, valamint igazoltuk, hogy $\lim\limits_0 f = 0 = f(0)$.

A c) esetben írjuk át a bizonyítandó egyenlőtlenséget ekvivalens logaritmikus alakba, és az $\alpha > 0$ valós számra vizsgáljuk meg az

$$f :]0,1[\to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \alpha \cdot \log(1-x) + \log(1 + \alpha \cdot x)$$

függvény előjelét, miután meghatároztuk az f monotonitási tulajdonságát, valamint igazoltuk, hogy $\lim\limits_0 f = 0 = f(0)$.)

9. Minden $x > 0$ és y valós számra fennáll az

$$xy \leq x \log(x) + \exp(y-1)$$

egyenlőtlenség.

(*Útmutatás.* Bevezetve a $z := \exp(y-1)$ jelölést, láthatóan azt kell igazolni, hogy $x > z$ esetén

$$\frac{\log(x) - \log(z)}{x - z} > \frac{1}{x},$$

és $0 < x < z$ esetén

$$\frac{\log(z) - \log(x)}{z - x} < \frac{1}{x}.$$

Ha $x > z$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $u \in]z, x[$, hogy

$$\frac{\log(x) - \log(z)}{x - z} = \frac{1}{u} > \frac{1}{x}.$$

Ha $0 < x < z$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $v \in]x, z[$, hogy

$$\frac{\log(z) - \log(x)}{z - x} = \frac{1}{v} < \frac{1}{x}.$$

teljesül.)

10. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $(a_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó rendszer. Jelölje A_n, illetve G_n az $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ rendszer számtani, illetve mértani közepét, és legyen A_{n+1}, illetve G_{n+1} az $(a_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ rendszer számtani, illetve mértani közepe. Ekkor fennáll az

$$n(A_n - G_n) \leq (n+1)(A_{n+1} - \mathrm{B}_{n+1})$$

egyenlőtlenség.

(*Útmutatás.* Könnyen látható, hogy

$$A_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right) A_n + \left(\frac{1}{n+1}\right) a_{n+1},$$

$$G_{n+1} = G_n^{\frac{n}{n+1}} a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}},$$

ezért a számtani és mértani közép közötti általánosított egyenlőtlenséget alkalmazva

$$A_{n+1} - G_{n+1} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right) A_n + \left(\frac{1}{n+1}\right) a_{n+1} - \left(\frac{n}{n+1}\right) G_n - \left(\frac{1}{n+1}\right) a_{n+1}$$

adódik, és ezt kellett igazolni.)

11. Legyen I nem üres véges halmaz, és $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times I}$ olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\sum\limits_{j\in I} a_{i,j} = 1$, és minden $j \in I$ esetén $\sum\limits_{i\in I} a_{i,j} = 1$. Ekkor minden $\mathbb{R}_+$-ban haladó $(x_i)_{i\in I}$ rendszerre

$$\underset{i\in I}{\mathrm{P}} \Big(\sum_{j\in I} a_{i,j} x_j\Big) \geq \underset{i\in I}{\mathrm{P}}\, x_i.$$

(*Útmutatás.* Elég arra az esetre bizonyítani, amikor az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{R}_+^*$-ban halad. Ebben az esetben írjuk át a bizonyítandó egyenlőtlenséget ekvivalens logaritmikus alakba, majd alkalmazzuk a log függvény konkavitását.)

12. Ha $a, b, x, y > 0$ tetszőleges valós számok, akkor

$$x \log\left(\frac{x}{a}\right) + y \log\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y) \log\left(\frac{x+y}{a+b}\right),$$

és itt pontosan akkor áll egyenlőség, ha $x/a = y/b$.

(*Útmutatás.* Alkalmas helyettesítések után használjuk ki azt, hogy az $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R};\ x \mapsto x \log(x)$ leképezés konvex!)

13. Adjunk olyan bizonyítást a függvények kompozíciójának differenciálási tételére, amely nem használja fel a differenciahányados-függvényeket!

(*Útmutatás.* Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$, és tegyük fel, hogy f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és g differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban.

Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A g differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért $f(\mathfrak{a})$ belső pontja $\mathrm{Dom}(g)$-nek, és létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a});\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ és minden $y \in \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$ esetén

$$|g(y) - g(f(\mathfrak{a})) - (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\cdot(y - f(\mathfrak{a}))| \leq \varepsilon' \cdot |y - f(\mathfrak{a})|.$$

Az f függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, így a δ'-höz létezik olyan $\delta'' \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $f\langle \mathrm{B}_{\delta''}(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$. Ugyanakkor f differenciálható is $\mathfrak{a}$-ban, így $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\delta < \delta''$, $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és minden $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})$ esetén

$$|f(x) - f(\mathfrak{a}) - (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\cdot(x - \mathfrak{a})| \leq \varepsilon' \cdot |x - \mathfrak{a}|,$$

amiből az is következik, hogy

$$|f(x) - f(\mathfrak{a})| \leq (\varepsilon' + |(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|)\cdot|x - \mathfrak{a}|.$$

Ekkor $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Dom}(g \circ f)$, tehát $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(g \circ f)$-nek, és minden $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})$ esetén $f(x) \in \mathrm{B}_{\delta'}(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$, így

$$|g(f(x)) - g(f(\mathfrak{a})) - (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\cdot(f(x) - f(\mathfrak{a}))| \leq \varepsilon' \cdot |f(x) - f(\mathfrak{a})|.$$

Ugyanakkor minden $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})$ pontra

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\mathfrak{a})-(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\cdot(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\cdot(x-\mathfrak{a}) &= \\ = g(f(x))-g(f(\mathfrak{a}))-(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\cdot(f(x)-f(\mathfrak{a}))+ & \\ +(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\cdot(f(x)-f(\mathfrak{a})-(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\cdot(x-\mathfrak{a})), &\end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned}&|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\mathfrak{a})-(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\cdot(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\cdot(x-\mathfrak{a})| \le \\ &\le |g(f(x))-g(f(\mathfrak{a}))-(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\cdot(f(x)-f(\mathfrak{a}))|+ \\ &+|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))|\cdot|f(x)-f(\mathfrak{a})-(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\cdot(x-\mathfrak{a})| \le \\ &\le\varepsilon'\cdot|f(x)-f(\mathfrak{a})|+|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))|\cdot\varepsilon'\cdot|x-\mathfrak{a}|\le\varepsilon'(\varepsilon'+|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}))|+|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))|)|x-\mathfrak{a}|.\end{aligned}$$

Ha tehát $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és az $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot úgy választjuk meg, hogy $\varepsilon'\cdot(\varepsilon'+|(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})|+|(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))|) < \varepsilon$ teljesüljön, akkor az ε'-höz fentiek szerint előállított $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ szám olyan, hogy $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Dom}(g\circ f)$ és

$$|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\mathfrak{a})-(\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\cdot(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})\cdot(x-\mathfrak{a})| \le \varepsilon\cdot|x-\mathfrak{a}|.$$

Ez azt jelenti, hogy $g\circ f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(\mathrm{D}(g\circ f))(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}g)(f(\mathfrak{a}))\cdot(\mathrm{D}f)(\mathfrak{a})$$

teljesül.)

VIII. rész

Valós változós függvények Riemann-integrálja

1. fejezet

Riemann-integrálható függvények

1.1. Riemann-lépcsősfüggvények

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$[\![m,n]\!] \ := \ \{ \ k \in \mathbb{N} \mid m \leq k \leq n \ \}$$

definíciót alkalmazzuk.

1.1.1. Definíció. *A valós számok halmaza* **véges felosztásának** *nevezünk minden olyan $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]} \in \mathbb{R}^{m+1}$ valós szám $m+1$-est, amelyre teljesül az, hogy $m \in \mathbb{N}$ és minden $j \in [\![0,m]\!]$ esetén, ha $j < m$, akkor $x_j < x_{j+1}$.*

1.1.2. Definíció. *Az $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$ véges felosztás* **finomításának** *nevezzük $\mathbb{R}$ minden olyan $(z_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ véges felosztását, amelyre $\{x_j | j \in [\![0,m]\!]\} \subseteq \{z_k | k \in [\![0,n]\!]\}$.*

Ha $(z_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ olyan véges felosztása $\mathbb{R}$-nek, amely az $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$ véges felosztás finomítása, akkor $\{x_j | j \in [\![0,m]\!]\} \subseteq \{z_k | k \in [\![0,n]\!]\}$ miatt minden $j \in [\![0,m]\!]$ számhoz létezik olyan $k \in [\![0,n]\!]$, hogy $x_j = z_k$, és k egyértelműen van meghatározva, mert a $(z_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ rendszer injektív. Tehát ekkor egyértelműen létezik olyan $\sigma : [\![0,m]\!] \to [\![0,n]\!]$ függvény, amelyre minden $j \in [\![0,m]\!]$ esetén $x_j = z_{\sigma(j)}$. Világos, hogy a véges felosztások szigorú monoton növése miatt ez a σ függvény is szigorúan monoton növő.

1.1.3. Állítás. *Ha $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$ és $(x'_k)_{k\in[\![0,m']\!]}$ véges felosztásai $\mathbb{R}$-nek, akkor létezik $\mathbb{R}$-nek olyan $(z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ véges felosztása, amely $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$-nek is és $(x'_k)_{k\in[\![0,m']\!]}$-nek is finomítása.*

Bizonyítás. Tekintsük a $H := \{x_j | j \in [\![0,m]\!]\} \cup \{x'_k | k \in [\![0,m']\!]\} \subseteq \mathbb{R}$ nem üres véges halmazt. Legyen $n := \mathrm{Card}(H) - 1$, és jelölje τ azt a $[\![0,n]\!] \to H$ bijekciót, amely szigorúan monoton növő (**ENS** 4.2.5.). Minden $i \in [\![0,n]\!]$ estén legyen $z_i := \tau(i)$. Ekkor $(z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ olyan véges felosztása $\mathbb{R}$-nek, hogy $H = \mathrm{Im}(\tau) = \{z_i | i \in [\![0,n]\!]\}$, tehát $(z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ finomítása $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$-nek is és $(x'_k)_{k\in[\![0,m']\!]}$-nek is. ■

1.1.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* **Riemann-lépcsősfüggvény**, *ha létezik $\mathbb{R}$-nek olyan $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$ véges felosztása, hogy minden $j < m$ természetes számra φ állandó az $]x_j, x_{j+1}[$, nyílt intervallumon, továbbá $\varphi = 0$ a $]\leftarrow, x_0[$ és $]x_m, \to[$ nyílt intervallumokon; minden ilyen $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$ véges felosztást a φ* **Riemann-lépcsősfüggvényhez tartozó véges felosztásnak** *nevezünk. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvények halmazát $\mathrm{E}(\mathbb{R})$ jelöli és*

$$\mathrm{E}_+(\mathbb{R}) \ := \ \{ \ \varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R}) \mid (\forall x \in \mathbb{R}) : \ \varphi(x) \geq 0 \ \}$$

a pozitív Riemann-lépcsősfüggvények halmaza.

1.1.5. Állítás. *Ha* $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ *és az* $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$ *véges felosztás* φ*-hez tartozik, akkor* $\mathbb{R}$ *minden olyan* $(z_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ *véges felosztása is* φ*-hez tartozik, amely finomítása* $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$*-nek.*

Bizonyítás. Jelölje $\sigma : [\![0,m]\!] \to [\![0,n]\!]$ azt a függvényt, amelyre minden $j \in [\![0,m]\!]$ esetén $x_j = z_{\sigma(j)}$. Tudjuk, hogy σ szigorúan monoton növő.

Mivel $0 \leq \sigma(0)$, így $z_0 \leq z_{\sigma(0)} = x_0$, tehát $]\leftarrow, z_0[\subseteq]\leftarrow, x_0[$. Ezért $\varphi = 0$ a $]\leftarrow, z_0[$ intervallumon. Mivel $\sigma(m) \leq n$, így $x_n = z_{\sigma(m)} \leq z_n$, tehát $]z_n, \to[\subseteq]x_m, \to[$. Ezért $\varphi = 0$ a $]z_n, \to[$ intervallumon.

Rögzítsünk most egy $0 \leq k < n$ természetes számot. Azt kell igazolni, hogy a φ függvény állandó az $]z_k, z_{k+1}[$ intervallumon. Három eset lehetséges.

1) Ha $k < \sigma(0)$, akkor $k < k+1 \leq \sigma(0)$, ezért $z_k < z_{k+1} \leq z_{\sigma(0)} = x_0$, így $]z_k, z_{k+1}[\subseteq]\leftarrow, x_0[$, vagyis $\varphi = 0$ az $]z_k, z_{k+1}[$ intervallumon.

2) Ha $\sigma(m) \leq k$, akkor $x_m = z_{\sigma(m)} < z_k < z_{k+1}$, így $]z_k, z_{k+1}[\subseteq]x_m, \to[$, vagyis $\varphi = 0$ az $]z_k, z_{k+1}[$ intervallumon.

3) Tegyük fel, hogy $\sigma(0) \leq k < \sigma(m)$. Ekkor a $\{j \in [\![0,m]\!] | \sigma(j) \leq k\}$ halmaz nem üres, mert 0 eleme neki, és véges, mert részhalmaza a $[\![0,m]\!]$ véges halmaznak. Legyen j_* ennek a halmaznak a legnagyobb eleme. Ekkor $j_* < m$, mert $k < \sigma(m)$. Továbbá, a j_* szám maximalitása miatt $k < \sigma(j_*+1)$, tehát $k+1 \leq \sigma(j_*+1)$. Ezért $x_{j_*} = z_{\sigma(j_*)} \leq z_k < z_{k+1} \leq z_{\sigma(j_*+1)} = x_{j_*+1}$, így $]z_k, z_{k+1}[\subseteq]x_{j_*}, x_{j_*+1}[$, vagyis φ az $]z_k, z_{k+1}[$ intervallum minden pontjában ugyanazt az értéket veszi fel, mint az $]x_{j_*}, x_{j_*+1}[$ intervallumon, tehát állandó. ■

1.1.6. Állítás. a) *Ha* $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$*, akkor* $\varphi + \psi,\ \varphi \cdot \psi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \wedge \psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$*.*

b) *Ha* $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$*, akkor* $|\varphi|,\ \varphi^+,\ \varphi^- \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$*, és minden* $c \in \mathbb{R}$ *esetén* $c.\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$*.*

Bizonyítás. a) Legyenek $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, és vegyük $\mathbb{R}$-nek egy olyan $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$ véges felosztását, amely φ-hez tartozik, és $\mathbb{R}$-nek egy olyan $(x'_k)_{k\in[\![0,m']\!]}$ véges felosztását, amely ψ-hez tartozik. Legyen $(z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ olyan véges felosztása $\mathbb{R}$-nek, amely finomítása $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$-nek is és $(x'_k)_{k\in[\![0,m']\!]}$-nek is. Az előző állítás alapján a $(z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ véges felosztás φ-hez is és ψ-hez is tartozik. Ezért $\varphi = 0$ és $\psi = 0$ a $]\leftarrow, z_0[$ intervallumon, így a $\varphi{+}\psi,\ \varphi{\cdot}\psi,\ \varphi{\vee}\psi,\ \varphi{\wedge}\psi$ függvények mind egyenlők 0-val ezen az intervallumon. Ugyanakkor, $\varphi = 0$ és $\psi = 0$ a $]z_n, \to[$ intervallumon, így a $\varphi{+}\psi,\ \varphi{\cdot}\psi,\ \varphi{\vee}\psi,\ \varphi{\wedge}\psi$ függvények mind egyenlők 0-val ezen az intervallumon. Végül, ha $i < n$ természetes szám, akkor φ és ψ állandóak a $]z_k, z_{k+1}[$ intervallumon, így a $\varphi + \psi,\ \varphi \cdot \psi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \wedge \psi$ függvények mind állandóak ezen az intervallumon. Tehát a $(z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ véges felosztás a $\varphi{+}\psi,\ \varphi{\cdot}\psi,\ \varphi{\vee}\psi,\ \varphi{\wedge}\psi$ függvények mindegyikéhez tartozik, vagyis $\varphi{+}\psi,\ \varphi{\cdot}\psi,\ \varphi{\vee}\psi,\ \varphi{\wedge}\psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$.

b) Legyen $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$. Ha $c \in \mathbb{R}$, akkor világos, hogy minden φ-hez tartozó véges felosztás $c.\varphi$-hez is tartozik, így $c.\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$. Speciálisan: $-\varphi = (-1).\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ is teljesül. Továbbá, fennállnak a

$$\varphi^+ = \varphi \vee 0, \quad \varphi^- = (-\varphi) \vee 0, \quad |\varphi| = \varphi \vee (-\varphi)$$

egyenlőségek, ezért a) alapján $\varphi^+,\ \varphi^-,\ |\varphi| \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$. ■

1.2. Riemann-lépcsősfüggvények Riemann-integrálja

1.2.1. Lemma. *Legyen $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, és $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$ tetszőleges olyan φ-hez tartozó véges felosztása $\mathbb{R}$-nek, hogy $m > 0$, és legyen $(\zeta_j)_{j\in[\![0,m-1]\!]} \in \prod_{j=0}^{m-1}]x_j, x_{j+1}[$ tetszőleges. Ha $(z_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ olyan véges felosztása $\mathbb{R}$-nek, amely finomítása $(x_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$-nek, és $(\eta_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \in \prod_{k=0}^{n-1}]z_k, z_{k+1}[$ tetszőleges, akkor*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \varphi(\zeta_j)(x_{j+1} - x_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Bizonyítás. Jelölje $\sigma : [\![0,m]\!] \to [\![0,n]\!]$ azt a szigorúan monoton növő függvényt, amelyre minden $j \in [\![0,m]\!]$ esetén $x_j = z_{\sigma(j)}$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{0\le k<\sigma(0)} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) +$$
$$+ \sum_{k=\sigma(0)}^{\sigma(m)-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) + \sum_{\sigma(m)\le k\le n-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Ha $k < \sigma(0)$, akkor $k + 1 \le \sigma(0)$, így $z_{k+1} \le z_{\sigma(0)} = x_0$, tehát $\eta_k \in]z_k, z_{k+1}[\subseteq] \leftarrow, x_0[$, vagyis $\varphi(\eta_k) = 0$. Ha $\sigma(m) \le k \le n-1$, akkor $x_m = z_{\sigma(m)} \le z_k$, így $\eta_k \in]z_k, z_{k+1}[\subseteq]x_m, \to [$, vagyis $\varphi(\eta_k) = 0$. Ez azt jelenti, hogy teljesülnek a

$$\sum_{0\le k<\sigma(0)} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) = 0,$$
$$\sum_{\sigma(m)\le k\le n-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) = 0$$

egyenlőségek, azaz

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=\sigma(0)}^{\sigma(m)-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Ugyanakkor

$$\sum_{k=\sigma(0)}^{\sigma(m)-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{k=\sigma(j)}^{\sigma(j+1)-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) \right).$$

Legyen $0 \le j \le m-1$ rögzített természetes szám. Ha $\sigma(j) \le k \le \sigma(j+1) - 1$, akkor $x_j = z_{\sigma(j)} \le z_k < z_{k+1} \le z_{\sigma(j+1)} = x_{j+1}$, vagyis $\eta_k \in]z_k, z_{k+1}[\subseteq]x_j, x_{j+1}[$, és φ állandó az $]x_j, x_{j+1}[$ intervallumon, tehát $\varphi(\eta_k) = \varphi(\zeta_j)$. Ez azt jelenti, hogy ha $0 \le j \le m-1$, akkor

$$\sum_{k=\sigma(j)}^{\sigma(j+1)-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) = \varphi(\zeta_j) \sum_{k=\sigma(j)}^{\sigma(j+1)-1} (z_{k+1} - z_k) =$$
$$= \varphi(\zeta_j)(z_{\sigma(j+1)} - z_{\sigma(j)}) = \varphi(\zeta_j)(x_{j+1} - x_j).$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(\zeta_j)(x_{j+1} - x_j),$$

amit bizonyítani kellett. ■

1.2.2. Állítás. *Legyen* $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$. *Ha* $(x'_k)_{0\leq k\leq n'} \in \mathbb{R}^{n'+1}$ *és* $(x''_k)_{0\leq k\leq n''} \in \mathbb{R}^{n''+1}$ *olyan* φ*-hez tartozó véges felosztásai* $\mathbb{R}$*-nek, hogy* $n' > 0$ *és* $n'' > 0$ *teljesül, valamint* $(\zeta'_k)_{0\leq k<n'} \in \prod_{k=0}^{n'-1}]x'_k, x'_{k+1}[$ *és* $(\zeta''_k)_{0\leq k<n''} \in \prod_{k=0}^{n''-1}]x''_k, x''_{k+1}[$ *tetszőleges rendszerek, akkor*

$$\sum_{k=0}^{n'-1} \varphi(\zeta'_k)(x'_{k+1} - x'_k) = \sum_{k=0}^{n''-1} \varphi(\zeta''_k)(x''_{k+1} - x''_k).$$

Bizonyítás. A 1.1.3. állítás alapján vehetjük $\mathbb{R}$-nek olyan $(z_k)_{0\leq k\leq m} \in \mathbb{R}^{m+1}$ véges felosztását, amely az $(x'_k)_{0\leq k\leq n'} \in \mathbb{R}^{n'+1}$ és $(x''_k)_{0\leq k\leq n''} \in \mathbb{R}^{n''+1}$ felosztások mindegyikénél finomabb. A 1.1.5. állítás szerint ekkor $(z_k)_{0\leq k\leq m} \in \mathbb{R}^{m+1}$ szintén φ-hez tartozó véges felosztása $\mathbb{R}$-nek, így az előző lemmából következik, hogy bármely $(\eta_k)_{0\leq k<m} \in \prod_{k=0}^{m-1}]z_k, z_{k+1}[$ rendszerre fennállnak a

$$\sum_{k=0}^{n'-1} \varphi(\zeta'_k)(x'_{k+1} - x'_k) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(\eta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n''-1} \varphi(\zeta''_k)(x''_{k+1} - x''_k)$$

egyenlőségek. ■

1.2.3. Definíció. *Ha* $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, *akkor*

$$\int \varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\zeta_k) \cdot (x_{k+1} - x_k),$$

ahol $(x_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tetszőleges olyan* φ*-hez tartozó véges felosztása* $\mathbb{R}$*-nek, amelyre* $n > 0$, *és* $(\zeta_k)_{0\leq k<n} \in \prod_{k=0}^{n-1}]x_k, x_{k+1}[$. *Az* $\int \varphi$ *valós számot a* φ *Riemann-lépcsősfüggvény* **elemi Riemann–integráljának** *nevezzük.*

1.2.4. Állítás. (**Az elemi Riemann-integrál tulajdonságai.**) *Az*

$$\mathrm{E}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad \varphi \mapsto \int \varphi$$

leképezés **lineáris**, *tehát minden* $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ *és* $c \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\int (\varphi + \psi) = \int \varphi \; + \int \psi,$$

$$\int (c\varphi) = c \int \varphi,$$

valamint **monoton növő**, *tehát minden* $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ *esetén, ha* $\varphi \leq \psi$, *akkor*

$$\int \varphi \leq \int \psi.$$

Bizonyítás. Legyenek $\varphi,\ \psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, és rögzítsük $\mathbb{R}$-nek olyan $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ véges felosztását, amely mindkét lépcsősfüggvényhez tartozik és $n > 0$, valamint legyen $(\zeta_k)_{0\le k<n} \in \prod_{k=0}^{n-1}]x_k, x_{k+1}[$. A definíció szerint

$$\int \varphi + \int \psi = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\zeta_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\zeta_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi(\zeta_k)+\psi(\zeta_k))\cdot(x_{k+1}-x_k).$$

Ugyanakkor az $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ véges felosztás a $\varphi+\psi$ lépcsőfüggvényhez is tartozik, ezért a definíció szerint

$$\int(\varphi+\psi) = \sum_{k=0}^{n-1}(\varphi+\psi)(\zeta_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(\varphi(\zeta_k)+\psi(\zeta_k))\cdot(x_{k+1}-x_k),$$

amiből következik, hogy
$$\int(\varphi+\psi) = \int\varphi \ + \ \int\psi.$$

Legyen $c \in \mathbb{R}$ és $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$. Rögzítsük $\mathbb{R}$-nek olyan $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ véges felosztását, amely a φ lépcsősfüggvényhez tartozik, és $n > 0$, valamint legyen $(\zeta_k)_{0\le k<n} \in \prod_{k=0}^{n-1}]x_k, x_{k+1}[$. Nyilvánvaló, hogy az $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ véges felosztás a $c\varphi$ Riemann-lépcsősfüggvényhez is tartozik, így a definíció szerint

$$\int(c\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1}(c\varphi)(\zeta_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(c\cdot\varphi(\zeta_k))\cdot(x_{k+1}-x_k) =$$
$$= c\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(\zeta_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) = c\int\varphi.$$

Ha $\varphi \in \mathrm{E}_+(\mathbb{R})$, akkor $\int\varphi \ge 0$, mert ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ olyan véges felosztása $\mathbb{R}$-nek, amely a φ lépcsősfüggvényhez tartozik, akkor bármely $(\zeta_k)_{0\le k<n} \in \prod_{k=0}^{n-1}]x_k, x_{k+1}[$ rendszerre teljesül az, hogy minden $k < n$ természetes számra $\varphi(\zeta_k) \ge 0$, tehát $\varphi(\zeta_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) \ge 0$, következésképpen

$$\int\varphi = \sum_{k=0}^{n-1}\varphi(\zeta_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) \ge 0.$$

Ebből az elemi Riemann-integrál linearitásának alkalmazásával következik az elemi Riemann-integrál monotonitása, mert ha $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ és $\varphi \le \psi$, akkor $\psi - \varphi \ge 0$, így
$$\int\psi - \int\varphi = \int(\psi-\varphi) \ge 0. \ \blacksquare$$

1.2.5. Következmény. *Ha $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ és $(c_i)_{i\in I}$ olyan (ugyanolyan indexhalmazú) véges rendszerek $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $i \in I$ esetén $a_i < b_i$, akkor*

$$\int \left(\sum_{i\in I} c_i \chi_{|a_i,b_i|} \right) = \sum_{i\in I} c_i \cdot (b_i - a_i),$$

ahol minden $i \in I$ indexre $|a_i, b_i|$ jelöli az $]a_i, b_i[$, $[a_i, b_i[$, $]a_i, b_i]$ és $[a_i, b_i]$ intervallumok bármelyikét.

Bizonyítás. Az elemi Riemann-integrál linearitása miatt

$$\int \left(\sum_{i\in I} c_i \chi_{|a_i,b_i|} \right) = \sum_{i\in I} c_i \int \chi_{|a_i,b_i|},$$

ezért elég azt igazolni, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor $\displaystyle\int \chi_{|a,b|} = b - a$. Ez viszont nyilvánvaló, mert ha $(x_k)_{k\in[\![0,1]\!]}$ az a rendszer, amelyre $x_0 := a$ és $x_1 := b$, akkor $(x_k)_{k\in[\![0,1]\!]}$ olyan véges felosztása $\mathbb{R}$-nek, amely a $\chi_{|a,b|}$ függvényhez tartozik. ■

1.2.6. Állítás. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a \le b$, és $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ olyan, hogy $[\varphi \neq 0] := \{x \in \mathbb{R} | \varphi(x) \neq 0\} \subseteq [a, b]$, akkor*

$$\left| \int \varphi \right| \le \int |\varphi| \le |||\varphi\, ||| \cdot (b - a),$$

ahol $|||\varphi||| := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$.

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, és rögzítsük $\mathbb{R}$-nek olyan $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ véges felosztását, amely a φ lépcsősfüggvényhez tartozik, és $n > 0$, valamint legyen $(\zeta_k)_{0\le k<n} \in \prod\limits_{k=0}^{n-1}]x_k, x_{k+1}[$. Ekkor a definíció és a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\left| \int \varphi \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\zeta_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(\zeta_k)| \cdot |x_{k+1} - x_k| =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi|(\zeta_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = \int |\varphi|,$$

így minden $k < n$ természetes számra $|x_{k+1} - x_k| = x_{k+1} - x_k$, valamint felhasználtuk azt, hogy az $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ véges felosztás az $|\varphi|$ függvényhez is tartozik. Ezzel megmutattuk, hogy minden $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ esetén

$$\left| \int \varphi \right| \le \int |\varphi|.$$

Tegyük fel, hogy $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ és $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a \le b$, és $[\varphi \neq 0] \subseteq [a, b]$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $|\varphi| \le |||\varphi\, |||\, \chi_{[a,b]}$, ezért az elemi Riemann-integrál monoton növése és linearitása miatt

$$\int |\varphi| \le \int (|||\varphi\, |||\, \chi_{[a,b]}) = |||\varphi\, ||| \int \chi_{[a,b]}) = |||\varphi\, ||| \cdot (b) - a)). \ ■$$

2. fejezet

Riemann–integrál

2.1. A felső Riemann-integrál

2.1.1. Definíció. $\mathrm{F}(\mathbb{R})$ *jelöli azon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvények halmazát, amelyek korlátosak* (*tehát van olyan* $C \in \mathbb{R}_+$, *amelyre* $|f| \le C$), *és az* $[f \neq 0] := \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$ *halmaz is korlátos* $\mathbb{R}$*-ben* (*tehát van olyan* $a, b \in \mathbb{R}$, *hogy* $a \le b$ *és* $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$). *Továbbá:*

$$\mathrm{F}_+(\mathbb{R}) := \{\ f \in \mathrm{F}(\mathbb{R}) \mid f \ge 0\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{E}(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R})$ és $\mathrm{E}_+(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$. Továbbá, ha $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$, akkor van olyan $C \in \mathbb{R}_+$, amelyre $0 \le f \le C$, és léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$, hogy $a \le b$ és $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$; következésképpen $f \le C\chi_{[a,b]} \in \mathrm{E}_+(\mathbb{R})$. Tehát minden $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ esetén *létezik* olyan $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, hogy $f \le \varphi$. Ezért értelmes a következő definíció.

2.1.2. Definíció. *Minden* $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ *függvényre*

$$\int^* f := \inf \left\{ \int \varphi \;\middle|\; (\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})) \wedge (f \le \varphi) \right\},$$

és az

$$\mathrm{F}_+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \int^* f$$

leképezést **felső Riemann-integrálnak** *nevezzük.*

2.1.3. Állítás. *Minden* $f, g \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ *és* $c \in \mathbb{R}$ *esetén* $f + g \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ *és* $cf \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$. *Minden* $f, g \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ *és* $c \in \mathbb{R}_+$ *esetén* $f + g \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ *és* $cf \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$.

Bizonyítás. Legyenek $f, g \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$. Ekkor $[f + g \neq 0] \subseteq [f \neq 0] \cup [g \neq 0]$ miatt $[f + g \neq 0]$ korlátos halmaz $\mathbb{R}$-ben, mert két korlátos halmaz uniója korlátos, és korlátos halmaz minden részhalmaza korlátos. Ha $C_f, C_g \in \mathbb{R}_+$ olyan számok, hogy $|f| \le C_f$ és $|g| \le C_g$, akkor $C := C_f + C_g \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, amelyre $|f + g| \le |f| + |g| \le C$. Ez azt jelenti, hogy $f + g \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$.

Legyen $f \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor $[cf \neq 0] \subseteq [f \neq 0]$ miatt $[cf \neq 0]$ korlátos halmaz $\mathbb{R}$-ben, mert korlátos halmaz minden részhalmaza korlátos. Ha $K \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy $|f| \le K$, akkor a $C := |c|K \in \mathbb{R}_+$ számra $|cf| = |c||f| \le C$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $cf \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$. ■

2.1.4. Állítás. (A felső Riemann-integrál tulajdonságai)
a) *Ha* $\varphi \in \mathrm{E}_+(\mathbb{R})$*, akkor*

$$\int^* \varphi = \int \varphi.$$

b) *Ha* $f, g \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ *és* $f \leq g$*, akkor*

$$\int^* f \leq \int^* g$$

(*a felső Riemann-integrál* **monoton növő**).
c) *Ha* $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ *és* $c \in \mathbb{R}_+$*, akkor*

$$\int^* (cf) = c \int^* f$$

(*a felső Riemann-integrál* **pozitív homogén**).
d) *Ha* $f, g \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ *függvények, akkor*

$$\int^* (f+g) \leq \int^* f + \int^* g$$

(*a felső Riemann-integrál* **szubadditív**).
e) *Ha* $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ *és* $C \in \mathbb{R}_+$ *olyan szám, amelyre* $f \leq C$*, valamint* $a, b \in \mathbb{R}$ *olyanok, hogy* $a \leq b$ *és* $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$*, akkor*

$$\int^* f \leq C \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. a) A felső Riemann-integrál definíciója alapján

$$\int^* \varphi \leq \int \varphi$$

nyilvánvalóan teljesül. Ha $\psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ olyan, hogy $\varphi \leq \psi$, akkor a Riemann-lépcsősfüggvények elemi Riemann-integráljának monoton növése miatt

$$\int \varphi \leq \int \psi,$$

amiből következik, hogy

$$\int \varphi \leq \inf \left\{ \int \psi \;\middle|\; (\psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})) \wedge (\varphi \leq \psi) \right\} = \int^* \varphi$$

is teljesül.
b) Ha $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ olyan, hogy $g \leq \varphi$, akkor $f \leq g$ miatt $f \leq \varphi$ is teljesül, ezért a felső Riemann-integrál definíciója alapján

$$\int^* f \leq \int \varphi.$$

Ebből következik, hogy

$$\int^* f \leq \inf \left\{ \int \varphi \;\middle|\; (\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})) \wedge (g \leq \varphi) \right\} = \int^* g.$$

c) Az egyenlőség nyilvánvalóan igaz akkor, ha $c = 0$, ezért feltesszük, hogy $c > 0$.

Ha $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan Riemann-lépcsősfüggvény, hogy $f \leq \varphi$, akkor $c\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan Riemann-lépcsősfüggvény, hogy $cf \leq c\varphi$, így a felső Riemann-integrál definíciója és a Riemann-lépcsősfüggvények elemi Riemann-integráljának homogenitása folytán

$$\int^* (cf) \leq \int (c\varphi) = c \int \varphi,$$

tehát fennáll a

$$c^{-1} \int^* (\lambda f) \leq \int \varphi$$

egyenlőtlenség. Ismét a felső Riemann-integrál definíciója alapján ebből kapjuk, hogy

$$c^{-1} \int^* (\lambda f) \leq \inf \left\{ \int \varphi \;\middle|\; (\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})) \wedge (f \leq \varphi) \right\} = \int^* f,$$

tehát

$$\int^* (cf) \leq c \int^* f$$

teljesül. Ez *minden* $c \in \mathbb{R}_+^*$ számra és minden $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ függvényre igaz. Ha c és f ilyen objektumok, akkor c^{-1} és cf is ilyenek, ezért

$$\int^* f = \int^* (c^{-1}(cf)) \leq c^{-1} \int^* (cf),$$

vagyis a

$$c \int^* f \leq \int^* (cf)$$

fordított egyenlőtlenség is teljesül.

d) Legyenek $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan Riemann-lépcsősfüggvények, hogy $f \leq \varphi$ és $g \leq \psi$. Ekkor $\varphi + \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan Riemann-lépcsősfüggvény, hogy $f + g \leq \varphi + \psi$, így a felső Riemann-integrál értelmezése és a Riemann-lépcsősfüggvények elemi Riemann-integráljának additivitása alapján

$$\int^* (f + g) \leq \int (\varphi + \psi) = \int \varphi + \int \psi$$

teljesül. Ha tehát $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan Riemann-lépcsősfüggvény, hogy $f \leq \varphi$, akkor minden $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsőfüggvényre, $g \leq \psi$ esetén

$$\int^* (f + g) - \int \varphi \leq \int \psi$$

teljesül, tehát a felső Riemann-integrál definíciója szerint

$$\int^* (f + g) - \int \varphi \leq \inf \left\{ \int \psi \;\middle|\; (\psi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})) \wedge (g \leq \psi) \right\} = \int^* g.$$

Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy minden $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvényre, ha $f \leq \varphi$, akkor

$$\int^* (f + g) - \int^* g \leq \int \varphi$$

teljesül, így ismét a felső Riemann-integrál definícióját alkalmazva

$$\int^{*}(f+g)-\int^{*}g \leq \inf\left\{ \int \varphi \;\middle|\; (\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})) \wedge (f \leq \varphi) \right\} = \int^{*} f$$

adódik, amiből átrendezéssel kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

e) Nyilvánvaló, mert a hipotézis alapján $f \leq C\chi_{[a,b]} \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, így a felső Riemann-integrál definíciója szerint

$$\int^{*} f \leq \int \left(C\chi_{[a,b]}\right) = C\cdot(b-a)$$

teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy a felső Riemann-integrál csak szubadditív, de általában *nem additív*, vagyis léteznek olyan $f, g \in \mathrm{F}_{+}(\mathbb{R})$ függvények, hogy

$$\int^{*}(f+g) < \int^{*} f + \int^{*} g$$

teljesül. Ha például $f := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ és $g := \chi_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]}$, akkor $f+g = \chi_{[0,1]} \in E_{+}(\mathbb{R})$, és

$$\int^{*}(f+g) = \int (f+g) = 1,$$

ugyanakkor könnyen igazolható, hogy

$$\int^{*} f = 1 = \int^{*} g.$$

2.2. Riemann-integrálható függvények

2.2.1. Definíció. *Az $f \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ függvényt* **Riemann-integrálhatónak** *nevezzük, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ számhoz van olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvény, hogy*

$$\int^{*} |f-\varphi| < \varepsilon.$$

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvény Riemann-integrálható.

2.2.2. Állítás. *Ha $f \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az f függvény Riemann-integrálható.*

(ii) *Létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre*

$$\lim_{n\to\infty} \int^{*} |f-\varphi_n| = 0.$$

(iii) *Létezik Riemann-integrálható függvényeknek olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre*

$$\lim_{n\to\infty} \int^{*} |f-f_n| = 0.$$

(iv) *Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ számhoz van olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, hogy*

$$\int^{*} |f-g| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ha $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat, akkor az (i) alapján *kiválasztható* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int^* |f - \varphi_n| < \varepsilon_n$$

teljesül; ekkor nyilvánvalóan fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| = 0$$

egyenlőség.

(ii)⇒(iii) Nyilvánvaló, mert a Riemann-lépcsősfüggvények Riemann-integrálhatóak.

(iii)⇒(iv) Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek mindegyik tagja Riemann-integrálható függvény, és

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - f_n| = 0$$

teljesül, akkor $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\int^* |f - f_n| < \varepsilon.$$

(iv)⇒(i) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A (iv) alapján van olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, hogy

$$\int^* |f - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A Riemann-integrálhatóság definíciója szerint van olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, hogy

$$\int^* |g - \varphi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezért a felső Riemann-integrál monotonitását és szubadditivitását alkalmazva

$$\int^* |f - \varphi| = \int^* |(f - g) + (g - \varphi)| \le \int^* (|f - g| + |g - \varphi|) \le$$
$$\le \int^* |f - g| + \int^* |g - \varphi| < \varepsilon$$

adódik, tehát f Riemann-integrálható. ■

Ha $f \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathrm{F}(\mathbb{R})$-ben haladó függvényeknek sorozata és

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - f_n| = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat (*Riemann-*)*integrálisan közelíti* az f függvényt.

2.2.3. Állítás.

a) *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, hogy az $[f \neq 0]$ halmaz véges, akkor $f \in \mathrm{E}_+(\mathbb{R})$ és*

$$\int^* f = 0.$$

b) *Ha $f, g \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ olyan függvények, hogy az $[f \neq g]$ halmaz véges, akkor*

$$\int^* f = \int^* g.$$

c) *Ha $f, g \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ olyan függvények, hogy az $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ halmaz véges, akkor az f függvény Riemann-integrálhatósága ekvivalens a g függvény Riemann-integrálhatóságával.*

Bizonyítás. a) Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, hogy az $[f \neq 0]$ halmaz véges, akkor

$$f = \sum_{x \in [f \neq 0]} f(x) \chi_{\{x\}},$$

tehát f olyan Riemann-lépcsősfüggvény, hogy $f \geq 0$, ezért

$$\int^* f = \int f := \sum_{x \in [f \neq 0]} f(x) \cdot (x - x) = 0.$$

b) Legyenek $f, g \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ olyan függvények, hogy a $H := \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ halmaz véges. Ha $H = \emptyset$, akkor $f = g$, így az állítás triviálisan igaz, ezért feltesszük, hogy $H \neq \emptyset$. Világos, hogy a

$$\left(\max_{x \in H} f(x)\right) \chi_{_H} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \qquad \left(\max_{x \in H} g(x)\right) \chi_{_H} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

olyan függvények, amelyek a H halmazon kívül mindenütt 0 értéket vesznek fel, így az a) állítás alapján

$$\int^* \left(\left(\max_{x \in H} f(x)\right) \chi_{_H}\right) = 0 = \int^* \left(\left(\max_{x \in H} g(x)\right) \chi_{_H}\right).$$

Továbbá nyilvánvalóan fennálnak a következő függvény-egyenlőtlenségek:

$$f \leq g + \left(\max_{x \in H} f(x)\right) \chi_{_H}, \qquad g \leq f + \left(\max_{x \in H} g(x)\right) \chi_{_H}.$$

Ezeket alkalmazva, a Riemann-féle felső integrál monotonitása és szubadditivitása alapján

$$\int^* f \leq \int^* g + \int^* \left(\left(\max_{x \in H} f(x)\right) \chi_{_H}\right) = \int^* g,$$
$$\int^* g \leq \int^* f + \int^* \left(\left(\max_{x \in H} g(x)\right) \chi_{_H}\right) = \int^* f,$$

adódik, vagyis

$$\int^* f = \int^* g.$$

c) Ha $f, g \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ olyan függvények, hogy az $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ halmaz véges, akkor bármely $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre az $\{x \in \mathbb{R} || f(x) - \varphi(x)| \neq |g(x) - \varphi(x)|\}$ halmaz véges, így a b) állítás alapján minden $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ esetén

$$\int^* |f - \varphi| = \int^* |g - \varphi|,$$

ezért az f függvény Riemann-integrálhatósága nyilvánvalóan ekvivalens a g függvény Riemann-integrálhatóságával. ■

2.3. A Riemann-integrálható függvények tulajdonságai

2.3.1. Állítás. (**A Riemann-integrálható függvények tulajdonságai.**)

a) *Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, akkor $f + g$, fg, és $|f|$ szintén Riemann-integrálhatóak, és minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf is Riemann-integrálható.*

b) *Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, akkor $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+ és f^- is Riemann-integrálhatóak.*

Bizonyítás. (I) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, és vegyünk $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| = 0.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $||f| - |\varphi_n|| \leq |f - \varphi_n|$, és $c \in \mathbb{R}$ esetén $|cf - c\varphi_n| = |c||f - \varphi_n|$, ezért a Riemann-féle felső integrál monotonitása és pozitív homogenitása miatt

$$\lim_{n\to\infty} \int^* ||f| - |\varphi_n|| = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int^* |cf - c\varphi_n| = 0$$

teljesül, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|\varphi_n|$ és $c\varphi_n$ mind Riemann-lépcsősfüggvények, ezért $|f|$ és cf Riemann-integrálható függvények.

(II) Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ Riemann-integrálható függvények, és vegyünk $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatait, amelyekre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| = 0 = \lim_{n\to\infty} \int^* |g - \psi_n|.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|(f + g) - (\varphi_n + \psi_n)| \leq |f - \varphi_n| + |g - \psi_n|,$$

ezért a Riemann-féle felső integrál monotonitása és szubadditivitása miatt

$$\int^* |(f + g) - (\varphi_n + \psi_n)| \leq \int^* (|f - \varphi_n| + |g - \psi_n|) \leq$$
$$\leq \int^* |f - \varphi_n| + \int^* |g - \psi_n|$$

teljesül, tehát fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |(f + g) - (\varphi_n + \psi_n)| = 0$$

egyenlőség. Mivel pedig minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n + \psi_n$ Riemann-lépcsősfüggvény, így ebből következik, hogy $f + g$ Riemann-integrálható függvény.

(III) Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, akkor (I), (II) és

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|), \quad f^+ = f \vee 0, \quad f^+ = (-f) \vee 0$$

miatt az $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+ és f^- függvények szintén Riemann-integrálhatóak.

(IV) Végül, megmutatjuk, hogy ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, akkor fg is Riemann-integrálható.

Először tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Riemann-lépcsősfüggvény.* Vegyünk $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| = 0.$$

A g függvény korlátos, tehát van olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy $|g| \leq C$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|fg - \varphi_n g| = |f - \varphi_n||g| \leq C|f - \varphi_n|,$$

így a felső Riemann-integrál monotonitása és pozitív homogenitása miatt

$$\int^* |fg - \varphi_n g| \leq C \int^* |f - \varphi_n|,$$

tehát fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |fg - \varphi_n g| = 0$$

összefüggés. Mivel pedig minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n g$ Riemann-lépcsősfüggvény, ebből következik, hogy fg Riemann-integrálható.

Az általános esetben legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ Riemann-integrálható függvények. A g-hez vegyük $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |g - \psi_n| = 0.$$

Az f függvény Riemann-integrálható tehát korlátos, így van olyan olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy $|f| \leq C$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|fg - f\psi_n| = |f||g - \psi_n| \leq C|g - \psi_n|,$$

így a felső Riemann-integrál monotonitása és pozitív homogenitása miatt

$$\int^* |fg - f\psi_n| \leq C \int^* |g - \psi_n|,$$

tehát fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |fg - f\psi_n| = 0$$

összefüggés. Mivel pedig minden $\mathbb{N} \ni n$-re a bizonyítás első része szerint az $f\psi_n$ függvény Riemann-integrálható ebből következik, hogy az fg függvény Riemann-integrálható. ■

2.4. Riemann-integrálható függvények Riemann-integrálja

2.4.1. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény.*

a) *Ha $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvények olyan sorozata, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| = 0,$$

akkor az

$$\Big(\int \varphi_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat konvergens $\mathbb{R}$*-ben.*

b) *Ha* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *Riemann-lépcsősfüggvények olyan sorozata, hogy*

$$\lim_{n\to\infty}\int^* |f-\varphi_n| = 0 = \lim_{n\to\infty}\int^* |f-\psi_n|,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n = \lim_{n\to\infty}\int \psi_n.$$

Bizonyítás. a) Minden $m,n\in\mathbb{N}$ esetén a Riemann-lépcsősfüggvények elemi Riemann-integráljára vonatkozó összefüggések, valamint a Riemann-féle felső integrál monotonitása és szubadditivitása alapján

$$\begin{aligned}\Big|\int \varphi_m - \int \varphi_n\Big| &= \Big|\int(\varphi_m-\varphi_n)\Big| \le \int |\varphi_m-\varphi_n| = \int^* |\varphi_m-\varphi_n| =\\ &= \int^* |(\varphi_m-f)+(f-\varphi_n)| \le \int^*(|\varphi_m-f|+|f-\varphi_n|) \le\\ &\le \int^* |\varphi_m-f|\,\mathrm{d}\mu + \int^* |f-\varphi_n|,\end{aligned}$$

ezért a

$$\lim_{n\to\infty}\int^* |f-\varphi_n| = 0$$

feltétel alapján az

$$\Big(\int \varphi_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat *Cauchy-sorozat* $\mathbb{R}$-ben, tehát konvergens.

b) Értelmezzük azt a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, amelyre minden $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$g_{2k} := \varphi_k, \qquad g_{2k+1} := \psi_k.$$

Legyenek $\sigma_0,\sigma_1:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ azok az indexsorozatok, amelyekre minden $\mathbb{N}\ni k$-ra

$$\sigma_0(k) := 2k, \qquad \sigma_1(k) := 2k+1,$$

továbbá legyen minden $\mathbb{N}\ni n$-re

$$c_n := \int^* |f-g_n|.$$

Világos, hogy minden $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}c_{\sigma_0(k)} &:= \int^* |f-g_{2k}| = \int^* |f-\varphi_k|,\\ c_{\sigma_1(k)} &:= \int^* |f-g_{2k+1}| = \int^* |f-\psi_k|,\end{aligned}$$

tehát a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatnak $\left(c_{\sigma_0(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ és $\left(c_{\sigma_1(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan részsorozatai, amelyek 0-hoz konvergálnak. Ugyanakkor $\operatorname{Im}(\sigma_0)\cup\operatorname{Im}(\sigma_1)=\mathbb{N}$, ezért $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is zérussorozat, vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\int^{*}|f-g_n|=0$$

teljesül. Az a) állítás alapján ebből kapjuk, hogy az $\left(\int g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ban. Azonban minden $\mathbb{N}\ni k$-ra

$$\int g_{\sigma_0(k)}=\int\varphi_k,\qquad \int g_{\sigma_1(k)}=\int\psi_k,$$

vagyis a $\left(\int\varphi_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ és $\left(\int\psi_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ számsorozatok részsorozatai a konvergens $\left(\int g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozatnak. Ezért ezek a részsorozatok is konvergensek (ezt már a) alapján is tudjuk), és a határértékeik *egyenlők* (ez a lényeges), vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n=\lim_{n\to\infty}\int\psi_n$$

teljesül. ■

Az előző állítás alapján értelmes a következő definíció.

2.4.2. Definíció. *Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény. Ekkor*

$$\int f:=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n,$$

ahol $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvények tetszőleges olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty}\int^{*}|f-\varphi_n|=0.$$

Az $\int f$ valós számot az f függvény **Riemann-integráljának** *nevezzük.*

Azonnal megjegyezzük, hogy a Riemann-integrálra bevezetett jelölés semmiféle félreértést nem okoz, mert ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvény, akkor f Riemann-integrálható és az f értékű állandó sorozat Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan sorozata, amely Riemann-integrálisan approximálja az f függvényt, így az f most bevezetett Riemann-integrálja megegyezik az f függvény elemi Riemann-integráljával. Azt is mondhatjuk, hogy a Riemann-integrál a Riemann-lépcsősfüggvények terén bevezetett elemi Riemann-integrál *kiterjesztése* az Riemann-integrálható függvények terére.

2.5. A Riemann-integrál tulajdonságai

A következő állításokban megfogalmazzuk a Riemann-integrál néhány elemi tulajdonságát.

2.5.1. Állítás. *Ha $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények és az $[f\neq g]$ halmaz véges, akkor*

$$\int f=\int g.$$

Bizonyítás. Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan sorozata, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int^* |f-\varphi_n| = 0.$$

Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $[|f-\varphi_n| \neq |g-\varphi_n|] \subseteq [f\neq g]$, ezért 2.2.3. b) alapján

$$\int^* |f-\varphi_n| = \int^* |g-\varphi_n|.$$

Tehát az is teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int^* |g-\varphi_n| = 0,$$

így a Riemann-integrál definíciója szerint

$$\int f = \lim_{n\to\infty}\int \varphi_n = \int g. \blacksquare$$

2.5.2. Állítás. (A Riemann-integrál linearitása) *Ha $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények és $c\in\mathbb{R}$, akkor*

$$\int (f+g) = \int f + \int g,$$
$$\int (cf) = c\int f.$$

Bizonyítás. Vegyünk $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatait, amelyekre

$$\lim_{n\to\infty}\int^* |f-\varphi_n| = 0 = \lim_{n\to\infty}\int^* |g-\psi_n|.$$

A Riemann-integrál tulajdonságairól szóló 2.3.1. állítás bizonyításának (III) és (I) részében láttuk, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\int^* |(f+g)-(\varphi_n+\psi_n)| = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int^* |cf-c\varphi_n| = 0$$

teljesül, ezért a Riemann–Stieljes-integrál definíciója és a Riemann-lépcsősfüggvények elemi Riemann-integráljának linearitása folytán fennálnak az

$$\int (f+g) := \lim_{n\to\infty}\int(\varphi_n+\psi_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\int\varphi_n + \int\psi_n\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int\varphi_n + \lim_{n\to\infty}\int\psi_n = \int f + \int g,$$

valamint az

$$\int (cf) := \lim_{n\to\infty}\int (c\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} c\int\varphi_n = c\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n = c\int f$$

összefüggések. $\blacksquare$

2.5.3. Állítás. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan Riemann-integrálható függvény, hogy $f \geq 0$, akkor*

$$\int^* f = \int f.$$

Bizonyítás. Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| = 0$$

teljesül. Ekkor $f \geq 0$ miatt minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$|f - \varphi_n^+| = |f^+ - \varphi_n^+| \leq |f - \varphi_n|,$$

tehát a felső Riemann-integrál monotonitása miatt

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n^+| = 0$$

is teljesül, vagyis $(\varphi_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ *pozitív* lépcsősfüggvényeknek olyan sorozata, amely Riemann-integrálisan approximálja f-t. Ezért a Riemann-integrál definíciója alapján

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^+.$$

Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f \leq \varphi_n^+ + |f - \varphi_n^+|$, ezért a Riemann-féle felső integrál monotonitása és szubadditivitása alapján

$$\int^* f \leq \int^* \varphi_n^+ + \int^* |f - \varphi_n^+|.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor φ_n^+ pozitív Riemann-lépcsősfüggvény tehát

$$\int^* \varphi_n^+ = \int \varphi_n^+,$$

így az előző egyenlőtlenségből $n \to \infty$ esetén kapjuk, hogy

$$\int^* f \leq \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^+ = \int f.$$

Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n^+ \leq f + |\varphi_n^+ - f|$, ezért a Riemann-féle felső integrál monotonitása és szubadditivitása alapján

$$\int^* \varphi_n^+ \leq \int^* f + \int^* |\varphi_n^+ - f|.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor φ_n^+ pozitív Riemann-lépcsősfüggvény tehát

$$\int^* \varphi_n^+ = \int \varphi_n^+,$$

így az előző egyenlőtlenségből $n \to \infty$ esetén kapjuk, hogy az

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^+ \leq \int^* f$$

fordított egyenlőtlenség is teljesül. ■

2.5.4. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, és $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a \leq b$ és $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$, valamint $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy $|f| \leq C$, akkor*

$$\left|\int f\right| \leq \int |f| \leq C \cdot (b - a).$$

Bizonyítás. Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-lépcsősfüggvényeknek olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| = 0$$

teljesül. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $||f| - |\varphi_n|| \leq |f - \varphi_n|$, ezért a Riemann-féle felső integrál monotonitása miatt

$$\int^* ||f| - |\varphi_n|| \leq \int^* |f - \varphi_n|,$$

továbbá tudjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\varphi_n|$ Riemann-lépcsősfüggvény. Ezért a Riemann-integrál definíciója szerint

$$\int |f| = \lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n|.$$

Tekintettel arra, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re fennáll az

$$\left|\int \varphi_n\right| \leq \int |\varphi_n|$$

egyenlőtlenség, az

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$$

egyenlőség alapján ebből kapjuk, hogy

$$\left|\int f\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\int \varphi_n\right| \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n| = \int |f| = \int^* |f| \leq C \cdot (b - a),$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk a Riemann-féle felső integrál 2.1.4. állításban igazolt e) tulajdonságát (f helyett az $|f|$ függvényre alkalmazva). ■

2.5.5. Tétel. *Ha $f \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Riemann-integrálható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeknek olyan sorozata, amelyre*

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - f_n| = 0$$

teljesül, akkor f Riemann-integrálható és fennáll az

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

egyenlőség.

Bizonyítás. A 2.2.2. állításból következik, hogy f Riemann-integrálható A Riemann-integrál linearitását, valamint az előző állításban felírt egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\int f - \int f_n\right| = \left|\int (f - f_n)\right| \leq \int |f - f_n| = \int^* |f - f_n|,$$

ezért

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

teljesül. ■

2.5.6. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Riemann-integrálható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeknek olyan sorozata, amelyre*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0$$

teljesül (vagyis az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat f-hez egyenletesen konvergál $\mathbb{R}$-en), és létezik olyan $H \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[f_n \neq 0] \subseteq H$, akkor f Riemann-integrálható és fennáll az

$$\int f := \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyan számok, hogy $a \leq b$ és $[f \neq 0] \cup H \subseteq I$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$C_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|.$$

Ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|f - f_n| \leq C_n \chi_{[a,b]}$ és az egyenlőtlenség jobb oldalán lépcsősfüggvény áll, így a Riemann-féle felső integrál értelmezése szerint

$$\int^{*} |f - f_n| \leq C_n \cdot (b - a),$$

tehát a $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$ hipotézis alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int^{*} |f - f_n| = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az előző állítás feltételei teljesülnek f-re és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra. ■

Z Vigyázzunk arra, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Riemann-integrálható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeknek olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0$$

teljesül, de a *nem létezik* olyan $H \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[f_n \neq 0] \subseteq H$, akkor

– lehetséges, hogy f Riemann-integrálható, de az

$$\left(\int f_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

számsorozat nem konvergens, vagy konvergens, de a határértéke nem egyenlő az f Riemann-integráljával;

– lehetséges, hogy az $[f \neq 0]$ halmaz nem korlátos, így f nem lehet Riemann-integrálható.

2.5.7. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy $[f \neq 0]$ korlátos halmaz, akkor f Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Vegyünk olyan $a, b \in \mathbb{R}$ számokat, hogy $a < b$ és $[f \neq 0] \subseteq [a, b[$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített, és rögzítsünk olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ számot, amelyre $\varepsilon'(b-a) < \varepsilon$. A Heine-tétel alapján f egyenletesen folytonos az $[a, b]$ intervallumon, így ε'-höz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $x, x \in [a, b]$ pontra, ha $|x - x'| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x')| < \varepsilon'$. Legyen $N \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy $1/N < \delta$ és minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $k \leq n$ természetes számra legyen

$$x_{n,k} := a + \frac{k}{n}(b-a).$$

Minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $k < n$ természetes számra válasszunk ki egy $\zeta_{n,k} \in]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$ pontot (például teljesen konkrét választás volna $\zeta_{n,k}$-ra az $x_{n,k}$ és $x_{n,k+1}$ számok számtani közepe). Világos, hogy $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $[f \neq 0] \subseteq [a, b[$ miatt

$$f = \chi_{[a,b[} f = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{[x_{n,k}, x_{n,k+1}[} f,$$

ezért a

$$\varphi_n := \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_{n,k}) \chi_{[x_{n,k}, x_{n,k+1}[} \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$$

Riemann-lépcsősfüggvényre

$$f - \varphi_n = \sum_{k=0}^{n-1} (f - f(\zeta_{n,k})) \chi_{[x_{n,k}, x_{n,k+1}[}$$

teljesül. Ebből látható, hogy tetszőleges $n > N$ tetszőleges természetes számra:

– ha $x \in [a, b[$, akkor létezik egyetlen olyan $k < n$ természetes szám, hogy $x \in [x_{n,k}, x_{n,k+1}[$, így $|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(\zeta_{n,k})| < \varepsilon'$, hiszen $\zeta_{n,k} \in [x_{n,k}, x_{n,k+1}[$ is teljesül, ezért $|x - \zeta_{n,k}| < 1/n < 1/N < \delta$;

– ha $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b[$, akkor $f(x) = \varphi_n(x) = 0$, ezért $|f(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon'$.

Ez azt jelenti, hogy minden $n > N$ természetes számra $|f - \varphi_n| \leq \varepsilon'$, ugyanakkor $[|f - \varphi_n| \neq 0] \subseteq [a, b[$, így

$$\int^* |f - \varphi_n| \leq \varepsilon'(b-a) < \varepsilon.$$

Ezzel megmutattuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| = 0,$$

amiből nemcsak az látszik hogy f Riemann-integrálható hanem még az is, hogy

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_{n,k}) \left(\left(a + \frac{k+1}{n}(b-a) \right) - \left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right) \right) =$$

$$= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_{n,k})$$

teljesül. ■

2.5.8. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor az $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $[f \neq 0] \subseteq [a, b[$. Rögzítsünk egy $c \in \mathbb{R}_+^*$ számot, és értelmezzük a következő függvényt

$$\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x < a - c, \\ \dfrac{g(a)}{c}(x - (a - c)) & \text{, ha } x \in [a - c, a[, \\ g(x) & \text{, ha } x \in [a, b[, \\ -\dfrac{g(b)}{c}(x - (b + c)) & \text{, ha } x \in [b, b + c[, \\ 0 & \text{, ha } x \geq b + c. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre $[\widetilde{g} \neq 0] \subseteq [a-c, b+c[$, ezért 2.5.7. alapján $\widetilde{g}$ Riemann-integrálható Ebből következik, hogy $f\widetilde{g}$ Riemann-integrálható (2.3.1.). Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $fg = f\widetilde{g}$, hiszen $g = \widetilde{g}$ az $[a, b[$ intervallumon és $[f \neq 0] \subseteq [a, b[$. ■

2.5.9. Következmény. *Ha $f \in \mathrm{F}(\mathbb{R})$ olyan függvény, amely egy véges halmazon kívül mindenütt folytonos, akkor f Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Jelölje D az f szakadási pontjainak *véges* halmazát. Ha $D = \emptyset$, akkor f folytonos függvény és az $[f \neq 0]$ halmaz korlátos, így az állítás 2.5.7. nyilvánvaló következménye.

Tegyük fel, hogy $D \neq \emptyset$, és vegyünk olyan $(\varepsilon_a)_{a \in D}$ rendszert $\mathbb{R}_+^*$-ban, amelyre minden $a \in D$ esetén $([a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a] \setminus \{a\}) \cap D = \emptyset$. Legyen $\varepsilon_* := \min_{a \in D} \varepsilon_a$ és vegyünk egy $\varepsilon \in]0, \varepsilon_*]$ számot. Jelölje f_ε azt az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely az $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{a \in D} [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ halmazon egyenlő f-fel, és minden $a \in D$ és $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ esetén

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} -\left(\dfrac{2f(a - \varepsilon)}{\varepsilon}\right)(x - (a - \varepsilon/2)) & \text{, ha } x \in [a - \varepsilon, a - \varepsilon/2], \\ 0 & \text{, ha } x \in]a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2[, \\ \left(\dfrac{2f(a + \varepsilon)}{\varepsilon}\right)(x - (a + \varepsilon/2)) & \text{, ha } x \in [a + \varepsilon/2, a + \varepsilon]. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és az $[f_\varepsilon \neq 0]$ halmaz korlátos, ezért 2.5.7. alapján f_ε Riemann-integrálható. Továbbá, $a \in D$ és $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ esetén

– ha $x \in [a - \varepsilon, a - \varepsilon/2]$, akkor $|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq |||f||| + |f(a - \varepsilon)| \leq 2\,|||f|||$,
– ha $x \in]a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2[$, akkor $|f(x) - f_\varepsilon(x)| = |f(x)| \leq |||f|||$,
– ha $x \in [a + \varepsilon/2, a + \varepsilon]$, akkor $|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq |||f||| + |f(a + \varepsilon)| \leq 2\,|||f|||$.

Ebből látható, hogy

$$|f - f_\varepsilon| \leq 2\,|||f||| \sum_{a \in D} \chi_{[a-\varepsilon, a+\varepsilon]},$$

és itt az egyenlőtlenség jobb oldalán Riemann-lépcsősfüggvény áll. Ebből a Riemann-féle felső integrál definíciója alapján következik, hogy

$$\int^* |f - f_\varepsilon| \leq \int \left(2\,|||f||| \sum_{a \in D} \chi_{[a-\varepsilon, a+\varepsilon]}\right) = 2|||f||| \sum_{a \in D} ((a+\varepsilon) - (a-\varepsilon)) = 4\varepsilon |||f||| \mathrm{Card}(D).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int^{*}|f-f_{\varepsilon}|=0,$$

amiből 2.5.5. alapján következik, hogy f Riemann-integrálható ∎

3. fejezet

A határozott Riemann-integrál és alkalmazásai

3.1. A határozott Riemann-integrál értelmezése és elemi tulajdonságai

Jelölés. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, akkor f° jelöli azt az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f^\circ(x) := \begin{cases} f(x) & \text{, ha } x \in \mathrm{Dom}(f) \\ 0 & \text{, ha } x \notin \mathrm{Dom}(f). \end{cases}$$

Az f° függvényt az f függvény **0-val való kiterjesztésének** nevezzük $\mathrm{Dom}(f)$-ről $\mathbb{R}$-re.

3.1.1. Definíció. *Az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényt* **lokálisan Riemann-integrálhatónak** *nevezünk, ha $\mathrm{Dom}(f)$ intervallum $\mathbb{R}$-ben és minden $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ korlátos és zárt intervallumra az $(f|_K)^\circ$ függvény Riemann-integrálható.*

Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény lokálisan Riemann-integrálható, akkor az f minden $\mathrm{Dom}(f)$ által tartalmazott korlátos és zárt intervallumon korlátos. Ez a lokális Riemann-integrálhatóság *természetes szükséges feltétele.* Azonban hamarosan látni fogjuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ lokálisan Riemann-integrálható, akkor sem az $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$, sem az $[f \neq 0] \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem szükségképpen korlátos, ezért f nem feltétlenül Riemann-integrálható még akkor sem, ha $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

A következő definíció előtt megjegyezzük, hogy ha az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény lokálisan Riemann-integrálható és $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ olyanok, hogy $a \leq b$, akkor az $(f|_{[a,b[})^\circ$, az $(f|_{]a,b]})^\circ$ és az $(f|_{]a,b[})^\circ$ függvények mind Riemann-integrálhatóak, mert csak véges sok pontban különböznek az $(f|_{[a,b]})^\circ$ függvénytől, ami a lokális Riemann-integrálhatóság definíciója szerint Riemann-integrálható.

3.1.2. Definíció. *Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény lokálisan Riemann-integrálható, akkor minden $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén*

$$\int_a^b f := \begin{cases} \int (f|_{[a,b[})^\circ & \text{, ha } a \leq b \\ -\int (f|_{[b,a[})^\circ & \text{, ha } a > b, \end{cases}$$

és ezt a számot az f függvény a és b határok között vett **határozott Riemann-integráljának** *nevezzük.*

3.1.3. Állítás. (**A határozott Riemann-integrál tulajdonságai**)
a) *Ha $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ lokálisan Riemann-integrálható függvények és $c \in \mathbb{R}$, akkor $f+g$ és cf szintén lokálisan Riemann-integrálható függvények, és minden $a, b \in$ Dom$(f) \cap$ Dom(g) pontra*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f.$$

b) *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ lokálisan Riemann-integrálható függvény, akkor minden $a, b, c \in$ Dom(f) pontra*

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0, \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f, \qquad \int_a^a f = 0.$$

c) *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ lokálisan Riemann-integrálható függvény, valamint $a, b \in$ Dom(f), akkor fennáll az*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \Big(\sup_{x \in [\min(a,b), \max(a,b)[} |f(x)| \Big) \cdot (\max(a,b) - \min(a,b))$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. a) Legyen $a' := \min(a, b)$ és $b' := \max(a, b)$, valamint $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ az a szám, amelyre $\varepsilon := 1$, ha $a \leq b$, és $\varepsilon := -1$, ha $a > b$. Nyilvánvalóan teljesülnek az

$$\left((f+g)|_{[a',b'[}\right)^\circ = \left(f|_{[a',b'[}\right)^\circ + \left(g|_{[a',b'[}\right)^\circ;$$
$$\left((\lambda f)|_{[a',b'[}\right)^\circ = \lambda \left(f|_{[a',b'[}\right)^\circ$$

egyenlőségek, ezért a Riemann-integrál linearitása és a határozott Riemann-integrál definíciója alapján fennáll, hogy

$$\int_a^b (f+g) = \varepsilon \int ((f+g)|_{[a',b'[})^\circ =$$

$$= \varepsilon \int \left(f|_{[a',b'[}\right)^\circ + \varepsilon \int \left(g|_{[a',b'[}\right)^\circ = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

valamint

$$\int_a^b (cf) = \varepsilon \int \left((cf)|_{[a',b'[}\right)^\circ = c\varepsilon \int \left(f|_{[a',b'[}\right)^\circ = c\int_a^b f.$$

b) Az első egyenlőséget elegendő arra a speciális esetre igazolni, amikor $a \leq b \leq c$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy ekkor fennáll az

$$(f|_{[a,c[})^\circ = (f|_{[a,b[})^\circ + (f|_{[b,c[})^\circ$$

egyenlőség, amiből a Riemann-integrál additivitása és a határozott Riemann-integrál definíciója alapján következik, hogy

$$-\int\limits_c^a f := \int (f|_{[a,c[})^\circ = \int (f|_{[a,b[})^\circ + \int (f|_{[b,c[})^\circ = \int\limits_a^b f + \int\limits_b^c f.$$

Ezzel az első egyenlőséget igazoltuk. Ebből következik, hogy ha $a = b = c$, akkor

$$\int\limits_a^a f = 0,$$

tehát a harmadik egyenlőség is teljesül. Végül, a második egyenlőség az elsőből és a harmadikból nyilvánvalóan következik, ha $c = b$.

c) Legyen $a' := \min(a,b)$ és $b' := \max(a,b)$. Ekkor nyilvánvaló, hogy

$$\left|(f|_{[a',b'[})^\circ\right| \leq \Big(\sup_{x\in[a',b'[} |f(x)|\Big)\chi_{[a',b'[},$$

ezért a pozitív additív függvény szerinti Riemann-integrál elemi tulajdonságait alkalmazva:

$$\left|\int\limits_a^b f\right| := \left|\int (f|_{[a',b'[})^\circ\right| \leq \int \left|(f|_{[a',b'[})^\circ\right| \leq \Big(\sup_{x\in[a',b'[} |f(x)|\Big)\cdot(b'-a'),$$

amit bizonyítani kellett. ■

3.2. Newton–Leibniz-tétel

3.2.1. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ lokálisan Riemann-integrálható függvény. Legyen $c \in I$ tetszőleges pont, és értelmezzük az*

$$F : I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int\limits_c^x f$$

függvényt.

a) *Az F függvény rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $K \subseteq I$ korlátos és zárt intervallumhoz van olyan $C \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $x, x' \in K$ esetén*

$$|F(x') - F(x)| \leq C|x' - x|$$

teljesül. (*Tehát minden $K \subseteq I$ korlátos és zárt intervallumra, az $f|_K$ leszűkített függvény* **Lipschitz-függvény**, *így egyenletesen folytonos.*)

b) *Ha x olyan belső pontja I-nek, amelyben f folytonos, akkor F az x-ben differenciálható és $(\mathrm{D}F)(x) = f(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. a) Legyen $K \subseteq I$ nem üres korlátos és zárt intervallum. A hipotézis alapján f korlátos a K halmazon, ezért vehetünk olyan $C \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy minden $x \in K$

esetén $|f(x)| \leq C$. Legyenek $x, x' \in K$ tetszőlegesek. Ekkor a Riemann-féle határozott integrál tulajdonságai szerint

$$F(x') - F(x) := \int_c^{x'} f - \int_c^{x} f = \int_x^{x'} f,$$

ezért

$$|F(x') - F(x)| \leq \left| \int_x^{x'} f \right| \leq$$

$$\leq \Big(\sup_{z \in [\min(x,x'), \max(x,x')[} |f(z)| \Big) (\max(x, x') - \min(x, x')) \leq C|x' - x|$$

adódik, hiszen $[\min(x, x'), \max(x, x')[\subseteq K$, ezért

$$\sup_{z \in [\min(x,x'), \max(x,x')[} |f(z)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| \leq C.$$

b) Legyen x belső pontja I-nek. Ha $x' \in I$, $x' \neq x$ tetszőleges, akkor ismét az

$$\int_c^{x'} f - \int_c^{x} f = \int_x^{x'} f$$

egyenlőséget alkalmazva

$$\frac{F(x') - F(x)}{x' - x} = \frac{1}{x' - x} \int_x^{x'} f$$

adódik. Ugyanakkor, $\widehat{f(x)}$-szel jelölve az $f(x)$ értékű konstansfüggvényt (itt x rögzítve van!), nyilvánvaló, hogy

$$\frac{1}{x' - x} \int_x^{x'} \widehat{f(x)} = f(x).$$

Tehát azt kapjuk, hogy minden $x' \in I$, $x' \neq x$ esetén

$$\left| \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{x' - x} \int_x^{x'} f - \frac{1}{x' - x} \int_x^{x'} \widehat{f(x)} \right| =$$

$$= \frac{1}{|x' - x|} \left| \int_x^{x'} (f - \widehat{f(x)}) \right| \leq \sup_{y \in [\min(x,x'), \max(x,x')[} |f(y) - f(x)|.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az f függvény x pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $]x - \delta, x + \delta[\subseteq I$ és minden $y \in]x - \delta, x + \delta[$ esetén $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ha δ ilyen, akkor minden $x' \in]x - \delta, x + \delta[\setminus \{x\}$ pontra $[\min(x, x'), \max(x, x')[\subseteq]x - \delta, x + \delta[$ teljesül, tehát fennáll az

$$\left| \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} - f(x) \right| \leq \sup_{y \in [\min(x,x'), \max(x,x')[} |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenség, ami azt jelenti, hogy F az x-ben differenciálható és $(\mathrm{D}F)(x) = f(x)$ teljesül. ■

3.2.2. Definíció. *Egy* $F : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvényt* **abszolút folytonosnak** *nevezünk, ha* $\mathrm{Dom}(F)$ *intervallum és létezik olyan* $f : \mathrm{Dom}(F) \to \mathbb{R}$ *lokálisan Riemann-integrálható függvény és* $c \in \mathrm{Dom}(F)$*, hogy minden* $x \in \mathrm{Dom}(F)$ *esetén*

$$F(x) = \int\limits_c^x f$$

teljesül.

3.2.3. Tétel. *Ha* $I \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt intervallum és* $F : I \to \mathbb{R}$ *olyan differenciálható függvény, hogy* $\mathrm{D}F$ *folytonos függvény, akkor minden* $a, b \in I$ *esetén*

$$\int\limits_a^b (\mathrm{D}F) = F(b) - F(a)$$

teljesül (**Newton-Leibniz-formula.**)

Bizonyítás. Láttuk, hogy a

$$G : I \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto \int\limits_a^x (\mathrm{D}F)$$

függvény differenciálható, és $\mathrm{D}G = \mathrm{D}F$, ezért létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $G = F + c$. Világos, hogy $G(a) = 0$, ezért $c = -F(a)$. Ebből következik, hogy

$$\int\limits_a^b (\mathrm{D}F) = G(b) = F(b) - F(a)$$

teljesül. ■

3.3. n-ed rendű parciális integrálás

3.3.1. Állítás. *Legyen* $I \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt intervallum,* $n \in \mathbb{N}^*$ *és* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *olyan* n*-szer differenciálható függvények, hogy* $\mathrm{D}^n f$ *és* $\mathrm{D}^n g$ *folytonos függvények. Ekkor minden* $a, b \in I$ *esetén*

$$\int\limits_a^b (\mathrm{D}^n f) g = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left((\mathrm{D}^{n-k-1} f)(b)(\mathrm{D}^k g)(b) - (\mathrm{D}^{n-k-1} f)(a)(\mathrm{D}^k g)(a) \right) + (-1)^n \int\limits_a^b f(\mathrm{D}^n g)$$

teljesül. (**n-ed rendű parciális integrálás formulája)**

(*Megjegyezzük, hogy a feltételek szerint a* $(\mathrm{D}^n f)g$ *és* $f(\mathrm{D}^n g)$ *függvények folytonosak, tehát lokálisan Riemann-integrálhatóak, így a formula értelmes.*)

Bizonyítás. A hipotézis alapján az

$$F := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\mathrm{D}^{n-k-1} f)(\mathrm{D}^k g) : I \to \mathbb{R}$$

függvény differenciálható, és a függvények differenciálási szabályainak ismeretében nyilvánvaló, hogy:

$$\mathrm{D}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(\mathrm{D}^{n-k-1}f)(\mathrm{D}^k g)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(\mathrm{D}^{n-k}f)(\mathrm{D}^k g) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(\mathrm{D}^{n-k-1}f)(\mathrm{D}^{k+1}g) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(\mathrm{D}^{n-k}f)(\mathrm{D}^k g) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(\mathrm{D}^{n-j}f)(\mathrm{D}^j g) =$$

$$= (\mathrm{D}^n f)g - (-1)^n f(\mathrm{D}^n g)$$

teljesül. Ezért a Newton-Leibniz-formula alapján fennáll az

$$F(b) - F(a) = \int_a^b (\mathrm{D}F) = \int_a^b (\mathrm{D}^n f)g - (-1)^n \int_a^b f(\mathrm{D}^n g)$$

egyenlőség, amiből átrendezéssel, behelyettesítéssel és összevonással kapjuk a bizonyítandó összefüggést. ■

3.3.2. Következmény. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f, g : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, hogy $\mathrm{D}f$ és $\mathrm{D}g$ folytonos függvények. Ekkor minden $a, b \in I$ esetén*

$$\int_a^b (\mathrm{D}f)g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(\mathrm{D}g).$$

Bizonyítás. Triviálisan következik az előző állításból, ha abban $n := 1$. ■

3.4. Integrálmaradéktagos Taylor-formula

3.4.1. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}$ és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan $n+1$-szer differenciálható függvény, hogy $\mathrm{D}^{n+1}f$ folytonos függvény. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in I$ és $x \in I$ esetén*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k + \int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}^{n+1}f)(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

teljesül. (**Integrálmaradéktagos Taylor-formula**)

Bizonyítás. Ha $n = 0$, akkor azt kell igazolni, hogy

$$f(x) = f(\mathfrak{a}) + \int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}f)(t)dt,$$

ami a Newton-Leibniz-formula alapján nyilvánvaló. Ezért feltehető, hogy $n > 0$, így a $\mathrm{D}f$ függvény n-szer differenciálható. Ugyanakkor a

$$g : I \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{(x-t)^n}{n!}$$

függvény is n-szer differenciálható, és $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ esetén minden $I \ni t$-re

$$(\mathrm{D}^k g)(t) = (-1)^k \frac{(x-t)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Speciálisan, $\mathrm{D}^n g \equiv (-1)^n$ és minden $k > n$ természetes számra $(\mathrm{D}^k g)(x) = 0$. Ezért az n-ed rendű parciális integrálás formuláját alkalmazva a $\mathrm{D}f$ és g függvényekre kapjuk, hogy:

$$\int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}^{n+1} f)(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f))g =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left((\mathrm{D}^{n-k-1}(\mathrm{D}f))(x)(\mathrm{D}^k g)(x) - (\mathrm{D}^{n-k-1}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})(\mathrm{D}^k g)(\mathfrak{a}) \right) +$$

$$+(-1)^n \int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}f)(\mathrm{D}^n g) = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\mathrm{D}^{n-k} f)(\mathfrak{a}) (-1)^k \frac{(x-\mathfrak{a})^{n-k}}{(n-k)!} + \int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}f) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} (\mathrm{D}^j f)(\mathfrak{a}) \frac{(x-\mathfrak{a})^j}{j!} + f(x) - f(\mathfrak{a}) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!} (x-\mathfrak{a})^k$$

teljesül, amiből átrendezéssel kapjuk a bizonyítandó formulát. ■

3.5. Helyettesítéses integrálás

3.5.1. Állítás. *Legyen* $I \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt intervallum,* $f : I \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, valamint* $I' \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt intervallum és* $\sigma : I' \to I$ *olyan differenciálható függvény, hogy* $\mathrm{D}\sigma$ *folytonos. Ekkor minden* $a', b' \in I'$ *esetén*

$$\int_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} f = \int_{a'}^{b'} (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma)$$

teljesül. **(A helyettesítéses integrálás formulája)**

Bizonyítás. Legyenek $a', b' \in I'$ rögzítve, és értelmezzük az

$$F : I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int_{\sigma(a')}^{x} f$$

leképezést. Tudjuk, hogy F szigorú primitív függvénye f-nek, tehát az I-n differenciálható, valamint $\mathrm{D}F = f$ és $F(\sigma(a')) = 0$. A közvetett függvény differenciálási szabálya szerint $(f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma) = ((\mathrm{D}F) \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma) = \mathrm{D}(F \circ \sigma)$ teljesül I-n. Ezért $F \circ \sigma$ szigorú primitív függvénye az $(f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma) : I' \to \mathbb{R}$ függvénynek, így a Newton-Leibniz-formula szerint

$$\int_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} f = \int_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} (\mathrm{D}F) = F(\sigma(b')) - F(\sigma(a')) = \int_{a'}^{b'} (\mathrm{D}(F \circ \sigma)) = \int_{a'}^{b'} (f \circ \sigma)(\mathrm{D}\sigma)$$

teljesül. ■

3.6. A Riemann-integrál invariancia tulajdonságai

3.6.1. Definíció. *Ha $c \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\tau_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x - c,$$

és a τ_c függvényt c-vel vett **transzlációnak**, *vagy* **eltolásnak** *nevezzük.*

3.6.2. Lemma. *Ha $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\varphi \circ \tau_c \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ és*

$$\int (\varphi \circ \tau_c) = \int \varphi.$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ az $\mathbb{R}$-nek φ-hez tartozó véges felosztása, valamint legyen $(\zeta_k)_{0 \leq k < n}$ olyan rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $k < n$ természetes számra $x_k < \zeta_k < x_{k+1}$. Ekkor minden $k < n$ természetes számra a $\varphi \circ \tau_c$ függvény állandó a $]x_k + c, x_{k+1} + c[$ intervallumon, és $x < x_0 + c$ vagy $x > x_n + c$ esetén $(\varphi \circ \tau_c)(x) = \varphi(x - c) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\varphi \circ \tau_c \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, és $(x_k + c)_{0 \leq k \leq n}$ az $\mathbb{R}$-nek $\varphi \circ \tau_c$-hez tartozó véges felosztása. Ugyanakkor $(\zeta_k + c)_{0 \leq k < n}$ olyan rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $k < n$ természetes számra $x_k + c < \zeta_k < x_{k+1} + c$, ezért

$$\int \varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\zeta_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi \circ \tau_c)(\zeta_k + c)((x_{k+1} + c) - (x_k + c)) = \int (\varphi \circ \tau_c)$$

is teljesül. ■

3.6.3. Állítás. *Ha $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $f \circ \tau_c \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ és*

$$\int^* (f \circ \tau_c) = \int^* f.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy $|f| \leq C$, akkor $|f \circ \tau_c| \leq C$, továbbá, ha $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$, akkor $[f \circ \tau_c \neq 0] \subseteq [a + c, b + c]$. Ezért $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $f \circ \tau_c \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$.

Legyen $\varphi \in \mathrm{E}_+(\mathbb{R})$ olyan, hogy $f \leq \varphi$. Ekkor $f \circ \tau_c \leq \varphi \circ \tau_c$ és az előző állítás szerint $\varphi \circ \tau_c \in \mathrm{E}_+(\mathbb{R})$, ezért

$$\int^* (f \circ \tau_c) \leq \int (\varphi \circ \tau_c) = \int \varphi.$$

A Riemann-féle felső integrál definíciója alapján ebből következik, hogy

$$\int^* (f \circ \tau_c) \leq \int^* f.$$

Ez az egyenlőtlenség igaz minden $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén. Ha $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor felírva az előző egyenlőtlenséget f helyett az $f \circ \tau_c$ függvényre és c helyett a $-c$ számra kapjuk, hogy

$$\int^* f = \int^* ((f \circ \tau_c) \circ \tau_{-c}) \leq \int^* (f \circ \tau_c),$$

tehát $\int^* (f \circ \tau_c) = \int^* f$. ■

3.6.4. Tétel. (**A Riemann-integrál transzláció-invarianciája**) *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $f \circ \tau_c$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int (f \circ \tau_c) = \int f.$$

Bizonyítás. Az f függvényhez vegyünk olyan $\mathrm{E}(\mathbb{R})$-ben haladó $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| = 0.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az előző állítás alapján

$$\int^* |f \circ \tau_c - \varphi_n \circ \tau_c| = \int^* (|f - \varphi_n| \circ \tau_c) = \int^* |f - \varphi_n|,$$

következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f \circ \tau_c - \varphi_n \circ \tau_c| = 0.$$

Mivel minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n \circ \tau_c \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, így a Riemann-integrálhatóság definíciója szerint $f \circ \tau_c$ Riemann-integrálható függvény. Továbbá, a Riemann-integrál értelmezése alapján

$$\int (f \circ \tau_c) = \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n \circ \tau_c) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = \int f,$$

ahol felhasználtuk azt, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\displaystyle\int (\varphi_n \circ \tau_c) = \int \varphi_n$. ■

3.6.5. Következmény. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ lokálisan Riemann-integrálható függvény, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $f \circ \tau_c$ függvény is lokálisan Riemann-integrálható, és ha $a, b \in I$, akkor*

$$\int_{a+c}^{b+c} (f \circ \tau_c) = \int_a^b f.$$

Bizonyítás. Ha az állítás igaz minden $a \leq b$ számra, akkor $a > b$ esetén is igaz, mert ekkor felírva az egyenlőtlenséget az a és b számok felcserélésével kapjuk, hogy

$$\int_{a+c}^{b+c} (f \circ \tau_c) = -\int_{b+c}^{a+c} (f \circ \tau_c) = -\int_b^a f = \int_a^b f.$$

Ezért tegyük fel, hogy $a \leq b$. A határozott Riemann-integrál definíciója alapján

$$\int_{a+c}^{b+c} (f \circ \tau_c) = \int \left((f \circ \tau_c)|_{[a+c,b+c]}\right)^\circ.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\left((f \circ \tau_c)|_{[a+c,b+c]}\right)^\circ = \left(f|_{[a,b]}\right)^\circ \circ \tau_c$, amiből az előző tétel alapján következik, hogy

$$\int_{a+c}^{b+c} (f \circ \tau_c) = \int \left(\left(f|_{[a,b]}\right)^\circ \circ \tau_c\right) = \int \left(f|_{[a,b]}\right)^\circ = \int_a^b f$$

teljesül. ■

3.6.6. Következmény. (**Periodikus lokálisan integrálható függvény határozott integráljai**) *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokálisan Riemann-integrálható függvény és a $T \in \mathbb{R}_+^*$ szám f-nek periódusa (vagyis minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $f(t+T) = f(t)$), akkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\int_t^{t+T} f = \int_0^T f.$$

Bizonyítás. A határozott integrál tulajdonságait alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_t^{t+T} f = \int_t^0 f + \int_0^T f + \int_T^{t+T} f = \int_0^T f + \left(\int_T^{t+T} f - \int_0^t f \right),$$

tehát azt kell igazolni, hogy $\int_T^{t+T} f = \int_0^t f$. Ez viszont nyilvánvalóan igaz, mert az előző állítás szerint

$$\int_T^{t+T} (f \circ \tau_T) = \int_0^t f,$$

ugyanakkor $f \circ \tau_T = f$, hiszen T periódusa f-nek. ■

3.6.7. Definíció. *Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor*

$$h_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \lambda \cdot x,$$

és a h_λ függvényt λ-val vett **homotéciának**, *vagy* **nyújtásnak** *nevezzük.*

3.6.8. Lemma. *Ha $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ és $\lambda \in \mathbb{R}^*$, akkor $\varphi \circ h_\lambda \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ és*

$$\int (\varphi \circ h_\lambda) = |\lambda|^{-1} \int \varphi.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lambda > 0$. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_k)_{0 \le k \le n}$ az $\mathbb{R}$-nek φ-hez tartozó véges felosztása, valamint legyen $(\zeta_k)_{0 \le k < n}$ olyan rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $k < n$ természetes számra $x_k < \zeta_k < x_{k+1}$. Ekkor minden $k < n$ természetes számra a $\varphi \circ h_\lambda$ függvény állandó a $]\lambda^{-1}x_k, \lambda^{-1}x_{k+1}[$ intervallumon, és $x < \lambda^{-1}x_0$ vagy $x > \lambda^{-1}x_n$ esetén $(\varphi \circ h_\lambda)(x) = \varphi(\lambda \cdot x) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\varphi \circ h_\lambda \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, és $(\lambda^{-1}x_k)_{0 \le k \le n}$ az $\mathbb{R}$-nek $\varphi \circ h_\lambda$-hoz tartozó véges felosztása. Ugyanakkor $(\lambda^{-1}\zeta_k)_{0 \le k < n}$ olyan rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $k < n$ természetes számra $\lambda^{-1}x_k < \lambda^{-1}\zeta_k < \lambda^{-1}x_{k+1}$, ezért

$$\int \varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\zeta_k)(x_{k+1} - x_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi \circ h_\lambda)(\lambda^{-1}\zeta_k)(\lambda^{-1}x_{k+1} - \lambda^{-1}x_k) = \lambda \int (\varphi \circ h_\lambda)$$

is teljesül.

Tegyük fel, hogy $\lambda < 0$. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_k)_{0 \le k \le n}$ az $\mathbb{R}$-nek φ-hez tartozó véges felosztása, valamint legyen $(\zeta_k)_{0 \le k < n}$ olyan rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $k < n$ természetes számra $x_k < \zeta_k < x_{k+1}$. Ekkor minden $k < n$ természetes számra a $\varphi \circ h_\lambda$ függvény állandó a $]\lambda^{-1}x_{k+1}, \lambda^{-1}x_k[$ intervallumon, és $x < \lambda^{-1}x_n$ vagy $x > \lambda^{-1}x_0$ esetén $(\varphi \circ h_\lambda)(x) = \varphi(\lambda \cdot x) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\varphi \circ h_\lambda \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, és $(\lambda^{-1}x_{n-k})_{0 \le k \le n}$ az

$\mathbb{R}$-nek $\varphi \circ h_\lambda$-hoz tartozó véges felosztása. Ugyanakkor $(\lambda^{-1}\zeta_{n-k-1})_{0\leq k<n}$ olyan rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $k < n$ természetes számra $\lambda^{-1}x_{n-k} < \lambda^{-1}\zeta_{n-k-1} < \lambda^{-1}x_{n-k-1}$, ezért

$$\int \varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\zeta_k)(x_{k+1} - x_k) = -\lambda \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi \circ h_\lambda)(\lambda^{-1}\zeta_k)(\lambda^{-1}x_k - \lambda^{-1}x_{k+1}) =$$
$$= -\lambda \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi \circ h_\lambda)(\lambda^{-1}\zeta_{n-k-1})(\lambda^{-1}x_{n-k-1} - \lambda^{-1}x_{n-k}) = -\lambda \int (\varphi \circ h_\lambda)$$

is teljesül. ■

3.6.9. Állítás. *Ha $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ és $\lambda \in \mathbb{R}^*$, akkor $f \circ h_\lambda \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ és*

$$\int^* (f \circ h_\lambda) = |\lambda|^{-1} \int^* f.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy $|f| \leq C$, akkor $|f \circ h_\lambda| \leq C$, továbbá, ha $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$, akkor

– ha $\lambda > 0$, akkor $[f \circ h_\lambda \neq 0] \subseteq [\lambda a, \lambda b]$, és
– ha $\lambda < 0$, akkor $[f \circ h_\lambda \neq 0] \subseteq [\lambda b, \lambda a]$.

Ezért $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ és $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén $f \circ h_\lambda \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$.

Legyen $\varphi \in \mathrm{E}_+(\mathbb{R})$ olyan, hogy $f \leq \varphi$. Ekkor $f \circ h_\lambda \leq \varphi \circ h_\lambda$ és az előző állítás szerint $\varphi \circ h_\lambda \in \mathrm{E}_+(\mathbb{R})$, ezért

$$\int^* (f \circ h_\lambda) \leq \int (\varphi \circ h_\lambda) = |\lambda|^{-1} \int \varphi.$$

A Riemann-féle felső integrál definíciója alapján ebből következik, hogy

$$\int^* (f \circ h_\lambda) \leq |\lambda|^{-1} \int^* f.$$

Ez az egyenlőtlenség igaz minden $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ és $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén. Ha $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ és $\lambda \in \mathbb{R}^*$, akkor felírva az előző egyenlőtlenséget f helyett az $f \circ h_\lambda$ függvényre és λ helyett a λ^{-1} számra kapjuk, hogy

$$\int^* f = \int^* ((f \circ h_\lambda) \circ h_{\lambda^{-1}}) \leq |\lambda| \int^* (f \circ h_\lambda),$$

tehát $\displaystyle\int^* (f \circ h_\lambda) = |\lambda|^{-1} \int^* f$. ■

3.6.10. Tétel. (**A Riemann-integrál homotetikus kovarianciája**) *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor minden $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén az $f \circ h_\lambda$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int (f \circ h_\lambda) = |\lambda|^{-1} \int f.$$

Bizonyítás. Az f függvényhez vegyünk olyan $\mathrm{E}(\mathbb{R})$-ben haladó $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| = 0.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az előző állítás alapján

$$\int^* |f \circ h_\lambda - \varphi_n \circ h_\lambda| = \int^* (|f - \varphi_n| \circ h_\lambda) = |\lambda|^{-1} \int^* |f - \varphi_n|,$$

következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f \circ h_\lambda - \varphi_n \circ h_\lambda| = 0.$$

Mivel minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n \circ h_\lambda \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$, így a Riemann-integrálhatóság definíciója szerint $f \circ h_\lambda$ Riemann-integrálható függvény. Továbbá, a Riemann-integrál értelmezése alapján

$$\int (f \circ h_\lambda) = \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n \circ h_\lambda) = |\lambda|^{-1} \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = |\lambda|^{-1} \int f,$$

ahol felhasználtuk azt, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\displaystyle\int (\varphi_n \circ h_\lambda) = |\lambda|^{-1} \int \varphi_n$. ■

3.7. Alkalmazás: Wallis-formula és Striling-formulák

3.7.1. Lemma. *Minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m}(x)\ \mathrm{d}x = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1}(x)\ \mathrm{d}x = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

Bizonyítás. Legyen minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$a(m) := \int_0^{\pi/2} \sin^{2m}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Világos, hogy $a(0) = \pi/2$ és minden $k > 0$ természetes számra az $f := \dfrac{\sin^{2k-1}}{2k-1}$ és $g := \cos$ választással, parciális integrálással kapjuk, hogy

$$a(k) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{2(k-1)}(x)\sin^2(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= a(k-1) - \int_0^{\pi/2} \sin^{2(k-1)}(x)\cos^2(x)\ \mathrm{d}x = a(k-1) - \int_0^{\pi/2} \Big(\sin^{2(k-1)}(x)\cos(x)\Big)\cos(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= a(k-1) - \int_0^{\pi/2} (\mathrm{D}f)(x)g(x)\ \mathrm{d}x = a(k-1) - f(\pi/2)g(\pi/2) + f(0)g(0) + \int_0^{\pi/2} f(x)(\mathrm{D}g)(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= a(k-1) - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k-1}(x)}{2k-1}\sin(x)\ \mathrm{d}x = a(k-1) - \frac{1}{2k-1}a(k),$$

amiből következik, hogy

$$\frac{a(k)}{a(k-1)} = \frac{2k-1}{2k}.$$

Ebből kapjuk, hogy minden $m > 0$ természetes számra

$$a(m) = a(0)\prod_{k=1}^{m}\frac{a(k)}{a(k-1)} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{\prod_{k=1}^{m}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{m}(2k)} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}.$$

Legyen minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$b(m) := \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Világos, hogy

$$b(0) = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\ \mathrm{d}x = -(\cos(\pi/2) - \cos(0)) = 1$$

és minden $k > 0$ természetes számra az $f := \dfrac{\sin^{2k}}{2k}$ és $g := \cos$ választással, parciális integrálással kapjuk, hogy

$$b(k) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1}(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{2(k-1)+1}(x)\sin^2(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= b(k-1) - \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-1}(x)\cos^2(x)\ \mathrm{d}x = b(k-1) - \int_0^{\pi/2} \big(\sin^{2k-1}(x)\cos(x)\big)\cos(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= b(k-1) - \int_0^{\pi/2} (\mathrm{D}f)(x)g(x)\ \mathrm{d}x = b(k-1) - f(\pi/2)g(\pi/2) + f(0)g(0) + \int_0^{\pi/2} f(x)(\mathrm{D}g)(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= b(k-1) - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k}(x)}{2k}\sin(x)\ \mathrm{d}x = b(k-1) - \frac{1}{2k}b(k),$$

amiből következik, hogy

$$\frac{b(k)}{b(k-1)} = \frac{2k}{2k+1}.$$

Ebből kapjuk, hogy minden $m > 0$ természetes számra

$$b(m) = b(0)\prod_{k=1}^{m}\frac{b(k)}{b(k-1)} = \prod_{k=1}^{m}\frac{2k}{2k+1} = \frac{\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\prod_{k=1}^{m}(2k+1)} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!},$$

amit bizonyítani kellett. ■

3.7.2. Állítás.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} = \sqrt{\pi}$$

(**Wallis-formula**)

Bizonyítás. Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$s_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\, \mathrm{d}x.$$

A $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat *monoton fogyó*, és mindegyik tagja *nagyobb* 0-nál. Az előző lemma alapján minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén ismerjük az s_{2m} és s_{2m+1} számok értékét, tehát

$$s_{2m}s_{2m+1} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} = \frac{\pi/2}{2m+1}.$$

Ebből következik, hogy minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$s_{2m}^2 \geq s_{2m}s_{2m+1} = \frac{\pi/2}{2m+1} \geq s_{2m+2}^2,$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2m}}} \geq s_{2m}\sqrt{2m} \geq \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{2m}}}.$$

Tehát $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m}\sqrt{2m} = \sqrt{\pi/2}$, amiből következik a Wallis-formula. ■

3.7.3. Következmény.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{4^m}\binom{2m}{m}\sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

(**Reciprok Wallis-formula**)

Bizonyítás. Áttérve reciprok sorozatra, a Wallis-formulából következik, hogy

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Ha $m \in \mathbb{N}^*$ tetszőleges, akkor a definíció alapján világos, hogy

$$(2m)!! := \prod_{k=1}^{m}(2k) = \left(\prod_{k=1}^{m} 2\right)\left(\prod_{k=1}^{m} k\right) = 2^m m!,$$

vagyis $(2m)!! = 2^m m!$ (ami egyébként m-szerinti teljes indukcióval is könnyen igazolható). Ezért minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = \frac{(2m-1)!!(2m)!!}{(2m)!!(2m)!!} = \frac{(2m)!}{4^m(m!)^2} = \frac{1}{4^m}\binom{2m}{m},$$

amiből már következik a formula. ■

Stirling-formulának nevezünk minden olyan összefüggést, amely a faktoriálisok kiszámítására analitikus kifejezést ad. Ezek közül a legegyszerűbb a következő.

3.7.4. Tétel. (**"Nulladrendű" Stirling-formula**) *Létezik egyetlen olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ valós számsorozat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ és minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén*

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n (c_n)^n.$$

Bizonyítás. A $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat egyértelműsége nyilvánvaló, hiszen a megkövetelt egyenlőségből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $c_n = e\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. Ez azt jelenti, hogy az állítás ekvivalens azzal, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

(*I. bizonyítás.*) Azt tudjuk, hogy fennáll a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

egyenlőség, amiből **NUM** 3.14.3. alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{1/n} = e.$$

Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)^k}{\prod\limits_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod\limits_{j=2}^{n+1}j^{j-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod\limits_{j=2}^{n+1}\frac{j^j}{j}}{\prod\limits_{k=1}^{n}k^k} =$$

$$= \left(\frac{\prod\limits_{j=2}^{n+1}j^j}{\prod\limits_{j=2}^{n+1}j}\right)\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}k^k} = \left(\frac{(n+1)^{n+1}\prod\limits_{j=2}^{n}j^j}{(n+1)!}\right)\frac{1}{\prod\limits_{k=2}^{n}k^k} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n!},$$

tehát

$$\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{1/n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{1/n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e,$$

amiből áttérve a reciprok-sorozatra kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$.

(*II. bizonyítás.*) Értelmezzük az

$$\mathbf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*; \quad n \mapsto \frac{n!}{n^n}$$

sorozatot. Nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\frac{\mathbf{s}(n+1)}{\mathbf{s}(n)} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

ezért $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{s}(n+1)}{\mathbf{s}(n)} = \frac{1}{e}$. Ebből **NUM** 4.4.1. alapján kapjuk, hogy létezik a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathbf{s}(n)}$ határérték, és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathbf{s}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{s}(n+1)}{\mathbf{s}(n)} = \frac{1}{e}$. Mivel nyilvánvalóan minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\sqrt[n]{\mathbf{s}(n)} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, így $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$. ■

3.7.5. Lemma. *Minden $x \in [0, 1[$ valós számra*

$$\left| \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right| \leq \frac{x^4}{4}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az $f := \log \circ (1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ függvényt, amely a $]-1, \to[$ nyílt intervallumon értelmezett, és végtelenszer differenciálható, mert két ilyen tulajdonságú függvény konpozíciója. A függvénykompozíció differenciálásának szabálya és $\mathrm{D}(\log) = 1/\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$ alapján kapjuk, hogy minden $x > -1$ valós számra

$$(\mathrm{D}f)(x) = \frac{1}{1+x}, \quad (\mathrm{D}^2 f)(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},$$
$$(\mathrm{D}^3 f)(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad (\mathrm{D}^4 f)(x) = -\frac{6}{(1+x)^4},$$

ezért

$$(\mathrm{D}f)(0) = 1, \quad (\mathrm{D}^2 f)(0) = -1, \quad (\mathrm{D}^3 f)(0) = 2$$

is teljesül. Az f függvény a $]-1, 1[$ nyílt intervallum minden pontjában négyszer differenciálható, ezért a Lagrange-maradéktagos Taylor-formula szerint minden $x \in]-1, 1[$ esetén van olyan $\theta \in [0, 1]$ valós szám, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(\mathrm{D}^k f)(0)}{k!} x^k + \frac{(\mathrm{D}^4 f)(\theta x)}{4!} x^4 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^4,$$

következésképpen

$$\left| \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right| \leq \frac{1}{4} \left| \frac{x}{1+\theta x} \right|^4.$$

Ha $x \in [0, 1[$, akkor bármely $\theta \in [0, 1]$ esetén $|1 + \theta x| = 1 + \theta x \geq 1$, ezért

$$\left| \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right| \leq \frac{x^4}{4}. \quad ■$$

3.7.6. Állítás.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

(**Stirling-formula**)

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen

$$\delta_n := \log\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}\right),$$

tehát a log függvényre vonatkozó függvényegyenlőség alapján

$$\delta_n = \sum_{j=1}^{n} \log(j) - \frac{1}{2}\log(n) - n(\log(n) - 1).$$

Ha $k \in \mathbb{N}^*$, akkor egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\delta_{k+1} - \delta_k = \log(k+1) - \frac{1}{2}\log(k+1) - (k+1)(\log(k+1) - 1) + \frac{1}{2}\log(k) + k(\log(k) - 1) =$$

$$= 1 - \left(k + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

következésképpen $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$ esetén

$$\delta_n = \delta_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(\delta_{k+1} - \delta_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Megmutatjuk, hogy a $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat *konvergens* $\mathbb{R}$-ben. Ennek bizonyításához legyen minden $\mathbb{N}^* \ni k$-ra

$$r_k := \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3}.$$

Az előző lemma alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \geq 2$, akkor $k^4|r_k| \leq 1/4$, vagyis a $(k^4 r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ valós sorozat *korlátos*. Ugyanakkor $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$ esetén

$$\delta_n = n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + r_k\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k + \frac{1}{2}\right) r_k,$$

amiből látszik, hogy a $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, mivel a $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k^2}$ és $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k^3}$ hiperharmonikus sorok konvergensek és a $(k^4 r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sorozat korlátossága miatt a $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(k + \frac{1}{2}\right) r_k$ sor abszolút konvergens. Legyen $\delta := \lim_{n\to\infty} \delta_n$. Ennek a számnak az értéke könnyen meghatározható a Wallis-formula alkalmazásával. Ugyanis minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re

$$e^{\delta_n} = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n},$$

ezért

$$\frac{e^{\delta_{2n}}}{e^{2\delta_n}} = \frac{\left(\dfrac{(2n)!}{\sqrt{2n}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}}\right)}{\left(\dfrac{(n!)^2}{n\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}}\right)} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

amiből a reciprok Wallis-formula alapján kapjuk, hogy

$$\frac{1}{e^\delta} = \frac{e^\delta}{e^{2\delta}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\delta_{2n}}}{e^{2\delta_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

vagyis $e^\delta = \sqrt{2\pi}$. Ebből már következik a Stirling-formula, mert

$$\sqrt{2\pi} = e^\delta = \lim_{n\to\infty} e^{\delta_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n},$$

tehát itt elegendő $\sqrt{2\pi}$-vel osztani. ■

A Stirling-formulát felírhatjuk úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n \geq 2$, akkor

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \sum_{k=n}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)r_k\right),$$

ahol $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ az a valós számsorozat, amelyre $k \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$r_k := \log\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3}$$

(és tudjuk, hogy a $(k^4 r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sorozat *korlátos*).

3.7.7. Lemma. *Minden $n > 1$ természetes számra:*

$$0 \leq n^2\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{n}{n-1} \leq 2.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy minden $k > 1$ természetes számra

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

ezért $m, n \in \mathbb{N}$ és $1 < n \leq m$ esetén

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} = \sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) < \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m},$$

és mindhárom oldalból kivonva az $1/n$ számot és n^2-tel szorozva kapjuk, hogy

$$-\frac{n^2}{m+1} < n^2\left(\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}\right) < \frac{n}{n-1} - \frac{n^2}{m}.$$

Rögzített $n > 1$ természetes számra ebben a két egyenlőtlenségben végrehajtva az $m \to \infty$ határátmenetet kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenségeket. ■

3.8. Improprius Riemann-integrál

Legyenek $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ lokálisan Riemann-integrálható függvény, és $c \in I$. Ha $a \in I$ olyan pont, hogy $a < c$, akkor

$$\int_a^c f = \lim_{x \to a+0} \int_x^c f,$$

mert az

$$I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int_x^c f$$

függvény folytonos az a pontban, és ennek a függvénynek létezik jobboldali határértéke a-ban. Hasonlóan, ha $b \in I$ olyan pont, hogy $c < b$, akkor

$$\int_c^b f = \lim_{x \to b-0} \int_c^x f,$$

mert az

$$I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int_c^x f$$

függvény folytonos a b pontban, és ennek a függvénynek létezik baloldali határértéke b-ben. Ha azonban $a := \inf(I)$ és $b := \sup(I)$ $\overline{\mathbb{R}}$-ban (tehát $a = -\infty$ vagy $b = +\infty$ is lehetséges), akkor az $\int_a^c f$ és $\int_c^b f$ határozott integrálok nem értelmezettek, hiszen $a \notin I$ és $b \notin I$, ugyanakkor lehetséges az, hogy a $\lim_{x \to a+0} \int_x^c f$ vagy $\lim_{x \to b-0} \int_c^x f$ határértékek léteznek. Ez az észrevétel az alapja a következő definíciónak.

3.8.1. Definíció. *Legyenek $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ olyan pontok, hogy $a < b$, és legyen $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ lokálisan Riemann-integrálható függvény. Ha $c \in]a, b[$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* **impropriusan Riemann-integrálható** *az a és c (illetve c és b) határok között, ha létezik a $\lim_{x \to a+0} \int_x^c f$ (illetve $\lim_{x \to b-0} \int_c^x f$) határérték. Ha $c \in]a, b[$ és f impropriusan Riemann-integrálható az a és c (illetve c és b) határok között, akkor*

$$\int_{a+0}^c f := \lim_{x \to a+0} \int_x^c f \quad \left(\text{illetve} \int_c^{b-0} f := \lim_{x \to b-0} \int_c^x f \right),$$

és ezt a számot az f függvény a és c (illetve c és b) határok közötti **improprius Riemann-integráljának** *nevezzük.*

3.8.2. Állítás. *Legyenek $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ olyan pontok, hogy $a < b$, és legyen $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ olyan lokálisan Riemann-integrálható függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f(x) \geq 0$. Ha*

$c \in]a,b[$, *akkor az* f *függvény pontosan akkor pontosan akkor impropriusan Riemann-integrálható az* a *és* c (*illetve* c *és* b) *határok között, ha* $\sup_{x\in]a,c]} \int_x^c f < +\infty$ (*illetve* $\sup_{x\in[c,b[} \int_c^x f < +\infty$), *és ha* $\sup_{x\in]a,c]} \int_x^c f < +\infty$ (*illetve* $\sup_{x\in[c,b[} \int_c^x f < +\infty$), *akkor*

$$\int_{a+0}^{c} f = \sup_{x\in]a,c]} \int_x^c f, \quad \left(\textit{illetve } \int_c^{b-0} f = \sup_{x\in[c,b[} \int_c^x f \right).$$

Bizonyítás. A feltétel alapján az

$$]a,b[\to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int_x^c f$$

függvény monoton fogyó és az

$$]a,b[\to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int_c^x f$$

függvény monoton növő, ezért az állítás következik a monoton függvények egyoldali határértékének tételéből (**ANA** 1.7.3.). ■

3.8.3. Definíció. *Az* $I \subseteq \mathbb{R}$ *intervallumot* **nemelfajultnak** *nevezzük, ha* I *legalább két elemű halmaz (tehát léteznek olyan* $a \in I$ *és* $b \in I$*, hogy* $a \neq b$*).*

Minden nem üres nyílt intervallum $\mathbb{R}$-ben nemelfajult. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nemelfajult intervallum, akkor I nem üres, és I szuprémuma (illetve infimuma) $\overline{\mathbb{R}}$-ben *torlódási pontja* I-nek $\overline{\mathbb{R}}$-ban.

3.8.4. Állítás. *Legyen* $I \subseteq \mathbb{R}$ *nemelfajult intervallum és* $f : I \to \mathbb{R}$ *lokálisan Riemann-integrálható függvény. Ha* $a, b \in I$ *és* $a < b$*, akkor*

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a+0} \int_x^b f = \lim_{x\to b-0} \int_a^x f.$$

Bizonyítás. ■

3.8.5. Definíció. *Legyen* $I \subseteq \mathbb{R}$ *nemelfajult intervallum és* $a := \inf(I)$*, illetve* $b := \sup(I)$ $\overline{\mathbb{R}}$*-ben. Legyen* $f : I \to \mathbb{R}$ *lokálisan integrálható függvény és* $c \in I$*. Azt mondjuk, hogy az* f *függvény* **impropriusan Riemann-integrálható** *az* a *és* c (*illetve* c *és* b) *határok között, ha létezik a* $\lim_{x\to a+0} \int_x^c f$ (*illetve* $\lim_{x\to b-0} \int_c^x f$) *határérték. Ha létezik* f*-nek improprius Riemann-integrálja az* a *és* c (*illetve* c *és* b) *határok között, akkor*

$$\int_{a+0}^{c} f := \lim_{x\to a+0} \int_x^c f \quad \left(\textit{illetve } \int_c^{b-0} f := \lim_{x\to b-0} \int_c^x f \right),$$

és ezt a számot az f *függvény* a *és* c (*illetve* c *és* b) *határok közötti* **improprius Riemann-integráljának** *nevezzük.*

3.8.6. Állítás.

Bizonyítás. ■

3.8.7. Definíció. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nemelfajult intervallum és $a := \inf(I)$, illetve $b := \sup(I)$ $\overline{\mathbb{R}}$-ben. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvény és $c \in I$. Azt mondjuk, hogy f* **impropriusan abszolút Riemann-integrálható** *az a és c (illetve c és b) határok között, ha az $|f|$ függvény impropriusan Riemann-integrálható az a és c (illetve c és b) határok között.*

3.8.8. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nemelfajult intervallum és $a := \inf(I)$, illetve $b := \sup(I)$ $\overline{\mathbb{R}}$-ben. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvény és $c \in I$. Ha f impropriusan abszolút Riemann-integrálható az a és c (illetve c és b) határok között, akkor f impropriusan Riemann-integrálható az a és c (illetve c és b) határok között.*

Bizonyítás. ■

3.9. Valós függvény grafikonjának euklidészi ívhossza

3.9.1. Definíció. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\Pi_n[a, b]$ jelöli azon $(x_k)_{0 \le k \le n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ renszereket, amelyek szigorúan monoton növők és $x_0 = a$, $x_n = b$ teljesül. Az $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \Pi_n(a, b)$ halmaz elemeit az $[a, b]$ intervallum* **felosztásainak** *nevezzük.*

3.9.2. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Ekkor a*

$$\sup \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} \;\middle|\; (n \in \mathbb{N}^*) \wedge ((x_k)_{0 \le k \le n} \in \Pi_n[a, b]) \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

elemet az f függvény grafikonja $[a, b]$ intervallum feletti **euklidészi ívhosszának** *nevezzük, és a $\Gamma_{[a,b]}(f)$ szimbólummal jelöljük.*

3.9.3. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Ekkor*

$$\sqrt{(b - a)^2 + (f(b) - f(a))^2} \le \Gamma_{[a,b]}(f),$$

és ha $\Gamma_{[a,b]}(f) < +\infty$, akkor minden $x \in [a, b]$ esetén $\Gamma_{[a,x]}(f) < +\infty$, és az

$$[a, b] \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \Gamma_{[a,x]}(f)$$

leképezés szigorúan monoton növő.

Bizonyítás. ■

3.9.4. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Ha f monoton az $[a, b]$ intervallumon, akkor*

$$\Gamma_{[a,b]}(f) \le (b - a) + |f(b) - f(a)|.$$

Bizonyítás. ■

3.9.5. Következmény. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Ha f monoton az $[a, b]$ intervallumon, akkor $\Gamma_{[a,b]}(f) < +\infty$ és az*

$$[a, b] \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \Gamma_{[a,x]}(f)$$

leképezés minden olyan pontban folytonos, ahol f folytonos.

Bizonyítás. ■

3.9.6. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Ha f differenciálható az $[a, b]$ intervallum minden pontjában és a Df deriváltfüggvény folytonos az $[a, b]$ intervallum minden pontjában, akkor*

$$\Gamma_{[a,b]}(f) = \int_a^b \sqrt{1 + ((\mathrm{D}f)(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. ■

4. fejezet

A Riemann-integrálhatóság kritériumai

4.1. Szabályos függvények

4.1.1. Definíció. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény* **szabályos**, *ha minden $J \subseteq I$ korlátos és zárt intervallumhoz és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan $h \in \mathrm{E}(\mathbb{R})$ lépcsősfüggvény, hogy minden $x \in J$ esetén $|f(x) - h(x)| \leq \varepsilon$.*

Nyilvánvaló, hogy ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor szabályos, ha minden $J \subseteq I$ korlátos és zárt intervallumhoz létezik olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathrm{E}(\mathbb{R})$-ban, amely egyenletesen konvergál J-n az f-hez.

4.1.2. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum.*

a) *Minden $I \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény szabályos.*

b) *Minden $I \to \mathbb{R}$ szabályos függvény minden I által tartalmazott korlátos és zárt intervallumon korlátos.*

c) *Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ szabályos függvények, akkor $f + g$ és fg is szabályos függvények és minden $\mathbb{R} \ni \lambda$-ra λf is szabályos függvény.*

Bizonyítás. ■

4.1.3. Tétel. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nemelfajult intervallum, akkor az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor szabályos, ha f-nek az I minden belső pontjában létezik jobboldali és baloldali határértéke, továbbá, ha a az I legkisebb eleme, akkor f-nek létezik a-ban jobboldali határértéke, és ha b az I legnagyobb eleme, akkor f-nek létezik b-ben baloldali határértéke.*

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ szabályos függvény.

(II) Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az állításban megfogalmazott feltételek. ■

4.1.4. Következmény. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, akkor az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor szabályos, ha reguláris.*

Bizonyítás. A definíciók, és az előző tétel alapján nyilvánvaló. ■

4.1.5. Következmény. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, valamint minden $I \to \mathbb{R}$ monoton függvény szabályos.*

Bizonyítás. ■

4.2. Szabályos függvények Riemann-integrálhatósága

A következő tétel megmutatja a függvények szabályosságának jelentőségét a lokális Riemann-integrálhatóság szempontjából.

4.2.1. Tétel. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{R}$ szabályos függvény lokálisan Riemann-integrálható minden $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint.*

Bizonyítás. Legyen $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ szabályos függvény. Vegyünk egy $K \subseteq I$ korlátos és zárt intervallumot, valamint tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számot.

A szabályos függvények jellemzési tétele alapján, az $\dfrac{\varepsilon}{|K|+1}$ számhoz létezik olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, hogy minden $x \in K$ esetén

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(K)+1}.$$

Nyilvánvaló, hogy fennáll az

$$|(f|_K)^\circ - \chi_{_K}\varphi| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(K)+1}\chi_{_K}$$

függvény-egyenlőtlenség, amiből azonnal következik, hogy

$$\int^* |(f|_K)^\circ - \chi_{_K}\varphi| \ \mathrm{d}\mu \leq \int^* \left(\frac{\varepsilon}{\mu(K)+1}\chi_{_K}\right) \ \mathrm{d}\mu =$$
$$= \int \left(\frac{\varepsilon}{\mu(K)+1}\chi_{_K}\right) \ \mathrm{d}\mu = \frac{\varepsilon}{\mu(K)+1}\mu(K) < \varepsilon.$$

De $\chi_{_K}\varphi$ is lépcsősfüggvény, ami azt jelenti, hogy $(f|_K)^\circ$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény, tehát f μ-szerint lokálisan Riemann-integrálható. ■

4.2.2. Következmény. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{R}$ folytonos, és minden $I \to \mathbb{R}$ monoton függvény lokálisan Riemann-integrálható minden $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint.*

Bizonyítás. Mind az $I \to \mathbb{R}$ folytonos, mind az $I \to \mathbb{R}$ monoton függvények szabályosak, így elég az előző állításra hivatkozni. ■

4.2.3. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy $[f \neq 0]$ korlátos halmaz, akkor f Riemann-integrálható minden $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint.*

Bizonyítás. Van olyan $K \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum, hogy $[f \neq 0] \subseteq K$. Az előző állítás szerint f lokálisan Riemann-integrálható minden $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint, így az $(f|_K)^\circ$ függvény Riemann-integrálható minden $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint. Ugyanakkor $f = (f|_K)^\circ$ nyilvánvaló, ezért f Riemann-integrálható minden $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint. ■

4.2.4. Következmény. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, amelynek csak véges sok pontban van szakadása, akkor f lokálisan Riemann-integrálható minden olyan $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mu(\{x\}) = 0$.*

Bizonyítás. ■

Az előző állításból következik, hogy bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) & , \text{ha } x \neq 0 \\ \alpha & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény lokálisan Riemann-integrálható minden olyan $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mu(\{x\}) = 0$, hiszen ez a függvény korlátos és csak a 0 pontban nem folytonos. Ugyanakkor ez a függvény nyilvánvalóan nem szabályos, mert a 0-ban másodfajú szakadása van.

4.3. A Riemann-integrálhatóság Riemann-kritériuma

4.3.1. Állítás. (A Riemann-integrálhatóság elemi Riemann-kritériuma) *Legyen $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható μ-szerint, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz léteznek olyan φ és ψ valós lépcsősfüggvények, hogy $\varphi \leq f \leq \psi$ és*

$$\int \psi \, \mathrm{d}\mu - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Bizonyítás. (I) *Elégségesség.* Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Vegyünk olyan φ és ψ valós lépcsősfüggvényeket, hogy $\varphi \leq f \leq \psi$ és

$$\int \psi \, \mathrm{d}\mu - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

teljesül. Ekkor $0 \leq f - \varphi \leq \psi - \varphi$, ezért a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása miatt

$$\int^* |f - \varphi| \, \mathrm{d}\mu = \int^* (f - \varphi) \, \mathrm{d}\mu \leq \int^* (\psi - \varphi) \, \mathrm{d}\mu =$$
$$= \int (\psi - \varphi) \, \mathrm{d}\mu = \int \psi \, \mathrm{d}\mu - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon,$$

ahol felhasználtuk a lépcsősfüggvények elemi μ-integráljának linearitását. Ebből következik, hogy f Riemann-integrálható μ-szerint.

(II) *Szükségesség.* Tegyük fel, hogy f μ-szerint Riemann-integrálható és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Válasszunk egy g valós lépcsősfüggvényt, amelyre

$$\int^* |f - g| \, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Ekkor, a Riemann-féle felső μ-integrál definíciója alapján, létezik olyan h pozitív lépcsősfüggvény, amelyre $|f - g| \leq h$ és $\displaystyle\int h \, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Ebből látható, hogy $\varphi := g - h$ és $\psi := g + h$ olyan valós lépcsősfüggvények, amelyekre $\varphi \leq f \leq \psi$ és

$$\int \psi \, \mathrm{d}\mu - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int (\psi - \varphi) \, \mathrm{d}\mu = \int (2h) \, \mathrm{d}\mu = 2 \int h \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

teljesül. ■

A következő tétel bizonyítása előtt megjegyezzük, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor minden $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres korlátos halmazra

$$\sup_{x,x' \in H} |f(x) - f(x')| = \sup_{x \in H} f(x) - \inf_{x \in H} f(x)$$

teljesül.

4.3.2. Tétel. (A Riemann-integrálhatóság Riemann-kritériuma) *Legyen μ : $\mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$. Az f függvény pontosan akkor Riemann-integrálható μ-szerint, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}^*$ és létezik olyan $(x_k)_{0 \le k \le n}$ szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $x_0 = a$, $x_n = b$ és*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x,x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) \mu(]x_k, x_{k+1}[) < \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás. (I) *Elégségesség.* Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A hipotézis szerint vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}^*$ számot és olyan $(x_k)_{0 \le k \le n}$ szigorúan monoton növő rendszert $\mathbb{R}$-ben, hogy $x_0 = a$, $x_n = b$ és

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x,x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) \mu(]x_k, x_{k+1}[) < \varepsilon$$

teljesül. Legyenek

$$\varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) \right) \chi_{]x_k, x_{k+1}[} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \chi_{\{x_k\}},$$
$$\psi := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x \in]x_k, x_{k+1}]} f(x) \right) \chi_{]x_k, x_{k+1}[} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \chi_{\{x_k\}}.$$

Ekkor $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan lépcsősfüggvények, hogy $\varphi \le f \le \psi$, továbbá

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) \right) \mu(]x_k, x_{k+1}[) + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \mu(\{x_k\}),$$
$$\int \psi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) \right) \mu(]x_k, x_{k+1}[) + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \mu(\{x_k\}),$$

következésképpen

$$\int \psi \, \mathrm{d}\mu - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) - \inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) \right) \mu(]x_k, x_{k+1}[) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x,x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) \mu(]x_k, x_{k+1}[) < \varepsilon$$

teljesül. A Riemann-integrálhatóság elemi Riemann-kritériuma alapján ebből következik, hogy f Riemann-integrálható μ-szerint.

(II) *Szükségesség.* Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható μ-szerint, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A Riemann-integrálhatóság elemi Riemann-kritériuma alapján vehetünk olyan $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvényeket, hogy $\varphi \leq f \leq \psi$ és

$$\int \psi \, \mathrm{d}\mu - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

teljesül. Az $[f \neq 0] \subseteq [a,b]$ hipotézis miatt $\chi_{[a,b]} f = f$, ezért $\chi_{[a,b]}\varphi$ és $\chi_{[a,b]}\psi$ olyan valós lépcsősfüggvények, hogy $\chi_{[a,b]}\varphi \leq f \leq \chi_{[a,b]}\psi$ és

$$\int \left(\chi_{[a,b]}\psi\right) \, \mathrm{d}\mu - \int \left(\chi_{[a,b]}\varphi\right) \, \mathrm{d}\mu = \int \left(\chi_{[a,b]}(\psi - \varphi)\right) \, \mathrm{d}\mu \leq$$
$$\leq \int (\psi - \varphi) \, \mathrm{d}\mu = \int \psi \, \mathrm{d}\mu - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvényektől megkövetelhetjük azt is, hogy a $\varphi \leq f \leq \psi$ és $\int \psi \, \mathrm{d}\mu - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$ egyenlőtlenségek mellett még a $[\varphi \neq 0] \subseteq [a,b]$ és $[\psi \neq 0] \subseteq [a,b]$ összefüggések is teljesüljenek.

Létezik olyan $n \in \mathbb{N}^*$ és olyan $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $x_0 = a$, $x_n = b$ és minden $0 \leq k \leq n-1$ természetes számra φ és ψ állandó az $]x_k, x_{k+1}[$ nyílt intervallumon. Legyenek $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ és $(b_k)_{0 \leq k \leq n-1}$, valamint $(a'_k)_{0 \leq k \leq n}$ és $(b'_k)_{0 \leq k \leq n}$ olyan rendszerek $\mathbb{R}$-ben, hogy

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_{]x_k, x_{k+1}[} + \sum_{k=0}^{n} a'_k \chi_{\{x_k\}},$$
$$\psi = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \chi_{]x_k, x_{k+1}[} + \sum_{k=0}^{n} b'_k \chi_{\{x_k\}}.$$

Legyen $0 \leq k \leq n-1$ rögzítve. Ha $x \in]x_k, x_{k+1}[$, akkor $a_k = \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) = b_k$, ezért minden $x, x' \in]x_k, x_{k+1}[$ esetén $|f(x) - f(x')| \leq b_k - a_k$. Ebből látható, hogy

$$g := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x,x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) \chi_{]x_k, x_{k+1}[}$$

olyan pozitív lépcsősfüggvény, hogy $g \leq \psi - \varphi$ teljesül, ezért

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x,x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) \mu(]x_k, x_{k+1}[) = \int g \, \mathrm{d}\mu \leq$$
$$\leq \int (\psi - \varphi) \, \mathrm{d}\mu = \int \psi \, \mathrm{d}\mu - \int \varphi \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy az előző tételben szereplő

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x,x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) \mu(]x_k, x_{k+1}[)$$

alakú kifejezéseket az f függvény $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszerhez tartozó, μ szerinti *oszcillációs összegeinek* nevezzük.

4.3.3. Következmény. *Ha* $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ *additív függvény, akkor minden olyan* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény Riemann-integrálható* μ *szerint, amelyre az* $[f \neq 0]$ *halmaz korlátos* $\mathbb{R}$*-ben.*

Bizonyítás. Az f-re vonatkozó feltétel alapján vehetünk olyan $a, b \in \mathbb{R}$ számokat, hogy $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$. Az f folytonossága miatt $f\langle[a, b]\rangle$ korlátos $\mathbb{R}$-ben, ezért $\mathrm{Im}(f) \subseteq f\langle[a, b]\rangle \cup \{0\}$ miatt f korlátos függvény. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített szám. A Heine-tétel alapján vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy minden $x, x' \in [a, b]$ esetén, ha $|x - x'| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy $\frac{1}{n} \leq \delta$, és minden $0 \leq k \leq n$ természetes számra legyen $x_k := a + \frac{k}{n}(b-a)$. Ekkor $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ olyan szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $x_0 = a$, $x_n = b$ és

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x,x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) \mu(]x_k, x_{k+1}[) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \mu(]x_k, x_{k+1}[) \leq \varepsilon \mu([a, b])$$

teljesül, hiszen minden $0 \leq k \leq n - 1$ esetén

$$\sup_{x,x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon,$$

és a μ pozitivitása és additivitása folytán

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu(]x_k, x_{k+1}[) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mu([x_k, x_{k+1}[) + \mu(\{b\}) = \mu([a, b[) + \mu(\{b\}) = \mu([a, b])$$

teljesül. A $\mu([a, b])$ számot az f függvény, az $[a, b]$ intervallum és a μ additív függvény határozza meg (vagyis ε-tól *független*), ezért a Riemann-integrálhatóság Riemann-kritériuma alapján f Riemann-integrálható μ szerint. ■

Megjegyezzük, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *univerzálisan Riemann-integrálhatónak* nevezünk, ha f minden $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint Riemann-integrálható. Tehát az előző állítás úgy is megfogalmazható, hogy minden olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény univerzálisan Riemann-integrálható, amelyre az $[f \neq 0]$ halmaz korlátos $\mathbb{R}$-ben.

4.4. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma

4.4.1. Definíció. *Egy* $N \subseteq \mathbb{R}$ *halmazt* **Lebesgue-nullhalmaznak** *nevezünk, ha minden* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *számhoz létezik az* $\mathbb{R}$ *korlátos nyílt intervallumainak olyan* $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *sorozata, hogy*

$$N \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}(I_k) < \varepsilon.$$

Az $\mathbb{R}$ minden megszámlálható részhalmaza (például $\mathbb{Q}$ is) Lebesgue-nullhalmaz. Az $\mathbb{R}$ minden nem üres nyílt intervalluma *nem* Lebesgue-nullhalmaz. Lebesgue-nullhalmaz minden részhalmaza Lebesgue-nullhalmaz, és megszámlálható sok Lebesgue-nullhalmaz uniója Lebesgue-nullhalmaz.

4.4.2. Tétel. (A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma) *Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint, ha f korlátos, és az $[f \neq 0]$ halmaz korlátos, és az f szakadási pontjainak halmaza Lebesgue-nullhalmaz. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor lokálisan Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint, ha minden $K \subseteq I$ korlátos és zárt halmazra az $f\langle K\rangle$ halmaz korlátos $\mathbb{R}$-ben és az f szakadási pontjainak halmaza Lebesgue-nullhalmaz.*

Bizonyítás. ■

4.5. A Riemann-integrálhatóság Cauchy-kritériuma

4.5.1. Tétel. (A Riemann-integrálhatóság Cauchy-kritériuma) *Legyen $\mu : \mathrm{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ olyan additív függvény, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mu(\{x\}) = 0$ teljesül. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható μ szerint, ha létezik olyan $I \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre teljesül a következő: ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ olyan szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $x_0 = a$, $x_n = b$ és $\max\limits_{0 \leq k \leq n-1} \mu(]x_k, x_{k+1}[) < \delta$, akkor bármely $(\zeta_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \prod\limits_{0 \leq k \leq n-1} [x_k, x_{k+1}]$ rendszerre*

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\mu(]x_k, x_{k+1}[) \right| < \varepsilon$$

teljesül. Ez az $I \in \mathbb{R}$ elem egyértelműen van meghatározva, és ha f Riemann-integrálható a μ szerint, akkor

$$I = \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. ■

4.6. A Riemann-integrálhatóság Darboux-kritériuma

4.6.1. Definíció. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\Pi_n(a, b)$ jelöli azon $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ renszereket $\mathbb{R}$-ben, amelyek szigorúan monoton növők és $x_0 = a$, $x_n = b$ teljesül. Az $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \Pi_n(a, b)$ halmaz elemeit az $[a, b]$ intervallum* **felosztásainak** *nevezzük.*

4.6.2. Definíció. (Darboux-féle alsó és felső integrál)

4.6.3. Tétel. (A Riemann-integrálhatóság Darboux-kritériuma) *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint, ha az f függvény $[a, b]$ intervallumra vett alsó és felső Darboux-integráljai egyenlők; továbbá, ha f Riemann-integrálható, akkor az f Riemann-integrálja egyenlő az f felső Darboux-integráljával.*

Bizonyítás. ■

5. fejezet

Primitív függvények és határozott integrál

5.1. A véges növekmények formulája

5.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény* **jobbról** (*illetve* **balról**) **differenciálható** *az $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, és a*

$$\frac{f - f(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}} : \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}$$

differenciahányados-függvénynek létezik jobboldali (*illetve baloldali*) *határártéke $\mathfrak{a}$-ban; továbbá, ha létezik ez a határérték, akkor a*

$$(\mathrm{D}_{+}f)(\mathfrak{a}) := \lim_{\mathfrak{a}+0} \left(\frac{f - f(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}} \right), \quad (\textit{illetve } (\mathrm{D}_{-}f)(\mathfrak{a}) := \lim_{\mathfrak{a}-0} \left(\frac{f - f(\mathfrak{a})}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}} \right))$$

jelölést alkalmazzuk, és ezt a számot az f függvény **jobboldali** (*illetve baloldali*) **deriváltjának** *nevezzük $\mathfrak{a}$-ban.*

Nyilvánvaló, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor az f differenciálhatósága $\mathfrak{a}$-ban ekvivalens azzal, hogy f az $\mathfrak{a}$-ban jobbról is és balról is differenciálható, és $(D_{+}f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}_{-}f)(\mathfrak{a})$ teljesül; továbbá, ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $(\mathrm{D}_{+}f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}f)(\mathfrak{a}) = (\mathrm{D}_{-}f)(\mathfrak{a})$.

5.1.2. Állítás. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyhez létezik olyan $A \subseteq [a, b]$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in [a, b] \setminus A$ esetén f jobbról differenciálható x-ben és $(\mathrm{D}_{+}f)(x) \geq 0$. Ekkor $f(b) \geq f(a)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, továbbá legyen $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_{+}^{*}$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} r_k$ sor konvergens. Minden $x \in [a, b]$ esetén legyen $N(x) := \{n \in \mathbb{N} | a_n < x\}$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ tetszőleges, és értelmezzük a következő halmazt:

$$E(\varepsilon) := \left\{ x \in [a, b] \,\middle|\, f(x) - f(a) \geq -\varepsilon \cdot (x - a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k \in N(x)}^{\infty} r_k \right\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $a \in E(\varepsilon)$ és persze $E(\varepsilon)$ felülről korlátos, ezért értelmezhető a $c := \sup(E(\varepsilon))$ szám, amelyre $c \in [a, b]$ teljesül.

Először megmutatjuk, hogy $c \in E(\varepsilon)$ (vagyis c az $E(\varepsilon)$ halmaz legnagyobb eleme). Ehhez vegyünk olyan $E(\varepsilon)$-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely konvergál c-hez; ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x_n) - f(a) \geq -\varepsilon \cdot (x_n - a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(x_n)}^{\infty} r_k$$

teljesül. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $x_n \leq c$, ezért $x_n - a \leq c - a$ és $N(x_n) \subseteq N(c)$, tehát

$$\sum_{k=0,\ k\in N(x_n)}^{\infty} r_k \leq \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k,$$

következésképpen

$$f(x_n) - f(a) \geq -\varepsilon \cdot (c - a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k$$

teljesül. Az f függvény folytonos c-ben, így az átviteli elv alapján

$$f(c) - f(a) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(a)) \ \geq \ -\varepsilon \cdot (c - a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $c \in E(\varepsilon)$.

Most megmutatjuk, hogy $c = b$. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $c < b$; ekkor két alternatíva van: $c \notin A$ vagy $c \in A$. Mindkét esetben ellentmondásra jutunk.

(I) Tegyük fel, hogy $c \notin A$, vagyis $c \in [a, b] \setminus A$, így f jobbról differenciálható c-ben és $(\mathrm{D}_+ f)(c) \geq 0 > -\varepsilon$. Ekkor vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy $c + \delta < b$ és minden $x \in]c, c+\delta[$ pontra

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > -\varepsilon,$$

vagyis $f(x) - f(c) > -\varepsilon \cdot (x - c)$. Legyen most $x \in]c, c+\delta[$ rögzítve. Ekkor kihasználva azt, hogy $c \in E(\varepsilon)$, kapjuk, hogy

$$f(x) - f(a) = (f(x) - f(c)) + (f(c) - f(a)) > -\varepsilon \cdot (x - c) - \varepsilon \cdot (c - a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k =$$

$$= -\varepsilon \cdot (x - a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k \geq -\varepsilon \cdot (a - c) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(x)}^{\infty} r_k,$$

hiszen $c < x$ miatt $N(c) \subseteq N(x)$, így

$$\sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k \leq \sum_{k=0,\ k\in N(x)}^{\infty} r_k.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in]c, c+\delta[$ esetén $x \in E(\varepsilon)$, ami lehetetlen, mert c felső korlátja $E(\varepsilon)$-nak.

(II) Tegyük fel, hogy $c \in A$, vagyis vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $c = a_n$. Az f függvény folytonos c-ben, ezért az $\varepsilon \cdot r_n \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $c + \delta < b$ és minden $x \in]c, c+\delta[$ pontra

$$f(x) - f(c) > -\varepsilon \cdot r_n$$

teljesül. Legyen most $x \in]c, c+\delta[$ rögzítve. Ekkor kihasználva azt, hogy $c \in E(\varepsilon)$, kapjuk, hogy

$$f(x)-f(a)=(f(x)-f(c))+(f(c)-f(a))>-\varepsilon\cdot r_n-\varepsilon\cdot(c-a)-\varepsilon\cdot\sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k>$$
$$>-\varepsilon\cdot(x-a)-\varepsilon\cdot\Big(r_n+\sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k\Big).$$

Azonban könnyen látható, hogy $a_n = c < x$ miatt

$$r_n+\sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k \le \sum_{k=0,\ k\in N(x)}^{\infty} r_k,$$

következésképpen

$$f(x)-f(a) > -\varepsilon\cdot(x-a)-\varepsilon\cdot\sum_{k=0,\ k\in N(x)}^{\infty} r_k.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in]c, c+\delta[$ esetén $x \in E(\varepsilon)$, ami lehetetlen, mert c felső korlátja $E(\varepsilon)$-nak.

Ezzel igazoltuk, hogy $b = c \in E(\varepsilon)$, tehát

$$f(b)-f(a) \ge -\varepsilon\cdot(b-a)-\varepsilon\cdot\sum_{k=0,\ k\in N(b)}^{\infty} r_k \ge -\varepsilon\cdot(b-a)-\varepsilon\cdot\sum_{k=0}^{\infty} r_k$$

Ez minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén igaz, tehát ε-nal nullához tartva ebből kapjuk, hogy $f(b)-f(a) \ge 0$. ■

5.1.3. Következmény. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ (nem feltétlenül nyílt) intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyhez létezik olyan $A \subseteq I$ megszámlálható halmaz, hogy f minden $x \in I \setminus A$ esetén jobbról differenciálható és $(\mathrm{D}_+f)(x) \ge 0$ (illetve $(\mathrm{D}_+f)(x) \le 0$). Ekkor f monoton növő (illetve monoton fogyó).*

Bizonyítás. Minden $a, b \in I$, $a < b$ pontra, az $f|_{[a,b]}$ leszűkített függvényre alkalmazva az előző állítást kapjuk, hogy $f(a) \le f(b)$ (illetve $f(b) \le f(a)$). ■

5.1.4. Tétel. (A véges növekmények formulája) *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekhez léteznek olyan $m, M \in \mathbb{R}$ számok és létezik olyan $A \subseteq [a,b]$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in [a,b] \setminus A$ esetén f és g jobbról differenciálható x-ben és*

$$m\cdot(\mathrm{D}_+g)(x) \le (\mathrm{D}_+f)(x) \le M\cdot(\mathrm{D}_+g)(x)$$

teljesül. Ekkor fennállnak az

$$m\cdot(g(b)-g(a)) \le f(b)-f(a) \le M\cdot(g(b)-g(a))$$

egyenlőtlenségek.

Bizonyítás. ■

5.1.5. Tétel. (Véges növekmények formulája) *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekhez létezik olyan $A \subseteq [a, b]$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in [a, b] \setminus A$ esetén f és g jobbról differenciálható x-ben és*

$$|(\mathrm{D}_+ f)(x)| \leq (\mathrm{D}_+ g)(x)$$

teljesül. Ekkor fennáll az

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. ■

5.2. A véges növekmények formulájának elemi következményei

5.2.1. Következmény. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyhez létezik olyan $A \subseteq [a, b]$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in [a, b] \setminus A$ esetén f jobbról differenciálható x-ben. Ekkor*

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b] \setminus A} |(\mathrm{D}_+ f)(x)|.$$

Bizonyítás. ■

5.3. Primitív függvények és szigorú primitív függvények

5.3.1. Definíció. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ függvény.*

a) *Azt mondjuk, hogy a $g : I \to \mathbb{R}$ függvény az f-nek* **primitív függvénye***, ha g folytonos és létezik olyan $A \subseteq I$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in I \setminus A$ esetén g differenciálható x-ben és $(\mathrm{D}g)(x) = f(x)$ teljesül.*

b) *Azt mondjuk, hogy a $g : I \to \mathbb{R}$ függvény az f-nek* **szigorú primitív függvénye***, ha g differenciálható és minden $x \in I$ esetén $(\mathrm{D}g)(x) = f(x)$ teljesül (természetesen ekkor I szükségképpen nyílt intervallum).*

Egyáltalán nem minden, nyílt intervallumon értelmezett valós függvénynek létezik szigorú primitív függvénye. Ezt mutatja a következő állítás.

5.3.2. Állítás. *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor minden $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ intervallumra az $(\mathrm{D}f)\langle I \rangle$ halmaz intervallum $\mathbb{R}$-ben, vagyis $\mathrm{D}f$ Darboux-tulajdonságú függvény.*

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és $(\mathrm{D}f)(a) \neq (\mathrm{D}f)(b)$, akkor minden $y \in]\min((\mathrm{D}f)(a), (\mathrm{D}f)(b)), \max((\mathrm{D}f)(a), (\mathrm{D}f)(b))[$ számhoz létezik olyan $x \in [a, b]$, amelyre $(\mathrm{D}f)(x) = y$.

Ehhez legyen $c := (a + b)/2$, és legyenek $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ azok a függvények, amelyekre minden $t \in [a, c[$ esetén $\alpha(t) := a$ és $\beta(t) := 2t - a$, továbbá minden $t \in [c, b]$ esetén $\alpha(t) := 2t - b$ és $\beta(t) := b$. Világos, hogy minden $t \in]a, b[$ esetén $a \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b$. Legyen

$$g :]a, b[\to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}.$$

A g függvény folytonos és

$$\lim_a g = (\mathrm{D}f)(a), \quad \lim_b g = (\mathrm{D}f)(b),$$

hiszen a definíció szerint

$$g = \left(\frac{f - f(a)}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - a}\right) \circ \beta$$

az $]a, c[$ intervallumon, valamint

$$g = \left(\frac{f - f(b)}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - b}\right) \circ \alpha$$

a $]c, b[$ intervallumon, így elegendő a függvények kompozícójának határértékére vonatkozó tételt alkalmazni. Ezért az a $\tilde{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos, amely $]a, b[$ egyenlő g-vel, és $\tilde{g}(a) := (\mathrm{D}f)(a)$, $\tilde{g}(b) := (\mathrm{D}f)(b)$. Ebből a Bolzano-tétel alapján következik olyan $t \in]a, b[$ pont létezése, amelyre $g(t) = \tilde{g}(t) = y$. A Lagrange-féle középértéktétel alapján létezik olyan $x \in]\alpha(t), \beta(t)[$, amelyre $f(\beta(t)) - f(\alpha(t)) = (\mathrm{D}f)(x) \cdot (\beta(t) - \alpha(t))$. A g definíciója szerint ez azt jelenti, hogy $g(t) \cdot (\beta(t) - \alpha(t)) = (\mathrm{D}f)(x) \cdot (\beta(t) - \alpha(t))$, tehát $(\mathrm{D}f)(x) = g(t) = y$. ■

Tehát ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor a $\chi_{]a,b[}$, $\chi_{[a,b[}$, $\chi_{]a,b]}$, $\chi_{[a,b]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvények egyikének sem létezik szigorú primitív függvénye, mert ezek nem Darboux-tulajonságú függvények. Azonban mind a négy függvénynek létezik primitív függvénye.

5.3.3. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, és $g : I \to \mathbb{R}$ az f-nek primitív függvénye.*

a) *Ha a $h : I \to \mathbb{R}$ függvény az f-től csak megszámlálható sok pontban különbözik, akkor g a h-nak is primitív függvénye.*

b) *Ha a $g' : I \to \mathbb{R}$ függvény szintén primitív függvénye f-nek, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $g' = g + c$.*

Bizonyítás. ■

Példák (primitív függvényekre).

1) A Dirichlet-függvénynek az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azonosan 0 függvény primitív függvénye, mert $\chi_{\mathbb{Q}}$ csak megszámlálható sok pontban különbözik a 0 értékű $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstansfüggvénytől.

2) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és tekintsük a $\chi_{]a,b[} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvényt. Könnyen látható, hogy ennek primitív függvénye a

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x < a \\ x - a & \text{, ha } a \leq x \leq b \\ b - a & \text{, ha } x > b \end{cases}$$

függvény, és g az a és b pontokban nem differenciálható. Továbbá, a definíció alapján nyilvánvaló, hogy ugyanez a g függvény a $\chi_{[a,b[}$, $\chi_{]a,b]}$, $\chi_{[a,b]}$ karakterisztikus függvényeknek is primitív függvénye.

3) Csak Darboux-tulajdonságú függvénynek létezhet szigorú primitív függvénye, de nem minden Darboux-tulajdonságú függvénynek létezik primitív függvénye. Például, az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{, ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény Darboux-tulajdonságú, de nem létezik szigorú primitív függvénye. Ugyanakkor a

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{, ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } x = 0 \end{cases}$$

függvénynek létezik szigorú primitív függvénye.

5.4. Szabályos függvények primitív függvénye

5.4.1. Állítás. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvénynek létezik primitív függvénye.*

Bizonyítás. Elegendő azt igazolni, hogy ha $J \subseteq I$ nem üres intervallum, akkor a $\chi_J : I \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvénynek létezik primitív függvénye.

Ha J üres, akkor bármely $I \to \mathbb{R}$ konstansfüggvény primitív függvénye χ_J-nek.

Ha J nem üres és korlátos, és $a := \inf(J)$, valamint $b := \sup(J)$ akkor a

$$I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x < a \\ x - a & \text{, ha } a \leq x \leq b \\ b - a & \text{, ha } x > b \end{cases}$$

függvény primitív függvénye χ_J-nek.

Ha J nem korlátos és $J = I$, akkor az $\mathrm{id}_I : I \to \mathbb{R}$ leképezés primitív függvénye χ_J-nek.

Ha J nem korlátos és $J \neq I$, akkor van olyan $a \in I$, hogy $a = \inf(J)$ vagy $a = \sup(J)$. Az első esetben az

$$I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x < a \\ x - a & \text{, ha } x \geq a \end{cases}$$

függvény, és a második esetben az

$$I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x > a \\ x - a & \text{, ha } x \leq a \end{cases}$$

függvény primitív függvénye χ_J-nek. ■

5.4.2. Tétel. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{R}$ szabályos függvénynek létezik primitív függvénye, és bármely két primitív függvénye csak egy additív konstansban különbözik.*

Bizonyítás. ■

5.4.3. Állítás. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek létezik szigorú primitív függvénye.*

Bizonyítás. ■

5.5. A határozott integrál fogalmának általánosítása

5.5.1. Definíció. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye. Ekkor minden $a, b \in I$ esetén*

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^b f := F(b) - F(a),$$

ahol F tetszőleges primitív függvénye f-nek; és ezt a számot az f függvény a és b határok közötti **határozott integráljának** *nevezzük.*

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye, akkor $c \in I$ esetén a

$$F : I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \mathop{\mathrm{S}}_c^x f$$

függvény az f-nek az a primitív függvénye, amely c-ben a 0 értéket veszi fel; tehát F folytonos, $F(c) = 0$, és létezik olyan $A \subseteq I$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in I \setminus A$ pontban F differenciálható és $(\mathrm{D}F)(x) = f(x)$.

5.6. A Newton–Leibniz-tétel általánosítása és alkalmazásai

5.6.1. Állítás. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $a, b \in I$ esetén*

$$\int_a^b f = \mathop{\mathrm{S}}_a^b f.$$

Bizonyítás. ■

Kérdés: teljesül-e az előző állítás minden szabályos függvényre?

5.6.2. Tétel. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $F : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor minden $a, b \in I$ esetén*

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^b (\mathrm{D}F) = F(b) - F(a)$$

teljesül

(*Newton–Leibniz-formula*)

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{D}F$-nek az F függvény szigorú primitív függvénye, így a bizonyítandó egyenlőség a definícióból azonnal következik. ■

5.6.3. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}^*$ és $f, g : I \to \mathbb{R}$ olyan n-szer differenciálható függvények, hogy $\mathrm{D}^n f$ és $\mathrm{D}^n g$ reguláris függvények. Ekkor minden $a, b \in I$ esetén*

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^b (\mathrm{D}^n f) g =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left((\mathrm{D}^{n-k-1} f)(b)(\mathrm{D}^k g)(b) - (\mathrm{D}^{n-k-1} f)(a)(\mathrm{D}^k g)(a) \right) + (-1)^n \mathop{\mathrm{S}}_a^b f(\mathrm{D}^n g)$$

teljesül. **(n-ed rendű parciális integrálás formulája)**

(*Megjegyezzük, hogy a feltételek szerint f és g folytonosak, tehát regulárisak, valamint $\mathrm{D}^n f$ és $\mathrm{D}^n g$ a hipotézis alapján szintén reguláris függvények, így a $(\mathrm{D}^n f)g$ és $f(\mathrm{D}^n g)$ függvények is regulárisak, tehát rendelkeznek primitív függvénnyel, így a formula értelmes.*)

Bizonyítás. A hipotézis alapján az

$$F := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\mathrm{D}^{n-k-1} f)(\mathrm{D}^k g) : I \to \mathbb{R}$$

függvény differenciálható, és a függvények differenciálási szabályainak ismeretében nyilvánvaló, hogy:

$$\mathrm{D}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\mathrm{D}^{n-k-1} f)(\mathrm{D}^k g)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\mathrm{D}^{n-k} f)(\mathrm{D}^k g) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\mathrm{D}^{n-k-1} f)(\mathrm{D}^{k+1} g) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\mathrm{D}^{n-k} f)(\mathrm{D}^k g) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (\mathrm{D}^{n-j} f)(\mathrm{D}^j g) =$$
$$= (\mathrm{D}^n f)g - (-1)^n f(\mathrm{D}^n g)$$

teljesül. Ezért a Newton-Leibniz-formula alapján fennáll az

$$F(b) - F(a) = \int_a^b (\mathrm{D}F) = \int_a^b (\mathrm{D}^n f)g - (-1)^n \int_a^b f(\mathrm{D}^n g)$$

egyenlőség, amiből átrendezéssel, behelyettesítéssel és összevonással kapjuk a bizonyítandó összefüggést. ■

Z Vigyázzunk arra, hogy az előző állításban az n-edik deriváltfüggvényekre vonatkozó regularitási feltétel nem felesleges, mert az biztosítja, hogy a $(\mathrm{D}^n f)g$ és $f(\mathrm{D}^n g)$ függvények szintén regulárisak legyenek, így az

$$\int_a^b ((\mathrm{D}^n f)g - (-1)^n f(\mathrm{D}^n g))$$

határozott integrál *szétbontható*

$$\int_a^b (\mathrm{D}^n f)g - (-1)^n \int_a^b f(\mathrm{D}^n g)$$

alakba. Ha f és g csak n-szer differenciálhatóak lennének, akkor előfordulhatna, hogy sem $(\mathrm{D}^n f)g$-nek, sem $f(\mathrm{D}^n g)$-nek nincs primitív függvénye, így az utóbbi formula értelmetlen lenne.

5.6.4. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}$ és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan $n+1$-szer differenciálható függvény, hogy $\mathrm{D}^{n+1} f$ reguláris függvény. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in I$ és $x \in I$ esetén*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k + \int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}^{n+1} f)(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

teljesül. **(Integrálmaradéktagos Taylor-formula)**

Bizonyítás. Ha $n = 0$, akkor azt kell igazolni, hogy minden $\mathfrak{a} \in I$ és $x \in I$ esetén

$$f(x) = f(\mathfrak{a}) + \int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}f)(t)\,\mathrm{d}t,$$

ami a Newton-Leibniz-formula alapján nyilvánvaló. Ezért feltehető, hogy $n > 0$, így a $\mathrm{D}f$ függvény n-szer differenciálható. Ugyanakkor a

$$g : I \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{(t-x)^n}{n!}$$

függvény is n-szer differenciálható, és $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ esetén minden $I \ni t$-re

$$(\mathrm{D}^k g)(t) = \frac{(t-x)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Ezért az n-ed rendű parciális integrálás formuláját alkalmazva a $\mathrm{D}f$ és g függvényekre kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}^{n+1}f)(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}^n(\mathrm{D}f))g = \\
&= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \big((\mathrm{D}^{n-k-1}(\mathrm{D}f))(x)(\mathrm{D}^k g)(x) - (\mathrm{D}^{n-k-1}(\mathrm{D}f))(\mathfrak{a})(\mathrm{D}^k g)(\mathfrak{a})\big) + \\
&+ \int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}f)(\mathrm{D}^n g) = -(-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\mathrm{D}^{n-k}f)(\mathfrak{a})\frac{(\mathfrak{a}-x)^{n-k}}{(n-k)!} + \int_{\mathfrak{a}}^{x} (\mathrm{D}f) = \\
&= -\sum_{j=1}^{n} (\mathrm{D}^j f)(\mathfrak{a})\frac{(x-\mathfrak{a})^j}{j!} + f(x) - f(\mathfrak{a}) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k
\end{aligned}$$

teljesül, amiből átrendezéssel kapjuk a bizonyítandó formulát. ■

5.6.5. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, valamint $I' \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\sigma : I' \to I$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy a következő feltételek valamelyike teljesül:*

a) *Az f-nek létezik szigorú primitív függvénye.*

b) *Az f-nek létezik primitív függvénye és minden $x \in I$ esetén a $\overset{-1}{\sigma}\langle\{x\}\rangle$ halmaz megszámlálható.*

Ekkor az $(f \circ \sigma)(D\sigma) : I' \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye, és minden $a', b' \in I'$ esetén

$$\int_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} f = \int_{a'}^{b'} (f \circ \sigma)(D\sigma)$$

teljesül. (A helyettesítéses integrálás formulája.)

Bizonyítás. Legyenek $a', b' \in I'$ rögzítve, és értelmezzük az

$$F : I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int_{\sigma(a')}^{x} f$$

leképezést, ami értelmes, mert akár a), akár b) teljesül: az f-nek létezik primitív függvénye.

(I) Ha a) teljesül, akkor F szigorú primitív függvénye f-nek, tehát az I-n differenciálható, valamint $DF = f$ és $F(\sigma(a')) = 0$. A közvetett függvény differenciálási szabálya szerint $(f \circ \sigma)(D\sigma) = ((DF) \circ \sigma)(D\sigma) = D(F \circ \sigma)$ teljesül I-n. Ezért $F \circ \sigma$ szigorú primitív függvénye az $(f \circ \sigma)(D\sigma) : I' \to \mathbb{R}$ függvénynek, így a Newton-Leibniz-formula szerint

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} f = F(\sigma(b')) - F(\sigma(a')) = \mathop{\mathrm{S}}_{a'}^{b'}(D(F \circ \sigma)) = \mathop{\mathrm{S}}_{a'}^{b'}(f \circ \sigma)(D\sigma)$$

teljesül.

(II) Ha b) teljesül, akkor $F : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és van olyan $A \subseteq I$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in I \setminus A$ pontra F differenciálható x-ben és $(DF)(x) = f(x)$. Ekkor a $\overset{-1}{\sigma}\langle I \setminus A\rangle = I' \setminus \overset{-1}{\sigma}\langle A\rangle$ halmaz minden x' pontjában differenciálható az $F \circ \sigma : I' \to \mathbb{R}$ függvény és $D(F \circ \sigma)(x') = (DF)(\sigma(x'))(D\sigma)(x') = (f \circ \sigma)(x')$. A σ-ra vonatkozó feltevés alapján a $\overset{-1}{\sigma}\langle A\rangle$ halmaz megszámlálható, mert

$$\overset{-1}{\sigma}\langle A\rangle = \bigcup_{x \in A} \overset{-1}{\sigma}\langle\{x\}\rangle,$$

és megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható. Ugyanakkor, az $F \circ \sigma$ függvény folytonos is, tehát ez primitív függvénye $(f \circ \sigma)(D\sigma)$-nak. Ezért a határozott integrál értelmezését alkalmazva

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a'}^{b'}(f \circ \sigma)(D\sigma) = F(\sigma(b')) - F(\sigma(a')) = F(\sigma(b')) = \mathop{\mathrm{S}}_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} f$$

adódik. ■

5.7. A Riemann-féle közelítő összegek tétele

5.7.1. Tétel. (A Riemann-féle közelítő összegek tétele) *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ szabályos függvény, és $a, b \in I$ olyanok, hogy $a < b$. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre teljesül a következő: minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $(x_k)_{0 \le k \le n}$ szigorúan monoton növő, $[a, b]$-ben haladó rendszerre, amelyre $x_0 = a$, $x_n = b$ és $\max\limits_{0 \le k \le n-1}(x_{k+1} - x_k) < \delta$, és minden olyan $(\zeta_k)_{0 \le k \le n-1}$ rendszerre, amelyre $0 \le k \le n-1$ esetén $\zeta_k \in [x_k, x_{k+1}]$, fennáll az*

$$\left| \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{b} f \; - \; \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. ■

Az előző tétel indokolja az

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x$$

jelölést a határozott integrálokra.

5.7.2. Állítás. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $a, b \in I$ olyanok, hogy $a < b$. Ekkor*

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Bizonyítás. ∎

Az előző állításban megfogalmazott határérték-egyenlőség alkalmazható sokféle határérték kiszámítására.

IX. rész

Függvényterek és függvényalgebrák

BEVEZETÉS

Ennek a rövid, algebrai jellegű résznek az a célja, hogy a függvényterek és függvényalgebrák példáján keresztül megmutassa, hogyan jelennek meg a matematikában természetes módon végtelen dimenziós *vektorterek* és *algebrák*. Nem célunk a végesdimenziós lineáris algebra részletes elemzése, ami egyáltalán nem azt jelenti, hogy a véges dimenziós vektorterek elmélete triviális, vagy érdektelen volna.

Végtelen dimenziós vektorterek, illetve "végtelen sok független valós paraméterrel jellemezhető elemeket tartalmazó halmazok" (azaz végtelen dimenziós valós sokaságok) a modern analízis sok területén megjelennek. Ilyen objektumok a differenciál- és integrál-operátorok, valamint a variációs funkcionálok (hatásfüggvények) definíciós tartományai. Ilyenek a változó részecskeszámú klasszikus statisztikus fizikai rendszerek, valamint a kvantumfizikai rendszerek állapottereinek adekvát matematikai modelljei, és a példák sorát hosszan lehetne folytatni.

Néhány itt bevezetésre kerülő függvénytér (mint például a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ és $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozatterek) a későbbiekben különös jelentőséget kap, mert viszonylag egyszerűen kezelhető, ugyanakkor sok olyan (később bevezetendő) jelenség megfigyelhető rajta, amely véges dimenziós esetben láthatatlan maradna.

A két első fejezet csak a feltétlenül szükséges definíciókat és konkrét példákat (illetve példa-típusokat) tartalmaz. A harmadik pontban bevezetjük a vektorterek és algebrák feletti *normák* fogalmát, ami a testek feletti abszolútérték-függvények fogalmának természetes általánosítása. A következő fejezetben látjuk majd, hogy a normával ellátott vektorterek (vagyis a *normált terek*) adják a legfontosabb példát a *metrikus terekre*, amelyekre általánosíthatók a legsajátosabb analitikus fogalmak, mint például a topologikus tulajdonságok, a határérték és a folytonosság. Sőt a VII. fejezetben látható lesz, hogy normált terek között ható függvények differenciálhatósága is értelmezhető, és sok olyan differenciálelméleti állítás általánosítható, amelyet az előző fejezetben egyváltozós esetre igazoltunk.

Irodalomjegyzék

[1] N. Bourbaki, **Éleménts de mathématique. Algébre.** Hermann, Paris

[2] S. Lang, **Algebra**, Addison-Wesley Publ. Comp., 1965.

[3] L. Rédei, **Algebra**, I. Akadémiai Kiadó, 1967.

[4] А. И. Мальцев, **Основы линейной алгебры**, Наука, Москва, 1970.

[5] Г. Е. Шилов, **Математический анализ, Конечномерные линейные пространства**, Наука, Москва, 1969.

[6] M. Zamansky, **Introduction a l'algébre et l'analyse modernes**, Dunod, 1963. Amsterdam-Warsaw, 1967.

[7] P. Halmos, **Véges dimenziós vektorterek**, Műszaki Könyvkiadó, 1984

IRODALOMJEGYZÉK

1. fejezet

Függvényterek

1.1. Halmaz hatványai és mátrixok

Emlékeztetünk arra, hogy ha H és E halmazok, akkor a $H \to E$ függvények halmazát a $\mathscr{F}(H;E)$ jel mellett az E^H szimbólummal is jelöljük. Ezért semmiféle magyarázatra nem szorul a következő elnevezés.

1.1.1. Definíció. *Ha E halmaz és $n \in \mathbb{N}$, akkor az E^n függvényhalmazt az E halmaz n-edik* **hatványának***, és az E^n elemeit E-beli* **elem n-eseknek** *nevezzük. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $\mathbb{R}^n$ (illetve $\mathbb{C}^n$) halmaz elemeit valós (illetve komplex) szám n-eseknek nevezzük.*

Tehát az E^n halmaz elemei olyan *függvények*, amelyek az $n \in \mathbb{N}$ halmazon értelmezettek és E-be érkeznek.

Példák. Legyen E tetszőleges halmaz.

1) A definíció szerint $0 := \emptyset$, ezért $E^0 = \{\emptyset\}$. Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\emptyset^n = \{\emptyset\}$ is teljesül.

2) A definíció szerint $1 := \{0\}$, ezért az $E^1 \to E;\ f \mapsto f(0)$ leképezés jól értelmezett, és nyilvánvalóan bijekció az E^1 és E halmazok között. Ezért az E^1 és E halmazokat e bijekció által azonosítani szoktuk.

3) A definíció szerint $2 := \{0, 1\}$, ezért az $E^2 \to E \times E;\ f \mapsto (f(0), f(1))$ leképezés jól értelmezett, és nyilvánvalóan bijekció az E^2 és $E \times E$ halmazok között. Ezért az E^2 és $E \times E$ halmazokat e bijekció által azonosítani szoktuk. Ebben az esetben az $E^2 \to E \times E;\ f \mapsto (f(1), f(0))$ leképezés is jól értelmezett, és ez is bijekció az E^2 és $E \times E$ halmazok között, vagyis volna lehetőség másféle azonosításra is. Azonban a 2 halmaz természetes rendezése e két azonosító leképezés közül kitünteti az elsőt.

4) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a definíció szerint $n + 1 = n \cup \{n\}$, ezért az $E^{n+1} \to E^n \times E;\ f \mapsto (f|_n, f(n))$ leképezés jól értelmezett, és nyilvánvalóan bijekció az E^{n+1} és $E^n \times E$ halmazok között. Ennek a bijekciónak a létezése lehetőséget ad arra, hogy az E^n alakú halmazokra vonatkozó kijelentéseket n szerinti teljes indukcióval bizonyítsuk. Ehhez azonban szükség volna az $(E^n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat létezésére; erről szól a következő állítás.

1.1.2. Állítás. *Minden E halmazhoz egyértelműen létezik az az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E_n = E^n$ teljesül.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{E}$ az $\mathbb{N} \rightarrowtail E$ függvények halmazát. Nyilvánvaló, hogy a

$$(\forall x)(\ (\exists n)((n \in \mathbb{N}) \wedge (x = (n, E^n))) \Rightarrow (x \in \mathbb{N} \times \mathscr{P}(\mathscr{E}))\ )$$

kijelentés tétel, ezért a $(\exists n)((n \in \mathbb{N}) \wedge (x = (n, E^n)))$ kijelentés a részhalmaz-axióma alapján kollektivizáló az x változóban. Legyen

$$F := \{x | (\exists n)((n \in \mathbb{N}) \wedge (x = (n, E^n)))\}.$$

Könnyen látható, hogy F függvény, és $\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{N}$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F(n) = E^n$. Ez azt jelenti, hogy F olyan halmazrendszer, amelynek a létezését állítottuk. Ennek halmaznak az egyértelműsége nyilvánvaló. ■

1.1.3. Definíció. *Legyen E halmaz és $m, n \in \mathbb{N}$. Az $E^{m\times n}$ halmaz elemeit E-beli együtthatós $m \times n$-es* **mátrixoknak** *nevezzük, és az $E^{m\times n}$ halmazt gyakran az $\mathrm{M}_{m,n}(E)$ szimbólummal is jelöljük. Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{M}_{m,n}(E)$, akkor $(i, j) \in m \times n$ esetén az $\mathfrak{a}(i, j) \in E$ elemet az $\mathfrak{a}_{i,j}$ szimbólummal is jelöljük, és azt mondjuk, hogy $\mathfrak{a}_{i,j}$ az $\mathfrak{a}$ mátrix (i, j)-edik* **komponense**. *Az $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (illetve $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$) halmaz elemeit* **valós** (*illetve* **komplex**) *$m \times n$-es mátrixoknak nevezzük.*

Megjegyezzük még, hogy ha E halmaz és $n \in \mathbb{N}$, akkor az $\mathrm{M}_{n,n}(E)$ mátrixhalmazt az $\mathrm{M}_n(E)$ szimbólummal szoktuk rövidíteni, és $\mathrm{M}_n(E)$ elemeit E-beli együtthatós $n \times n$-szeres *kvadratikus* mátrixoknak nevezzük.

1.2. Sorozatterek

1.2.1. Állítás. *Ha $p \geq 1$ valós szám, akkor $l^p_{\mathbb{K}}$ lineáris altere a $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatok vektorterének, és $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in l^p_{\mathbb{K}}$, valamint $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\mathbf{a}+\mathbf{b})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{b}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\lambda.\mathbf{a})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bizonyítás. Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in l^p_{\mathbb{K}}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra a háromszög-egyenlőtlenség és az elemi Minkowski-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |(\mathbf{a}+\mathbf{b})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} (|\mathbf{a}(k)| + |\mathbf{b}(k)|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |\mathbf{b}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{b}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

amiből következik, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} |(\mathbf{a}+\mathbf{b})(k)|^p$ sor konvergens, azaz $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in l^p_{\mathbb{K}}$, és határérték-képzéssel kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\mathbf{a}+\mathbf{b})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |(\mathbf{a}+\mathbf{b})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{b}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ha $\mathbf{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |(\lambda.\mathbf{a})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=0}^{n} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq |\lambda| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

amiből következik, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |(\lambda.\mathbf{a})(k)|^p$ sor konvergens, azaz $\lambda.\mathbf{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$, és határérték-képzéssel kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\lambda.\mathbf{a})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |(\lambda.\mathbf{a})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \blacksquare$$

1.3. Vektorsorok

1.3.1. Állítás. *Legyen E vektortér és $\mathbf{s}$ E-ben haladó sorozat. Ekkor létezik egyetlen olyan E-ben haladó $\sum \mathbf{s}$ sorozat, amelyre $\left(\sum \mathbf{s}\right)(0) = \mathbf{s}(0)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum \mathbf{s}\right)(n+1) = \left(\sum \mathbf{s}\right)(n) + \mathbf{s}(n+1)$ teljesül.*

Bizonyítás. A rekurziós tételt kell alkalmazni az E halmazra, az $\mathbf{s}(0) \in E$ kezdőpontra és a $g : \mathbb{N} \times E \to E$; $(n, x) \mapsto x + \mathbf{s}(n+1)$ függvényre. $\blacksquare$

1.3.2. Definíció. *Ha E vektortér és $\mathbf{s}$ E-ben haladó sorozat, akkor az $\mathbf{s}$-hez asszociált (vagy $\mathbf{s}$ által meghatározott)* (**vektor**)**sornak** *nevezzük és $\sum \mathbf{s}$-sel jelöljük azt az E-ben haladó sorozatot, amelyre teljesül az, hogy $(\sum \mathbf{s})(0) = \mathbf{s}(0)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\sum \mathbf{s})(n+1) = (\sum \mathbf{s})(n) + \mathbf{s}(n+1)$.*

Vektorsorok *maradéktagjai* és *átrendezései* pontosan úgy értelmezhetők, mint a számsorok esetében.

1.4. Kapcsolatok sorozatterek között

1.4.1. Állítás. *Legyenek $p, q, r > 1$ olyan valós számok, amelyekre*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Ekkor minden $\mathbf{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\mathbf{b} \in l^q_{\mathbb{K}}$ esetén $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in l^r_{\mathbb{K}}$, és fennáll a

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{b}(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\mathbf{b} \in l^q_{\mathbb{K}}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az elemi Hölder-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{k=0}^{n} (|\mathbf{a}(k)|^p)^{\frac{r}{p}} (|\mathbf{b}(k)|^q)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |\mathbf{b}(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{b}(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\mathbf{b} \in l^q_{\mathbb{K}}$ esetén $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in l^r_{\mathbb{K}}$, és határérték-képzéssel kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |\mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{b}(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \blacksquare$$

Ebből az állításból következik, hogy ha $p, q > 1$ olyan valós számok, hogy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

amit úgy fejezünk ki, hogy p és q *duális exponensek*, akkor minden $\mathbf{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$ sorozatra az

$$u_{\mathbf{a}} : l^q_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \mathbf{b} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k)\mathbf{b}(k)$$

leképezés jól értelmezett és eleme $(l^q_{\mathbb{K}})^*$-nak, továbbá könnyen látható, hogy az

$$l^p_{\mathbb{K}} \to (l^q_{\mathbb{K}})^*; \quad \mathbf{a} \mapsto u_{\mathbf{a}}$$

leképezés *lineáris injekció*. Ez azt jelenti, hogy az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozattér az imént felírt lineáris injekció által azonosítható az $(l^q_{\mathbb{K}})^*$ duális tér egyik lineáris alterével, ti. az $\{u_{\mathbf{a}} | \mathbf{a} \in l^p_{\mathbb{K}}\}$ halmazzal.

1.5. Gyakorlatok

1. Legyen E vektortér a K test felett és L részteste K-nak. Ekkor az E halmaz az E-beli összeadással és a $K \times E \to E$ leképezés $L \times E$-re vett leszűkítésével ellátva vektortér az L test felett; ezt a vektorteret $E_{(L)}$ jelöli. Ha E és F vektorterek a K test felett és L részteste K-nak, akkor egy $u : E \to F$ leképezést L-*lineárisnak* nevezünk, ha u lineáris operátor az $E_{(L)}$ és $F_{(L)}$ vektorterek között, vagyis ha u additív és minden $x \in E$ és $\lambda \in L$ esetén $u(\lambda.x) = \lambda.u(x)$. Mutassuk meg, hogy ha E és F vektorterek a nulla karakterisztikájú K test felett, akkor minden $u : E \to F$ *additív* függvényre teljesül az, hogy minden $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{Q}$ esetén $u(\lambda.x) = \lambda.u(x)$, vagyis az u additív függvény $\mathbb{Q}$-*lineáris.*

2. Legyen E véges dimenziós valós vektortér és $n := dim(E) > 0$. Jelölje $\mathbf{B}$ azon $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ E-beli rendszerek halmazát, amelyek algebrai bázisok E-ben.

a) Ha $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ és $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ algebrai bázisok E-ben, akkor létezik egyetlen olyan $u : E \to E$ lineáris operátor, amelyre teljesül az, hogy minden $1 \leq k \leq n$ számra $u(e_k) = f_k$; ezt az operátort nevezzük az adott algebrai bázisokat *összekötő* operátornak. Bármely két E-beli algebrai bázisra igaz, hogy az összekötő operátor bijekció, így annak determinánsa nem nulla valós szám.

b) Jelölje R azt a relációt a $\mathbf{B}$ halmaz felett, amelynek egy E-beli algebrai bázispár pontosan akkor eleme, ha az összekötő operátoruk determinánsa *pozitív.* Ekkor R *ekvivalencia* a $\mathbf{B}$ halmaz felett; a $\mathbf{B}/R$ faktorhalmazt az $Or(E)$ szimbólummal jelöljük, és az $Or(E)$ elemeit az E véges dimenziós valós vektortér *orientációinak* (vagy *irányításainak*) nevezzük. Az $\mathbb{R}^n$ aritmetikai tér *kanonikus orientációjának* nevezzük az

$Or(\mathbb{R}^n)$-nek azt az elemét, amelynek eleme az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa.

c) Jelölje $\mathbf{B}'$ az $\mathbb{R}^n \to E$ lineáris bijekciók halmazát és legyen

$$R' := \{(u, v) \in \mathbf{B}' \times \mathbf{B}' | \det(v^{-1} \circ u) > 0\}.$$

Ekkor R' ekvivalencia a $\mathbf{B}'$ halmaz felett és a $\mathbf{B}/R := Or(E)$ és $\mathbf{B}'/R'$ faktorhalmazok között létezik egy kitüntetett bijekció, ami által $\mathbf{B}'/R'$ azonosul az E orientációinak halmazával.

d) Az $Or(E)$ halmaznak pontosan két eleme van. Az $(E, \mathscr{O})$ párt *orientált* (vagy *irányított*) *vektortérnek* nevezzük, ha E nem nulladimenziós, véges dimenziós valós vektortér és $\mathscr{O} \in Or(E)$.

e) Legyen F olyan m-dimenziós *komplex* vektortér, hogy $E = F_{(\mathbb{R})}$ (ekkor $n := dim(E) = 2m$, tehát n szükségképpen páros szám). Ha $(e_k)_{1 \leq k \leq m}$ és $(f_k)_{1 \leq k \leq m}$ algebrai bázisai az F komplex vektortérnek, akkor az $(e_1, ..., e_m, i.e_1, ..., i.e_m)$ és $(f_1, ..., f_m, i.f_1, ..., i.f_m)$ rendszerek olyan algebrai bázisok az E valós vektortérben, amelyek R szerint ekvivalensek, vagyis az ezeket összekötő lineáris operátor determinánsa pozitív. Ezért az E valós vektortérnek létezik *kitüntetett* orientációja, ti. az, amelynek az $(e_1, ..., e_m, i.e_1, ..., i.e_m)$ rendszer eleme, ahol $(e_k)_{1 \leq k \leq m}$ *tetszőleges* algebrai bázisa az F komplex vektortérnek.

IX. FÜGGVÉNYTEREK ÉS FÜGGVÉNYALGEBRÁK

1. FÜGGVÉNYTEREK

2. fejezet

Függvényalgebrák

2.1. Függvényalgebrák és algebrák

Bizonyos függvényterek esetében a lineáris műveletek mellett még egy szorzás-művelet is bevezethető, amint az a következő állításból látható.

2.1.1. Állítás. *Legyen T halmaz, K test és $A := \mathscr{F}(T;K)$. Minden $x, y \in A$ esetén legyen $x \cdot y$ az a $T \to K$ függvény, amelyre minden $t \in T$ esetén*

$$(x \cdot y)(t) := x(t) \cdot y(t).$$

Jelölje $+$ és $.$ az A függvénytér lineáris műveleteit. Ekkor az

$$A \times A \to E; \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

művelet rendelkezik a következő tulajdonsággal:

(ALG) *Minden $x, y, z \in A$ és $\alpha \in K$ elemre*

$$\begin{gathered}(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);\\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;\\ (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x;\\ \alpha.(x \cdot y) = (\alpha.x) \cdot y = x \cdot (\alpha.y).\end{gathered}$$

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik a testaxiómákból. ■

2.1.2. Definíció. *Az $(A, +, ., \cdot)$ négyest* **algebrának** *nevezzük K test felett, ha az $(A, +, .)$ hármas vektortér a K test felett, és $\cdot : A \times A \to A$ olyan művelet, amelyre az előző állítás* (ALG) *feltétele teljesül.*

Tehát ha T halmaz és K test, akkor az $\mathscr{F}(T;K)$ függvényhalmaz a korábban bevezetett $+$ és $.$ vektortér-műveletekkel, valamint az előző állításban értelmezett $\cdot$ művelettel ellátva algebra a K test felett; a továbbiakban $\mathscr{F}(T;K)$-t ezekkel a műveletekkel ellátva algebrának fogjuk tekinteni. Az ilyen alakú algebrákat *teljes függvényalgebráknak* nevezzük. A teljes függvényalgebrák műveleteit *pontonként értelmezett* műveleteknek szoktuk nevezni.

Megjegyezzük, hogy a K test feletti $(A, +, ., \cdot)$ algebrát akkor nevezzük *kommutatívnak* (illetve *egységelemesnek*), ha a $\cdot$ művelet kommutatív (illetve A-nak létezik neutrális eleme a $\cdot$ művelet szerint). Világos, hogy a teljes függvényalgebrák kommutatívak és egységelemesek.

2.1.3. Definíció. *A K test feletti $(A, +, .\cdot)$ algebra* **részalgebrájának** *nevezünk minden olyan $B \subseteq A$ nem üres halmazt, amelyre minden $x, y \in B$ és $\alpha \in K$ esetén $x + y \in B$, $\alpha.x \in B$ és $x \cdot y \in B$ teljesül.*

2.2. Példák algebrákra

Példák (algebrákra).

1) Ha K test, akkor a K vekortér a K-ban értelmezett szorzással ellátva algebra a K test felett, tehát az algebra-fogalom szintén a test-fogalom általánosítása,

2) Tekintsük az $l^1_{\mathbb{K}}$ sorozatteret, és minden $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in l^1_{\mathbb{K}}$ esetén legyen

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} : \mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}(k)\mathbf{b}(n-k),$$

amit az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ sorozatok *konvolúciós szorzatának* nevezünk. A Mertens-tétel szerint $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in l^1_{\mathbb{K}}$ esetén $\mathbf{a}*\mathbf{b} \in l^1_{\mathbb{K}}$, és könnyen ellenőrizhető, hogy az $l^1_{\mathbb{K}}$ sorozattér a $*$ konvolúciós szorzással ellátva egységelemes kommutatív algebra $\mathbb{K}$ felett; ezt az algebrát az abszolút szummálható sorozatok *konvolúciós algebrájának* nevezzük. Ez *nem függvényalgebra*, mert két abszolút szummálható sorozat konvolúciós szorzata általában nem egyenlő azok pontonkénti szorzatával.

3) A $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ halmaz részalgebrája az $l^1_{\mathbb{K}}$ konvolúciós algebrának; az általa meghatározott algebrát az *egyváltozós polinomok algebrájának* nevezzük és $K[X]$-szel jelöljük.

4) Ha K tetszőleges test, akkor a K feletti egyváltozós polinomok $K^{(\mathbb{N})}$ halmaza a pontonként értelmezett összeadással és K-beli elemekkel vett szorzással, valamint a II. fejezet, 1. pont, **12**. gyakorlatban bevezetett szorzással ellátva algebra a K test felett; ezt az algebrát is $K[X]$ jelöli és a K feletti *egyváltozós polinomok algebrájának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a

$$K[X] \to \mathscr{F}(K;K); \quad P \mapsto \Big(x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} P(k)x^k\Big)$$

leképezés olyan lineáris injekció, amely a $K[X]$ polinomalgebra szorzását az $\mathscr{F}(K;K)$ függvényalgebra szorzásába viszi át.

5) Legyen E vektortér a K test felett, és tekintsük az $E \to E$ lineáris operátorok $\mathbf{L}(E;E)$ vektorterét. Ekkor $u, v \in \mathbf{L}(E;E)$ esetén $u \circ v \in \mathbf{L}(E;E)$, tehát értelmezhetjük az $\mathbf{L}(E;E)$ halmaz felett a következő kétváltozós műveletet:

$$\mathbf{L}(E;E) \times \mathbf{L}(E;E) \to \mathbf{L}(E;E); \quad (u,v) \mapsto u \circ v.$$

Könnyen belátható, hogy az $\mathbf{L}(E;E)$ vektortér ezzel a művelettel ellátva algebra a K test felett. Ez sem függvényalgebra. Az ilyen alakú algebrákat *teljes operátoralgebráknak* nevezzük, és a teljes operátoralgebrák részalgebrái az *operátoralgebrák*.

6) Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és K test. Minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{M}_n(K)$ kvadratikus mátrixra jelölje $u_{\mathfrak{a}}$ azt a $K^n \to K^n$ függvényt, amely minden $\mathbf{x} \in K^n$ elemhez a $\left(\sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{a}(i,j)\mathbf{x}(j)\right)_{i \in n} \in K^n$ elemet rendeli. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{M}_n(K)$ esetén $u_{\mathfrak{a}} \in \mathbf{L}(K^n;K^n)$, és az

$$\mathrm{M}_n(K) \to \mathbf{L}(K^n;K^n); \quad \mathfrak{a} \mapsto u_{\mathfrak{a}}$$

leképezés (kitüntetett) lineiáris bijekció az $\mathrm{M}_n(K)$ és $\mathbf{L}(K^n;K^n)$ vektorterek között. Az $\mathbf{L}(K^n;K^n)$ vektortéren az 5) példában bevezettünk szorzást (a függvénykompozíciót), amivel algebrát kaptunk. Az $\mathbf{L}(K^n;K^n)$ operátoralgebra szorzását az előző bijekcióval "áthozva" $\mathrm{M}_n(K)$-ra éppen a jól ismert mátrixszorzást kapjuk $\mathrm{M}_n(K)$ felett. Tehát

$\mathrm{M}_n(K)$ a természetesen értelmezett lineáris műveleteivel és a mátrixszorzással ellátva olyan algebra K test felett, amely kanonikusan azonosítható az $\mathbf{L}(K^n; K^n)$ teljes operátoralgebrával. Az ilyen alakú algebrákat K feletti *teljes mátrixalgebráknak* nevezzük, és ezek részalgebrái a K feletti *mátrixalgebrák*. Tehát a definíció szerint a mátrixalgebrák speciális operátoralgebrák. Ha $n > 1$ és K nem a triviális test, akkor a teljes mátrixalgebrák sem függvényalgebrák.

7) Ha $T \subseteq \mathbb{K}$ tetszőleges halmaz, akkor a $T \to \mathbb{K}$ folytonos függvények $\mathscr{C}(T; \mathbb{K})$ vektortere a függvények pontonként értelmezett szorzásával ellátva (általában nem teljes) függvényalgebra. Ennek részalgebrája a $T \to \mathbb{K}$ korlátos és folytonos függvények $\mathscr{C}^b(T; \mathbb{K})$ halmaza.

8) Ha $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, akkor az $\Omega \to \mathbb{K}$ differenciálható függvények vektortere a függvények pontonként értelmezett szorzásával ellátva (általában nem teljes) függvényalgebra.

2.3. Gyakorlatok

1. A K test feletti A és B algebrák közötti *algebra-morfizmusnak* nevezünk minden olyan $u : A \to B$ leképezést, amely lineáris operátor az A és B vektorterek között (tehát *additív* és *K-homogén*), továbbá *multiplikatív* is, vagyis minden $a, a' \in A$ esetén $u(a \cdot a') = u(a) \cdot u(a')$ teljesül. Azt mondjuk, hogy u *algebra-izomorfizmus* az A és B algebrák között, ha $u : A \to B$ olyan bijekció, amely algebra-morfizmus A és B között, és u^{-1} algebra-morfizmus B és A között. Két algebrát *izomorfnak* nevezünk, ha létezik közöttük algebra-izomorfizmus.

a) Ha A és B algebrák a K test felett, akkor minden $A \to B$ bijektív algebra-morfizmus szükségképpen algebra-izomorfizmus.

b) Legyen A algebra a K test felett, és jelölje $\mathrm{X}(A)$ az $A \to K$ nem nulla algebra-morfizmusok halmazát. $\mathrm{X}(A)$-t az A *karakter-terének* nevezzük, és ennek elemei az A algebra *karakterei*. Ekkor a

$$\mathscr{G}_A : A \to \mathscr{F}(\mathrm{X}(A); K); \qquad a \mapsto (\chi \mapsto \chi(a))$$

leképezés algebra-morfizmus az A algebra és a $\mathscr{F}(\mathrm{X}(A); K)$ függvényalgebra között; ezt a leképezést nevezzük az A algebra *Gelfand-reprezentációjának*.

c) Ha T halmaz és K test, akkor T kanonikusan azonosítható a $\mathscr{F}(T; K)$ függvényalgebra karakterterének egy részhalmazával, vagyis létezik egy kitüntetett $T \to \mathrm{X}(\mathscr{F}(T; K))$ injekció (amely által T azonosítható az $\mathrm{X}(\mathscr{F}(T; K))$ karakter-tér egy részhalmazával).

2. Legyen A algebra a K test felett, és $\tilde{A} := K \times A$. Értelmezzük azokat a $+ : A \times A \to A$, $\cdot : A \times A \to A$ és $. : K \times A \to A$ függvényeket, amelyekre minden $a, a' \in A$ és $\alpha, \lambda, \lambda' \in K$ esetén:

$$(\lambda, a) + (\lambda', a') := (\lambda + \lambda', a + a');$$
$$(\lambda, a) \cdot (\lambda', a') := (\lambda \cdot \lambda', \lambda.a' + \lambda'.a + a \cdot a');$$
$$\lambda'.(\lambda, a) := (\lambda' \cdot \lambda, \lambda'.a).$$

a) Az $(\tilde{A}, +, ., \cdot)$ négyes olyan *egységelemes* algebra a K test felett, amelynek $\mathbf{1}_{\tilde{A}} := (1, 0)$ a multiplikatív neutrális eleme. Továbbá, a

$$j_A : A \to \tilde{A}; \qquad a \mapsto (0, a)$$

leképezés injektív algebra-morfizmus az A és $\tilde{A}$ algebrák között. Ezáltal az A algebra azonosul $\{(0,a) \in \tilde{A} | a \in A\}$-val, ami részalgebrája $\tilde{A}$-nak.

b) Ha C egységelemes algebra (amelynek egységelemét $\mathbf{1}_C$ jelöli), és $u : A \to C$ algebra-morfizmus, akkor létezik egyetlen olyan $\tilde{u} : \tilde{A} \to C$ algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{u}(\mathbf{1}_{\tilde{A}}) = \mathbf{1}_C$ (vagyis $\tilde{u}$ *egységelem-tartó*), és $\tilde{u} \circ j_A = u$ teljesül.

c) Az előző pontban megfogalmazott tulajdonság izomorfia erejéig egyértelműen meghatározza az $\tilde{A}$ algebrát és a $j_A : A \to \tilde{A}$ leképezést. Ez azt jelenti, hogy ha (B, j) olyan pár, hogy B egységelemes algebra K felett, és $j : A \to B$ algebra-morfizmus, továbbá minden C egységelemes algebrához és $u : A \to C$ algebra-morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\tilde{u} : B \to C$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{u} \circ j = u$, akkor egyértelműen létezik olyan $v : \tilde{A} \to B$ algebra-izomorfizmus, amelyre $j \circ v = j_A$.

(Az $\tilde{A}$ egységelemes algebrát az A algebra *standard egységelemesítésének* nevezzük.)

3. Legyen A algebra a K test felett. Egy $\mathfrak{m} \subseteq A$ halmazt *ideálnak* nevezünk A-ban, ha $\mathfrak{m}$ lineáris altere az A vektortérnek, és minden $a \in A$ és $a' \in \mathfrak{m}$ elemre $a \cdot a' \in \mathfrak{m}$ és $a' \cdot a \in \mathfrak{m}$ teljesül. Az A algebra A-tól különböző ideáljait *valódi* ideáloknak nevezzük.

a) Ha $\mathfrak{m}$ ideál A-ban, akkor az $A/\mathfrak{m}$ lineáris faktortér felett egyértelműen létezik olyan $\cdot$ művelet, hogy minden $a, a' \in A$ esetén $\pi_{A/\mathfrak{m}}(a \cdot a') = \pi_{A/\mathfrak{m}}(a) \cdot \pi_{A/\mathfrak{m}}(a')$ teljesül, ahol $\pi_{A/\mathfrak{m}} : A \to A/\mathfrak{m}$ a kanonikus szürjekció. Az $A/\mathfrak{m}$ vektorteret ezzel a művelettel ellátva az A algebra $\mathfrak{m}$ ideál szerinti *faktoralgebrájának* nevezzük.

b) Ha A kommutatív és egységelemes, továbbá $\mathfrak{m}$ ideál A-ban, akkor az $(A/\mathfrak{m}, +, \cdot)$ hármas pontosan akkor test, ha $\mathfrak{m}$ tartalmazás tekintetében maximális valódi ideál A-ban.

c) Ha K test és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > 1$, akkor az $\mathrm{M}_n(K)$ mátrixalgebrának $\{0\}$ az egyetlen valódi ideálja.

(*Útmutatás.* c) Legyen K test és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > 1$. Minden $i, j \in n$ számra jelölje $\mathbf{e}_{i,j}$ azt az elemet $\mathrm{M}_n(K)$-ban, amelyre minden $k, l \in n$ esetén $\mathbf{e}_{i,j}(k,l) = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$, ahol $\delta_{i,k}$ (a *Kronecker-delta*) az az elem K-ban, amely 1, ha $i = k$, és 0, ha $i \neq k$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $i, j, k, l \in n$ esetén minden $\mathrm{M}_n(K) \ni a$-ra $\mathbf{e}_{i,k} \cdot a \cdot \mathbf{e}_{l,j} = a(k,l).\mathbf{e}_{i,j}$. Nyilvánvaló az is, hogy minden $\mathrm{M}_n(K) \ni a$-ra

$$a = \sum_{i,j \in n} a(i,j).\mathbf{e}_{i,j}$$

teljesül. Legyen most $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{M}_n(K)$ olyan ideál, hogy $\mathfrak{m} \neq \{0\}$. Legyen $a \in \mathfrak{m}$ tetszőlegesen rögzített nem nulla elem. Legyenek $k, l \in n$ olyan indexek, hogy $a(k,l) \neq 0$. Ekkor minden $i, j \in n$ esetén

$$\mathbf{e}_{i,j} = a(k,l)^{-1}.(\mathbf{e}_{i,k} \cdot a \cdot \mathbf{e}_{l,j}) \in \mathfrak{m},$$

amiből következik, hogy $\mathfrak{m} = \mathrm{M}_n(K)$.)

4. Tekintsük a következő 2×2-es komplex mátrixokból álló halmazt:

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$

a) Ha $q, q' \in \mathbb{H}$, akkor $q + q' \in \mathbb{H}$ és $q \cdot q' \in \mathbb{H}$, ahol $+$ és $\cdot$ a mátrixösszeadást és a mátrixszorzást jelöli.

b) Ha $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, akkor a q mátrix *invertálható* és $q^{-1} \in \mathbb{H}$.

c) A $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ hármasra a szorzás kommutativitásának kivételével az összes testaxióma teljesül; az ilyen tulajdonságú objektumokat *ferdetesteknek* nevezzük. Az imént értelmezett ferdetest a *kvaternió-ferdetest*, és a $\mathbb{H}$ elemei a *kvaterniók*.

d) A $\mathbb{C} \to \mathbb{H};\ z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$ leképezés injektív és művelettartó; ezáltal a komplex számok teste kanonikusan azonosul a kvaternió-ferdetest egyik résztestével.

e) Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $q \in \mathbb{H}$ esetén $\lambda.q \in \mathbb{H}$, továbbá, ha . jelöli az

$$\mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}; \quad (\lambda, q) \mapsto \lambda.q$$

leképezést, akkor a $(\mathbb{H}, +, ., \cdot)$ négyes algebra $\mathbb{R}$ felett. Ebben a valós algebrában az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

elemek algebrai bázist alkotnak, tehát ez valós négydimenziós algebra.

5. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és K test. Minden $A \in \mathrm{M}_n(K)$ mátrixra

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \varepsilon_n(\sigma) \Big(\mathop{\mathrm{P}}_{k \in n} A_{k,\sigma(k)} \Big),$$

és a $\det(A) \in K$ elemet az A mátrix **determinánsának** nevezzük.

Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$ és K test, akkor minden $\lambda \in K$ és $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ esetén

$$\det(\lambda.A) = \lambda^n \det(A),$$
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3. fejezet

Normált terek

3.1. Normák

Nyilvánvaló, hogy a $\mathbb{K}$ testtel kapcsolatos egyváltozós elemi analízis létezése a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény létezésén és annak tulajdonságain múlik. Ezért várható, hogy a többdimenziós analízis felépítéséhez szükség lesz az abszolútérték-függvény fogalmának többdimenziós általánosítására.

3.1.1. Definíció. *Legyen E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. Egy $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ leképezést* **norma-függvénynek**, *vagy egyszerűen* **normának** *nevezünk E felett, ha teljesülnek rá a következők.*

($\mathrm{NO_I}$) *Minden $x \in E$ esetén $\|x\| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$.*

($\mathrm{NO_{II}}$) *Minden $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x \in E$ esetén $\|\lambda.x\| = |\lambda|\|x\|$.*

($\mathrm{NO_{III}}$) *Minden $x, y \in E$ esetén $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$* (**háromszög-egyenlőtlenség**).

Az $(E, \|\cdot\|)$ párt **normált térnek** *nevezzük $\mathbb{K}$ felett, ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett és $\|\cdot\|$ norma-függvény E felett.*

Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor minden $x, y \in E$ esetén

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül, mert az ($\mathrm{NO_{II}}$) miatt minden $z \in E$ vektorra $\| - z\| = \|z\|$, és a háromszög-egyenlőtlenség alapján $\|x\| = \|y+(x-y)\| \leq \|y\|+\|x-y\|$, továbbá $\|y\| = \|x+(y-x)\| \leq \|x\| + \|y - x\| = \|x\| + \|x - y\|$.

3.1.2. Állítás. *Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, F vektortér és $u : F \to E$ lineáris injekció, akkor a $\|\cdot\| \circ u : F \to \mathbb{R}_+$ leképezés norma F felett.*

Bizonyítás. A $\|\cdot\|$ normára ($\mathrm{NO_I}$) teljesül, ezért ha $x \in F$, akkor $(\|\cdot\| \circ u)(x) = 0$ pontosan akkor igaz, ha $u(x) = 0$, ami az u injektivitása folytán azzal ekvivalens, hogy $x = 0$. Ezért ($\mathrm{NO_I}$) a $\|\cdot\| \circ u$-ra is teljesül. A $\|\cdot\|$ normára ($\mathrm{NO_{II}}$) teljesül, ezért az u homogenitása miatt ($\mathrm{NO_{II}}$) a $\|\cdot\| \circ u$-ra is igaz. Végül, a $\|\cdot\|$ normára ($\mathrm{NO_{III}}$) teljesül, így az u additivitása folytán ($\mathrm{NO_{III}}$) a $\|\cdot\| \circ u$-ra is igaz. ■

3.1.3. Definíció. *Az $(E, \|\cdot\|)$ normált tér* **normált alterének** *nevezünk minden olyan $(F, \|\cdot\| \circ u)$ párt, amelyre teljesül az, hogy F lineáris altere az E vektortérnek és u az $F \to E$ kanonikus injekció* (*vagyis $\|\cdot\| \circ u$ egyenlő a $\|\cdot\|$ norma F-re vett leszűkítésével*).

3.2. Példák normált terekre

3.2.1. Állítás. *Minden valós vagy komplex vektortér felett létezik norma.*

Bizonyítás. Legyen E nem nulla dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett és B algebrai bázishalmaz E-ben (**ALG** 8.5.8.). Ekkor az

$$\mathbb{K}^{(B)} \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \max_{b \in B} |f(b)|$$

leképezés nyilvánvalóan norma a $\mathbb{K}^{(B)}$ függvénytér felett, tehát $\mathbb{K}^{(B)}$ felett *létezik* norma. Továbbá, az

$$u_B :: \mathbb{K}^{(B)} \to E; \quad x \mapsto \sum_{b \in B} x(b).b$$

leképezés lineáris bijekció (**ALG** 8.5.13.), tehát ha $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{K}^{(B)}$ felett, akkor 3.1.2. szerint $\|\cdot\| \circ u_B^{-1}$ norma E felett. ■

Példák (normált terekre).

1) Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $p \geq 1$ valós szám. Ekkor a

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+; \quad \mathbf{x} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{x}(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés az elemi Minkowski-egyenlőtlenség alapján norma a $\mathbb{K}^n$ vektortér felett. A $\|\cdot\|_2$ normát (amelynek fontos speciális tulajdonságai vannak) *euklidészi normának* nevezzük $\mathbb{K}^n$ felett.

2) Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor a

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+ \quad \mathbf{x} \mapsto \max_{0 \leq k \leq n-1} |\mathbf{x}(k)|$$

leképezés norma $\mathbb{K}^n$ felett; ezt nevezzük *max-normának* $\mathbb{K}^n$ felett.

3) Legyen $p \geq 1$ valós szám, és tekintsük az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozatteret. Ekkor a

$$\|\cdot\|_p : l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}_+; \quad \mathbf{x} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{x}(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés norma $l^p_{\mathbb{K}}$ felett. A $\|\cdot\|_2$ normát (amelynek fontos speciális tulajdonságai vannak) *euklidészi normának* nevezzük $l^2_{\mathbb{K}}$ felett.

4) Az $l^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozattér felett a

$$\|\cdot\|_\infty : l^\infty_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}_+ \quad \mathbf{x} \mapsto \sup_{k \in \mathbb{N}} |\mathbf{x}(k)|$$

leképezés norma; ezt nevezzük *sup-normának* $l^\infty_{\mathbb{K}}$ felett.

5) Az előző példa a következőképpen általánosítható. Legyen T nem üres halmaz, és a $T \to \mathbb{K}$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{K})$ terén tekintsük a

$$\mathscr{F}^b(T;\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t \in T} |f(t)|$$

leképezést. Ez norma a $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{K})$ függvénytér felett, és ezt *sup-normának* nevezzük $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{K})$ felett.

6) Tekintsük a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ sorozatteret, amely minden $p \geq 1$ valós számra lineáris altere az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozattérnek. Ezért a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ felett minden $p \geq 1$ valós számra vehetjük a $\|\cdot\|_p$ norma leszűkítését.

3.3. Normált algebrák

3.3.1. Definíció. *Az* $(A, \|\cdot\|)$ *párt* **normált algebrának** *nevezzük a* $\mathbb{K}$ *test felett, ha* A *algebra* $\mathbb{K}$ *felett, és* $\|\cdot\|$ *norma az* A *vektortér felett, továbbá minden* $a, b \in A$ *esetén*

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\|\|b\|$$

teljesül (*amit úgy fejezünk ki, hogy a* $\|\cdot\|$ *norma* **szubmultiplikatív**).

Példák (normált algebrákra).

1) Legyen T halmaz és $A := \mathscr{F}^b(T; \mathbb{K})$ a $T \to \mathbb{K}$ korlátos függvények algebrája. Ekkor A a sup-normával ellátva normált algebra. Speciálisan:

- az $l^\infty_\mathbb{K}$ sorozattér a pontonként értelmezett szorzással és a $\|\cdot\|_\infty$ sup-normával ellátva normált algebra;

- ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor $\mathbb{K}^n$ a komponensenként értelmezett szorzással és a $\|\cdot\|_\infty$ max-normával ellátva normált algebra.

2) Az $l^1_\mathbb{K}$ sorozattér a konvolúciós szorzással és a $\|\cdot\|_1$ normával ellátva normált algebra.

Később majd bizonyos operátoralgebrákon is bevezetünk olyan normát, amellyel azok normált algebrák lesznek.

3.4. Gyakorlatok

1. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, amelyre teljesül az, hogy minden $(E, \|\cdot\|)$ normált térre $f \circ \|\cdot\|$ norma E felett. Ekkor egyértelműen létezik olyan $C > 0$ valós szám, amelyre minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén $f(t) = C \cdot t$.

2. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ rögzítve. Ha $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tetszőleges és $p \geq 1$ valós szám, akkor a

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+; \quad \mathbf{x} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}(k) |\mathbf{x}(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+; \quad \mathbf{x} \mapsto \max_{0 \leq k \leq n-1} (\mathbf{a}(k)|\mathbf{x}(k)|)$$

leképezések normák $\mathbb{K}^n$ felett. Minden $p \geq 1$ valós számra a

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+; \quad \mathbf{x} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} |\mathbf{x}(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+; \quad \mathbf{x} \mapsto \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} |\mathbf{x}(j)| \right)$$

leképezések normák $\mathbb{K}^n$ felett.

3. A $\mathbb{H} \to \mathbb{R}_+$; $q \mapsto \sqrt{\det(q)}$ leképezés *abszolútérték-függvény* a $\mathbb{H}$ kvaternió ferdetest felett, vagyis teljesülnek rá a $(\mathrm{VA_I})$, $(\mathrm{VA_{II}})$ és $(\mathrm{VA_{III}})$ tulajdonságok. Ennek a függvénynek a leszűkítése $\mathbb{C}$-re (a $\mathbb{C}$-t a $\mathbb{H}$ résztestének tekintve) pontosan a $\mathbb{C}$ feletti euklideszi abszolútérték-függvény. Ezzel az abszolútérték-függvénnyel ellátva a kvaternió ferdetest valós, négydimenziós, nem kommutatív normált algebra.

X. rész

Metrikus terek

BEVEZETÉS

Az analízis legfontosabb feladata bizonyos matematikai objektumok egymáshoz való "közelségének" pontos és tartalmas értelmezése. A valós számok fogalmának bevezetése után lehetőség nyílik arra, hogy egy halmaz pontjainak egymástól mért "távolságát" pozitív valós számokkal mérjük. Pontosabban: ha egy halmaz minden elempárjához egy nemnegatív valós számot rendelünk, akkor azt mondhatjuk, hogy a halmaz két pontja ε-közelségben van egymáshoz, ahol $\varepsilon > 0$ valós szám, ha a két pont által meghatározott párhoz rendelt valós szám (vagyis azok "távolsága") kisebb ε-nál.

Természetesen ahhoz, hogy az így értelmezett közelség-fogalom rendelkezzék a vele szemben támasztható természetes elvárásoknak; a halmazzal kapcsolatban bevezetett távolság-függvényre szükséges néhány feltételt előírni. A fejezet első pontjában éppen ilyen követelményeket fogalmazunk meg a *metrikák*, vagy *távolság-függvények* definíciójában; ezek az $(\mathrm{M_I})$, $(\mathrm{M_{II}})$ és $(\mathrm{M_{III}})$ feltételek. Az (M, d) párt *metrikus térnek* nevezzük, ha d metrika az M halmaz felett.

Kiderül, hogy minden halmazon bevezethető távolság-fogalom, és minden végtelen halmaz felett sokféle metrika létezik. Ezért különös jelentősége van minden olyan állításnak, amely valamely halmazon valamilyen szempontból *kitüntetett* metrikák létezését mondja ki. Ilyen metrikák test felett az abszolútértékekből, illetve vektorterek felett a normákból származtatható metrikák.

A metrikák segítségével azonnal megadható természetes módon a *gömbök* fogalma, és azok által bevezethetők a *nyílt* és a *zárt* halmazok. A fejezetben mindenütt érezhető lesz a metrika által meghatározott nyílthalmaz-fogalomnak, vagyis a metrika által generált *topológiának* a jelentősége. A második fejezetben csak a legelemibb topológiai fogalmakról lesz szó. Értelmezzük a metrikák, illetve normák *ekvivalenciáját*, ami azt jelenti hogy az általuk meghatározott nyílt halmazok ugyanazok, továbbá jellemezni fogjuk a normák ekvivalenciáját. Mivel a metrikus és normált terekkel kapcsolatban sok olyan tulajdonság, illetve objektum megadható, amelyek a metrikától csak az általa meghatározott nyílt halmazokon keresztül függenek (ezeket nevezzük *topologikus* tulajdonságoknak, illetve objektumoknak), így fontos a pontok *környezeteinek* fogalma, hiszen látható lesz, hogy minden olyan tulajdonság, illetve objektum, amelyet környezetek segítségével értelmezünk automatikusan topologikus jellegű lesz.

Az egyik legfontosabb tulajdonság a metrikus térben haladó sorozatok *konvergenciája*; ezzel foglalkozunk a harmadik fejezetben. Ezután könnyen értelmezhető a normált térben haladó sorok konvergenciája. Látjuk majd, hogy a konvergens sorozatokkal jellemezhetők a halmazok *érintési* és *torlódási pontjai.* Itt vezetjük be a halmazok *sűrűségének* és a metrikus terek *szeparabilitásának* fogalmát. Az analízisben sok olyan tétel van, amelyek érvényességéhez szükséges a tételben szereplő metrikus vagy normált tér szeparabilitása.

Lényegesek azok a módszerek, amelyek segíségével már létező metrikus terekből újabbak állíthatók elő. Már az első pontban bemutatunk ilyen (egészen triviális) eljárást; a *metrikus alterek* konstrukcióját. A negyedik fejezetben metrikus és normált terek *szorzatáról* lesz szó. A metrikus terek szorzása lehetővé teszi egyszerűbb metrikus terekből bonyolultabbak előállítását. Megvizsgáljuk a metrikus szorzatterek néhány topologikus tulajdonságát, valamint a metrikus szorzatterekben haladó sorozatok konvergenciáját.

A $\mathbb{K}$ testtel kapcsolatos topológiai meggondolásokban fontos szerepet játszanak az euklidészi metrika szerint korlátos és zárt halmazok. Ezek szerepét a metrikus terekben speciális korlátos és zárt halmazok veszik át: a *kompakt* halmazok. Az ötödik fejezetben értelmezzük a kompakt, relatív kompakt és teljesen korlátos halmazokat, továbbá megvizsgáljuk ezek egymással való kapcsolatait. Egyszerű topológiai jellemzést adunk metrikus terek kompaktságára, majd igazoljuk a Bolzano-Weierstrass tételt, ami gyakorlati szempontból jól használható jellemzése a halmazok kompaktságának sorozatok segítségével. Bebizonyítjuk, hogy minden véges dimenziós valós vagy komplex vektortér felett bármely két norma ekvivalens. Ez elvi fontosságú tény, mert megmutatja, hogy a $\mathbb{K}$ feletti véges dimenziós vektorterek felett létezik egy nemtriviális kitüntetett nyílthalmaz-fogalom (azaz topológia), bár az általános esetben sem kitüntetett norma, sem kitüntetett nemtriviális metrika nem létezik rajtuk.

A 6., 7. és 8. fejezetben a metrikus terek között ható függvényeket vizsgáljuk. A hatodik fejezetben bevezetjük az általános *határérték-fogalmat*, és megvizsgáljuk annak tulajdonságait. A hetedik fejezetben értelmezzük a metrikus terek között ható függvények *folytonosságát* és *egyenletes folytonosságát*, majd bevezetünk néhány speciális egyenletesen folytonos függvény-típust. Részletesen elemezzük a metrikus téren értelmezett, valós értékű nemtriviális folytonos függvények létezésének problémáját, és megmutatjuk, hogy metrikus térben a zárt halmazok karakterisztikus függvényei bizonyos értelemben jól közelíthetők folytonos függvényekkel. A nyolcadik fejezetben olyan tényekről lesz szó, amelyek a kompakt halmazokon folytonos függvények speciális tulajdonságaival kapcsolatosak. Az eredmények alkalmazásával lehetővé válik a véges dimenziós normált terek kompakt részhalmazainak újabb jellemzése, továbbá viszonylag elemi bizonyítást adhatunk az *algebra alaptételére.* A metrikus terek közötti folytonos függvényekre vonatkozó *Heine-tétel* alapján igzoljuk a konstruktív függvénytan egyik nevezetes tételét: a a folytonos függvények *Bernstein-polinomokkal* való egyenletes közelíthetőségének tételét.

A metrikus terek elméletében egészen fontos szerepet játszik a *teljesség* fogalma; ennek a témának szenteljük a kilencedik fejezetet. Metrikus terekre könnyen általánosítható a *Cauchy-sorozatok* fogalma, és kiderül, hogy nagyon sok metrikus térben léteznek nem konvergens Cauchy-sorozatok. A *teljes metrikus terek* éppen azok, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens. A Cauchy-sorozatok segítségével megadható a teljesen korlátos halmazok Hausdorff-féle jellemzése, amiből a halmazok kompaktságának metrikus karakterizációja származtatható. Bevezetjük a teljes normált terek, vagyis a *Banach-terek* fogalmát, és megmutatjuk a normált terek teljessége szoros kapcsolatban áll az abszolút konvergens sorok konvergenciájával. Bebizonyítjuk a metrikus tér sűrű részhalmazán értelmezett, teljes metrikus térbe ható, egyenletesen folytonos függvények egyértelmű folytonos kiterjeszthetőségét. Azt is látni fogjuk, hogy minden metrikus tér *teljessé tehető*, tehát azonosítható egy teljes metrikus tér sűrű metrikus alterével. A teljes metrikus terekkel kapcsolatos számos egzisztencia-tétel közül egy viszonylag egyszerű, de nagyon jól alkalmazható állítást bizonyítunk: a *Banach-féle fixponttételt.* Később ennek segítségével tudjuk bizonyítani az *implicitfüggvény-tételt* (**DIF** 11.2.1.) és a közönséges differenciálegyenletekkel kapcsolatos Cauchy-feladat megoldásának lokális egzisztenciáját (**GEO** 4.2.2.).

Már a valós változós, valós értékű függvények elemi analízise közben is látható, hogy az intervallumon értelmezett folytonos függvényeknek fontos speciális tulajdonságaik vannak. Az intervallumok topológiai szempontú általánosításai metrikus terekben az az *ívszerűen összefüggő* és az *összefüggő* halmazok. Ezekkel a tizedik fejezetben foglalkozunk.

Az utolsó fejezetben a függvénysorozatok és függvénysorok *pontonkénti*, *lokálisan egyenletes* és *egyenletes* konvergenciájáról lesz szó, és megvizsgáljuk a függvények bizonyos topológiai tulajdonságainak *öröklődését* a határérték-függvényekre. Különös hangsúlyt kap a normált terekbe vezető függvénysorok normális konvergenciája és az ezzel kapcsolatos Weierstrass-tétel, valamint ennek következményeként a hatványfüggvény-sorok konvergenciájára vonatkozó Cauchy–Hadamard-tétel és a hatványsorok összegfüggvényének radiális folytonosságáról szóló Abel-tétel. A fejezetet az ekvifolytonos és egyenletesen ekvifolytonos függvényhalmazok bevezetésével zárjuk, és jellemzést adunk kompakt metrikus térből metrikus térbe vezető folytonos függvények halmazának teljes korlátosságára a sup-metrika szerint (metrikus Ascoli-tétel), majd ennek alkalmazásaként igazoljuk az Ascoli–Arzelá-tételt, amely fontos alkalmazást nyer a véges dimenziós normált térbeli Cauchy-feladatok megoldásának egzisztenciája bizonyításában (Peano-tétel).

Irodalomjegyzék

[1] N. Bourbaki, **Éleménts de mathématique. Topologie générale.** Hermann, Paris, 1971.

[2] Császár Ákos, **Bevezetés az általános topológiába**, Akadémiai Kiadó, 1970.

[3] J. L. Kelley, **General Topology**, D. Van Nostrand Co., 1957.

[4] K. Kuratowski, **Topology**, vols. I-II, Acad. Press, 1968

[5] H. Schubert, **Topológia**, Műszaki Könyvkiadó, 1986.

[6] Г. Е. Шилов, **Математический анализ, Функции одного переменного**, Наука, Москва, 1969.

1. fejezet

A metrikus terek alaptulajdonságai

1.1. Metrikák és metrikus terek

1.1.1. Definíció. *Ha M halmaz, akkor egy $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ függvényt* **metrikának**, *vagy* **távolság-függvénynek** *nevezünk M felett, ha d-re teljesülnek a következők.*

$(\mathrm{M_I})$ *Minden $x, y \in M$ esetén $d(x, y) = 0$ ekvivalens azzal, hogy $x = y$.*

$(\mathrm{M_{II}})$ *Minden $x, y \in M$ esetén $d(x, y) = d(y, x)$* (**szimmetria**).

$(\mathrm{M_{III}})$ *Minden $x, y, z \in M$ esetén $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$* (**háromszög-egyenlőtlenség**).

Az (M, d) párt **metrikus térnek** *nevezzük, ha d metrika az M halmaz felett.*

Példák (metrikus terekre).

1) Legyen M halmaz és

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \neq y \\ 0 & \text{, ha } x = y. \end{cases}$$

Ekkor d metrika M felett, amit az M halmaz feletti *diszkrét* metrikának nevezünk. Az (M, d) párt *diszkrét metrikus térnek* nevezzük, ha d a diszkrét metrika az M halmaz felett.

2) Ha d metrika az M halmaz felett, akkor az

$$d \wedge 1 : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \min(d(x, y), 1),$$

$$\frac{d}{d+1} : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}$$

függvények is metrikák a M felett.

3) Legyen K test és $|\cdot|$ abszolútérték K felett. Ekkor a

$$K \times K \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto |x - y|$$

függvény metrika K felett, amit az $|\cdot|$ *abszolútérték által generált* K feletti metrikának nevezünk, és $\mathrm{d}_{|\cdot|}$-kel jelölünk. Ha $|\cdot|$ az improprius abszolútérték K felett, akkor $\mathrm{d}_{|\cdot|}$ a diszkrét metrika K felett.

4) Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor az

$$E \times E \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

függvény metrika E felett, amit a $\|\cdot\|$ *norma által generált* E feletti metrikának nevezünk, és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$-val jelölünk. Speciálisan, minden $p \geq 1$ valós számra a $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozattéren vehetjük a $\|\cdot\|_p$ norma által generált metrikát. Továbbá, a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ sorozattéren minden $p \geq 1$ valós számra vehetjük a $\|\cdot\|_p$ norma $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-re vett leszűkítése által generált metrikát.

1.1.2. Definíció. *Ha M halmaz, akkor egy $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ függvényt* **félmetrikának***, vagy* **eltérés-függvénynek** *nevezünk M felett, ha d-re teljesülnek az* ($\mathrm{M_{II}}$) *és* ($\mathrm{M_{III}}$) *feltételek, valamint* ($\mathrm{M_I}$) *helyett a következő gyengébb feltétel:*

($\mathrm{M'_I}$) *Minden $x \in M$ esetén $d(x, x) = 0$.*

Az (M, d) párt **félmetrikus térnek** *nevezzük, ha d félmetrika az M halmaz felett.*

Tehát ha (M, d) félmetrikus tér, akkor lehetséges az, hogy $x, y \in M$, $x \neq y$, de $d(x, y) = 0$.

Példák (félmetrikus terekre).

1) Ha M halmaz, akkor az $M \times M \to \mathbb{R}_+$ azonosan 0 függvény nyilvánvalóan félmetrika M felett.

2) Jelölje E az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények terét, és legyen

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+; \quad (f, g) \mapsto \int |f - g|.$$

Ekkor d olyan félmetrika E felett, amely nem metrika, mert $f, g \in E$ esetén $d(f, g) = 0$ teljesül akkor is, ha az $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ halmaz nem üres, de *véges*.

1.2. Normából származtatható metrika jellemzése

1.2.1. Definíció. *Ha E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, akkor az E feletti d metrikát* **normálhatónak** *nevezzük, ha létezik olyan $\|\cdot\|$ norma E felett, amelyre $d = \mathrm{d}_{\|\cdot\|}$.*

Nyilvánvaló, hogy ha E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, akkor minden E feletti $\|\cdot\|$ normára és $x \in E$ vektorra $\|x\| = \|x - 0\| = \mathrm{d}_{\|\cdot\|}(x, 0)$, ezért minden E feletti d normálható metrikához *egyértelműen* létezik olyan $\|\cdot\|$ norma E felett, amelyre $d = \mathrm{d}_{\|\cdot\|}$.

1.2.2. Állítás. *Ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor az E feletti d metrika pontosan akkor normálható, ha teljesülnek rá a következők.*

a) *Minden $x, y, z \in E$ esetén $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, vagyis a d metrika* **transzláció-invariáns**.

b) *Minden $x, y \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $d(\lambda.x, \lambda.y) = |\lambda| d(x, y)$.*

Bizonyítás. Ha $\|\cdot\|$ olyan norma E felett, amelyre $d = \mathrm{d}_{\|\cdot\|}$, akkor $x, y, z \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$d(x + z, y + z) := \|(x + z) - (y + x)\| = \|x - y\| = d(x, y),$$

továbbá $x, y \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén az ($\mathrm{NO_{II}}$) szerint

$$d(\lambda.x, \lambda.y) := \|\lambda.x - \lambda.y\| = \|\lambda.(x - y)\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d(x, y),$$

tehát d-re a) és b) teljesül.

Megfordítva, tegyük fel, hogy d-re a) és b) teljesül, és értelmezzük a

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto d(x,0)$$

függvény. Állítjuk, hogy ez az a norma E felett, amelyre $d = \mathrm{d}_{\|\cdot\|}$. Valóban, a $\|\cdot\|$ függvényre vonatkozóan $(\mathrm{NO_I})$ azt jelenti, hogy minden $x \in E$ vektorra, a $d(x,0) = \|x\| = 0$ és $x = 0$ egyenlőségek ekvivalensek. Ez a d-re vonatkozó $(\mathrm{M_I})$ feltételből nyilvánvalóan következik. Továbbá, a $\|\cdot\|$ függvényre $(\mathrm{NO_{II}})$ is igaz, mert minden $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén a b) alkalmazásával

$$\|\lambda.x\| := d(\lambda.x, 0) = d(\lambda.x, \lambda.0) = |\lambda| d(x,0) = |\lambda|\|x\|.$$

A $\|\cdot\|$ függvényre $(\mathrm{NO_{III}})$ is teljesül, mert ha $x, y, z \in E$, akkor az a) alapján $d(x+y, y)=d(x+y, 0+y)=d(x,0)$, így a d-re vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből

$$\|x+y\| := d(x+y, 0) \leq d(x+y, y) + d(y,0) = d(x,0) + d(y,0) = \|x\| + \|y\|$$

következik. Ezzel beláttuk, hogy a $\|\cdot\|$ függvény norma E felett. Ha $x, y \in E$, akkor az a) alapján $d(x-y, 0) = d((x-y)+y, 0+y) = d(x,y)$, így

$$\mathrm{d}_{\|\cdot\|}(x,y) := \|x-y\| := d(x-y, 0) = d(x,y),$$

vagyis $d = \mathrm{d}_{\|\cdot\|}$, tehát a d metrika normálható. ■

1.3. Metrikus alterek és izometriák

1.3.1. Állítás. *Ha (M,d) metrikus tér, M' halmaz és $f : M' \to M$ injekció, akkor az*

$$d' : M' \times M' \to \mathbb{R}_+; \quad (x,y) \mapsto d(f(x), f(y))$$

leképezés metrika M' felett.

Bizonyítás. Ha $x, y \in M'$, akkor a d-re vonatkozó $(\mathrm{M_I})$ feltétel és f injektivitása folytán

$$d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y,$$

tehát d'-re $(\mathrm{M_I})$ teljesül. Ha $x, y \in M$, akkor a d szimmetrikussága miatt

$$d'(x,y) := d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x)) = d'(y,x),$$

tehát d' is szimmetrikus. Végül, ha $x, y, z \in M$, akkor a d-re vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$d'(x,y) := d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(x)) = d'(x,z) + d'(z,y)$$

adódik, tehát a háromszög-egyenlőtlenség d'-re is igaz. ■

Az előző állítás speciális esete az, amikor (M,d) metrikus tér, $M' \subseteq M$, és $f := \mathrm{id}_{M'}$; ekkor az állításban értelmezett M' feletti metrika nyilvánvalóan egyenlő a $d|_{M' \times M'}$ leszűkített függvénnyel.

1.3.2. Definíció. *Az (M,d) metrikus tér* **metrikus alterének** *nevezünk minden olyan (M', d') metrikus teret, amelyre $M' \subseteq M$ és $d' = d|_{M' \times M'}$.*

1.3.3. Definíció. *Ha* (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek, akkor egy* $f : M \to M'$ *leképezést* **izometriának** *nevezünk a* d *és* d' *metrikák szerint, ha minden* $x, y \in M$ *esetén*

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

teljesül. Az (M, d) *és* (M', d') *metrikus tereket* **izomorfaknak** *nevezzük, ha létezik olyan* $M \to M'$ *bijekció, amely izometria a* d *és* d' *metrikák szerint.*

Könnyen látható, hogy:

– ha (M, d) metrikus tér, akkor az (M, d) és (M, d) metrikus terek izomorfak, vagyis az izomorfia *reflexív*, hiszen az id_M függvény bijektív izometria;

– ha az (M, d) és (M', d') metrikus terek izomorfak, akkor az (M', d') és (M, d) metrikus terek is izomorfak, vagyis az izomorfia *szimmetrikus*, hiszen ha $f : M \to M'$ bijektív izometria a d és d' metrikák szerint, akkor az $f^{-1} : M' \to M$ inverzfüggvény bijektív izometria a d' és d metrikák szerint;

– ha az (M, d) és (M', d') metrikus terek izomorfak, és az (M', d') és (M'', d'') metrikus terek izomorfak, akkor az (M, d) és (M'', d'') metrikus terek izomorfak, vagyis az izomorfia *tranzitív*, hiszen ha $f : M \to M'$ bijektív izometria a d és d' metrikák szerint, és $g : M' \to M''$ bijektív izometria a d' és d'' metrikák szerint, akkor a $g \circ f : M \to M''$ függvény bijektív izometria a d és d'' metrikák szerint.

Ez azt jelenti, hogy a metrikus terek bármely halmazán az izomorfia-reláció ekvivalencia.

1.4. Gömbök és korlátos halmazok

1.4.1. Definíció. *Ha* (M, d) *metrikus tér, akkor minden* $\mathfrak{a} \in M$ *pontra és minden* $r \geq 0$ *valós számra a*

$$\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d) := \{x \in M | d(x, \mathfrak{a}) < r\}$$

halmazt $\mathfrak{a}$ **középpontú,** r**-sugarú nyílt gömbnek** *nevezzük a* d *metrika szerint, és a*

$$\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d) := \{x \in M | d(x, \mathfrak{a}) \leq r\}$$

halmazt $\mathfrak{a}$ **középpontú,** r**-sugarú zárt gömbnek** *nevezzük a* d *metrika szerint, és az*

$$\mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; d) := \{x \in M | d(x, \mathfrak{a}) = r\}$$

halmazt $\mathfrak{a}$ **középpontú,** r**-sugarú gömbfelületnek** *nevezzük a* d *metrika szerint. Ha nyilvánvaló, hogy melyik metrika szerinti halmazokról van szó, akkor a "d metrika szerint" kifejezést elhagyjuk, és ilyenkor a kevésbé pontos* $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})$, $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a})$ *és* $\mathrm{S}_r(\mathfrak{a})$ *jelöléseket is alkalmazzuk.*

1.4.2. Definíció. *Ha* (M, d) *metrikus tér, akkor egy* $E \subseteq M$ *halmazt* **korlátosnak** *nevezünk a* d *metrika szerint, ha* $E = \emptyset$ *vagy létezik olyan* $\mathfrak{a} \in M$ *és* $r > 0$ *valós szám, hogy* $E \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d)$*. Ha nyilvánvaló, hogy melyik metrika szerinti korlátosságról van szó, akkor a "d metrika szerint" kifejezést elhagyjuk.*

1.4.3. Definíció. *Ha* (M, d) *metrikus tér, akkor egy* $E \subseteq M$ *nem üres halmaz* **átmérőjének** *nevezzük a* d *metrika szerint a*

$$\mathrm{diam}_d(E) := \sup_{(x,y) \in E \times E} d(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

elemet. Ha nyilvánvaló, hogy melyik metrika szerinti átmérőről van szó, akkor a "d metrika szerint" kifejezést elhagyjuk, és ilyenkor a kevésbé pontos $\mathrm{diam}(E)$ *jelölést alkalmazzuk.*

Megjegyezzük, hogy ha (M,d) metrikus tér, $\mathfrak{a} \in M$ és $r \in \mathbb{R}_+$, akkor a metrika szimmetrikussága és a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\mathrm{diam}_d(\mathrm{B}_r(\mathfrak{a};d)) \leq \mathrm{diam}_d(\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a};d)) \leq 2r,$$

hiszen $x, y \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a};d)$ esetén $d(x,y) \leq d(x,\mathfrak{a})+d(\mathfrak{a},y) \leq r+r = 2r$. Azonban az egyenlőtlenségek helyett általában nem írhatunk egyenlőséget. Ha például (M,d) diszkrét metrikus tér, akkor minden $\mathfrak{a} \in M$ pontra $\mathrm{B}_1(\mathfrak{a};d) = \{\mathfrak{a}\}$, tehát $\mathrm{diam}_d(\mathrm{B}_1(\mathfrak{a};d)) = 0$, ugyanakkor $\overline{\mathrm{B}}_1(\mathfrak{a};d) = M$, tehát ha M legalább két elemű halmaz, akkor $\mathrm{diam}_d(\overline{\mathrm{B}}_1(\mathfrak{a};d)) = 1$.

1.4.4. Állítás. *Ha (M,d) metrikus tér, akkor*

a) *M minden korlátos részhalmazának minden részhalmaza korlátos;*

b) *M véges sok korlátos részhalmazának uniója korlátos;*

c) *egy $E \subseteq M$ nem üres halmaz pontosan akkor korlátos, ha* $\mathrm{diam}(E) < +\infty$.

Bizonyítás. a) A korlátosság definíciója alapján nyilvánvaló.

b) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy I nem üres, véges halmaz és minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq M$ korlátos halmaz. Ekkor a definíció szerint kiválaszthatunk olyan $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ rendszert M-ben és olyan $(r_i)_{i\in I}$ rendszert $\mathbb{R}_+^*$-ban, hogy minden $i \in I$ indexre $E_i \subseteq \mathrm{B}_{r_i}(\mathfrak{a}_i;d)$. Legyen $\mathfrak{a} \in M$ egy rögzített pont. Ha $x \in \bigcup_{i\in I} E_i$, akkor van olyan $i \in I$, amelyre $x \in E_i$, tehát $d(x,\mathfrak{a}_i) < r_i$, így a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d(x,\mathfrak{a}) \leq d(x,\mathfrak{a}_i) + d(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}) < r_i + d(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}) \leq \left(\max_{j\in I} r_j\right) + \left(\max_{j\in I} d(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a})\right).$$

Ez azt mutatja, hogy az $r := \left(\max_{j\in I} r_j\right)+\left(\max_{j\in I} d(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a})\right)$ számra $\bigcup_{i\in I} E_i \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a};d)$ teljesül, vagyis $\bigcup_{i\in I} E_i$ korlátos halmaz.

c) Ha E korlátos és $\mathfrak{a} \in M$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyanok, hogy $E \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a};d)$, akkor $\mathrm{diam}(E) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{B}_r(\mathfrak{a})) \leq 2r < +\infty$. Megfordítva, ha $\mathrm{diam}(E) < +\infty$ és $r \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\mathrm{diam}(E) < r$, akkor bármely $\mathfrak{a} \in E$ pontra $E \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a};d)$, hiszen $x \in E$ esetén $d(x,\mathfrak{a}) \leq \mathrm{diam}(E) < r$, ezért E korlátos halmaz. ■

1.4.5. Definíció. *Ha T halmaz és (M,d) metrikus tér, akkor egy $f : T \to M$ függvényt* **korlátosnak** *nevezünk a d metrika szerint, ha* $\mathrm{Im}(f) \subseteq M$ *korlátos halmaz d szerint. Ha T halmaz és (M,d) metrikus tér, akkor*

$$\mathscr{F}^b(T;M,d) := \{f \in \mathscr{F}(T;M) | \text{"}f \textit{ korlátos } d \textit{ szerint"}\}.$$

Ha nyilvánvaló, hogy melyik metrika szerinti korlátosságól van szó, akkor a "d metrika szerint" kifejezést elhagyjuk, és ilyenkor a kevésbé pontos $\mathscr{F}^b(T;M)$ jelölést alkalmazzuk, és ezt a $T \to M$ korlátos függvények halmazának nevezzük.

Speciálisan, ha (M,d) metrikus tér, és $\mathbf{s}$ egy M-ben haladó sorozat, akkor $\mathbf{s} : \mathbb{N} \to M$ függvény, ezért az "$\mathbf{s}$ korlátos sorozat" (a d metrika szerint) kijelentés azt jelenti, hogy az $\mathrm{Im}(\mathbf{s}) \subseteq M$ halmaz korlátos (a d metrika szerint).

1.5. Gyakorlatok

1. Ha M halmaz, akkor egy $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ függvény pontosan akkor metrika M felett, ha teljesül rá ($\mathrm{M_I}$) és rendelkezik a következő tulajdonsággal.

($\mathrm{M'_{II}}$) Minden $x, y, z \in M$ esetén $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

2. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, amelyre teljesünek a következők:

a) $f(0) = 0$ és minden $t > 0$ valós számra $f(t) > 0$;

b) f monoton növő;

c) minden $t, s \in \mathbb{R}_+$ esetén $f(t + s) \leq f(t) + f(s)$.

Ekkor minden M halmazra és minden M feletti d metrikára $f \circ d$ is metrika az M felett. Az a), b) és c) tulajdonságok teljesülnek a $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+} \wedge 1$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}/(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+} + 1)$, $\log(1 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+})$ és $\mathrm{id}^{\alpha}_{\mathbb{R}_+}$ függvényekre, ahol $\alpha \in]0, 1]$.

3. Értelmezzük a következő függvényt:

$$d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+; \quad (m, n) \mapsto \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n} & \text{, ha } m \neq n \\ 0 & \text{, ha } m = n. \end{cases}$$

Ekkor d metrika $\mathbb{N}$ felett, és létezik olyan $\mathbb{N}$-ben haladó $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, valamint olyan $\mathbb{R}^*_+$-ben haladó $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ szigorúan fogyó sorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $r_k > 1$ és $\overline{\mathrm{B}}_{r_{k+1}}(n_{k+1}; d) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_{r_k}(n_k; d)$, de $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{B}}_{r_k}(n_k; d) = \emptyset$.

(*Útmutatás.* Legyen minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $r_k := 1 + \dfrac{1}{(k+1)^2}$ és $n_k := k$.)

4. Legyen (M, d) félmetrikus tér.

a) Az $R := \{(x, y) \in M \times M | d(x, y) = 0\}$ reláció *ekvivalencia* az M halmaz felett; jelölje $\dot{M}$ az M/R faktorhalmazt, és minden $x \in M$ esetén legyen $\dot{x}$ az x pont R szerinti ekvivalencia-osztálya.

b) Létezik egyetlen olyan $\dot{d} : \dot{M} \times \dot{M} \to \mathbb{R}_+$ függvény, hogy minden $x, y \in M$ esetén $\dot{d}(\dot{x}, \dot{y}) = d(x, y)$ teljesül. A $\dot{d}$ függvény metrika az $\dot{M}$ faktorhalmaz felett. Az $(\dot{M}, \dot{d})$ metrikus teret nevezzük az (M, d) *félmetrikus térhez asszociált metrikus térnek.*

c) Legyen (M', d') metrikus tér és $f : M \to M'$ olyan függvény, amelyre teljesül az, hogy minden $x, y \in M$ esetén, ha $d(x, y) = 0$, akkor $d'(f(x), f(y)) = 0$ (vagyis $f(x) = f(y)$). Ekkor létezik egyetlen olyan $\dot{f} : \dot{M} \to M'$ függvény, hogy minden $x \in M$ esetén $\dot{f}(\dot{x}) = f(x)$ teljesül.

5. Legyen M halmaz, (M', d') félmetrikus tér, és $f : M \to M'$ tetszőleges függvény. Ekkor a

$$M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto d'(f(x), f(y))$$

függvény félmetrika M felett; ezt nevezzük *az f függvény és a d' félmetrika által meghatározott félmetrikának* M felett. Speciálisan; ha M halmaz, és $f : M \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, akkor a

$$\mathrm{d}_f : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$$

félmetrikát az f *valós függvény által meghatározott félmetrikának* nevezzük M felett.

6. Normált térben nem nulla dimenziós lineáris altér *nem korlátos* halmaz a norma által meghatározott metrika szerint. Ha E valós vagy komplex vektortér, és d olyan metrika E felett, hogy létezik olyan d szerinti 0 középpontú gömb E-ben, amely tartalmaz nem nulla dimenziós lineáris alteret, akkor a d metrika nem normálható.

7. Legyen $p \in]0,1[$ tetszőleges valós szám, és

$$l^p_{\mathbb{K}} := \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \text{"a } \sum_{k\in\mathbb{N}} |\mathbf{s}(k)|^p \text{ sor konvergens"} \right\}.$$

Ekkor $l^p_{\mathbb{K}}$ *lineáris altere* a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ függvénytérnek, de az

$$l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}_+; \quad \mathbf{s} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{s}(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés *nem norma* $l^p_{\mathbb{K}}$ felett. Ugyanakkor a

$$\mathrm{d}_p : l^p_{\mathbb{K}} \times l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}_+; \quad (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{s}(k) - \mathbf{s}'(k)|^p$$

leképezés *nem normálható transzláció-invariáns* metrika $l^p_{\mathbb{K}}$ felett.

(*Útmutatás.* Ha $a, b \geq 0$ valós számok és $p \in]0,1[$ tetszőleges valós szám, akkor $(a+b)^p \leq a^p + b^p$. Valóban, ha $a + b > 0$ (és ez a nemtriviális eset), akkor $a/(a+b) \leq 1$ és $b/(a+b) \leq 1$, így $p \in]0,1[$ miatt $(a/(a+b))^p \geq a/(a+b)$ és $(b/(a+b))^p \geq b/(a+b)$, amiből összeadással nyerjük, hogy $(a^p + b^p)/(a+b)^p \geq 1$. Ebből következik, hogy a d_p függvényre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A d_p metrika nem normálható, mert $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\mathrm{d}_p(\lambda.\mathbf{s}, \lambda.s) = |\lambda|^p \mathrm{d}_p(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$, ezért ha $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$ és $|\lambda| \neq 1$, akkor $\mathrm{d}_p(\lambda.\mathbf{s}, \lambda.s) \neq |\lambda| \mathrm{d}_p(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$. Később megmutatjuk, hogy a d_p metrika még *topologikusan sem normálható* (2. pont, **7**. gyakorlat).)

8. (*A korlátosság jellemzése sorozatokkal.*) Ha (M, d) metrikus tér és $E \subseteq M$, akkor a következő állítások ekvivalensek:

a) az E halmaz korlátos;

b) az E minden megszámlálható részhalmaza korlátos;

c) minden E-ben haladó sorozat korlátos.

9. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, továbbá $f : M \to M'$ olyan bijekció, amely izometria a d és d' metrikák szerint. Ekkor $\mathfrak{a} \in M$ és $r \in \mathbb{R}^*_+$ esetén

$$f\langle \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d)\rangle = \mathrm{B}_r(f(\mathfrak{a}); d'), \quad f\langle \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d)\rangle = \overline{\mathrm{B}}_r(f(\mathfrak{a}); d'), \quad f\langle \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; d)\rangle = \mathrm{S}_r(f(\mathfrak{a}); d'),$$

továbbá egy $E \subseteq M$ halmaz pontosan akkor korlátos a d metrika szerint, ha az $f\langle E\rangle \subseteq M'$ halmaz korlátos a d' metrika szerint.

X. **METRIKUS TEREK**

1. A METRIKUS TEREK ALAPTULAJDONSÁGAI

2. fejezet

Metrikus tér topológiája

2.1. Nyílt halmazok és zárt halmazok metrikus térben

2.1.1. Definíció. *Legyen (M, d) metrikus tér. Egy $\Omega \subseteq M$ halmazt* **nyíltnak** *nevezünk a d metrika szerint, ha minden $x \in \Omega$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$ szám, hogy $\mathrm{B}_r(x; d) \subseteq \Omega$ teljesül. Egy $F \subseteq M$ halmazt* **zártnak** *nevezünk a d metrika szerint, ha az $M \setminus F$ halmaz nyílt a d metrika szerint. Az M halmaz d szerint nyílt részhalmazainak halmazát $\mathscr{T}_d$ jelöli, és ezt a d metrika által generált* **topológiának** *nevezzük M felett.*

2.1.2. Állítás. *Metrikus térben a nyílt gömbök nyílt halmazok és a zárt gömbök zárt halmazok.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $\mathfrak{a} \in M$ és $\in \mathbb{R}_+$.

Ha $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d)$, akkor $d(x, \mathfrak{a}) < r$, és ekkor bármely $s \in]0, r - d(x, \mathfrak{a})]$ valós számra $\mathrm{B}_s(x; d) \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d)$, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség miatt minden $y \in \mathrm{B}_s(x; d)$ pontra $d(y, \mathfrak{a}) \leq d(y, x) + d(x, \mathfrak{a}) < s + d(x, \mathfrak{a}) < r$. Ez azt jelenti, hogy a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d)$ nyílt gömb nyílt halmaz a d metrika szerint.

Legyen $x \in M \setminus \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d)$, tehát $d(x, \mathfrak{a}) > r$. Ha $s \in]0, d(x, \mathfrak{a}) - r]$ tetszőleges valós szám, akkor $y \in \mathrm{B}_s(x; d)$ esetén $d(y, \mathfrak{a}) > r$, mert ha nem így volna, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján $d(x, \mathfrak{a}) \leq d(x, y) + d(y, \mathfrak{a}) < s + d(y, \mathfrak{a}) \leq s + r \leq d(x, \mathfrak{a})$ teljesülne, ami lehetetlen. Ez azt jelenti, hogy bármely $s \in]0, d(x, \mathfrak{a}) - r[$ valós számra $\mathrm{B}_s(x; d) \subseteq M \setminus \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d)$, vagyis $M \setminus \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d)$ nyílt, így $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d)$ zárt halmaz a d metrika szerint. ■

2.1.3. Állítás. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor a d metrika által generált $\mathscr{T}_d$ topológia rendelkezik a következő tulajdonságokkal.*

$(\mathrm{O_I})$ $\emptyset \in \mathscr{T}_d$ *és* $M \in \mathscr{T}_d$ *(vagyis az üres halmaz és az alaphalmaz nyílt).*

$(\mathrm{O_{II}})$ *Bármely $\mathscr{T}_d$-ben haladó nem üres véges rendszer metszete eleme $\mathscr{T}_d$-nek (vagyis véges sok nyílt halmaz metszete nyílt).*

$(\mathrm{O_{III}})$ *Bármely $\mathscr{T}_d$-ben haladó rendszer uniója eleme $\mathscr{T}_d$-nek (vagyis nyílt halmazok uniója nyílt).*

Bizonyítás. A nyíltság definíciója alapján $(\mathrm{O_I})$ nyilvánvalóan igaz.

Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy $I \neq \emptyset$ véges halmaz, és minden $i \in I$ esetén $\Omega_i \subseteq M$ nyílt halmaz a d metrika szerint. Ha $x \in \bigcap_{i \in I} \Omega_i$, akkor minden $i \in I$ esetén $x \in \Omega_i$, így kiválasztható olyan $(r_i)_{i \in I}$ rendszer $\mathbb{R}_+^*$-ban, hogy minden $i \in I$ indexre $\mathrm{B}_{r_i}(x; d) \subseteq \Omega_i$.

Ekkor az $r := \min_{i \in I} r_i$ valós számra nyilvánvalóan teljesül az, hogy $\mathrm{B}_r(x;d) \subseteq \bigcap_{i \in I} \Omega_i$, tehát $\bigcap_{i \in I} \Omega_i$ nyílt halmaz a d metrika szerint.

Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\Omega_i \subseteq M$ nyílt halmaz a d metrika szerint. Ha $x \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, akkor létezik olyan $j \in I$, hogy $x \in \Omega_j$, így az Ω_j nyíltsága folytán van olyan $r > 0$ valós szám, amelyre $\mathrm{B}_r(x;d) \subseteq \Omega_j \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ nyílt halmaz a d metrika szerint. ■

2.1.4. Következmény. *Ha (M,d) metrikus tér, akkor a d metrika által meghatározott zárt halmazok $\mathfrak{F}_d$ halmaza rendelkezik a következő tulajdonságokkal.*

($\mathrm{F_I}$) $\emptyset \in \mathfrak{F}_d$ *és* $M \in \mathfrak{F}_d$ *(vagyis az üres halmaz és az alaphalmaz zárt).*

($\mathrm{F_{II}}$) *Bármely $\mathfrak{F}_d$-ben haladó nem üres rendszer metszete eleme $\mathfrak{F}_d$-nek (vagyis zárt halmazok metszete zárt).*

($\mathrm{F_{III}}$) *Bármely $\mathfrak{F}_d$-ben haladó véges rendszer uniója eleme $\mathfrak{F}_d$-nek (vagyis véges sok zárt halmaz uniója zárt).*

Bizonyítás. Ha $(F_i)_{i \in I}$ tetszőleges nem üres halmazrendszer, akkor a halmazelméleti de Morgan egyenlőségek (**ENS** 2.9.1.) szerint:

$$M \setminus \bigcup_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (M \setminus F_i); \quad M \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (M \setminus F_i),$$

így az állítás azonnal következik a zárt halmazok definíciójából és az előző állításból. ■

Azonban végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül nyílt, és végtelen sok zárt halmaz uniója nem feltétlenül zárt. Az viszont nyilvánvaló, hogy ha (M,d) metrikus tér és $\Omega \subseteq M$ nyílt és $F \subseteq M$ zárt halmaz a d metrika szerint, akkor $\Omega \setminus F = \Omega \cap (M \setminus F)$ nyílt halmaz a d metrika szerint, mert két nyílt halmaz metszete, továbbá $F \setminus \Omega = F \cap (M \setminus \Omega)$ zárt halmaz a d metrika szerint, mert két zárt halmaz metszete. Speciálisan; a gömbfelületek zárt halmazok a metrikus terekben, mert ha (M,d) metrikus tér, $\mathfrak{a} \in M$ és $r \in \mathbb{R}_+$, akkor $\mathrm{S}_r(\mathfrak{a};d) = \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a};d) \setminus \mathrm{B}_r(\mathfrak{a};d)$.

2.2. Halmaz belseje és lezártja

2.2.1. Állítás. *Legyen (M,d) metrikus tér. Minden $E \subseteq M$ halmazhoz egyértelműen létezik az a d metrika szerint nyílt halmaz M-ben, amely részhalmaza E-nek, és minden E által tartalmazott, d szerint nyílt részhalmazt tartalmaz. Továbbá, minden $E \subseteq M$ halmazhoz egyértelműen létezik az a d metrika szerint zárt halmaz M-ban, amely tartalmazza E-t, és minden E-t tartalmazó, d szerint zárt halmaznak részhalmaza.*

Bizonyítás. Legyen $E \subseteq M$ és $\mathscr{O} := \{\Omega \subseteq M | (\Omega \in \mathscr{T}_d) \wedge (\Omega \subseteq E)\}$. Ekkor az ($\mathrm{O_{III}}$) miatt $\bigcup \mathscr{O}$ nyílt halmaz a d metrika szerint, $\bigcup \mathscr{O} \subseteq E$, és ha $\Omega \subseteq E$ tetszőleges d szerint nyílt halmaz, akkor a $\mathscr{O}$ definíciója szerint $\Omega \in \mathscr{O}$, tehát $\Omega \subseteq \bigcup \mathscr{O}$. Ezért $\bigcup \mathscr{O}$ az a d szerint nyílt halmaz M-ben, amely részhalmaza E-nek, és minden E által tartalmazott d szerint nyílt részhalmazt tartalmaz.

Legyen $E \subseteq M$ és $\mathscr{F} := \{F \subseteq M | (E \setminus F \in \mathscr{T}_d) \wedge (E \subseteq F)\}$. Ekkor $\mathscr{F} \neq \emptyset$, mert $M \in \mathscr{F}$, így a $\bigcap \mathscr{F} := \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$ halmaz jól értelmezett, és a (C_{III}) miatt zárt halmaz d szerint, továbbá $E \subseteq \bigcap \mathscr{F}$, és ha $F \subseteq M$ olyan d szerint zárt halmaz, hogy $E \subseteq F$, akkor a $\mathscr{F}$ definíciója szerint $F \in \mathscr{F}$, tehát $\bigcap \mathscr{F} \subseteq F$. Ezért $\bigcap \mathscr{F}$ az a d szerint zárt halmaz M-ben, amely tartalmazza E-t, és minden E-t tartalmazó, d szerint zárt halmaznak részhalmaza. ■

2.2.2. Definíció. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor az $E \subseteq M$ halmaz* **belsejének** (*illetve* **lezártjának**) *nevezzük a d metrika szerint azt a tartalmazás tekintetében legnagyobb* (*illetve legkisebb*) *d szerint nyílt* (*illetve d szerint zárt*) *halmazt M-ben, amely részhalmaza E-nek* (*illetve tartalmazza E-t*). *Az E halmaz belsejét* (*illetve lezártját*) *a d metrika szerint az $\overset{\circ}{E}$ vagy $\mathrm{Int}(E)$* (*illetve $\overline{E}$ vagy $\mathrm{Cl}(E)$*) *szimbólummal jelöljük. Az $\overset{\circ}{E}$* (*illetve $\overline{E}$*) *elemeit az E* **belső** (*illetve* **érintési**) **pontjainak** *nevezzük a d metrika szerint. Ha nyilvánvaló, hogy melyik metrika szerinti belsőről* (*illetve lezártról*) *van szó, akkor az elnevezésekben a "d metrika szerint" kifejezést elhagyjuk.*

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha (M, d) metrikus tér, akkor minden $E \subseteq M$ halmazra; az E pontosan akkor nyílt (illetve zárt) a d szerint, ha $E = \overset{\circ}{E}$ (illetve $E = \overline{E}$).

2.2.3. Állítás. *Metrikus térben korlátos halmaz lezártja korlátos.*

Bizonyítás. Ha (M, d) metrikus tér, és $E \subseteq M$ korlátos halmaz a d metrika szerint, és $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, illetve $x \in M$ olyan pont, amelyekre $E \subseteq \mathrm{B}_r(x; d)$, akkor $\mathrm{B}_r(x; d) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x; d)$ és a $\overline{\mathrm{B}}_r(x; d)$ halmaz zártsága folytán $\overline{E} \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x; d)$ is teljesül. Ekkor bármely $s \in \mathbb{R}_+^*$ számra, ha $r < s$, akkor $\overline{E} \subseteq \mathrm{B}_s(x; d)$, következésképpen $\overline{E}$ is korlátos halmaz d szerint. ■

2.2.4. Állítás. (A belső pontok és érintési pontok jellemzése gömbi környezetekkel) *Legyen (M, d) metrikus tér, $E \subseteq M$ és $x \in M$.*

– *Az x pont akkor és csak akkor belső pontja E-nek, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_r(x; d) \subseteq E$.*

– *Az x pont akkor és csak akkor érintési pontja E-nek, ha minden $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\mathrm{B}_r(x; d) \cap E \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Ha x belső pontja E-nek, akkor $x \in \overset{\circ}{E}$ és $\overset{\circ}{E}$ nyílt halmaz, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_r(x; d) \subseteq \overset{\circ}{E} \subseteq E$. Megfordítva, ha $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\mathrm{B}_r(x; d) \subseteq E$, akkor $x \in \mathrm{B}_r(x; d) \subseteq \overset{\circ}{E}$, mert a $\mathrm{B}_r(x; d)$ gömb nyílt halmaz, így x belső pontja E-nek.

Ha x *nem* érintési pontja E-nek, akkor $x \in M \setminus \overline{E}$, és a definíció szerint $M \setminus \overline{E}$ nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_r(x; d) \subseteq M \setminus \overline{E}$; ekkor teljesül az, hogy $\mathrm{B}_r(x; d) \cap E = \emptyset$. Megfordítva, ha $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy $\mathrm{B}_r(x; d) \cap E = \emptyset$, akkor $M \setminus \mathrm{B}_r(x; d)$ olyan zárt halmaz, amely tartalmazza E-t, így $\overline{E}$-t is, ugyanakkor $x \notin M \setminus \mathrm{B}_r(x; d)$, következésképpen $x \notin \overline{E}$, így x *nem* érintési pontja E-nek. ■

2.2.5. Állítás. *Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in E$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, akkor fennállnak a*

$$\overline{\mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|})} = \overline{\mathrm{B}}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|}),$$
$$\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|})\right) = \mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. (I) A $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ halmaz zárt és tartalmazza $\mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$-t, ezért a lezárt definíciója szerint $\overline{\mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})} \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$.

Legyen $F \subseteq E$ olyan zárt halmaz $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ szerint, hogy $\mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq F$. Ekkor $M \setminus F \subseteq M \setminus \mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$, ezért $x' \in M \setminus F$ esetén $\|x'-x\| \geq r$, ugyanakkor az $M \setminus F$ nyíltsága miatt van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_\varepsilon(x';\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq M \setminus F$; megmutatjuk, hogy ekkor $\|x'-x\| \geq r+\varepsilon$ is teljesül. Ha ugyanis ez nem volna igaz, akkor $1 - \dfrac{\varepsilon}{\|x'-x\|} < \dfrac{r}{\|x'-x\|} \leq 1$ teljesülne, tehát

$$\left]0, \frac{r}{\|x'-x\|}\right[\cap \left]1 - \frac{\varepsilon}{\|x'-x\|}, 1\right[\neq \emptyset.$$

Ha t eleme ennek a halmaznak, akkor az $x_t := (1-t)x + tx' \in E$ vektorra $\|x - x_t\| = t\|x-x'\| < r$ és $\|x'-x_t\| = (1-t)\|x-x'\| < \varepsilon$ teljesül, tehát a háromszög-egyenlőtlenség szerint $x_t \in \mathrm{B}_\varepsilon(x';\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \cap \mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$, holott $\mathrm{B}_\varepsilon(x';\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq M \setminus F \subseteq M \setminus \mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ miatt $\mathrm{B}_\varepsilon(x';\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \cap \mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) = \emptyset$. Ebből következik, hogy $x' \in M \setminus F$ esetén $\|x'-x\| > r$, azaz $x' \in M \setminus \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$. Másként fogalmazva: $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq F$ teljesül minden olyan $F \subseteq M$ olyan zárt halmazra, amelyre $\mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq F$, így a lezárt definíciója szerint $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq \overline{\mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})}$.

(II) A $\mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ halmaz nyílt és része a $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ halmaznak, ezért halmaz belsejének definíciója szerint $\mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq \mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})\right)$.

Legyen $x' \in \mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})\right)$. Ekkor a belső pontok jellemzése szerint vehetünk olyan $\rho > 0$ valós számot, hogy $\mathrm{B}_\rho(x';\mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$. Rögzítsünk tetszőlegesen egy $\rho' \in]0,\rho[$ valós számot. Ekkor az $y := x' + \dfrac{\rho'}{r}(x'-x) \in E$ vektorra $y \in \mathrm{B}_\rho(x';\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ teljesül, hiszen

$$\|y - x'\| = \frac{\rho'}{r}\|x'-x\| \leq \frac{\rho'}{r} \cdot r = \rho' < \rho,$$

ahol kihasználtuk azt, hogy $\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})\right) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ miatt $x' \in \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$, tehát $\|x'-x\| \leq r$. Ezért $y \in \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$, tehát

$$r \geq \|y - x\| = \left(1 + \frac{\rho'}{r}\right)\|x'-x\|,$$

amiből következik, hogy $\|x'-x\| \leq \dfrac{r}{1+\dfrac{\rho'}{r}} < r$, így $x' \in \mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_\mathrm{r}(\mathrm{x};\mathrm{d}_{\|\cdot\|})\right) \subseteq \mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ is teljesül. ■

Az előző állításból látható, hogy ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in E$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, akkor a $\mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ nyílt gömb rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy

$$\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})}\right) = \mathrm{B}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|}),$$

és a $\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ zárt gömb rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy

$$\overline{\mathrm{Int}\left(\overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})\right)} = \overline{\mathrm{B}}_r(x;\mathrm{d}_{\|\cdot\|}).$$

2.2.6. Definíció. *Ha (M,d) metrikus tér, akkor az $E \subseteq M$ halmazt* **sűrűnek** *nevezzük a d metrika szerint, ha $\overline{E} = M$.*

2.2.7. Definíció. *Ha (M,d) metrikus tér, akkor az $E \subseteq M$ halmaz* **torlódási pontjának** *nevezünk a d metrika szerint minden olyan $x \in M$ pontot, amelyre $x \in \overline{E \setminus \{x\}}$ teljesül.*

Az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján nyilvánvaló, hogy ha (M,d) metrikus tér, akkor egy $x \in M$ pont akkor és csak akkor torlódási pontja az $E \subseteq M$ halmaznak, ha minden $r \in \mathbb{R}_+^*$ számra $(E \setminus \{x\}) \cap \mathrm{B}_r(x;d) \neq \emptyset$, vagyis az x minden gömbi környezetében van az E-nek x-*től különböző* pontja.

Világos, hogy egy halmaz minden torlódási pontja érintési pont is, de ennek megfordítása általában nem igaz. Azonban teljesül a következő állítás.

2.2.8. Állítás. *Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $E \neq \{0\}$, akkor minden $\Omega \subseteq E$ nyílt halmazra és minden $x \in \overline{\Omega}$ elemre x torlódási pontja Ω-nak. (Tehát nem nulla dimenziós normált tér nyílt részhalmazának minden érintési pontja torlódási pontja a nyílt halmaznak.)*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $e \in E$ vektort, amelyre $e \neq 0$. Legyen $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és $x \in \overline{\Omega}$. Rögzítsük x-nek egy V környezetét a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrika szerint. Azt kell igazolni, hogy $V \cap (\Omega \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Ehhez először vegyünk olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq V$. Mivel x érintési pontja Ω-nak és a $\mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ gömb nyílt környezte x-nek, így $\mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \cap \Omega \neq \emptyset$. Legyen $x' \in \mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \cap \Omega$ rögzített pont: ekkor két eset lehetséges.

a) Ha $x' \neq x$, akkor $x' \in \Omega$ miatt $x' \in \Omega \setminus \{x\}$, ugyanakkor $x' \in \mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq V$ miatt $x' \in V$ is teljesül, következésképpen $x' \in V \cap (\Omega \setminus \{x\})$.

b) Tegyük fel, hogy $x' = x$. Ekkor $x \in \Omega$, így Ω nyíltsága folytán van olyan $\varrho \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_\varrho(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq \Omega$. Rögzítsünk egy $s \in]0, \min(r,\varrho)/\|e\|[$ valós számot. Ekkor $\|s.e\| < \varrho$ miatt $x + s.e \in \mathrm{B}_\varrho(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq \Omega$, és $s.e \neq 0$ következtében $x + s.e \neq x$, tehát $x + s.e \in \Omega \setminus \{x\}$. Ugyanakkor, $\|s.e\| < r$ miatt $x + s.e \in \mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq V$, tehát $x + s.e \in V$, ami azt jelenti, hogy $x + s.e \in V \cap (\Omega \setminus \{x\})$.

Mindkét alternatíva szerint $V \cap (\Omega \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, amivel az állítást igazoltuk. ■

2.2.9. Definíció. *Ha (M,d) metrikus tér, akkor az $E \subseteq M$ halmaz* **izolált pontjának** *nevezzük d szerint az E minden olyan érintési pontját, amely nem torlódási pontja E-nek. Az $E \subseteq M$ halmazt* **diszkrétnek** *nevezzük, ha az E minden pontja izolált pontja E-nek.*

Tehát ha (M,d) metrikus tér, akkor egy $x \in M$ pont akkor és csak akkor izolált pontja az $E \subseteq M$ halmaznak, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $E \cap \mathrm{B}_r(x;d) = \{x\}$. Speciálisan; az E minden izolált pontja szükségképpen eleme E-nek.

2.3. Metrikus altér topológiája

2.3.1. Állítás. *Legyen (M', d') metrikus altere az (M,d) metrikus térnek.*

– *Az $\Omega' \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor nyílt a d' altér-metrika szerint, ha létezik olyan $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz d szerint, amelyre $\Omega' = \Omega \cap M'$.*

– *Az $F' \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor zárt a d' altér-metrika szerint, ha létezik olyan $F \subseteq M$ zárt halmaz d szerint, amelyre $F' = F \cap M'$.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq M$ tetszőleges, d szerint nyílt halmaz. Ekkor $x \in \Omega \cap M'$ esetén van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_r(x;d) \subseteq \Omega$, tehát $\mathrm{B}_r(x;d') = \mathrm{B}_r(x;d) \cap M' \subseteq \Omega \cap M'$. Ezért $\Omega \cap M'$ nyílt halmaz a d' metrika szerint.

Legyen az $\Omega' \subseteq M'$ halmaz nyílt a d' altér-metrika szerint. Minden $x \in \Omega'$ ponthoz van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_r(x;d') \subseteq \Omega'$. Ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával vehető olyan $\varrho : \Omega' \to \mathbb{R}_+^*$ függvény, amelyre minden $x \in \Omega'$ esetén $\mathrm{B}_{\varrho(x)}(x;d') \subseteq \Omega'$. Ekkor az

$$\Omega := \bigcup_{x \in \Omega'} \mathrm{B}_{\varrho(x)}(x;d)$$

halmaz nyílt M-ben a d metrika szerint, és

$$\Omega \cap M' = \Big(\bigcup_{x \in \Omega'} \mathrm{B}_{\varrho(x)}(x;d) \Big) \cap M' = \bigcup_{x \in \Omega'} (\mathrm{B}_{\varrho(x)}(x;d) \cap M') = \bigcup_{x \in \Omega'} \mathrm{B}_{\varrho(x)}(x;d') = \Omega'.$$

Legyen $F \subseteq M$ tetszőleges, d szerint zárt halmaz. Ekkor az előzőek szerint $(M \setminus F) \cap M'$ nyílt a d' metrika szerint, viszont ez egyenlő az $M' \setminus (F \cap M')$ halmazzal, tehát $F \cap M'$ zárt d' szerint.

Legyen az $F' \subseteq M'$ halmaz zárt a d' altér-metrika szerint. Az előző bekezdés alapján létezik olyan $\Omega \subseteq M$ halmaz, amely nyílt d szerint és amelyre $\Omega \cap M' = M' \setminus F'$ teljesül. Ekkor $F := M \setminus \Omega$ olyan halmaz, amely zárt d szerint és $F \cap M' = (M \setminus \Omega) \cap M' = M' \setminus (\Omega \cap M') = F'$. ■

2.3.2. Következmény. *Legyen (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek.*

– *Ha M' nyílt d szerint, akkor az $\Omega' \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor nyílt a d' altér-metrika szerint, ha nyílt a d szerint.*

– *Ha M' zárt d szerint, akkor az $F' \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor zárt a d' altér-metrika szerint, ha zárt a d szerint.*

Bizonyítás. Az előző állításból nyilvánvalóan következik, mert két nyílt (illetve zárt) halmaz metszete nyílt (illetve zárt). ■

2.4. Metrikák és normák ekvivalenciája

Könnyen látható, hogy egy halmaz felett általában sok olyan egészen különböző metrika létezhet, amelyek ugyanazokat a nyílt halmazokat határozzák meg. Továbbá, a metrikus terekkel kapcsolatban sok olyan fogalom bevezethető, amely nem közvetlenül a metrikától, hanem a metrika által generált topológiától függ. Ezeket az objektumokat, illetve tulajdonságokat *topologikus objektumoknak*, illetve *topologikus tulajdonságoknak* nevezzük.

2.4.1. Definíció. *Az M halmaz feletti d_1 és d_2 metrikákat* **ekvivalenseknek** *nevezzük, ha $\mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_{d_2}$, vagyis a d_1 és d_2 által meghatározott nyílt halmazok ugyanazok. Az E vektortér feletti $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normákat* **ekvivalenseknek** *nevezzük, ha az általuk generált $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_1}$ és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_2}$ metrikák ekvivalensek.*

Könnyen látható, hogy egy adott halmaz feletti metrikák halmazán az imént értelmezett ekvivalencia valóban ekvivalencia-reláció. Valóban, ha M halmaz és X az M feletti metrikák halmaza, valamint Y az M feletti topológiák halmaza, és $f : X \to Y$

az a függvény, amelyre minden $d \in X$ esetén $f(d) := \mathscr{T}_d$, akkor az f függvény által meghatározott X feletti ekvivalencia (**ENS** 2.11.5.) egyenlő az M feletti metrikák halmazán imént értelmezett ekvivalenciával.

Megjegyezzük még, hogy a metrikák ekvivalenciájának egyéb formái is léteznek; erre példát mutatunk be az **5**. gyakorlatban.

2.4.2. Állítás. *Az E vektortér feletti $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $C_1, C_2 > 0$ valós számok, amelyekre minden $x \in E$ esetén*

$$\|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq C_1\|x\|_1.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek. A $\mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_1})$ halmaz $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_1}$ szerint nyílt, így a hipotézis szerint $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_2}$ szerint is nyílt és 0 eleme neki, tehát van olyan $r_2 \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_{r_2}(0; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_2}) \subseteq \mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_1})$. Ha $x \in E$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor nyilvánvaló, hogy $\left(\frac{r_2}{\|x\|_2 + \varepsilon}\right).x \in \mathrm{B}_{r_2}(0; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_2})$, ezért ez a vektor a $\mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_1})$ gömbnek is eleme, vagyis

$$\left\|\left(\frac{r_2}{\|x\|_2 + \varepsilon}\right).x\right\|_1 < 1,$$

így $\|x\|_1 < \frac{1}{r_2}(\|x\|_2 + \varepsilon)$. Ebből következik, hogy a $C_2 := 1/r_2$ szám olyan, hogy minden $x \in E$ esetén $\|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2$. Ezt az érvelést a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák felcserélése után megismételve kapjuk olyan $C_1 > 0$ valós szám létezését, hogy minden $x \in E$ vektorra $\|x\|_2 \leq C_1\|x\|_1$.

Megfordítva; legyenek $C_1, C_2 > 0$ olyan valós számok, amelyekre minden $x \in E$ esetén $\|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2$ és $\|x\|_2 \leq C_1\|x\|_1$ teljesül. Legyen $\Omega \subseteq M$ olyan halmaz, amely nyílt a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_1}$ metrika szerint; megmutatjuk, hogy Ω a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_2}$ metrika szerint is nyílt. Legyen ugyanis $x \in \Omega$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_1}) \subseteq \Omega$. A C_2 definíciója szerint nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{B}_{\frac{r}{C_2}}(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_2}) \subseteq \mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_1}),$$

ezért $\mathrm{B}_{\frac{r}{C_2}}(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_2}) \subseteq \Omega$. Ez azt jelenti, hogy Ω a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_2}$ metrika szerint is nyílt halmaz. Ezt az érvelést a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák felcserélése után megismételve kapjuk, hogy az M minden $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_2}$ szerint nyílt részhalmaza $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_1}$ szerint is nyílt, tehát a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek. ■

Példák (ekvivalens metrikákra és normákra).

1) Ha d metrika az M halmaz felett, akkor az

$$M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \min(d(x, y), 1),$$

$$M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}$$

függvények olyan metrikák a M felett, amelyek d-vel ekvivalensek (**6**. gyakorlat). E metrikák szerint az M halmaz korlátos, akkor is, ha a d metrika szerint nem korlátos. Ezért a korlátosság *nem topologikus* tulajdonság.

2) Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $p \geq 1$ tetszőleges valós szám; megmutatjuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ feletti $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek. Valóban, ha $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, akkor

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{x}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{x}\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

továbbá

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{0\le k\le n-1} |\mathbf{x}(k)| \le \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{x}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathbf{x}\|_p,$$

tehát a $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek. Ebből azonnal következik, hogy bármely két $p, q \ge 1$ valós számra a $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_q$ normák is ekvivalensek. Később látni fogjuk, hogy ez nem véletlen, mert véges dimenziós valós vagy komplex vektortér felett bármely két norma ekvivalens.

3) Ha $p \ge 1$ tetszőleges valós szám, akkor a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ végtelen dimenziós vektortér feletti $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák *nem ekvivalensek* (**12.** gyakorlat).

2.5. Abszolútértékek ekvivalenciája

2.5.1. Állítás. *Legyen K test, és $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ nem improprius abszolútérték K felett. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *A $\mathrm{d}_{|\cdot|_1}$ és $\mathrm{d}_{|\cdot|_2}$ metrikák ekvivalensek, tehát $\mathscr{T}_{\mathrm{d}_{|\cdot|_1}} = \mathscr{T}_{\mathrm{d}_{|\cdot|_2}}$.*

(ii) $\mathscr{T}_{\mathrm{d}_{|\cdot|_2}} \subseteq \mathscr{T}_{\mathrm{d}_{|\cdot|_1}}$.

(iii) $\mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_1}) \subseteq \mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_2})$.

(iv) *Létezik olyan $\sigma > 0$ valós szám, amelyre minden $x \in K$ esetén $|x|_2 = |x|_1^\sigma$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Triviális.

(ii)⇒(iii) A $\mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_2})$ gömb nyílt a $\mathrm{d}_{|\cdot|_2}$ metrika szerint, ezért a hipotézis szerint $\mathrm{d}_{|\cdot|_1}$ szerint is nyílt, így létezik olyan $r > 0$ valós szám, amelyre $\mathrm{B}_r(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_1}) \subseteq \mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_2})$. Ha $x \in \mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_1})$, azaz $|x|_1 < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} |x^n|_1 = \lim\limits_{n\to\infty} |x|_1^n = 0$, tehát van olyan $n > 0$ természetes szám, hogy $|x^n|_1 < r$, azaz $x^n \in \mathrm{B}_r(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_1})$; ekkor $|x|_2^n = |x^n|_2 < 1$, így $|x|_2 < 1$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_1}) \subseteq \mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_2})$.

(iii)⇒(iv) Tegyük fel, hogy $\mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_1}) \subseteq \mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_2})$. Ekkor $x \in K$ és $|x|_1 > 1$ esetén $|x^{-1}|_1 = |x|_1^{-1} < 1$, tehát $x^{-1} \in \mathrm{B}_1(0; \mathrm{d}_{|\cdot|_2})$, következésképpen $|x|_2^{-1} = |x^{-1}|_2 > 1$, azaz $|x|_2 > 1$. A feltevés szerint $|\cdot|_1$ nem improprius abszolútérték, ezért rögzíthetünk olyan $z \in K$ elemet, amelyre $|z|_1 > 1$. Értelmezzük most a $\sigma := \log(|z|_2)/\log(|z|_1) \in \mathbb{R}_+^*$ számot!

Megmutatjuk, hogy minden $x \in K \setminus \{0\}$ esetén $|x|_2 = |x|_1^\sigma$. Legyen ugyanis $x \in K \setminus \{0\}$ rögzített és $\gamma := \log(|x|_1)/\log(|z|_1)$. Ekkor $|x|_1 = |z|_1^\gamma$, így $|z|_1 > 1$ miatt

- ha $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ és $p/q > \gamma$, akkor $|x|_1 = |z|_1^\gamma < |z|_1^{p/q}$, így $|x^q/z^p|_1 < 1$, tehát $|x^q/z^p|_2 < 1$, vagyis $|x|_2 < |z|_2^{p/q}$;

- ha $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ és $p/q < \gamma$, akkor $|x|_1 = |z|_1^\gamma > |z|_1^{p/q}$, így $|x^q/z^p|_1 > 1$, tehát $|x^q/z^p|_2 > 1$, vagyis $|x|_2 > |z|_2^{p/q}$.

Ebből következik, hogy $|x|_2 = |z|_2^\gamma$, azaz

$$\log(|x|_2) = \gamma \cdot \log(|z|_2) = \gamma \cdot \sigma \cdot \log(|z|_1) = \sigma \cdot \log(|x|_1),$$

tehát $|x|_2 = |x|_1^\sigma$.

(iv)⇒(i) Ha $\sigma > 0$ olyan valós szám, hogy minden $x \in K$ esetén $|x|_2 = |x|_1^\sigma$, akkor nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{|\cdot|_2}) = \mathrm{B}_{r^{1/\sigma}}(x; \mathrm{d}_{|\cdot|_1}),$$

ezért nyilvánvalóan $\mathscr{T}_{\mathrm{d}_{|\cdot|_1}} = \mathscr{T}_{\mathrm{d}_{|\cdot|_2}}$. ■

2.5.2. Következmény. *Jelölje* $|\cdot|$ *az euklidészi abszolútérték-függvényt* $\mathbb{Q}$ *felett.*

a) *Ha* p *prímszám, akkor az* $a^{\nu_p(\cdot)}$ *abszolútérték-függvények ekvivalensek egymással* ($ahol$ $a \in]0,1[$ *tetszőleges valós szám*)*, így ekvivalensek az* $|\cdot|_p$ p*-adikus abszolútérték-függvénnyel, amelyre* $a := 1/p$ (*ld.* **2.10.1** *gyakorlat*).

b) *Ha* p *és* q *különböző prímszámok, akkor* $|\cdot|_p$ *és* $|\cdot|_q$ *inekvivalens abszolútérték-függvények.*

c) *Az* $|\cdot|^\varrho$ *abszolútérték-függvények* (*ahol* $\varrho \in]0,1[$ *tetszőleges valós szám*) *ekvivalensek a* $\mathbb{Q}$ *feletti euklidészi abszolútérték-függvénnyel.*

d) *Minden* p *prímszámra az* $|\cdot|_p$ p*-adikus abszolútérték-függvény nem ekvivalens a* $\mathbb{Q}$ *feletti euklidészi abszolútérték-függvénnyel.*

(**Megjegyzés.** Tehát ekvivalencia erejéig az összes $\mathbb{Q}$ feletti abszolútérték-függvény az $|\cdot|$ euklidészi abszolútérték-függvény, az $|\cdot|_p$ p-adikus abszolútérték-függvények, ahol p prímszám, és az $|\cdot|_\infty$ impropriusz abszolútérték-függvény.)

Bizonyítás. a) Legyen p prímszám és legyenek $a, b \in]0,1[$ valós számok. Vezessük be a $\sigma := \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$ valós számot, amely szigorúan nagyobb 0-nál, mert $\log(a) < 0$ és $\log(b) < 0$. Ekkor $b = a^\sigma$, tehát $b^{\nu_p(\cdot)} = (a^\sigma)^{\nu_p(\cdot)} = \left(a^{\nu_p(\cdot)}\right)^\sigma$, ezért a 2.5.1. állítás szerint az $a^{\nu_p(\cdot)}$ és $b^{\nu_p(\cdot)}$ abszolútérték-függvények ekvivalensek.

b) Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy p és q olyan különböző prímszámok, hogy az $|\cdot|_p$ és $|\cdot|_q$ abszolútérték-függvények ekvivalensek. Ekkor a 2.5.1. állítás szerint vehetünk olyan $\sigma > 0$ valós számot, amelyre $|\cdot|_q = |\cdot|_p^\sigma$. Világos, hogy $p \neq q$ miatt $\nu_p(q) = 0$, vagyis $|q|_p = 1$, ezért $\dfrac{1}{q} = |q|_q = |q|_p^\sigma = 1$, amiből $q = 1$ adódik, ami természetesen lehetetlen.

c) Nyilvánvalóan következik a 2.5.1. állításból.

d) Ha p olyan prímszám volna, hogy $|\cdot|_p$ és $|\cdot|$ ekvivalensek lennének, akkor 2.5.1. szerint létezne olyan $\sigma > 0$ valós szám, hogy $|\cdot|_p = |\cdot|^\sigma$, és akkor $\dfrac{1}{p} = |p|_p = p^\sigma$ teljesülne, ami $\dfrac{1}{p} < 1$ és $p^\sigma > 1$ miatt lehetetlen. ■

2.6. Pont környezetei metrikus térben

2.6.1. Definíció. *Legyen* (M, d) *metrikus tér és* $\mathfrak{a} \in M$*. Egy* $V \subseteq M$ *halmazt az* $\mathfrak{a}$ *pont* **környezetének** *nevezünk a* d *metrika szerint, ha létezik olyan* $\Omega \subseteq M$ *halmaz, amely nyílt* d *szerint és amelyre* $\mathfrak{a} \in \Omega \subseteq V$ *teljesül. Az* $\mathfrak{a}$ *pont* d *szerinti környezeteinek halmazát* $\mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ *jelöli.*

2.6.2. Állítás. *Ha* (M, d) *metrikus tér és* $\mathfrak{a} \in M$*, akkor* $\mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ *rendelkezik a következő tulajdonságokkal.*

a) *Minden* $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ *esetén* $\mathfrak{a} \in V$.

b) *Minden* $V, V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ *esetén* $V \cap V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$.

c) *Minden* $V \subseteq M$ *halmazra, ha létezik olyan* $V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$*, hogy* $V' \subseteq V$*, akkor* $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$.

Bizonyítás. Az a) és c) állítások a környezetek definíciója alapján nyilvánvalóak, míg b) abból következik, hogy két nyílt halmaz metszete is nyílt halmaz. ■

Nyilvánvaló, hogy metrikus térben egy pont környezeteinek halmaza topologikus objektum, tehát csakis a metrika által generált topológiától függ. Ezért minden olyan objektum, illetve tulajdonság, amelyet a környezetek segítségével vezetünk be eleve topologikus objektum, illetve topologikus tulajdonság lesz.

2.6.3. Állítás. *Ha (M, d) metrikus tér és $x_1, x_2 \in M$ olyan pontok, hogy $x_1 \neq x_2$, akkor léteznek olyan $V_1 \in \mathscr{T}_d(x_1)$ és $V_2 \in \mathscr{T}_d(x_2)$ környezetek, amelyekre $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.*

Bizonyítás. Ha $r \in]0, d(x_1, x_2)/2]$ tetszőleges valós szám, akkor fennáll a $\mathrm{B}_r(x_1; d) \cap \mathrm{B}_r(x_2; d) = \emptyset$ egyenlőség, hiszen ha $x \in \mathrm{B}_r(x_1; d) \cap \mathrm{B}_r(x_2; d)$ teljesülne, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x) + d(x, x_2) < 2r \leq d(x_1, x_2)$ is igaz volna, ami lehetetlen. Ezért $V_1 := \mathrm{B}_r(x_1; d)$ és $V_2 := \mathrm{B}_r(x_2; d)$ olyan halmazok, hogy $V_1 \in \mathscr{T}_d(x_1)$, $V_2 \in \mathscr{T}_d(x_2)$ és $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ■

2.6.4. Állítás. *Ha (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek, és $\mathfrak{a} \in M'$, akkor egy $V' \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor környezete $\mathfrak{a}$-nak a d' altérmetrika szerint, ha létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan d szerinti V környezete, amelyre $V' = V \cap M'$, ami azt jelenti, hogy $\mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{a}) = \{V \cap M' | V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})\}$.*

Bizonyítás. Ha $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{a})$, akkor van olyan $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$, hogy $\mathfrak{a} \in \Omega' \subseteq V'$; ekkor létezik olyan $\Omega \in \mathscr{T}_d$, amelyre $\Omega' = \Omega \cap M'$, így $V := \Omega \cup V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan környezet d szerint, hogy $V \cap M' = (\Omega \cap M') \cup (V' \cap M') = \Omega' \cup V' = V'$.

Megfordítva, ha $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan halmaz, hogy $V' = V \cap M'$, akkor létezik olyan $\Omega \in \mathscr{T}_d$, hogy $\mathfrak{a} \in \Omega \subseteq V$; ekkor $\Omega \cap M' \in \mathscr{T}_{d'}$ és $\mathfrak{a} \in \Omega \cap M' \subseteq V \cap M' = V'$, így $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{a})$. ■

2.7. Gyakorlatok

1. Legyen (M, d) metrikus tér.

a) Minden $E, F \subseteq M$ halmazra, ha $E \subseteq F$, akkor $\mathrm{Int}(E) \subseteq \mathrm{Int}(F)$ és $\overline{E} \subseteq \overline{F}$.

b) Minden $E \subseteq M$ halmazra $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(E)) = \mathrm{Int}(E)$ és $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.

c) Minden $E \subseteq M$ halmazra

$$\mathrm{Int}(E) = M \setminus \overline{M \setminus E},$$
$$\overline{E} = M \setminus \mathrm{Int}(M \setminus E).$$

d) Ha $(E_i)_{i \in I}$ az M részhalmazainak *véges* rendszere, akkor

$$\overline{\bigcup_{i \in I} E_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{E_i},$$

és ha I nem üres, akkor

$$\mathrm{Int}\Big(\bigcap_{i \in I} E_i\Big) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Int}(E_i).$$

e) Van olyan (M, d) metrikus tér és $E, F \subseteq M$ halmaz, amelyre

$$\overline{E \cap F} \neq \overline{E} \cap \overline{F}, \quad \mathrm{Int}(E \cup F) \neq \mathrm{Int}(E) \cup \mathrm{Int}(F).$$

2. Legyen (M,d) metrikus tér, és $(E_i)_{i\in I}$ az M részhalmazainak olyan rendszere, hogy minden $x\in M$ pontnak van olyan V környezete, amelyre az $\{i\in I|V\cap E_i\neq\emptyset\}$ halmaz véges (az ilyen tulajdonságú halmazrendszereket *lokálisan végeseknek* nevezzük). Ha minden $i\in I$ esetén E_i zárt halmaz, akkor $\bigcup_{i\in I}E_i$ is zárt halmaz. Igaz-e, hogy nyílt halmazok nem üres, lokálisan véges rendszerének a metszete nyílt?

3. Legyen M a $\{0\}\times[0,1]$ és $[0,1]\times\{0\}$ $\mathbb{R}^2$-beli halmazok uniója, és legyen

$$d: M\times M\to\mathbb{R}_+;\quad ((x,y),(x',y'))\mapsto\max(|x-x'|,|y-y'|).$$

Ekkor (M,d) metrikus tér és $\mathfrak{a}:=(1/2,0)\in M$ olyan pont, valamint $r:=1/2\in\mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy

$$\overline{\mathrm{B}_r(\mathfrak{a};d)}\neq\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a};d).$$

4. Legyen M halmaz és $\mathscr{P}_0(M)$ az M nem üres részhalmazainak halmaza. Legyen d olyan metrika M felett, amely szerint M korlátos halmaz, továbbá értelmezzük a következő függvényeket:

$$\varrho:\mathscr{P}_0(M)\times\mathscr{P}_0(M)\to\mathbb{R}_+;\quad (E,F)\mapsto\sup_{x\in E}\Big(\inf_{y\in F}d(x,y)\Big),$$
$$\sigma:\mathscr{P}_0(M)\times\mathscr{P}_0(M)\to\mathbb{R}_+;\quad (E,F)\mapsto\max(\varrho(E,F),\varrho(F,E)).$$

Ekkor a $(\mathscr{P}_0(M),\sigma)$ pár félmetrikus tér, és ha $\mathscr{H}$ az M nem üres *zárt* részhalmazainak halmaza, akkor a $(\mathscr{H},\sigma|_{\mathscr{H}\times\mathscr{H}})$ pár metrikus tér.

5. Ha M halmaz és d_1, d_2 olyan metrikák M felett, amelyekhez léteznek olyan $C_1,C_2>0$ valós számok, hogy minden $x,y\in M$ esetén $d_1(x,y)\le C_2d_2(x,y)$ és $d_2(x,y)\le C_1d_1(x,y)$, akkor d_1 és d_2 ekvivalensek. Azonban lehetséges az, hogy d_1 és d_2 olyan ekvivalens metrikák az M halmaz felett, amelyekhez nem léteznek ilyen tulajdonságú C_1 és C_2 valós számok.

6. Legyen $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ olyan függvény, amelyre teljesülnek az 1. pont **2**. gyakorlat a), b) és c) feltételei. Ha f még *folytonos* is a 0-ban, akkor f mindenütt folytonos, és minden (M,d) metrikus térre $(M,f\circ d)$ olyan metrikus tér, hogy d és $f\circ d$ *ekvivalens* metrikák. Az 1. pont **2**. gyakorlatában felsorolt konkrét függvények mind folytonosak.

(*Útmutatás.* Először azt kell igazolni, hogy a c) miatt $t,t'\in\mathbb{R}_+$ esetén $|f(t')-f(t)|\le f(|t'-t|)$, így az f függvény 0-ban való folytonosságából következik a folytonossága.

Ha $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, akkor $0=f(0)=\lim_0 f$ miatt van olyan $\delta\in\mathbb{R}_+^*$, hogy minden $t\in[0,\delta[$ valós számra $f(t)<\varepsilon$, ezért minden $x\in M$ pontra $\mathrm{B}_\delta(x;d)\subseteq\mathrm{B}_\varepsilon(x;f\circ d)$. Ebből következik, hogy $\mathscr{T}_{f\circ d}\subseteq\mathscr{T}_d$.

Megfordítva, ha $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, akkor az f monoton növése alapján minden $x\in M$ esetén $\mathrm{B}_{f(\varepsilon)}(x,f\circ d)\subseteq\mathrm{B}_\varepsilon(x;d)$. Ebből következik, hogy $\mathscr{T}_d\subseteq\mathscr{T}_{f\circ d}$.)

7. Egy valós vagy komplex E vektortér feletti d metrikát *topologikusan normálhatónak* nevezünk, ha létezik olyan E feletti $\|\cdot\|$ norma, amelyre a d és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrikák ekvivalensek. Minden normálható metrika nyilvánvalóan topologikusan is normálható, de ennek megfordítása nem igaz.

8. Az M halmaz feletti d metrikát *ultrametrikának* nevezzük, ha d-re az (M_{III})-nál erősebb következő feltétel teljesül:

(M'_{III}) Minden $x, y, z \in M$ pontra $d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$.

Az (M,d) párt *ultrametrikus térnek* nevezzük, ha d ultrametrika az M halmaz felett. Minden diszkrét metrikus tér ultrametrikus tér.

a) Ha (M,d) ultrametrikus tér és $x, y, z \in M$ olyan pontok, hogy $d(x,z) \neq d(y,z)$, akkor $d(x,y) = \max(d(x,z), d(z,y))$.

b) Ha (M,d) ultrametrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, akkor a $\mathrm{B}_r(x;d)$ gömb *nyílt-zárt halmaz*, vagyis egyszerre nyílt és zárt a d metrika szerint, továbbá minden $y \in \overline{\mathrm{B}}_r(x;d)$ pontra $\overline{\mathrm{B}}_r(y;d) = \overline{\mathrm{B}}_r(x;d)$ teljesül, valamint fennáll a

$$\overline{\mathrm{B}}_r(x;d) = \bigcup_{y \in \overline{\mathrm{B}}_r(x;d)} \mathrm{B}_r(y;d)$$

egyenlőség.

c) Ha ultrametrikus térben két gömb metszi egymást, akkor az egyikük részhalmaza a másiknak.

d) Ha K test és $|\cdot|$ ultrametrikus abszolútérték K felett (II. fejezet, 2. pont, **1**. gyakorlat), akkor $\mathrm{d}_{|\cdot|}$ ultrametrika K felett. Például, ha p prímszám, akkor a $(\mathbb{Q}, \mathrm{d}_{|\cdot|_p})$ pár nem diszkrét ultrametrikus tér.

9. Legyen M az összes $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvények halmaza, és minden $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in M$ esetén, ha $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$, akkor

$$\delta(\mathbf{s}, \mathbf{s}') := \min\{n \in \mathbb{N} | \mathbf{s}(n) \neq \mathbf{s}'(n)\}.$$

Legyen $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amelyre $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in M$ esetén

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{s}') := \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \delta(\mathbf{s}, \mathbf{s}')} & ; \text{ha } \mathbf{s} \neq \mathbf{s}', \\ 0 & ; \text{ha } \mathbf{s} = \mathbf{s}'. \end{cases}$$

Ekkor (M,d) ultrametrikus tér. Határozzuk meg minden $\mathbf{s} \in M$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén a $\mathrm{B}_r(\mathbf{s};d)$, $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathbf{s};d)$ és $\mathrm{S}_r(\mathbf{s};d)$ halmazokat!

(*Útmutatás.* Elég azt igazolni, hogy minden $\mathbf{s}, \mathbf{s}', \mathbf{s}'' \in M$ esetén, ha $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$ és $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'' \neq \mathbf{s}'$, akkor $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \geq \min(\delta(\mathbf{s}, \mathbf{s}''), \delta(\mathbf{s}'', \mathbf{s}'))$, ami könnyen belátható.)

10. Legyen (M,d) metrikus tér. Ha $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in M$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\mathfrak{a}$-t $\mathfrak{b}$-vel *összekötő ε-láncnak* nevezünk minden olyan $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszert M-ben, amelyre $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = \mathfrak{a}$, $x_n = \mathfrak{b}$, továbbá minden $k < n$ természetes számra $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$.

a) Minden $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in M \times M$ párhoz van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, amelyhez létezik $\mathfrak{a}$-t $\mathfrak{b}$-vel összekötő ε-lánc.

b) Legyen $d' : M \times M \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amely minden $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in M \times M$ párhoz azon $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számok halmazának *infimumát* rendeli, amelyekhez létezik $\mathfrak{a}$-t $\mathfrak{b}$-vel összekötő ε-lánc. Ekkor d' félmetrika M felett, és az (M,d') félmetrikus térhez asszociált metrikus tér (1. pont, **4**. gyakorlat) ultrametrikus tér.

11. Ha $p \geq 1$ tetszőleges valós szám, akkor a $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák leszűkítései $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-re *nem ekvivalens* normák. Minden végtelen dimenziós valós vagy komplex vektortér felett léteznek inekvivalens normák.

(*Útmutatás.* Legyen $p \geq 1$ rögzített valós szám. Könnyen látható, hogy minden $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ esetén $\|\mathbf{s}\|_\infty \leq \|\mathbf{s}\|_p$ teljesül, azonban nem létezhet olyan $C > 0$ valós szám, amelyre minden $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ esetén $\|\mathbf{s}\|_p \leq C\|\mathbf{s}\|_\infty$. Legyen ugyanis minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra $\mathbf{s}_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ az a sorozat, amelyre $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{s}_n(k) := \begin{cases} n^{-1/p} & ; \text{ha } k < n; \\ 0 & ; \text{ha } k \geq n. \end{cases}$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra $\|\mathbf{s}_n\|_p = 1$ és $\|\mathbf{s}_n\|_\infty = n^{-1/p}$. Ezért nincs olyan $C > 0$ valós szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\|\mathbf{s}_n\|_p \leq C\|\mathbf{s}_n\|_\infty$ teljesül.

Ha E végtelen dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor létezik olyan $T \subseteq E$ végtelen halmaz, hogy létezik $u : E \to \mathbb{K}^{(T)}$ lineáris bijekció; ekkor minden $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ valós számra $\|\cdot\|_p \circ u$ olyan norma E felett, hogy $\|\cdot\|_p \circ u$ és $\|\cdot\|_\infty \circ u$ inekvivalens normák E felett.)

12. Ha $p, q \in \mathbb{N}$ olyan valós számok, hogy $1 \leq p < q$, akkor a $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_q$ normák $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-re vett leszűkítéseire teljesül az, hogy minden $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ esetén $\|\mathbf{s}\|_q \leq \|\mathbf{s}\|_p$, de nem létezik olyan $C > 0$ valós szám, amelyre teljesülne az, hogy minden $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ esetén $\|\mathbf{s}\|_p \leq C\|\mathbf{s}\|_q$, tehát ezek a normák *nem ekvivalensek.* Minden végtelen dimenziós valós vagy komplex vektortér felett létezik normák olyan $(\|\cdot\|_i)_{i\in I}$ rendszere, hogy I kontinuum-számosságú halmaz, és minden $i, j \in I$ esetén, ha $i \neq j$, akkor $\|\cdot\|_i$ és $\|\cdot\|_j$ inekvivalens normák.

(*Útmutatás.* Legyen minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra $\mathbf{s}_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ az a sorozat, amelyre $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{s}_n(k) := \begin{cases} n^{-1/q} & ; \text{ha } k < n; \\ 0 & ; \text{ha } k \geq n. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\|\mathbf{s}_n\|_q = 1$ és $\|s_n\|_p = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, tehát az $(\|\mathbf{s}_n\|_q)_{n\in\mathbb{N}^*}$ rendszer korlátos $\mathbb{R}$-ben, míg az $(\|\mathbf{s}_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ rendszer nem korlátos. Ezért nem létezhet olyan $C > 0$ valós szám, amelyre teljesülne az, hogy minden $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ esetén $\|\mathbf{s}\|_p \leq C\|\mathbf{s}\|_q$.

Ugyanakkor minden $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ esetén $\|\mathbf{s}\|_q \leq \|\mathbf{s}\|_p$, mert $0 < p/q < 1$ miatt

$$\|\mathbf{s}\|_q^p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{s}(k)|^q\right)^{\frac{p}{q}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (|\mathbf{s}(k)|^q)^{\frac{p}{q}} = \|\mathbf{s}\|_p^p,$$

amiből következik, hogy $\|\mathbf{s}\|_q \leq \|\mathbf{s}\|_p$.

Ha E végtelen dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor létezik olyan $T \subseteq E$ végtelen halmaz, hogy létezik $u : E \to \mathbb{K}^{(T)}$ lineáris bijekció; ekkor minden $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ valós számra $\|\cdot\|_p \circ u$ olyan norma E felett, hogy ha $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q \geq 1$ és $p \neq q$, akkor az E feletti $\|\cdot\|_p \circ u$ és $\|\cdot\|_q \circ u$ normák inekvivalensek.)

13. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, továbbá $f : M \to M'$ olyan bijekció, amely izometria a d és d' metrikák szerint. Ekkor

- az $\Omega \subseteq M$ halmaz pontosan akkor nyílt a d metrika szerint, ha az $f\langle\Omega\rangle \subseteq M'$ halmaz nyílt a d' metrika szerint,

- az $F \subseteq M$ halmaz pontosan akkor zárt a d metrika szerint, ha az $f\langle F\rangle \subseteq M'$ halmaz zárt a d' metrika szerint,

- minden $E \subseteq M$ halmazra $\mathrm{Int}(f\langle E\rangle) = f\langle \mathrm{Int}(E)\rangle$ és $\overline{f\langle E\rangle} = f\langle \overline{E}\rangle$,

- az $E \subseteq M$ halmaz pontosan akkor sűrű a d metrika szerint, ha az $f\langle E\rangle \subseteq M'$ halmaz sűrű a d' metrika szerint.

3. fejezet

Sorozatok metrikus terekben

3.1. Sorozat konvergenciája metrikus térben

3.1.1. Definíció. *Legyen (M, d) metrikus tér. Az M-ben haladó* $\mathbf{s}$ *sorozatot* **konvergensnek** *mondjuk a d metrika szerint, ha létezik olyan $\mathfrak{a} \in M$ pont, amelyre*

$$(\forall V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}))(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ (n > N \Rightarrow \mathbf{s}(n) \in V)$$

teljesül. Az M-ben haladó $\mathbf{s}$ *sorozat d metrika szerinti* **határértékének** *nevezünk minden olyan $\mathfrak{a} \in M$ pontot, amelyre ez a tulajdonság teljesül. Az M-ben haladó, d szerint nem konvergens sorozatokat* **divergenseknek** *mondjuk.*

A környezetek definíciója alapján világos, hogy ha (M, d) metrikus tér, akkor az M-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat d szerinti konvergenciája olyan $\mathfrak{a} \in M$ pont létezésével ekvivalens, amelyre

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ (n > N \Rightarrow d(\mathbf{s}(n), \mathfrak{a}) < \varepsilon)$$

teljesül. Ez azt mutatja, hogy egy $\mathbb{K}$-ban haladó (azaz szám-) sorozat pontosan akkor konvergens $\mathbb{K}$-ban (a korábbi definíció alapján), ha konvergens a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi metrika szerint (az itteni definíció alapján).

3.1.2. Állítás. *Metrikus térben minden sorozatnak legfeljebb egy határértéke van.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, és $\mathbf{s}$ olyan M-ben haladó sorozat, amelynek az $\mathfrak{a}_1$ és $\mathfrak{a}_2$ pontok mindketten a határértékei. Ha $\mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{a}_2$, akkor léteznek olyan $V_1 \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}_1)$ és $V_2 \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}_2)$ környezetek, amelyekre $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ekkor léteznek olyan $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N_1$, akkor $\mathbf{s}(n) \in V_1$, és ha $n > N_2$, akkor $\mathbf{s}(n) \in V_2$. Ez azt jeleni, hogy ha $n > \max(N_1, N_2)$, akkor $\mathbf{s}(n) \in V_1 \cap V_2$, ami ellentmond annak, hogy $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ezért szükségképpen $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$. ∎

Jelölés. Ha (M, d) metrikus tér és $\mathbf{s}$ M-ben haladó, d szerint konvergens sorozat, akkor $\mathbf{s}$ határértékét $\lim(\mathbf{s})$ vagy $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{s}(n)$ jelöli.

Ha (M, d) metrikus tér, és $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}'$ olyan M-ben haladó sorozatok, amelyekhez létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ számra $\mathbf{s}(n) = \mathbf{s}'(n)$, akkor az $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ sorozatok egyszerre konvergensek vagy divergensek, és ha konvergensek, akkor $\lim(\mathbf{s}) = \lim(\mathbf{s}')$. Valóban, ha $\mathbf{s}$ konvergens, akkor a $\lim(\mathbf{s})$ pont bármely V környezetéhez van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > N$, akkor $\mathbf{s}(n) \in V$; ekkor $n > \max(N, N_0)$ esetén fennáll, hogy $\mathbf{s}'(n) \in V$, így $\mathbf{s}'$ konvergens, és $\lim(\mathbf{s}) = \lim(\mathbf{s}')$.

Az előző bekezdésből következik, hogy ha (M, d) metrikus tér, és az M-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozatnak *véges sok* helyen megváltoztatjuk az értékét, akkor az így nyert $\mathbf{s}'$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha $\mathbf{s}$ konvergens, továbbá, ha $\mathbf{s}$ konvergens, akkor $\lim(\mathbf{s}) = \lim(\mathbf{s}')$. Ezért minden olyan $\mathbf{s} : \mathbb{N} \rightarrowtail M$ függvénynek is tekinthetjük a konvergenciáját és a határértékét, amelyre $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Dom}(\mathbf{s})$ *véges* halmaz; ehhez elegendő az $\mathbf{s}$ függvényt kiterjeszteni $\mathbb{N}$-re *tetszőlegesen*, és venni a kiterjesztett sorozat határértékét (amennyiben létezik); ekkor a kiterjesztett sorozat d szerinti konvergenciájának ténye, illetve konvergencia esetén az M-beli határértéke d szerint *független* a kiterjesztés választásától.

3.1.3. Állítás. *Metrikus térben minden konvergens sorozat mindegyik részsorozata konvergens, és a határértéke egyenlő az eredeti sorozat határértékével.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $\mathbf{s}$ egy M-ben haladó konvergens sorozat és $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény. Ha $V \in \mathscr{T}_d(\lim(\mathbf{s}))$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\mathbf{s}(n) \in V$; ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\sigma(n) \geq n > N$, így $\mathbf{s}(\sigma(n)) \in V$ is teljesül, tehát $\mathbf{s} \circ \sigma$ konvergens d szerint, és nyilvánvaló, hogy $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) = \lim(\mathbf{s})$. ■

3.1.4. Állítás. *Metrikus térben minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $\mathbf{s}$ M-ben haladó, d szerint konvergens sorozat, és rögzítsünk egy $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot. Ekkor $\mathrm{B}_r(\lim(\mathbf{s}); d) \in \mathscr{T}_d(\lim(\mathbf{s}))$, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $\mathbf{s}(n) \in \mathrm{B}_r(\lim(\mathbf{s}); d)$, ami azt jelenti, hogy $\{\mathbf{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\} \subseteq \mathrm{B}_r(\lim(\mathbf{s}); d)$. Ekkor az $\{\mathbf{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\}$ halmaz korlátos d szerint és $\{\mathbf{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq N)\}$ szintén korlátos, hiszen véges, így $\mathrm{Im}(\mathbf{s})$ is korlátos halmaz d szerint, mert két korlátos halmaz uniója korlátos, és nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Im}(\mathbf{s}) = \{\mathbf{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\} \cup \{\mathbf{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq N)\}$. ■

3.2. Konvergens sorozatok metrikus altérben

Most jellemezzük az altérmetrika szerint konvergens sorozatokat. Látható lesz, hogy az állítás az altérmetrika szerinti környezetek jellemzési tételének alkalmazásával igazolható.

3.2.1. Állítás. *Legyen (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek és $\mathbf{s}'$ M'-ben haladó sorozat. Az $\mathbf{s}'$ sorozat pontosan akkor konvergens M'-ben a d' altérmetrika szerint, ha konvergens M-ben a d metrika szerint és a d szerinti határértéke eleme M'-nek. Továbbá, ha $\mathbf{s}'$ konvergens M'-ben a d' altérmetrika szerint, akkor az $\mathbf{s}'$ határértéke a d és d' metrikák szerint ugyanaz a pont.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{s}'$ konvergens M'-ben a d' metrika szerint és legyen $\mathfrak{a}'$ a d' szerinti határértéke. Ekkor $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}')$ esetén $V \cap M' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{a}')$, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}'(n) \in V \cap M' \subseteq V$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{s}'$ konvergens M-ben a d metrika szerint és a d szerinti határértéke megegyezik $\mathfrak{a}'$-vel, ami eleme M'-nek. Az is látható, hogy az $\mathbf{s}'$ határértéke a d és d' metrikák szerint ugyanaz a pont.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{s}'$ konvergens M-ben a d metrika szerint, és a d szerinti $\mathfrak{a}$ határértéke olyan, hogy $\mathfrak{a} \in M'$. Ekkor $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{a})$ esetén létezik olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $V' = V \cap M'$, és egy ilyen V-hez van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}'(n) \in V \cap M' = V'$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{s}'$ konvergens M'-ben a d' metrika. ■

Azonban előfordulhat az, hogy egy M'-ben haladó $\mathbf{s}'$ sorozat konvergens M-ben a d metrika szerint, de a határértéke *nem eleme* M'-nek; ekkor $\mathbf{s}'$ bizonyosan nem konvergens M'-ben a d' altérmetrika szerint. A következő állításból látszik, hogy ilyen eset pontosan akkor fordul elő, ha M' a d metrika szerint nem zárt halmaz M-ben.

3.3. Az érintési és torlódási pontok jellemzése sorozatokkal

3.3.1. Állítás. *Legyen (M, d) metrikus tér és $E \subseteq M$.*

– *Az $x \in M$ elem pontosan akkor érintési pontja E-nek d szerint, ha létezik olyan E-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál d szerint.* **(Az érintési pontok jellemzése sorozatokkal)**

– *Az $x \in M$ elem pontosan akkor torlódási pontja E-nek d szerint, ha létezik olyan $E \setminus \{x\}$-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál d szerint.* **(A torlódási pontok jellemzése sorozatokkal)**

– *Az E halmaz pontosan akkor zárt d szerint, ha minden E-ben haladó, d szerint konvergens sorozat határértéke eleme E-nek.* (**A zárt halmazok jellemzése sorozatokkal.**)

Bizonyítás. Ha $\mathbf{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál d szerint, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}(n) \in \mathrm{B}_\varepsilon(x; d)$; ekkor $E \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x; d) \neq \emptyset$, vagyis az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján $x \in \overline{E}$. Megfordítva, tegyük fel, hogy x érintési pontja E-nek. Rögzítsünk egy $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot, amely $\mathbb{R}_+^*$-ban halad. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E \cap \ \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x; d) \neq \emptyset$, ezért a kiválasztási axióma szerint: $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}(E \cap \ \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x; d)) \neq \emptyset$; legyen $\mathbf{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\mathbf{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(\mathbf{s}(n), x) < \varepsilon_n$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ számra $\varepsilon_n < \varepsilon$, így $d(\mathbf{s}(n), x) < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{s}$ sorozat az x-hez konvergál d szerint.

A második állítás nyilvánvalóan következik az elsőből és abból, hogy definíció szerint x pontosan akkor torlódási pontja E-nek, ha érintési pontja $E \setminus \{x\}$-nek.

A harmadik állítás nyilvánvalóan következik az elsőből és abból, hogy az E halmaz pontosan akkor zárt, ha $\overline{E} \subseteq E$. ■

3.3.2. Következmény. *Ha (M, d) metrikus tér és $E \subseteq M$, akkor* $\mathrm{diam}_d(\overline{E}) = \mathrm{diam}_d(E)$.

Bizonyítás. Mivel $E \subseteq \overline{E}$, így

$$\mathrm{diam}_d(E) = \sup_{(x,y)\in E\times E} d(x, y) \leq \sup_{(x,y)\in \overline{E}\times \overline{E}} d(x, y) = \mathrm{diam}_d(\overline{E}).$$

Legyen $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $c < \mathrm{diam}_d(\overline{E}) = \sup\limits_{(x,y)\in \overline{E}\times \overline{E}} d(x, y)$. Ekkor vehetünk olyan $(x, y) \in \overline{E} \times \overline{E}$ párt, amelyre $c < d(x, y)$. Az előző állítás szerint léteznek olyan E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok, hogy $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ és $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Ekkor a négyszög-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $c < d(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, így van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $c < d(x_n, y_n) \leq \mathrm{diam}_d(E)$. Ebből következik, hogy $\mathrm{diam}_d(\overline{E}) \leq \mathrm{diam}_d(E)$. ■

Megállapodunk abban, hogy ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\mathbf{s}$ E-ben haladó sorozat, akkor az "$\mathbf{s}$ konvergens a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrika szerint" kifejezés helyett a rövidebb "$\mathbf{s}$ konvergens a $\|\cdot\|$ szerint" kifejezést használjuk. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\mathbf{s}$ E-ben haladó sorozat, akkor az $\mathbf{s}$-hez asszociált $\sum \mathbf{s}$ (vektor)sor szintén E-ben haladó sorozat, ezért a $\sum \mathbf{s}$ sor $\|\cdot\|$ szerinti konvergenciáját már értelmeztük; ha a $\sum \mathbf{s}$ sor a $\|\cdot\|$ szerint konvergens, akkor a $\lim \left(\sum \mathbf{s}\right)$ határértéket a $\sum \mathbf{s}$ sor *összegének* nevezzük, és a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)$ szimbólummal jelöljük. Tehát $\sum \mathbf{s}$ egy E-ben haladó sorozat, amely mindenképpen létezik, azonban $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)$ ennek a sorozatnak a határértéke E-ben a $\|\cdot\|$ norma szerint, amely nem szükségképpen létezik.

3.4. Összetett sorozatok konvergenciája normált térben

3.4.1. Definíció. *Legyen E vektortér a K test felett, és $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}'$ E-ben haladó sorozatok, valamint α K-ban haladó sorozat. Ekkor az $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$ és $\alpha.\mathbf{s}$ E-ben haladó sorozatokat úgy értelmezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(\mathbf{s} + \mathbf{s}')(n) := \mathbf{s}(n) + \mathbf{s}'(n), \quad (\alpha.\mathbf{s})(n) := \alpha(n).\mathbf{s}(n)$$

Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor $\|\mathbf{s}(\cdot)\|$ jelöli azt a valós sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|\mathbf{s}(\cdot)\|(n) := \|\mathbf{s}(n)\|.$$

3.4.2. Állítás. *Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}'$ E-ben haladó sorozatok, valamint α $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat.*

a) *Ha $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint, akkor $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$ is konvergens $\|\cdot\|$ szerint és*

$$\lim(\mathbf{s} + \mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s}) + \lim(\mathbf{s}').$$

b) *Ha $\mathbf{s}$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint és α konvergens számsorozat, akkor $\alpha.\mathbf{s}$ is konvergens $\|\cdot\|$ szerint, és*

$$\lim(\alpha.\mathbf{s}) = \lim(\alpha). \lim(\mathbf{s}).$$

c) *Ha $\mathbf{s}$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint, akkor $\|\mathbf{s}(\cdot)\|$ konvergens $\mathbb{R}$-ben, és*

$$\lim(\|\mathbf{s}(\cdot)\|) = \|\lim(\mathbf{s})\|.$$

Bizonyítás. Feltesszük, hogy $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ konvergens sorozatok $\|\cdot\|$ szerint, valamint α konvergens számsorozat.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és vegyünk tetszőleges olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\varepsilon' < \varepsilon/2$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$) olyan, hogy minden $n > N$ (illetve $n > N'$) természetes számra $\|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})\| < \varepsilon'$ (illetve $\|\mathbf{s}'(n) - \lim(\mathbf{s}')\| < \varepsilon'$). Ekkor minden $n > \max(N, N')$ természetes számra:

$$\|(\mathbf{s} + \mathbf{s}')(n) - (\lim(\mathbf{s}) + \lim(\mathbf{s}'))\| \leq \|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})\| + \|\mathbf{s}'(n) - \lim(\mathbf{s}')\| < 2 \cdot \varepsilon' < \varepsilon,$$

tehát $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint, és $\lim(\mathbf{s} + \mathbf{s}') = \lim(\mathbf{s}) + \lim(\mathbf{s}')$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$(\alpha.\mathbf{s})(n) - (\lim(\alpha)).(\lim(\mathbf{s})) = \alpha(n).\mathbf{s}(n) - (\lim(\alpha)).(\lim(\mathbf{s})) =$$
$$(\alpha(n) - \lim(\alpha)).(\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})) + (\alpha(n) - \lim(\alpha)).\lim(\mathbf{s}) + \lim(\alpha).(\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})),$$

amiből az következik, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és $|\alpha(n) - \lim(\alpha)| < \varepsilon$, valamint $\|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})\| < \varepsilon$, akkor:

$$\|(\alpha.\mathbf{s})(n) - (\lim(\alpha)).(\lim(\mathbf{s}))\| < \varepsilon^2 + \varepsilon \cdot \|\lim(\mathbf{s})\| + |\lim(\alpha)| \cdot \varepsilon.$$

Legyen tehát $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és vegyünk tetszőleges olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $(\varepsilon')^2 + \varepsilon' \cdot \|\lim(\mathbf{s})\| + |\lim(\alpha)| \cdot \varepsilon' \leq \varepsilon$; például:

$$\varepsilon' := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + |\lim(\alpha)| + \|\lim(\mathbf{s})\|}\right).$$

Az ε' számhoz legyen $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$) olyan, hogy minden $n > N$ (illetve $n > N'$) természetes számra $|\alpha(n) - \lim(\alpha)| < \varepsilon'$ (illetve $\|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})\| < \varepsilon'$). Ekkor a fentiek szerint minden $n > N$ természetes számra:

$$\|(\alpha.\mathbf{s})(n) - (\lim(\alpha)).(\lim(\mathbf{s}))| < (\varepsilon')^2 + \varepsilon' \cdot \|\lim(\mathbf{s})\| + |\lim(\alpha)| \cdot \varepsilon' \leq \varepsilon,$$

tehát $\alpha.\mathbf{s}$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint és $\lim(\alpha.\mathbf{s}) = \lim(\alpha).\lim(\mathbf{s})$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $\|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})\| < \varepsilon$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra:

$$|\|\mathbf{s}(\cdot)\|(n) - \|\lim(\mathbf{s})\|| := |\|\mathbf{s}(n)\| - \|\lim(\mathbf{s})\|| \leq \|\mathbf{s}(n) - \lim(\mathbf{s})\| < \varepsilon,$$

tehát $\|\mathbf{s}(\cdot)\|$ konvergens $\mathbb{R}$-ben, és

$$\lim(\|\mathbf{s}(\cdot)\|) = \|\lim(\mathbf{s})\|$$

teljesül. ■

3.4.3. Következmény. *Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $F \subseteq E$ lineáris altér, akkor $\overline{F}$ is lineáris altere E-nek.*

Bizonyítás. Ha $x, x' \in \overline{F}$, akkor az érintési pontok sorozatokkal való jellemzése alapján léteznek olyan $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ sorozatok, amelyek F-ben haladnak, és $\|\cdot\|$ szerint $x = \lim(\mathbf{s})$, $x' = \lim(\mathbf{s})$ teljesül; ekkor az előző állítás a) pontja szerint $x + x' = \lim(\mathbf{s} + \mathbf{s}')$, és az $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$ sorozat is F-ben halad, így $x + x' \in \overline{F}$.

Ha $x \in \overline{F}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor érintési pontok sorozatokkal való jellemzése alapján létezik olyan F-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat, amelyre $x = \lim(\mathbf{s})$ a $\|\cdot\|$ szerint; ekkor az előző állítás b) pontját alkalmazhatjuk az α értékű konstans-sorozatra (amit szintén α-val jelölünk), tehát $\alpha.x = \lim(\alpha.\mathbf{s})$, és az $\alpha.\mathbf{s}$ sorozat is $\mathbb{F}$-ben halad, következésképpen $\alpha.x \in \overline{F}$ ■

3.4.4. Definíció. *Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor az E-ben haladó* $\mathbf{s}$ *sorozatot* **zérussorozatnak** *nevezzük $\|\cdot\|$ szerint, ha* $\mathbf{s}$ *konvergens $\|\cdot\|$ szerint és* $\lim(\mathbf{s}) = 0$.

3.4.5. Állítás. *Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett,* $\mathbf{s}$ *E-ben haladó és α $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat. Ha*

a) *α korlátos számsorozat és* $\mathbf{s}$ *a $\|\cdot\|$ szerint zérussorozat, vagy*

b) *α zérussorozat $\mathbb{K}$-ban és* $\mathbf{s}$ *korlátos $\|\cdot\|$ szerint,*

akkor $\alpha.\mathbf{s}$ zérussorozat $\|\cdot\|$ szerint.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy α korlátos sorozat $\mathbb{K}$-ban és $\mathbf{s}$ a $\|\cdot\|$ szerint zérussorozat. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, amelyre $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{B}_r(0;\mathbb{K})$, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\alpha(n)| < r$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\lim(\mathbf{s}) = 0$ miatt az $\varepsilon/r \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > N$, akkor $\|\mathbf{s}(n)\| < \varepsilon/r$; ekkor $\|(\alpha.\mathbf{s})(n)\| < r \cdot (\varepsilon/r) = \varepsilon$, így $\alpha.\mathbf{s}$ zérussorozat $\|\cdot\|$ szerint.

Tegyük fel, hogy α zérussorozat $\mathbb{K}$-ban és $\mathbf{s}$ korlátos $\|\cdot\|$ szerint. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, amelyre $\mathrm{Im}(\mathbf{s}) \subseteq \mathrm{B}_r(0;\mathrm{d}_{\|\cdot\|})$, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|\mathbf{s}(n)\| < r$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor $\lim(\alpha) = 0$ miatt az $\varepsilon/r \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > N$, akkor $|\alpha(n)| < \varepsilon/r$; ekkor $\|(\alpha.\mathbf{s})(n)\| < (\varepsilon/r) \cdot r = \varepsilon$, így $\alpha.\mathbf{s}$ zérussorozat $\|\cdot\|$ szerint. ∎

3.5. Konvergens sorok normált térben

3.5.1. Állítás. *Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $\mathbf{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre a $\sum \mathbf{s}$ vektorsor a $\|\cdot\|$ szerint konvergens, akkor $\mathbf{s}$ a $\|\cdot\|$ szerint zérussorozat.*

Bizonyítás. Legyen S a $\sum \mathbf{s}$ sor összege, és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Ekkor $S = \lim\left(\sum \mathbf{s}\right)$ miatt vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $n > N$ természetes számra $\left\|\left(\sum \mathbf{s}\right)(n) - S\right\| < \varepsilon/2$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$\begin{aligned}\|\mathbf{s}(n)\| &= \left\|\left(\sum \mathbf{s}\right)(n+1) - \left(\sum \mathbf{s}\right)(n)\right\| \leq \\ &\leq \left\|\left(\sum \mathbf{s}\right)(n+1) - S\right\| + \left\|S - \left(\sum \mathbf{s}\right)(n)\right\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $\mathbf{s}$ a $\|\cdot\|$ szerint zérussorozat. ∎

3.5.2. Definíció. *Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $\mathbf{s}$ E-ben haladó sorozat, akkor a $\sum \mathbf{s}$ vektorsort* **abszolút konvergensnek** *nevezzük $\|\cdot\|$ szerint, ha a $\sum \|\mathbf{s}(\cdot)\|$ számsor konvergens.*

Általában egy normált térben haladó sorozathoz asszociált sor konvergenciája és abszolút konvergenciája *egymástól független tulajdonságok*, vagyis egyikből sem következik a másik.

3.5.3. Állítás. *Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $\mathbf{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre a $\sum \mathbf{s}$ vektorsor a $\|\cdot\|$ szerint konvergens és abszolút konvergens, akkor*

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{s}(k)\|.$$

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\left\|\left(\sum \mathbf{s}\right)(n)\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{s}(k)\right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{s}(k)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{s}(k)|,$$

ezért fennáll a

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)\right\| = \left\|\lim\left(\sum \mathbf{s}\right)\right\| = \lim\left\|\left(\sum \mathbf{s}\right)(\cdot)\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\left(\sum \mathbf{s}\right)(n)\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{s}(k)\|$$

egyenlőtlenség. ∎

3.6. Szeparábilis metrikus terek

3.6.1. Definíció. *Az (M, d) metrikus teret* **szeparábilisnak** *nevezzük, ha létezik M-nek olyan megszámlálható részhalmaza, amely sűrű M-ben d szerint.*

3.6.2. Állítás. *Az (M, d) metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik olyan $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{T}_d$ megszámlálható halmaz, hogy az M minden d szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer uniójaként.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (M, d) szeparábilis metrikus tér, és legyen $D \subseteq M$ olyan megszámlálható halmaz, amelyre $\overline{D} = M$. Legyen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$. Értelmezzük az

$$\mathfrak{S} := \{\mathrm{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (\mathfrak{a} \in D)\}$$

halmazt. Ekkor $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{T}_d$, és $\mathfrak{S}$ megszámlálható, mert az

$$\mathbb{N} \times D \to \mathfrak{S}; \quad (n, \mathfrak{a}) \mapsto \mathrm{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$$

leképezés szürjekció, és az $\mathbb{N} \times D$ halmaz megszámlálható. Könnyen látható, hogy az M minden d szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer uniójaként.

Valóban, legyen $\Omega \in \mathscr{T}_d$ és $x \in \Omega$. Vehetünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $\mathrm{B}_r(x; d) \subseteq \Omega$; ekkor $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$ miatt van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $r_n < r/2$. A D halmaz sűrű d szerint, így $\mathrm{B}_{r_n}(x; d) \cap D \neq \emptyset$; legyen $\mathfrak{a}$ eleme ennek a metszetnek. Ekkor $\mathrm{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d) \in \mathfrak{S}$, és

$$x \in \mathrm{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d) \subseteq \mathrm{B}_r(x; d) \subseteq \Omega,$$

hiszen $y \in \mathrm{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$ esetén $d(y, x) \leq d(y, \mathfrak{a}) + d(\mathfrak{a}, x) < 2 \cdot r_n < r$. Ez azt jelenti, hogy ha $I := \{H \in \mathfrak{S} | H \subseteq \Omega\}$, akkor $\Omega = \bigcup\limits_{H\in I} H$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{T}_d$ olyan megszámlálható halmaz, hogy az M minden d szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer uniójaként. Legyen $\mathfrak{S}_0 := \mathfrak{S} \setminus \{\emptyset\}$, és tekintsük az $(S)_{S\in\mathfrak{S}_0}$ halmazrendszert, amelynek minden tagja nem üres halmaz. A kiválasztási axióma szerint vehetünk egy

$$f \in \prod_{S\in\mathfrak{S}_0} S$$

kiválasztó-függvényt. Ekkor $\mathrm{Im}(f)$ megszámlálható halmaz, mert $\mathrm{Dom}(f) = \mathfrak{S}_0$ megszámlálható. Továbbá $\mathrm{Im}(f)$ sűrű d szerint, mert ha $x \in M$ és Ω az x-nek nyílt környezete, akkor a feltevés szerint van olyan $S \in \mathfrak{S}$ halmaz, amelyre $x \in S \subseteq \Omega$; ekkor $S \in \mathfrak{S}_0$ és $f(S) \in S$, vagyis $f(S) \in \mathrm{Im}(f) \cap \Omega$. ■

3.6.3. Állítás. *Ha $n \in \mathbb{N}$, és $p = \infty$ vagy $p \geq 1$ valós szám, akkor a $\mathbb{Q}^n$ halmaz sűrű $\mathbb{R}^n$-ben, és $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n$ sűrű $\mathbb{C}^n$-ben a $\|\cdot\|_p$ szerint.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ feletti $\|\cdot\|_p$ normák ekvivalensek egymással, és egy halmaz sűrűsége nyilvánvalóan topologikus tulajdonság, ezért elég a $\|\cdot\|_\infty$ normára bizonyítani. Ha $x := (x_k)_{k\in n} \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, akkor nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}) = \prod_{k\in n} \mathrm{B}_r(x_k; \mathbb{K}),$$

és a **NUM** 2.7.5. állítás szerint minden $k \in n$ esetén:

– ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor $\mathrm{B}_r(x_k; \mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, és

– ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $\mathrm{B}_r(x_k; \mathbb{C}) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset$,

ezért a $\mathrm{B}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty})$ gömb metszi $\mathbb{Q}^n$-t a valós esetben, és $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n$-t a komplex esetben. Ebből az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján következik az állítás. ■

3.6.4. Következmény. *Ha $n \in \mathbb{N}$, és $p = \infty$ vagy $p \geq 1$ valós szám, akkor a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ normált tér szeparábilis.*

Bizonyítás. A $\mathbb{Q}^n$ és $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n$ halmazok megszámlálhatóak. ■

3.7. Gyakorlatok

1. Legyen $H \subseteq \mathscr{F}(\mathbb{N}; \mathbb{N})$ olyan *véges* halmaz, hogy minden $\sigma \in H$ függvény szigorúan monoton növő, és $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{\sigma \in H} \mathrm{Im}(\sigma)$ véges halmaz. Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy M-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat pontosan akkor konvergens d szerint, ha minden $\sigma \in H$ esetén az $s \circ \sigma$ részsorozat konvergens d szerint, és minden $\sigma, \sigma' \in H$ esetén $\lim(s \circ \sigma) = \lim(s \circ \sigma')$ teljesül.

2. Ha d és d' metrikák az M halmaz felett, akkor a következő állítások ekvivalensek:

a) a d és d' metrikák ekvivalensek;

b) minden M-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozatra, és minden $\mathfrak{a} \in M$ pontra: $\mathbf{s}$ pontosan akkor konvergál d szerint az $\mathfrak{a}$ ponthoz, ha $\mathbf{s}$ konvergál d' szerint az $\mathfrak{a}$ ponthoz.

(*Útmutatás.* tegyük fel, hogy a) nem igaz. Ekkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}_d$, hogy $\Omega \notin \mathscr{T}_{d'}$, *vagy* van olyan $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$, hogy $\Omega' \notin \mathscr{T}_d$. A meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy $\Omega \in \mathscr{T}_d$ és $\Omega \notin \mathscr{T}_{d'}$, továbbá legyen $\mathfrak{a} \in \Omega$ olyan pont, amely nem belső pontja Ω-nak a d' metrika szerint. Ekkor minden $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d') \setminus \Omega \neq \emptyset$, tehát ha $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó számsorozat, akkor a kiválasztási axióma szerint vehetünk egy

$$\mathbf{s} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} (\mathrm{B}_{\delta_n}(\mathfrak{a}; d') \setminus \Omega)$$

sorozatot. Világos, hogy ha $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zérussorozat $\mathbb{R}$-ben, akkor $\mathbf{s}$ konvergál $\mathfrak{a}$-hoz d' szerint. Ugyanakkor $\mathbf{s}$ az $M \setminus \Omega$ halmazban halad, amely *zárt* d szerint, ezért ha $\mathbf{s}$ a d szerint is konvergálna $\mathfrak{a}$-hoz, akkor $\mathfrak{a} \in M \setminus \Omega$ teljesülne, holott $\mathfrak{a} \in \Omega$. Ezért b) sem igaz, ami azt bizonyítja, hogy b)⇒a) teljesül.)

3. Ha (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek, és $D \subseteq M'$ olyan halmaz, amely sűrű M'-ben a d' metrika szerint, és M' sűrű M-ben a d metrika szerint, akkor D sűrű M-ben a d metrika szerint.

4. Minden $p \geq 1$ valós számra $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ a $\|\cdot\|_p$ szerint sűrű az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozattérben. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$, és ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^{(\mathbb{N})}$ megszámlálható sűrű halmaz $l^p_{\mathbb{K}}$-ban a $\|\cdot\|_p$ szerint, tehát az $(l^p_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_p)$ sorozatterek szeparábilisak.

5. A $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ lineáris altér $\|\cdot\|_\infty$ szerinti lezártja $l^\infty_{\mathbb{K}}$-ben megegyezik a $\mathbb{K}$-ban haladó zérus-sorozatok lineáris alterével.

6. Nem megszámlálhatóan végtelen alaphalmazú diszkrét metrikus tér nem szeparábilis.

7. Az $(l^\infty_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér nem szeparábilis.
(*Útmutatás.* Minden $E \subseteq \mathbb{N}$ halmazra legyen

$$\Omega_E := \mathrm{B}_{1/2}(\chi_E; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}).$$

Ekkor $(\Omega_E)_{E\in\mathscr{P}(\mathbb{N})}$ nem üres nyílt halmazok *diszjunkt* rendszere $l^\infty_{\mathbb{K}}$-ben, így az $\{\Omega_E | E \in \mathscr{P}(\mathbb{N})\}$ halmaz *nem megszámlálható*. Ha $D \subseteq l^\infty_{\mathbb{K}}$ sűrű halmaz a $\|\cdot\|_\infty$ szerint, akkor minden $E \subseteq \mathbb{N}$ halmazra $D \cap \Omega_E \neq \emptyset$, ezért a kiválasztási axióma szerint vehetünk egy

$$f \in \prod_{E\in\mathscr{P}(\mathbb{N})} (D \cap \Omega_E)$$

függvényt. Ekkor $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to D$ *injekció*, tehát D legalább kontinuum-számosságú.)

8. Legyen $\mathbf{c} := (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan $\mathbb{R}^*_+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. A $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatok $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vektorteréhez tekintsük a következő leképezést:

$$\mathrm{d}_{\mathbf{c}} : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+; \quad (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{|\mathbf{s}(k) - \mathbf{s}'(k)|}{1 + |\mathbf{s}(k) - \mathbf{s}'(k)|}.$$

a) A $\mathrm{d}_{\mathbf{c}}$ függvény nem normálható, transzláció-invariáns metrika a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sorozattér felett.

b) Ha $\mathbf{s} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ és $(\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$-ben haladó sorozat, akkor $(\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontosan akkor konvergál $\mathbf{s}$-hez a $\mathrm{d}_{\mathbf{c}}$ metrika szerint, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(\mathbf{s}_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergál $\mathbf{s}(k)$-hoz $\mathbb{K}$-ban.

c) Ha $\mathbf{c}' := (c'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ szintén olyan $\mathbb{R}^*_+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c'_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ feletti $\mathrm{d}_{\mathbf{c}}$ és $\mathrm{d}_{\mathbf{c}'}$ metrikák ekvivalensek.
(*Útmutatás.* A 4. pont **2**. gyakorlatának útmutatásában még egy ennél is általánosabb állítást is igazolunk.)

9. Legyen T halmaz és $f : T \to \mathbb{R}_+$ függvény. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{\overset{-1}{f}\langle[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\rangle}.$$

Ekkor minden $t \in T$ esetén az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ rendszer monoton növő és $f(t) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(t)$. Ha f korlátos, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N$, akkor $\sup\limits_{t\in T} |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$, vagyis ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in T} |f(t) - f_n(t)| \right) = 0$$

teljesül.

10. Szeparábilis metrikus tér minden metrikus altere szeparábilis metrikus tér.

(*Útmutatás.* Ha (M', d') metrikus altere az (M, d) szeparábilis metrikus térnek, és $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{T}_d$ olyan megszámlálható halmaz, hogy az M minden d szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer uniójaként, akkor az $\mathfrak{S}' := \{M' \cap \Omega | \Omega \in \mathfrak{S}\}$ halmaz része $\mathscr{T}_{d'}$-nek, megszámlálható, és az M' minden d' szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}'$-ben haladó rendszer uniójaként.)

4. fejezet

Metrikus és normált terek szorzata

4.1. Normált terek szorzata

4.1.1. Állítás. *Legyen* $(E_i, \|\cdot\|_i)_{i\in I}$ *normált terek nem üres véges rendszere, és* $E := \prod_{i\in I} E_i$ *az* $(E_i)_{i\in I}$ *vektortér-rendszer lineáris szorzata. Ekkor a*

$$\|\cdot\|_{(\infty)} : E \to \mathbb{R}_+; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \max_{i\in I} \|x_i\|_i$$

leképezés norma E *felett, és minden* $p \geq 1$ *valós számra a*

$$\|\cdot\|_{(p)} : E \to \mathbb{R}_+; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés norma E *felett, és ezek a normák páronként ekvivalensek.*

Bizonyítás. A $\|\cdot\|_{(\infty)}$ függvény nyilvánvalóan norma, míg a $p \geq 1$ valós számra a $\|\cdot\|_{(p)}$ függvény az elemi Minkowski-egyenlőtlenség alapján teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget, hiszen ha $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in E$, akkor

$$\|(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I}\|_{(p)} = \left(\sum_{i\in I} \|x_i + y_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i\in I} (\|x_i\|_i + \|y_i\|_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I} \|y_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_i)_{i\in I}\|_{(p)} + \|(y_i)_{i\in I}\|_{(p)}$$

Nyilvánvaló, hogy ha $p \geq 1$ valós szám és $(x_i)_{i\in I} \in E$, akkor

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_{(\infty)} := \max_{i\in I} \|x_i\|_i \leq \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_i)_{i\in I}\|_{(p)},$$

továbbá világos, hogy

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_{(p)} := \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i\in I} \max_{j\in I} \|x_j\|_j{}^p\right)^{\frac{1}{p}} = (\mathrm{Card}(I))^{\frac{1}{p}} \|(x_i)_{i\in I}\|_{(\infty)},$$

tehát a $\|\cdot\|_{(\infty)}$ és $\|\cdot\|_{(p)}$ normák ekvivalensek. Ezért bármely két $q, p \geq 1$ valós számra is igaz az, hogy a $\|\cdot\|_{(q)}$ és $\|\cdot\|_{(p)}$ normák ekvivalensek. ■

4.1.2. Definíció. *Ha* $(E_i, \|\cdot\|_i)_{i\in I}$ *normált terek nem üres véges rendszere, akkor a* $\left(\prod_{i\in I} E_i, \|\cdot\|_{(\infty)}\right)$ *normált teret az adott* **normálttér-rendszer szorzatának** *nevezzük.*

4.2. Metrikus terek szorzata

4.2.1. Állítás. *Legyen $((M_i, d_i))_{i \in I}$ metrikus terek nem üres véges rendszere, és $M := \prod_{i \in I} M_i$ az $(M_i)_{i \in I}$ halmazrendszer szorzata. Ekkor a*

$$d_{(\infty)} : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto \max_{i \in I} d_i(x_i, y_i)$$

leképezés metrika M felett, és minden $p \geq 1$ valós számra a

$$d_{(p)} : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto \Big(\sum_{i \in I} d_i(x_i, y_i)^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés metrika M felett, és ezek a metrikák páronként ekvivalensek.

Bizonyítás. Az előző állítás bizonyításának mintájára igazolható. ■

4.2.2. Definíció. *Ha $((M_i, d_i))_{i \in I}$ metrikus terek nem üres véges rendszere, akkor a $\Big(\prod_{i \in I} M_i, d_{(\infty)} \Big)$ metrikus teret az adott* **metrikustér-rendszer szorzatának** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i \in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata, akkor minden $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i \in I} \in M$ pontra és $r \in \mathbb{R}_+^*$ számra

$$\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d) = \prod_{i \in I} \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}_i; d_i), \quad \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d) = \prod_{i \in I} \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}_i; d_i),$$

vagyis a szorzatmetrika szerinti gömbök valójában olyan szorzathalmazok, amelyek "oldalai" gömbök a megfelelő komponens-térben. Éppen ez a tény indokolja azt, hogy $d_{(\infty)}$-t tekintsük a "**szorzatmetrikának**". Egyébként a szorzattérbeli gömbökre vonatkozó előző egyenlőségekből következik, hogy egy $V \subseteq M$ halmaz pontosan akkor környezete a $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i \in I} \in M$ pontnak a d szorzatmetrika szerint, ha létezik olyan $(V_i)_{i \in I}$ rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén V_i az $\mathfrak{a}_i$-nek környezete d_i szerint és $\prod_{i \in I} V_i \subseteq V$.

4.3. Nyílt halmazok és zárt halmazok szorzata metrikus szorzattérben

A továbbiakban gyakran felhasználunk két elemi halmazelméleti tényt.

– Ha $(E_i)_{i \in I}$ és $(F_i)_{i \in I}$ halmazrendszerek, akkor

$$\Big(\prod_{i \in I} E_i \Big) \cap \Big(\prod_{i \in I} F_i \Big) = \prod_{i \in I} (E_i \cap F_i).$$

– Ha $(E_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén E_i nem üres, akkor minden $k \in I$ indexre

$$\mathrm{pr}_k \langle \prod_{i \in I} E_i \rangle = E_k.$$

4.3.1. Állítás. *Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata. Ha minden $i \in I$ esetén $\Omega_i \subseteq M_i$ (illetve $F_i \subseteq M_i$) a d_i metrika szerint nyílt (illetve zárt) halmaz M_i-ben, akkor $\prod_{i\in I} \Omega_i$ (illetve $\prod_{i\in I} F_i$) nyílt (illetve zárt) halmaz a d szorzatmetrika szerint.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \Omega_i$. Ekkor minden $i \in I$ esetén van olyan $r_i \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_{r_i}(\mathfrak{a}_i; d_i) \subseteq \Omega_i$; így bármely $r \in]0, \min_{i\in I} r_i]$ valós számra

$$\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d) = \prod_{i\in I} \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}_i; d_i) \subseteq \prod_{i\in I} \mathrm{B}_{r_i}(\mathfrak{a}_i; d_i) \subseteq \prod_{i\in I} \Omega_i,$$

ezért $\prod_{i\in I} \Omega_i$ nyílt halmaz a d metrika szerint.

Legyen $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in M \setminus \prod_{i\in I} F_i$. Ekkor vehetünk olyan $j \in I$ indexet, amelyre $\mathfrak{a}_j \notin F_j$, és ekkor az F_j halmaz d_j szerinti zártsága miatt van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}_j; d_j) \cap F_j = \emptyset$. Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d) \cap \Big(\prod_{i\in I} F_i\Big) = \Big(\prod_{i\in I} \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}_i; d_i)\Big) \cap \Big(\prod_{i\in I} F_i\Big) = \prod_{i\in I} (\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}_i; d_i) \cap F_i) = \emptyset,$$

így $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d) \subseteq M \setminus \prod_{i\in I} F_i$, ami azt jelenti, hogy $\prod_{i\in I} F_i$ zárt a d metrika szerint. ■

4.3.2. Állítás. *Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata. Ha minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq M_i$, akkor*

$$\overline{\prod_{i\in I} E_i} = \prod_{i\in I} \overline{E_i}.$$

Bizonyítás. Az előző állítás szerint $\prod_{i\in I} \overline{E_i}$ zárt halmaz d szerint, és ez természetesen tartalmazza a $\prod_{i\in I} E_i$ szorzathalmazt, ezért $\overline{\prod_{i\in I} E_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{E_i}$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in M \setminus \overline{\prod_{i\in I} E_i}$. Ekkor van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre

$$\emptyset = \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d) \cap \Big(\prod_{i\in I} E_i\Big) = \Big(\prod_{i\in I} \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}_i; d_i)\Big) \cap \Big(\prod_{i\in I} E_i\Big) = \prod_{i\in I} (\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}_i; d_i) \cap E_i),$$

amiből következik olyan $i \in I$ létezése, amelyre $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}_i; d_i) \cap E_i = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $i \in I$, amelyre $\mathfrak{a}_i \notin \overline{E_i}$, ezért $\mathfrak{a} \in M \setminus \prod_{i\in I} \overline{E_i}$. ■

4.4. Metrikus szorzattér nyílt részhalmazának projekciói

4.4.1. Állítás. *Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata. Ha $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz a d szorzatmetrika szerint, akkor minden $i \in I$ esetén $\mathrm{pr}_i\langle\Omega\rangle \subseteq M_i$ nyílt halmaz d_i szerint.*

Bizonyítás. Legyenek $i \in I$ és $\mathfrak{a}_i \in \mathrm{pr}_i\langle\Omega\rangle$ rögzítettek. Vegyünk olyan $\mathfrak{a} \in \Omega$ pontot, amelyre $\mathfrak{a}_i = \mathrm{pr}_i(\mathfrak{a})$. Az Ω halmaz d szerinti nyíltsága miatt van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d) \subseteq \Omega$. Ekkor $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}_i; d_i) = \mathrm{pr}_i\langle\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq \mathrm{pr}_i\langle\Omega\rangle$, így $\mathrm{pr}_i\langle\Omega\rangle$ nyílt halmaz d_i szerint. ■

Azonban metrikus terek szorzatában létezhet olyan zárt halmaz, amelynek egyik projekciója sem zárt.

4.5. Konvergens sorozatok metrikus szorzattérben

4.5.1. Állítás. *Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata. Az M-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat pontosan akkor konvergens d szerint, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens M_i-ben d_i szerint. Ha az M-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat konvergens d szerint, akkor minden $i \in I$ esetén*

$$\mathrm{pr}_i\Big(\lim_{n\to\infty} \mathbf{s}(n)\Big) = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{pr}_i(\mathbf{s}(n))).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az M-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat konvergens d szerint, és legyen $\lim(\mathbf{s}) = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} = \mathfrak{a}$. Legyen $i \in I$ rögzített index, és $V_i \in \mathscr{T}_{d_i}(\mathfrak{a}_i)$. Minden $j \in I \setminus \{i\}$ legyen $V_j := M_j$, és $V := \prod_{j\in I} V_j$. Ekkor $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\mathbf{s}(n) \in V$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra $(\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s})(n) \in \mathrm{pr}_i\langle V\rangle = V_i$, tehát az M_i-ben haladó $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens d_i szerint, és $\lim(\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}) = \mathrm{pr}_i(\lim(\mathbf{s}))$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens M_i-ben d_i szerint, és $\mathfrak{a}_i = \lim(\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s})$. Legyen $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$; megmutatjuk, hogy $\mathbf{s}$ konvergál $\mathfrak{a}$-hoz d szerint. Ehhez legyen $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ tetszőleges, és vegyünk olyan $(V_i)_{i\in I}$ rendszert, amelyre minden $i \in I$ esetén V_i az $\mathfrak{a}_i$-nek környezete d_i szerint és $\prod_{i\in I} V_i \subseteq V$. Minden $i \in I$ esetén vehetünk olyan $N_i \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N_i$ esetén $(\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s})(n) \in V_i$. Ekkor $N := \max_{i\in I} N_i \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra és minden $i \in I$ indexre $\mathrm{pr}_i(\mathbf{s}(n)) \in V_i$, vagyis $\mathbf{s}(n) \in \prod_{i\in I} V_i \subseteq V$. ■

4.6. Gyakorlatok

1. Legyen $((M_i, d_i))_{i\in I}$ metrikus terek nem üres véges rendszere, és $\sigma : I \to I$ bijekció. Ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ metrikustér-rendszer szorzata és (M_σ, d_σ) az $((M_{\sigma(i)}, d_{\sigma(i)}))_{i\in I}$ metrikustér-rendszer szorzata, akkor az

$$M \to M_\sigma; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto (x_{\sigma(i)})_{i\in I}$$

leképezés izometrikus bijekció (azaz izomorfizmus) az (M, d) és (M_σ, d_σ) metrikus terek között.

2. Legyen $((M_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ metrikus terek sorozata és $\mathbf{c} := (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Legyen $M := \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$, és értelmezzük a

$$\mathrm{d}_{\mathbf{c}} : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d_k(\mathbf{s}(k), \mathbf{s}'(k))}{1 + d_k(\mathbf{s}(k), \mathbf{s}'(k))}$$

leképezést.

a) A $\mathrm{d}_{\mathbf{c}}$ függvény metrika az M szorzathalmaz felett.

b) Ha $\mathbf{s} \in M$ és $(\mathbf{s}_n)_{n\in N}$ M-ben haladó sorozat, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{s}$ pontosan akkor teljesül a $\mathrm{d}_{\mathbf{c}}$ metrika szerint, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\lim_{n\to\infty} \mathbf{s}_n(k) = \mathbf{s}(k)$ teljesül a d_k metrika szerint.

c) Ha $\mathbf{c}' := (c'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ szintén olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c'_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor az M feletti $\mathrm{d}_{\mathbf{c}}$ és $\mathrm{d}_{\mathbf{c}'}$ metrikák ekvivalensek.

d) Egy $\Omega \subseteq M$ halmaz pontosan akkor nyílt a $\mathrm{d}_{\mathbf{c}}$ metrika szerint, ha minden $\mathfrak{a} \in \Omega$ ponthoz van olyan $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat, amelyre a következők teljesülnek:

- Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén V_n környezete $\mathrm{pr}_n(\mathfrak{a})$-nak a d_n metrika szerint.
- Az $\{n \in \mathbb{N} | V_n \neq M_n\}$ halmaz *véges.*
- Teljesül az, hogy $\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n \subseteq \Omega$.

(*Útmutatás.* a) Csak a háromszög-egyenlőtlenség nem nyilvánvaló. Ehhez elég azt igazolni, hogy ha $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ és $\gamma \leq \alpha + \beta$, akkor

$$\frac{\gamma}{1+\gamma} \leq \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta}.$$

b) A bizonyításban annak az elemi ténynek lesz jelentősége, hogy az

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; \quad t \mapsto \frac{t}{1+t}$$

függvény *szigorúan monoton növő*. Legyen $\mathbf{s} \in M$ és $(\mathbf{s}_n)_{n\in N}$ M-ben haladó sorozat.

Először tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{s}$ teljesül a $\mathrm{d}_{\mathbf{c}}$ metrika szerint, és legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor a $c_k \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $N_k \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_k$ természetes számra

$$c_k \frac{d_k(\mathbf{s}_n(k), \mathbf{s}(k))}{1 + d_k(\mathbf{s}_(k), \mathbf{s}(k))} \leq \mathrm{d}_{\mathbf{c}}(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}) < c_k \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*,$$

tehát $d_k(\mathbf{s}_n(k), \mathbf{s}(k)) < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{s}_n(k) = \mathbf{s}(k)$ teljesül a d_k metrika szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\lim_{n\to\infty} \mathbf{s}_n(k) = \mathbf{s}(k)$ teljesül a d_k metrika szerint, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $\sum_{k=N'+1}^{\infty} c_k < \varepsilon/2$. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $k \leq N'$, akkor létezik olyan $N_k \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_k$ természetes számra

$$d_k(\mathbf{s}_n(k), \mathbf{s}(k)) < \frac{\varepsilon/2}{\sum_{j=0}^{N'} c_j}.$$

Kiválasztva ilyen $(N_k)_{0\le k\le N'}$ rendszert, ha $N := \max(N', \max\limits_{0\le k\le N'} N_k)$, akkor minden $n > N$ természetes számra

$$\mathrm{d}_{\mathbf{c}}(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}) = \sum_{k=0}^{N'} c_k \frac{d_k(\mathbf{s}_n(k), \mathbf{s}(k))}{1 + d_k(\mathbf{s}_n(k), \mathbf{s}(k))} + \sum_{k=N'+1}^{\infty} c_k \frac{d_k(\mathbf{s}_n(k), \mathbf{s}(k))}{1 + d_k(\mathbf{s}_n(k), \mathbf{s}(k))} <$$

$$< \sum_{k=0}^{N'} c_k \frac{d_k(\mathbf{s}_n(k), \mathbf{s}(k))}{1 + d_k(\mathbf{s}_n(k), \mathbf{s}(k))} + \frac{\varepsilon}{2} < \left(\sum_{k=0}^{N'} c_k\right) \cdot \frac{\varepsilon/2}{\sum\limits_{j=0}^{N'} c_j} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{s}$ a $\mathrm{d}_{\mathbf{c}}$ metrika szerint.

c) A 3. pont **2**. gyakorlat eredménye és a b) alapján nyilvánvaló.)

5. fejezet

Kompakt halmazok metrikus terekben

5.1. Metrikus tér kompakt részhalmazainak alaptulajdonságai

Az eulidészi metrikával ellátott $\mathbb{K}$ metrikus térrel kapcsolatban a korlátos és zárt halmazok fontos szerepet játszottak. Azonban tetszőleges metrikus térben a korlátos és zárt halmazokra sem a Cantor-féle közösrész-tétel, sem a Borel-Lebesgue befedési-tétel, sem a Bolzano-Weierstrass kiválasztási-tétel, sem a Bolzano-Weierstrass tétel nem érvényes. Mindazonáltal metrikus terekben is bevezethető olyan halmaztípus, amely ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint a korlátos és zárt halmazok $\mathbb{K}$-ban; ezek a *kompakt* halmazok.

5.1.1. Definíció. *Legyen (M, d) metrikus tér. Egy $K \subseteq M$ halmazt* **kompaktnak** *nevezünk a d metrika szerint, ha az M d szerint nyílt halmazainak bármely $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszerére teljesül az, hogy ha $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, akkor létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{i \in J} \Omega_i$. Azt mondjuk, hogy (M, d)* **kompakt metrikus tér***, ha (M, d) metrikus tér és M kompakt részhalmaza M-nek a d szerint.*

Tehát egy halmaz kompaktsága azt jelenti, hogy a halmaz bármely nyílt befedésének létezik véges részbefedése, vagyis a kompaktság fogalmát metrikus terekben úgy vezetjük be, hogy kompakt halmazokra a Borel-Lebesgue befedési tétel *definíció szerint* teljesüljön. A kompaktság nyilvánvalóan topologikus fogalom.

5.1.2. Állítás. *Metrikus térben minden kompakt halmaz korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $E \subseteq M$.

Tegyük fel, hogy E nem korlátos d szerint. Legyen $\mathfrak{a} \in M$ rögzített, és vegyünk olyan $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot, amely $\mathbb{R}_+^*$-ban halad, monoton növő, és $\sup_{n \in \mathbb{N}} r_n = +\infty$. A feltevés szerint $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$, tehát $(\mathrm{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d))_{n \in \mathbb{N}}$ nyílt befedése E-nek. Ugyanakkor minden $H \subseteq \mathbb{N}$ nem üres véges halmazra $\bigcup_{n \in H} \mathrm{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d) = \mathrm{B}_{r_{\max(H)}}(\mathfrak{a}; d)$, ezért nem létezik olyan $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup_{n \in H} \mathrm{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$, hiszen a feltevés szerint minden $n \in \mathbb{N}$

esetén $E \nsubseteq \mathrm{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$. Tehát E nem kompakt halmaz.

Tegyük fel, hogy E nem zárt d szerint, és legyen $\mathfrak{a} \in \overline{E} \setminus E$. Vegyünk olyan $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely $\mathbb{R}_+^*$-ban halad, monoton fogyó, és $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$. Ha $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{B}}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(x, \mathfrak{a}) \leq r_n$, így $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$ miatt $d(x, \mathfrak{a}) = 0$, vagyis $x = \mathfrak{a}$. Ez azt jelenti, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{B}}_{r_n}(\mathfrak{a}; d) = \{\mathfrak{a}\}$. Tehát az $(M \setminus \overline{\mathrm{B}}_{r_n}(\mathfrak{a}; d))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer minden tagja nyílt, és $\mathfrak{a} \notin E$ miatt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (M \setminus \overline{\mathrm{B}}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)) = M \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{B}}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)) = M \setminus \{\mathfrak{a}\} \supseteq E.$$

Ugyanakkor minden $H \subseteq \mathbb{N}$ nem üres véges halmazra $\bigcup_{n\in H} (M \setminus \overline{\mathrm{B}}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)) = M \setminus \overline{\mathrm{B}}_{r_{\min(H)}}(\mathfrak{a}; d)$, ezért nem létezik olyan $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup_{n\in H} (M \setminus \overline{\mathrm{B}}_{r_n}(\mathfrak{a}; d))$, hiszen $\mathfrak{a} \in \overline{E}$ miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E \cap \overline{\mathrm{B}}_{r_n}(\mathfrak{a}; d) \neq \emptyset$. Tehát E nem kompakt halmaz. ■

Azonban metrikus térben, sőt normált térben is létezhetnek olyan korlátos és zárt halmazok, amelyek nem kompaktak. Ez nem zárja ki azt, hogy bizonyos metrikus terekben a kompakt halmazok éppen a korlátos és zárt halmazok legyenek, mint például az euklidészi metrikával ellátott $\mathbb{R}$ metrikus térben.

5.1.3. Állítás. *Metrikus tér kompakt részhalmazának minden zárt részhalmaza kompakt. Kompakt metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

Bizonyítás. A második állás következik az elsőből és a kompakt halmazok zártságából, ezért elég az elsőt igazolni.

Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz, és $F \subseteq K$ zárt halmaz. Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedése F-nek. Vegyünk olyan α halmazt, hogy $\alpha \notin I$, és legyen $I' := I \cup \{\alpha\}$, valamint minden $i \in I$ esetén $\Omega'_i := \Omega_i$, ha $i \neq \alpha$, és $\Omega'_\alpha := M \setminus F$. Az F halmaz zárt, ezért $(\Omega'_i)_{i\in I'}$ nyílt halmazok rendszere, és nyilvánvaló, hogy $\bigcup_{i\in I'} \Omega'_i = M$, tehát $(\Omega'_i)_{i\in I'}$ a K-nak befedése. A K kompaktsága miatt van olyan $J' \subseteq I'$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup_{i\in J'} \Omega'_i$. Legyen $J := J' \setminus \{\alpha\}$; állítjuk, hogy $F \subseteq \bigcup_{i\in J} \Omega_i$. Valóban, ha $x \in F$, akkor $F \subseteq K$ miatt $x \in K$, így van olyan $i \in J'$, amelyre $x \in \Omega'_i$; ugyanakkor az Ω'_α definíciója szerint $i \neq \alpha$, vagyis $i \in J$. Ez azt jelenti, hogy F kompakt halmaz. ■

5.1.4. Következmény. *Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt és létezik azt tartalmazó kompakt halmaz a térben.*

Bizonyítás. A feltétel triviálisan szükséges, és az előző állítás szerint elégséges is. ■

5.2. Relatív kompakt halmazok

5.2.1. Definíció. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ halmazt* **relatív kompaktnak** *nevezünk a d metrika szerint, ha $\overline{E}$ kompakt halmaz d szerint.*

5.2.2. Állítás. *Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha létezik azt tartalmazó kompakt halmaz a térben. Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha relatív kompakt és zárt.*

Bizonyítás. Ha (M, d) metrikus tér, és $E \subseteq M$ olyan halmaz, amelyhez van olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, hogy $E \subseteq K$, akkor a K zártsága folytán $\overline{E} \subseteq K$, tehát $\overline{E}$ zárt halmaz, és létezik azt tartalmazó kompakt halmaz, következésképpen az előző állítás szerint $\overline{E}$ kompakt halmaz. ■

5.3. Kompakt metrikus terek jellemzése

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy metrikus térben minden *véges* halmaz kompakt. Továbbá véges sok kompakt halmaz uniója is kompakt, mert véges sok véges (index)halmaz uniója véges. Az eddigiek alapján az is világos, hogy kompakt halmazok bármely nem üres rendszerének a metszete kompakt, mert zárt és része valamely kompakt halmaznak, ti. a metszetben szereplő halmazok bármelyikének.

5.3.1. Állítás. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *(M, d) kompakt metrikus tér.*

(ii) *Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ az M-nek olyan nem üres nyílt befedése, hogy minden $i, j \in I$ indexhez van olyan $k \in I$, amelyre $\Omega_i \cup \Omega_j \subseteq \Omega_k$ (tehát az $(\Omega_i)_{i\in I}$ halmazrendszer* **felfelé irányított***), akkor létezik olyan $i \in I$, amelyre $M = \Omega_i$.*

(iii) *Ha $(F_i)_{i\in I}$ az M zárt részhalmazainak olyan nem üres rendszere, hogy minden $i, j \in I$ indexhez van olyan $k \in I$, amelyre $F_i \cap F_j \supseteq F_k$ (tehát az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer* **lefelé irányított***) és $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, akkor létezik olyan $i \in I$, hogy $F_i = \emptyset$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ az M-nek felfelé irányított nem üres nyílt befedése. Az M kompaktsága miatt van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $M = \bigcup_{j\in J} \Omega_j$. A felfelé irányítottság miatt van olyan $i \in I$, hogy minden $j \in J$ esetén $\Omega_j \subseteq \Omega_i$; ekkor természetesen $\bigcup_{j\in J} \Omega_j \subseteq \Omega_i$, vagyis $M = \Omega_i$.

(ii)⇒(iii) Legyen $(F_i)_{i\in I}$ az M zárt részhalmazainak olyan lefelé irányított nem üres rendszere, amelyre $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Minden $i \in I$ esetén legyen $\Omega_i := M \setminus F_i$. Ekkor $(\Omega_i)_{i\in I}$ az M-nek felfelé irányított nem üres nyílt befedése, ezért van olyan $i \in I$, amelyre $M = \Omega_i := M \setminus F_i$, vagyis $F_i = \emptyset$.

(iii)⇒(i) Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedése M-nek. Jelölje A az I véges részhalmazainak halmazát, és minden $\alpha \in A$ esetén legyen $F_\alpha := M \setminus \bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i$. Nyilvánvaló, hogy $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ az M zárt részhalmazainak olyan lefelé irányított nem üres rendszere, hogy $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \emptyset$. A feltevés miatt van olyan $\alpha \in A$, amelyre $F_\alpha = \emptyset$, azaz $M = \bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy M kompakt halmaz. ■

5.3.2. Állítás. *Legyen (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek. Egy $K \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor kompakt M'-ben a d' metrika szerint, ha kompakt M-ben a d metrika szerint.*

Bizonyítás. Legyen K kompakt a d' metrika szerint, és legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a K-nak d szerint nyílt halmazokból álló befedése M-ben. Ekkor $(\Omega_i \cap M')_{i\in I}$ a K-nak d' szerint nyílt halmazokból álló befedése M'-ben, így van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}(\Omega_i \cap M')$; világos, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}\Omega_i$ még inkább teljesül, tehát K kompakt M-ben a d metrika szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy K kompakt a d metrika szerint, és legyen $(\Omega'_i)_{i\in I}$ a K-nak d' szerint nyílt halmazokból álló befedése M'-ben. Ekkor kiválasztható a d szerint nyilt halmazoknak olyan $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszere, amelyre minden $i \in I$ esetén $\Omega'_i = \Omega_i \cap M'$. Ekkor az $(\Omega_i)_{i\in I}$ halmazrendszer d szerint nyílt halmazokból álló befedése K-nak, tehát van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}\Omega_i$; ugyanakkor $K \subseteq M'$ is teljesül, így $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}(\Omega_i \cap M') = \bigcup\limits_{i\in J}\Omega'_i$, vagyis K kompakt a d' metrika szerint. ■

5.4. Cantor-féle közösrész-tétel

5.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer* **centrált**, *ha minden $J \subseteq I$ nem üres véges halmazra $\bigcap\limits_{i\in J} F_i \neq \emptyset$.*

5.4.2. Állítás. *Legyen $(F_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $F_i \neq \emptyset$. Tekintsük a következő állításokat:*

a) *Minden $i, j \in I$ esetén $F_i \subseteq F_j$ vagy $F_j \subseteq F_i$, (amit úgy fejezünk ki, hogy az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer* **egymásba skatulyázott**).

b) *Minden $i, j \in I$ esetén van olyan $k \in I$, hogy $F_k \subseteq F_i \cap F_j$, (vagyis az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer lefelé irányított).*

c) *Az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer centrált.*

Ekkor a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) *teljesül.*

Bizonyítás. a) $\Rightarrow$ b) Ha $i, j \in I$, akkor $F_i \subseteq F_j$ esetén $F_i = F_i \cap F_j$, és $F_j \subseteq F_i$ esetén $F_j = F_i \cap F_j$.

b) $\Rightarrow$ c) Mivel minden $j \in I$ esetén $F_j \neq \emptyset$, így elegendő azt megmutatni, hogy b)-ből következik, hogy minden $J \subseteq I$ nem üres véges halmazhoz van olyan $j \in I$, amelyre $F_j \subseteq \bigcap\limits_{i\in J} F_i$. Ezt a J halmaz számossága szerinti teljes indukcióval igazoljuk, tehát azt látjuk be, hogy ha b) teljesül, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és minden $J \subseteq I$ véges halmazra, ha $\mathrm{Card}(J) = n$, akkor van olyan $j \in I$, amelyre $F_j \subseteq \bigcap\limits_{i\in J} F_i$.

Ez $n = 1$ esetén triviálisan igaz. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}^*$ számra, és legyen $J \subseteq I$ olyan véges halmaz, amelyre $\mathrm{Card}(J) = n + 1$. Legyen $i_* \in J$ rögzített elem és $J_* := J \setminus \{i_*\}$. Ekkor $J_* \subseteq I$ olyan véges halmaz, hogy $\mathrm{Card}(J_*) = n \in \mathbb{N}^*$, ezért az indukciós hipotézis alapján van olyan $j_* \in I$, hogy $F_{j_*} \subseteq \bigcap\limits_{i\in J_*} F_i$. Az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer lefelé irányított, ezért van olyan $j \in I$, hogy $F_j \subseteq F_{i_*} \cap F_{j_*}$. Ekkor nyilvánvalóan $F_j \subseteq F_{i_*} \cap \bigcap\limits_{i\in J_*} F_i = \bigcap\limits_{i\in J} F_i$. ■

5.4.3. Tétel. (Cantor-féle közösrész-tétel) *Ha (M,d) metrikus tér, és $(F_i)_{i\in I}$ az M zárt részhalmazainak olyan centrált rendszere, hogy $I \neq \emptyset$, és minden $i \in I$ esetén $F_i \neq \emptyset$, és létezik olyan $i \in I$, amelyre F_i kompakt, akkor $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen $k \in I$ olyan, hogy F_k kompakt halmaz, és tekintsük az $(M \setminus F_i)_{i\in I}$ halmazrendszert, amelynek minden tagja nyílt halmaz M-ben. Ha $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$ teljesülne, akkor a halmazelméleti de Morgan egyenlőség alapján

$$\bigcup_{i\in I}(M \setminus F_i) = M \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = M,$$

vagyis az $(M\setminus F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer nyílt befedése volna M-nek, így F_k-nak is. Ekkor az F_k halmaz kompaktsága folytán létezne olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $F_k \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}(M\setminus F_i)$. Ekkor $J \neq \emptyset$, különben F_k üres lenne. Ezért a halmazelméleti de Morgan egyenlőség alapján $F_k \subseteq M \setminus \bigcap\limits_{i\in J} F_i$, vagyis $\bigcap\limits_{i\in J\cup\{k\}} F_i = F_k \cap \bigcap\limits_{i\in J} F_i = \emptyset$, ami lehetetlen, mert $(F_i)_{i\in I}$ centrált halmazrendszer és minden $i \in I$ esetén $F_i \neq \emptyset$. Ezért $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. ■

5.5. Bolzano–Weierstrass-tétel

A most következő állítás előkészíti a metrikus terek kompakt részhalmazainak sorozatokkal való jellemzését megfogalmazó tételt: a *Bolzano-Weierstrass tételt.*

5.5.1. Állítás. *Ha (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$ kompakt halmaz, akkor minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $\mathbf{s}$ tetszőleges K-ban haladó sorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$K_n := \overline{\{\mathbf{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k > n)\}}.$$

Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén K_n kompakt halmaz, hiszen zárt, K kompakt, és $\mathrm{Im}(\mathbf{s}) \subseteq K$ miatt $K_n \subseteq \overline{K} = K$. Az is nyilvánvaló, hogy a $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyó, így lefelé irányított, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K_n \neq \emptyset$, hiszen $\mathbf{s}(n+1) \in K_n$. Ezért a Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Legyen $\mathfrak{a} \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ és rögzítsünk egy $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Megmutatjuk olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan növő függvény létezését, amelyre az $\mathbf{s} \circ \sigma$ részsorozat konvergens, és a határértéke egyenlő $\mathfrak{a}$-val, vagyis $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) \in K$. Ehhez először megjegyezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathfrak{a} \in K_n$, tehát a K_n definíciója és az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján

$$\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \cap \{\mathbf{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k > n)\} \neq \emptyset,$$

vagyis

$$\{k \in \mathbb{N} | k > n\} \cap \overset{-1}{\mathbf{s}}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d)\rangle \neq \emptyset.$$

Értelmezzük most a

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \min\Big(\{k \in \mathbb{N} | k > n\} \cap \overset{-1}{\mathbf{s}}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d)\rangle\Big)$$

leképezést, és legyen σ' a $0 \in \mathbb{N}$ kezdőpont és a g függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, amelyre $\sigma'(0) := 0$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma'(n+1) = g(\sigma'(n)) \in \{k \in \mathbb{N} | k > \sigma'(n)\} \cap \overset{-1}{\mathbf{s}}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_{\sigma'(n)}}(\mathfrak{a}; d)\rangle$. Tehát σ' szigorúan monoton növő, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(\mathbf{s}(\sigma'(n+1)), \mathfrak{a}) < \varepsilon_{\sigma(n)}$. Ekkor a

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \sigma'(n+1)$$

függvény szogorúan monoton növő, és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d((\mathbf{s} \circ \sigma)(n), \mathfrak{a}) < \varepsilon_{\sigma(n)}$. De $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{\sigma(n)} = 0$ is teljesül, így $\mathbf{s} \circ \sigma$ konvergens és $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) = \mathfrak{a} \in K$. ■

5.5.2. Lemma. (Lebesgue-lemma) *Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak. Ekkor a K halmaz bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedéséhez létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy minden $x \in K$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $\mathrm{B}_r(x; d) \subseteq \Omega_i$.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak, ugyanakkor $(\Omega_i)_{i\in I}$ olyan nyílt befedése K-nak, amelyre

$$(\forall r \in \mathbb{R}_+^*)(\exists x \in K)(\forall i \in I) : \ \mathrm{B}_r(x; d) \nsubseteq \Omega_i.$$

Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat. A feltevés szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{x \in K | (\forall i \in I) : \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x; d) \nsubseteq \Omega_i\} \neq \emptyset,$$

így a kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \{x \in K | (\forall i \in I) : \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x; d) \nsubseteq \Omega_i\} \neq \emptyset.$$

Legyen $\mathbf{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak; tehát $\mathbf{s}$ olyan K-ban haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $i \in I$ esetén $\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathbf{s}(n); d) \nsubseteq \Omega_i$. A K-ra vonatkozó hipotézis szerint vehetünk olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvényt, amelyre az $\mathbf{s} \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\mathfrak{a} := \lim(\mathbf{s} \circ \sigma) \in K$. Ekkor $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$ miatt rögzíthetünk olyan $\alpha \in I$ indexet, amelyre $\mathfrak{a} \in \Omega_\alpha$. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, amelyre $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d) \subseteq \Omega_\alpha$. Van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}(\sigma(n)) \in \mathrm{B}_{r/2}(\mathfrak{a}; d)$. Ugyanakkor $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{\sigma(n)} = 0$, ezért van olyan $N' \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N'$ természetes számra $\varepsilon_{\sigma(n)} < r/2$. Ha most $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N, N')$, akkor $x \in \mathrm{B}_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(\mathbf{s}(\sigma(n)); d)$ esetén $d(x, \mathbf{s}(\sigma(n))) < \varepsilon_{\sigma(n)} < r/2$, ugyanakkor $d(\mathbf{s}(\sigma(n)), \mathfrak{a}) < r/2$, tehát $d(x, \mathfrak{a}) < r$, vagyis $x \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; d) \subseteq \Omega_\alpha$. Ez azt jelenti, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N, N')$ esetén $\mathrm{B}_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(\mathbf{s}(\sigma(n)); d) \subseteq \Omega_\alpha$, ami ellentmond annak, hogy minden m természetes számra és minden $i \in I$ indexre $\mathrm{B}_{\varepsilon_m}(\mathbf{s}(m); d) \nsubseteq \Omega_i$. ■

Megjegyezzük, hogy ha (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ *tetszőleges* halmaz, akkor nyilvánvaló, hogy a K halmaz bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedésére teljesül az, hogy

$$(\forall x \in K)(\exists r \in \mathbb{R}_+^*)(\exists i \in I) : \ \mathrm{B}_r(x; d) \subseteq \Omega_i.$$

Azonban a Lebesgue-lemmában azt állítjuk, hogy a K halmaz bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedésére az előzőnél erősebb

$$(\exists r \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in K)(\exists i \in I):\ \mathrm{B}_r(x;d) \subseteq \Omega_i$$

állítás is teljesül, feltéve, hogy minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak.

5.5.3. Állítás. *Legyen (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K-ban haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x\in H} \mathrm{B}_\varepsilon(x;d)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varepsilon > 0$ olyan valós szám, amelyre minden $H \subseteq K$ véges halmazra $K \setminus \bigcup_{x\in H} \mathrm{B}_\varepsilon(x;d) \neq \emptyset$.

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tételt alkalmazva igazoljuk olyan $\mathbf{s}$ sorozat létezését, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) \in K \setminus \bigcup_{j\in n} \mathrm{B}_\varepsilon(\mathbf{s}(j);d)$.

Az $\mathbf{s}(0)$-ra az a feltétel, hogy $\mathbf{s}(0) \in K$, mert az üres indexhalmazra vett unió az üres halmaz. Ezért $\mathbf{s}(0)$ megválasztható, hiszen K nem üres.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(\mathbf{s}(i))_{i\in n}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in n$ esetén $\mathbf{s}(i) \in K \setminus \bigcup_{j\in i} \mathrm{B}_\varepsilon(\mathbf{s}(j);d)$. A $H := \{\mathbf{s}(i) | i \in n\}$ halmaz véges részhalmaza K-nak, ezért a hipotézis alapján $K \setminus \bigcup_{x\in H} \mathrm{B}_\varepsilon(x;d) \neq \emptyset$. Ha $\mathbf{s}(n)$ definíció szerint eleme ennek a halmaznak, akkor $\mathbf{s}(n) \in K \setminus \bigcup_{j\in n} \mathrm{B}_\varepsilon(\mathbf{s}(j);d)$, tehát minden $i \in n+1$ esetén $\mathbf{s}(i) \in K \setminus \bigcup_{j\in i} \mathrm{B}_\varepsilon(\mathbf{s}(j);d)$, így az előírt tulajdonságú $\mathbf{s}$ sorozat létezik.

Ha $\mathbf{s}$ ilyen sorozat, akkor minden $i,j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ esetén $d(\mathbf{s}(i),\mathbf{s}(j)) \geq \varepsilon$, ezért minden $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvényre $i,j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ esetén $d((\mathbf{s}\circ\sigma)(i),(\mathbf{s}\circ\sigma)(j)) \geq \varepsilon$ teljesül. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy $\mathbf{s}$-nek nem létezik konvergens részsorozata. ■

5.5.4. Tétel. (Bolzano-Weierstrass tétel) *Legyen (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$. A K halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak.*

Bizonyítás. Már igazoltuk azt, hogy ha K kompakt, akkor minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak, és a K kompaktságának bizonyításához legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedése K-nak. A Lebesgue-lemma alapján vehetünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in K$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $\mathrm{B}_r(x;d) \subseteq \Omega_i$. Az előző állítás szerint r-hez van olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x\in H} \mathrm{B}_r(x;d)$. Legyen $f : H \to I$ olyan függvény, amelyre minden $x \in H$ esetén $\mathrm{B}_r(x;d) \subseteq \Omega_{f(x)}$. Ekkor $J := \mathrm{Im}(f)$ véges részhalmaza I-nek, és

$$K \subseteq \bigcup_{x\in H} \mathrm{B}_r(x;d) \subseteq \bigcup_{x\in H} \Omega_{f(x)} = \bigcup_{j\in J} \Omega_j$$

teljesül, tehát K kompakt halmaz. ■

5.5.5. Definíció. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ halmazt* **teljesen korlátosnak** *nevezünk d szerint, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $H \subseteq E$ véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup_{x \in H} \mathrm{B}_\varepsilon(x; d)$.*

Tehát a Bolzano-Weierstrass tétel előtt álló kijelentés azt mondja, hogy minden olyan halmaz teljesen korlátos, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata. Később (a 9. pontban) megadjuk a teljesen korlátos halmazok sorozatokkal való jellemzését (*Hausdorff-tétel*). Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy a kompaktsággal ellentétben, a teljesen korlátosság nem topologikus, hanem metrikus tulajdonság.

5.5.6. Állítás. *Metrikus térben minden kompakt halmaz teljesen korlátos és minden teljesen korlátos halmaz korlátos.*

Bizonyítás. A Bolzano-Weierstrass tétel alapján kompakt halmaz olyan, hogy minden benne halaladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, ezért kompakt halmaz teljesen korlátos. Másfelől, a definíció szerint teljesen korlátos halmazhoz létezik véges sok gömb (tehát korlátos halmaz), amelyek uniójának része, ezért teljesen korlátos halmaz korlátos. ■

Azonban teljesen korlátos halmaz nem szükségképpen kompakt és korlátos halmaz nem feltétlenül teljesen korlátos. Sőt még *zárt* és teljesen korlátos halmaz sem szükségképpen kompakt.

5.6. Kompakt halmazok szorzata

A következő tétel első bizonyításában felhasználjuk azt, hogy ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, továbbá $f : M \to M'$ olyan bijekció, amely izometria a d és d' metrikák szerint, akkor minden $K \subseteq M$ halmazra; K pontosan akkor kompakt a d metrika szerint, ha az $f\langle K \rangle \subseteq M'$ halmaz kompakt a d' metrika szerint. Ez nyilvánvalóan következik a 2. pont, **13**. gyakorlat állításából és a kompaktság definíciójából.

5.6.1. Tétel. *Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i \in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata. Ha $(K_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz d_i szerint, akkor a $\prod_{i \in I} K_i$ halmaz kompakt a d szorzatmetrika szerint.*

Bizonyítás. Ennek a fontos tételnek két lényegesen különböző teljes indukciós bizonyítását adjuk, amelyek közül az első nem használja fel a Bolzano–Weierstrass-tételt, míg a második felhasználja.

(*I. bizonyítás.*) Az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás nyilvánvalóan igaz, ha $\mathrm{Card}(I) = 1$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^*$, és az állítás minden olyan indexhalmaz esetében teljesül, amelynek számossága egyenlő n-nel, továbbá legyen $\mathrm{Card}(I) = n + 1$. Legyen $\alpha \in I$ rögzített és $I' := I \setminus \{\alpha\}$. Ekkor $\mathrm{Card}(I') = n$, tehát ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i \in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata, és (M', d') az $((M_i, d_i))_{i \in I'}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata, és $(K_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz d_i szerint, akkor az indukciós hipotézis alapján $\prod_{i\in I'} K_i$ halmaz kompakt a d' metrika szerint. Ugyanakkor az

$$f : \prod_{i\in I} M_i \to M_\alpha \times \prod_{i\in I'} M_i; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto (x_\alpha, (x_i)_{i\in I'})$$

leképzés nyilvánvalóan izometrikus bijekció az (M, d) metrikus tér, valamint az (M_α, d_α) és (M', d') metrikus terek szorzata között. Ezért a $\prod_{i\in I} K_i$ halmaz pontosan akkor kompakt d szerint, ha az $f\left\langle \prod_{i\in I} K_i \right\rangle$ halmaz kompakt az (M_α, d_α) és (M', d') metrikus terek szorzatában. De világos, hogy

$$f\left\langle \prod_{i\in I} K_i \right\rangle = K_\alpha \times \prod_{i\in I'} K_i,$$

és tudjuk, hogy K_α kompakt d_α szerint, valamint $\prod_{i\in I'} K_i$ kompakt d' szerint.

Ezért az indukcós lépés megtételéhez elegendő igazolnunk azt, hogy ha (M, d) az (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus terek szorzata, és $K_1 \subseteq M_1$ a d_1 szerint kompakt halmaz, és $K_2 \subseteq M_2$ a d_2 szerint kompakt halmaz, akkor $K := K_1 \times K_2$ a d szerint kompakt. Természetesen feltehető, hogy $K \neq \emptyset$.

Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a d szorzatmetrika szerint nyílt befedése K-nak. Minden $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in K$ párhoz van olyan $i \in I$, hogy $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in \Omega_i$, és az Ω_i d szerinti nyíltsága folytán van olyan $V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$ és $V_2 \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)$, amelyre $V_1 \times V_2 \subseteq \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy minden $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in K$ párra

$$\{(V_1, V_2) | (V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)) \wedge (V_2 \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)) \wedge ((\exists i \in I) : V_1 \times V_2 \subseteq \Omega_i)\} \neq \emptyset,$$

így a kiválasztási axióma szerint a

$$\prod_{(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)\in K} (\{(V_1, V_2) | (V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)) \wedge (V_2 \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)) \wedge ((\exists i \in I) : V_1 \times V_2 \subseteq \Omega_i)\})$$

szorzathalmaz sem üres. Tehát vehetünk olyan $(V_1(\mathfrak{a}))_{\mathfrak{a}\in K}$ valamint $(V_2(\mathfrak{a}))_{\mathfrak{a}\in K}$ rendszereket, amelyekre teljesülnek a következők:

- minden $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in K$ esetén $V_1(\mathfrak{a}) \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$ és $V_2(\mathfrak{a}) \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)$;
- minden $\mathfrak{a} \in K$ esetén van olyan $i \in I$, amelyre $V_1(\mathfrak{a}) \times V_2(\mathfrak{a}) \subseteq \Omega_i$.

Ez utóbbi feltétel alapján, ismét a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $\iota : K \to I$ függvényt, amelyre minden $\mathfrak{a} \in K$ esetén $V_1(\mathfrak{a}) \times V_2(\mathfrak{a}) \subseteq \Omega_{\iota(\mathfrak{a})}$ teljesül.

Ha $\mathfrak{a}_1 \in K_1$, akkor $(V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))_{\mathfrak{a}_2\in K_2}$ d_2 szerinti környezetekkel való befedése K_2-nek, és K_2 kompakt d_2 szerint, ezért van olyan $H \subseteq K_2$ véges halmaz, amelyre $K_2 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_2\in H} V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))$. Tehát minden $\mathfrak{a}_1 \in K_1$ esetén

$$\{H \subseteq K_2 | (H \text{ véges }) \wedge (K_2 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_2\in H} V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)))\} \neq \emptyset,$$

így a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $(H(\mathfrak{a}_1)_{\mathfrak{a}_1\in K_1})$ rendszert, amelyre minden $\mathfrak{a}_1 \in K_1$ esetén $H(\mathfrak{a}_1) \subseteq K_2$ véges halmaz és fennáll a

$$K_2 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_2\in H(\mathfrak{a}_1)} V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))$$

összefüggés. Ekkor $\mathfrak{a}_1 \in K_1$ esetén $H(\mathfrak{a}_1)$ nem üres, különben K_2 üres, így K is üres volna; következésképpen jól értelmezett a

$$U(\mathfrak{a}_1) := \bigcap_{\mathfrak{a}_2 \in H(\mathfrak{a}_1)} V_1((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)) \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$$

halmaz. Ekkor $(U(\mathfrak{a}_1))_{\mathfrak{a}_1 \in K_1}$ d_1 szerinti környezetekkel való befedése K_1-nek és K_1 kompakt d_1 szerint, így vehetünk olyan $A \subseteq K_1$ véges halmazt, amelyre

$$K_1 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_1 \in A} U(\mathfrak{a}_1).$$

Ezután értelmezhetjük a

$$J := \{\iota((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)) | (\mathfrak{a}_1 \in A) \wedge (\mathfrak{a}_2 \in H(\mathfrak{a}_1))\} \subseteq I$$

halmazt, amely nyilvánvalóan véges. Megmutatjuk, hogy az $(\Omega_j)_{j \in J}$ rendszer szintén befedése K-nak. Ehhez legyen $(x_1, x_2) \in K$ rögzített, és

$$x_1 \in K_1 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_1 \in A} U(\mathfrak{a}_1)$$

miatt vegyünk olyan $\mathfrak{a}_1 \in A$ elemet, amelyre $x_1 \in U(\mathfrak{a}_1)$. Ugyanakkor

$$x_2 \in K_2 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_2 \in H(\mathfrak{a}_1)} V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))$$

miatt választhatunk olyan $\mathfrak{a}_2 \in H(\mathfrak{a}_1)$ elemet, amelyre $x_2 \in V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))$. De a definíció szerint $x_1 \in U(\mathfrak{a}_1) \subseteq V_1((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))$, tehát

$$(x_1, x_2) \in V_1((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)) \times V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)) \subseteq \Omega_{\iota((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))},$$

vagyis a $j := \iota((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)) \in J$ indexre $(x_1, x_2) \in \Omega_j$ teljesül.

(*II. bizonyítás.*) Ismét az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás nyilvánvalóan igaz, ha $\mathrm{Card}(I) = 1$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^*$, és az állítás minden olyan indexhalmaz esetében teljesül, amelynek számossága egyenlő n-nel. Legyen I olyan indexhalmaz, hogy $\mathrm{Card}(I) = n + 1$, és legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i \in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, valamint $(K_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz d_i szerint. Azt kell igazolni, hogy a $K := \prod_{i \in I} K_i$ halmaz kompakt a d metrika szerint. Ehhez a Bolzano–Weierstrass-tétel alapján elég azt megmutatni, hogy minden K-ban haladó sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak.

Legyen $\alpha \in I$ rögzített, $I' := I \setminus \{\alpha\}$, és jelölje (M', d') az $((M_i, d_i))_{i \in I'}$ véges metrikustér-rendszer szorzatát. Legyen továbbá $K' := \prod_{i \in I'} K_i$. Mivel $\mathrm{Card}(I') = n$, az indukciós hipotézis miatt K' kompakt halmaz a d' metrika szerint.

Legyen $\mathbf{s}$ tetszőleges K-ban haladó sorozat, és értelmezzük az

$$\mathbf{s}' : \mathbb{N} \to M'; \quad n \mapsto \mathbf{s}(n)|_{I'}$$

sorozatot. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $i \in I'$ esetén $\mathbf{s}'(n)(i) = \mathbf{s}(n)(i) \in K_i$, tehát a $\mathbf{s}'$ sorozat K'-ben halad, amely kompakt a d' metrika szerint, így a Bolzano–Weierstrass-tétel alapján létezik olyan $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy az $\mathbf{s}' \circ \sigma'$ sorozat konvergens d' szerint és $\lim(\mathbf{s}' \circ \sigma') \in K'$. Tehát, ha minden $i \in I'$ esetén pr'_i jelöli az $M' \to M_i$ kanonikus projekciót, akkor 4.5.1. alapján minden $i \in I'$ indexre az M_i-ben haladó $\mathrm{pr}'_i \circ \mathbf{s}' \circ \sigma'$ sorozat konvergens d_i szerint, és

$$\lim(\mathrm{pr}'_i \circ \mathbf{s}' \circ \sigma') = \mathrm{pr}'_i(\lim(\mathbf{s}' \circ \sigma')) \in K_i.$$

Ugyanakkor, ha minden $i \in I$ esetén pr_i jelöli az $M \to M_i$ kanonikus projekciót, akkor nyilvánvaló, hogy minden $i \in I'$ indexre $\mathrm{pr}'_i \circ \mathbf{s}' = \mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}$, tehát az M_i-ben haladó $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s} \circ \sigma'$ sorozat konvergens d_i szerint, és $\lim(\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s} \circ \sigma') \in K_i$.

Továbbá, a $\mathrm{pr}_\alpha \circ \mathbf{s} \circ \sigma'$ sorozat K_α-ban, amely kompakt M_α-ban a d_α metrika szerint, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint van olyan $\sigma'' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy a $\mathrm{pr}_\alpha \circ \mathbf{s} \circ \sigma' \circ \sigma''$ sorozat konvergens d_α szerint és $\lim(\mathrm{pr}_\alpha \circ \mathbf{s} \circ \sigma' \circ \sigma'') \in K_\alpha$. Legyen $\sigma := \sigma' \circ \sigma''$, amely $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény. Ekkor minden $i \in I'$ indexre az M_i-ben haladó $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s} \circ \sigma$ sorozat részsorozata a $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s} \circ \sigma'$ sorozatnak, ezért $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s} \circ \sigma$ is konvergens d_i szerint és $\lim(\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s} \circ \sigma) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s} \circ \sigma') \in K_i$. Ugyanakkor az M_α-ban haladó $\mathrm{pr}_\alpha \circ \mathbf{s} \circ \sigma$ sorozat konvergens d_α szerint és $\lim(\mathrm{pr}_\alpha \circ \mathbf{s} \circ \sigma) \in K_\alpha$. Tehát minden $i \in I$ indexre az M_i-ben haladó $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s} \circ \sigma$ sorozat koncergens d_i szerint és $\lim(\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s} \circ \sigma) \in K_i$. Ebből 4.5.1. alapján következik, hogy az M-ben haladó $\mathbf{s} \circ \sigma$ sorozat konvergens d szerint és $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma) \in K$. Tehát s-nek van olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak, így a Bolzano–Weierstrass-tétel alapján K kompakt halmaz M-ben a d metrika szerint. ∎

5.7. Normák ekvivalenciája végesdimenziós vektortér felett

5.7.1. Lemma. *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_k)_{k\in n} \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, akkor a $\|\cdot\|_\infty$ norma értelmezése alapján

$$\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; \mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}) = \prod_{k\in n} \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}_k; \mathbb{K}),$$

és a $\mathbb{K}$-ra vonatkozó Bolzano-Weierstrass tétel alapján minden $k \in n$ esetén $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}_k; \mathbb{K})$ kompakt halmaz $\mathbb{K}$-ban az euklidészi metrika szerint. Ezért az előző állásból következik, hogy $\mathbb{K}^n$-ben minden $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ szerinti zárt gömb kompakt halmaz a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ metrika szerint. Ugyanakkor $\mathbb{K}^n$-ben minden korlátos és zárt halmaz részhalmaza egy zárt gömbnek, vagyis egy kompakt halmaznak, ezért minden korlátos és zárt halmaz kompakt $\mathbb{K}^n$-ben a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ szerint. ∎

5.7.2. Tétel. *Véges dimenziós valós vagy komplex vektortér felett bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{K}^n$ felett, akkor létezik olyan $C' > 0$ valós szám, amelyre minden $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|\mathbf{x}\| \leq C'\|\mathbf{x}\|_\infty$. Valóban, ha $(\mathbf{e}_k)_{k\in n}$ a kanonikus bázis $\mathbb{K}^n$-ben, akkor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{x}(k).\mathbf{e}_k$, ezért

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{x}(k).\mathbf{e}_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{x}(k)| \|\mathbf{e}_k\| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{e}_k\| \right) \|\mathbf{x}\|_\infty,$$

így a $C' := \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{e}_k\|$ szám rendelkezik a megkövetelt tulajdonsággal.

Ebből az is következik, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{K}^n$ felett, akkor $\mathscr{T}_{\mathrm{d}_{\|\cdot\|}} \subseteq \mathscr{T}_{\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}}$ (vagyis $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ szerint nyílt halmaz szükségképpen $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ szerint is nyílt), így az is igaz, hogy a $\mathbb{K}^n$ minden $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ szerint zárt részhalmaza $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ szerint is zárt.

Most megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{K}^n$ felett, akkor létezik olyan $C > 0$ valós szám, amelyre minden $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq C\|\mathbf{x}\|$, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{K}^n$ felett bármely két norma ekvivalens.

Legyen tehát $n \in \mathbb{N}^*$ és $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{K}^n$ felett, továbbá legyen minden $r > 0$ valós számra

$$K_r := \overline{\mathrm{B}}_r(0; \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \cap \mathrm{S}_1(0, \mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}).$$

Ekkor $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén K_r a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ metrika szerint zárt halmaz és persze korlátos is, így az előző állítás következtében kompakt $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ szerint. Továbbá világos, hogy a $(K_r)_{r\in\mathbb{R}_+^*}$ halmazrendszer lefelé irányított, hiszen $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $K_r \cap K_s = K_{\min(r,s)}$. Ezért ha minden $r > 0$ valós számra $K_r \neq \emptyset$ teljesülne, akkor a Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap_{r\in\mathbb{R}_+^*} K_r \neq \emptyset$ is igaz volna. Ugyanakkor, $\mathbf{x} \in \bigcap_{r\in\mathbb{R}_+^*} K_r$ esetén minden $r > 0$ valós számra $\|\mathbf{x}\| \leq r$, így $\|\mathbf{x}\| = 0$, vagyis $\mathbf{x} = 0$, és egyidejűleg $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, azaz $\mathbf{x} \neq 0$. Tehát $\bigcap_{r\in\mathbb{R}_+^*} K_r = \emptyset$, ezért rögzíthetünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $K_r = \emptyset$.

Legyen $\mathbf{z} \in \mathbb{K}^n$ és $\|\mathbf{z}\| \leq r$. Ekkor $\mathbf{z} \notin K_r$ miatt $\|\mathbf{z}\|_\infty \neq 1$, tehát $\|\mathbf{z}\|_\infty < 1$ vagy $\|\mathbf{z}\|_\infty > 1$. Ha $\|\mathbf{z}\|_\infty > 1$ teljesülne, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|_\infty \in K_r$, holott $K_r = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{z} \in \mathbb{K}^n$ és $\|\mathbf{z}\| \leq r$ esetén $\|\mathbf{z}\|_\infty < 1$. Ha $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges nem nulla vektor, akkor $\|r.(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|)\| = r$ miatt $\|r.(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|)\|_\infty < 1$, vagyis $\|\mathbf{x}\|_\infty < (1/r)\|\mathbf{x}\|$. Ez azt jelenti, hogy a $C := 1/r$ valós számra teljesül az, hogy minden $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq C\|\mathbf{x}\|$.

Ezzel igazoltuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén bármely két $\mathbb{K}^n$ feletti norma ekvivalens, és ez $n = 0$ esetén triviálisan igaz.

Legyen most E véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett és $n \in \mathbb{N}$ olyan szám és $u : \mathbb{K}^n \to E$ olyan függvény, amely lineáris bijekció. Legyenek $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ tetszőleges normák E felett. Ekkor $\|\cdot\|_1 \circ u$ és $\|\cdot\|_2 \circ u$ normák $\mathbb{K}^n$ felett, tehát az előzőek alapján léteznek olyan $C_1, C_2 > 0$ valós számok, amelyekre minden $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $(\|\cdot\|_1 \circ u)(\mathbf{x}) \leq C_2(\|\cdot\|_2 \circ u)(\mathbf{x})$ és $(\|\cdot\|_2 \circ u)(\mathbf{x}) \leq C_1(\|\cdot\|_1 \circ u)(\mathbf{x})$. Az u szürjektivitása folytán minden $\mathbf{y} \in E$ vektorhoz van olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, hogy $\mathbf{y} = u(\mathbf{x})$, és ekkor $\|\mathbf{y}\|_1 = (\|\cdot\|_1 \circ u)(\mathbf{x}) \leq C_2(\|\cdot\|_2 \circ u)(\mathbf{x}) = C_2\|\mathbf{y}\|_2$, és hasonlóan $\|\mathbf{y}\|_2 = (\|\cdot\|_2 \circ u)(\mathbf{x}) \leq C_1(\|\cdot\|_1 \circ u)(\mathbf{x}) = C_1\|\mathbf{y}\|_1$, így a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek. ■

5.8. Gyakorlatok

1. Ha (M, d) metrikus tér, és $\mathbf{s}$ konvergens M-ben haladó sorozat, akkor $\mathrm{Im}(\mathbf{s}) \cup \{\lim(\mathbf{s})\}$ kompakt halmaz.

2. Ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata, és minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq M_i$ teljesen korlátos halmaz a d_i metrika szerint, akkor $\prod_{i\in I} E_i$ teljesen korlátos halmaz d szerint.

(*Útmutatás.* Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és $(H_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $H_i \subseteq E_i$ véges halmaz, és $E_i \subseteq \bigcup\limits_{x\in H_i} \mathrm{B}_\varepsilon(x; d_i)$. Ekkor a $H := \prod\limits_{i\in I} H_i \subseteq \prod\limits_{i\in I} E_i$ véges halmazra **ENS** 2.9.9. alapján

$$\prod_{i\in I} E_i \subseteq \prod_{i\in I} \bigcup_{x\in H_i} \mathrm{B}_\varepsilon(x; d_i) = \bigcup_{f\in H} \prod_{i\in I} \mathrm{B}_\varepsilon(f(i); d_i) = \bigcup_{f\in H} \mathrm{B}_\varepsilon(f; d)$$

teljesül.)

3. Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

(*Útmutatás.* Legyen (M, d) metrikus tér, és $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden A-ban haladó sorozatnak létezik d szerint konvergens részsorozata. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\overline{A}$-ban haladó sorozat. Vegyünk tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x_n; d) \cap A \neq \emptyset$, ezért kiválaszthatunk olyan A-ban haladó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, x_n) < \varepsilon_n$. A feltevés szerint van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre $(a_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat; legyen $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{\sigma(k)}$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$d(a, x_{\sigma(k)}) \leq d(a, a_{\sigma(k)}) + d(a_{\sigma(k)}, x_{\sigma(k)}) < d(a, a_{\sigma(k)}) + \varepsilon_{\sigma(k)},$$

így az $(x_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens d szerint és $\lim\limits_{k\to\infty} x_{\sigma(k)} = a \in \overline{A}$. Ezért a Bolzano-Weierstrass tétel szerint $\overline{A}$ kompakt d szerint.)

6. fejezet

Függvény határértéke

6.1. A határérték értelmezése és alaptulajdonságai

6.1.1. Definíció. *Legyenek* (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek, valamint* $f : M \rightarrowtail M'$ *függvény. Azt mondjuk, hogy* f*-nek az* $\mathfrak{a} \in M$ *pontban* **létezik határértéke** (*a* d *és* d' *metrikák szerint*), *ha* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, és van olyan* $\mathfrak{b} \in M'$*, hogy a* $\mathfrak{b}$ *minden* d' *szerinti* V' *környezetéhez létezik* $\mathfrak{a}$*-nak olyan* d *szerinti* V *környezete, amelyre* $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$ *teljesül; vagyis fennáll a*

$$(\forall\ V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b}))(\exists\ V \in \mathscr{T}_{d}(\mathfrak{a}))\ \ (\ f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'\ )$$

kijelentés. Minden ilyen tulajdonságú $\mathfrak{b} \in M'$ *pontot az* f *függvény* **határértékének** *nevezzük az* $\mathfrak{a}$ *pontban* (*a* d *és* d' *metrikák szerint*).

A környezetek értelmezése alapján a határérték létezésének fogalma könnyen megadható a metrikus térbeli gömbök segítségével is: az $f{:}M \rightarrowtail M'$ függvénynek pontosan akkor létezik határértéke az $\mathfrak{a} \in M$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek és van olyan $\mathfrak{b} \in M'$, amelyre

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)\ \ (\ f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b}; d')\ )$$

teljesül, ami azzal ekvivalens, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f))\ \ (\ 0 < d(x, \mathfrak{a}) < \delta \Rightarrow d'(f(x), \mathfrak{b}) < \varepsilon\ )\,.$$

Figyeljük meg, hogy ez a formula nyilvánvalóan akkor is *értelmes*, ha $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. De ha $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor könnyen belátható, hogy *minden* $\mathfrak{b} \in M'$ pontra teljesül a fenti kijelentés, tehát akkor minden pont határértéke volna f-nek $\mathfrak{a}$-ban. Ezzel szemben érvényes a következő állítás.

6.1.2. Állítás. (A határérték egyértelműsége) *Ha* (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek,* $f : M \rightarrowtail M'$ *függvény, és* $\mathfrak{a} \in M$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, akkor* f*-nek legfeljebb egy határértéke létezik az* $\mathfrak{a}$ *pontban.*

Bizonyítás. Az állítással ellentétben legyenek $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in M'$ az f-nek különböző határértékei az $\mathfrak{a}$ pontban, továbbá legyenek $V_1' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b}_1)$ és $V_2' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b}_2)$ olyan környezetek, amelyekre $V_1' \cap V_2' = \emptyset$. Ekkor van olyan $V_1 \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $V_2 \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $f\langle V_1 \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V_1'$ és $f\langle V_2 \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V_2'$. Azonban $V := V_1 \cap V_2 \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, így $(V \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset$, hiszen $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. Ha $x \in (V \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(f)$, akkor $f(x) \in f\langle V_1 \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \cap f\langle V_2 \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V_1' \cap V_2'$, ami ellentmond a $V_1' \cap V_2' = \emptyset$ egyenlőségnek. ■

6.1.3. Definíció. *Ha* (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek,* $f : M \rightarrowtail M'$ *függvény,* $\mathfrak{a} \in M$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, és létezik* f*-nek határértéke az* $\mathfrak{a}$ *pontban, akkor*

$$\lim_{\mathfrak{a}} f \quad \textit{vagy} \quad \lim_{x \to \mathfrak{a}} f(x)$$

jelöli az f *egyértelműen meghatározott határértékét az* $\mathfrak{a}$ *pontban.*

A határérték létezése "lokális" tulajdonság, tehát csak azon múlik, hogy a függvény hogyan viselkedik a pont közelében.

6.1.4. Állítás. (A határérték lokalitása) *Legyenek* (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek,* $f, g : M \rightarrowtail M'$ *függvények,* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$*-nek, és tegyük fel, hogy létezik olyan* $W \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$*, amelyre* $(W \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(f) = (W \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(g)$*, és* $f = g$ *ezen a halmazon. Ekkor* f*-nek pontosan akkor létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, ha* g*-nek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban. Továbbá, ha* f*-nek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, akkor*

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}} g.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és legyen V' tetszőleges környezete d' szerint a $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ pontnak. Legyen $U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan, hogy $f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. Ekkor $V := U \cap W \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és a definíciók alapján

$$g\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V',$$

ami azt jelenti, hogy g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} g = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$. ■

6.2. Átviteli elv határértékekre

6.2.1. Állítás. (Átviteli elv határértékekre) *Legyenek* (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek,* $f : M \rightarrowtail M'$ *függvény, és* $\mathfrak{a} \in M$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Az* f *függvénynek pontosan akkor létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, ha minden* $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$*-ban haladó konvergens* $\mathbf{s}$ *sorozatra,* $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$ *esetén az* $f \circ \mathbf{s}$ *sorozat konvergens. Ha* f*-nek létezik határértéke* $\mathfrak{a}$*-ban, akkor bármely* $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$*-ban haladó konvergens* $\mathbf{s}$ *sorozatra,* $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$ *esetén*

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim(f \circ \mathbf{s}).$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\mathbf{s}$ tetszőleges olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó konvergens sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$. Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f)$ tetszőleges. Ekkor vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. A V-hez legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}(n) \in V$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}(n) \in (V \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(f)$, ezért $f(\mathbf{s}(n)) \in f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. Ez azt jelenti, hogy $f \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozat és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = \lim(f \circ \mathbf{s})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó konvergens $\mathbf{s}$ sorozatra, $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens. Legyenek $\mathbf{s}'$ és $\mathbf{s}''$ olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó konvergens sorozatok, hogy $\lim(\mathbf{s}') = \mathfrak{a}$ és $\lim(\mathbf{s}'') = \mathfrak{a}$. Képezzük azt a M-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(2k) := \mathbf{s}'(k)$ és $\mathbf{s}(2k+1) := \mathbf{s}''(k)$. Ekkor $\mathbf{s}$ szintén olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, ezért a hipotézis szerint $f \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozat. Azonban $f \circ \mathbf{s}'$ és $f \circ \mathbf{s}''$ részsorozatai $f \circ \mathbf{s}$-nek, így $\lim(f \circ \mathbf{s}') = \lim(f \circ \mathbf{s}'')$. Továbbá *létezik* olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, mert $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. Ezért jól értelmezett az $\mathfrak{b} \in M'$ pont, amelyre $\mathfrak{b} := \lim(f \circ \mathbf{s})$ bármely olyan $\mathbf{s}$ sorozatra, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál és $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban halad. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{b}$ az f határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, vagyis, hogy

$$(\forall\, V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b}))(\exists\, V \in \mathscr{T}_{d}(\mathfrak{a})) : f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$$

teljesül. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy ez nem igaz, vagyis

$$(\exists\, V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b}))(\forall\, V \in \mathscr{T}_{d}(\mathfrak{a})) : f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \setminus V' \neq \emptyset.$$

Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b})$ olyan, hogy minden $V \in \mathscr{T}_{d}(\mathfrak{a})$ esetén $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \setminus V' \neq \emptyset$, vagyis

$$(V \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle \neq \emptyset.$$

Legyen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathfrak{a}$ pont környezeteinek olyan sorozata, amely tartalmazás tekintetében monoton fogyó, és rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $\mathfrak{a}$ minden V környezetéhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $V_n \subseteq V$. Például, ha $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó monoton fogyó zérussorozat, akkor a $(\mathrm{B}_{\delta_n}(\mathfrak{a}; d))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat megfelelő. Ekkor V' definíciója szerint a

$$\left((V_n \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

halmazsorozat minden tagja nem üres halmaz, így a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left((V_n \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle\right) \neq \emptyset.$$

Legyen $\mathbf{s}$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) \in V_n$ és $f(\mathbf{s}(n)) \notin V'$. Ebből következik, hogy $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, tehát a feltevés szerint $f \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozat, továbbá a $\mathfrak{b}$ pont definíciója alapján $\mathfrak{b} = \lim(f \circ \mathbf{s})$. Ez viszont ellentmond annak, hogy $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b})$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(\mathbf{s}(n)) \notin V'$. ■

6.2.2. Következmény. *Legyenek* (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek,* $f : M \rightarrowtail M'$ *függvény,* $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, és* $\mathfrak{b} \in M'$*. A* $\mathfrak{b}$ *elem pontosan akkor határértéke* f*-nek az* $\mathfrak{a}$ *pontban, ha minden* $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$*-ban haladó konvergens* $\mathbf{s}$ *sorozatra,* $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$ *esetén az* $\lim(f \circ \mathbf{s}) = \mathfrak{b}$ *teljesül.*

Bizonyítás. Közvetlenül látszik az előző állítás alapján. ■

Az átviteli elv alkalmazható annak bizonyítására, hogy egy függvénynek *nem létezik* határértéke egy adott pontban. Ugyanis, ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor ahhoz, hogy f-nek ne létezzen határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban *elégséges*

– egy olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó konvergens $\mathbf{s}$ sorozatot találni, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, de az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat *nem konvergens*, vagy

– két olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó konvergens $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ sorozatot találni, amelyekre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a} = \lim(\mathbf{s}')$, valamint az $f \circ \mathbf{s}$ és $f \circ \mathbf{s}'$ sorozatok konvergensek, de $\lim(f \circ \mathbf{s}) \neq \lim(f \circ \mathbf{s}')$.

Az átviteli elv alkalmazható függvény határértékének *kiszámítására* is, ha már tudjuk, hogy a függvénynek létezik határértéke az adott pontban. Ugyanis, ha (M,d) és (M',d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és f-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor $\lim_{\mathfrak{a}} f$ egyenlő az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat határértékével, ahol $\mathbf{s}$ *tetszőleges* olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó konvergens sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$.

6.3. Összetett függvények határértéke

6.3.1. Definíció. (A függvényműveletek értelmezése) *Legyenek F vektortér a K test felett, és legyenek f és g olyan függvények, amelyekre* $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$ *és* $\mathrm{Im}(g) \subseteq F$ *teljesül. Legyen továbbá $\alpha \in K$ és λ olyan függvény, amelyre* $\mathrm{Im}(\lambda) \subseteq K$.

a) *$f+g$ az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(f+g) := \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(f+g)$ *esetén* $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$;

b) *$\alpha.f$ az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(\alpha.f) := \mathrm{Dom}(f)$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(f)$ *esetén* $(\alpha.f)(x) := \alpha.f(x)$;

c) *$\lambda.f$ az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(\lambda.f) := \mathrm{Dom}(\lambda) \cap \mathrm{Dom}(f)$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(\lambda.f)$ *esetén* $(\lambda.f)(x) := \lambda(x).f(x)$.

Ha $K = \mathbb{K}$, akkor

d) *$\overline{\lambda}$ az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(\overline{\lambda}) := \mathrm{Dom}(\lambda)$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(\lambda)$ *esetén* $\overline{\lambda}(x) := \overline{\lambda(x)}$.

Ha $(F, \|\cdot\|)$ normált tér, és f olyan függvény, amelyre $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$, *akkor*

e) *$\|f(\cdot)\|$ az a függvény, amelyre* $\mathrm{Dom}(\|f(\cdot)\|) := \mathrm{Dom}(f)$ *és minden* $x \in \mathrm{Dom}(\|f(\cdot)\|)$ *esetén* $\|f(\cdot)\|(x) := \|f(x)\|$.

6.3.2. Állítás. *Legyen (M,d) metrikus tér és $(F, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett. Legyenek $f, g : M \rightarrowtail F$ és $\lambda : M \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, valamint $\alpha \in \mathbb{K}$.*

a) *Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$*-nek, továbbá f-nek és g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f+g$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és*

$$\lim_{\mathfrak{a}}(f+g) = \lim_{\mathfrak{a}} f + \lim_{\mathfrak{a}} g.$$

b) *Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(\lambda.f)$*-nek, továbbá λ-nak és f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\lambda.f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és*

$$\lim_{\mathfrak{a}}(\lambda.f) = \left(\lim_{\mathfrak{a}} \lambda\right).\left(\lim_{\mathfrak{a}} f\right).$$

c) *Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor a $\|f(\cdot)\| : M \rightarrowtail \mathbb{R}$ és $\alpha.f : M \rightarrowtail F$ függvényeknek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és*

$$\lim_{\mathfrak{a}} \|f(\cdot)\| = \left\|\lim_{\mathfrak{a}} f\right\|$$

$$\lim_{\mathfrak{a}}(\alpha.f) = \alpha.\lim_{\mathfrak{a}} f.$$

d) *Ha λ-nak létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor az $\overline{\lambda} : M \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvénynek is létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és*

$$\lim_{\mathfrak{a}} \overline{\lambda} = \overline{\lim_{\mathfrak{a}} \lambda}.$$

Bizonyítás. a) Ha $\mathbf{s}$ olyan $(\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint $f \circ \mathbf{s}$ és $g \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozatok, így az $(f+g) \circ \mathbf{s} = (f \circ \mathbf{s}) + (g \circ \mathbf{s})$ sorozat is konvergens. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $f+g$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\mathbf{s}$ olyan $(\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(f+g) = \lim((f+g) \circ \mathbf{s}) = \lim(f \circ \mathbf{s}) + \lim(g \circ \mathbf{s}) = \lim_{\mathfrak{a}} f + \lim_{\mathfrak{a}} g.$$

b) Ha $\mathbf{s}$ olyan $(\mathrm{Dom}(\lambda) \cap \mathrm{Dom}(f)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint $\lambda \circ \mathbf{s}$ és $f \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozatok, így a $(\lambda.f) \circ \mathbf{s} = (\lambda \circ \mathbf{s}).(f \circ \mathbf{s})$ sorozat is konvergens. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $\lambda.f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\mathbf{s}$ olyan $(\mathrm{Dom}(\lambda) \cap \mathrm{Dom}(f)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(\lambda.f) = \lim((\lambda.f) \circ \mathbf{s}) = \lim(\lambda \circ \mathbf{s}). \lim(f \circ \mathbf{s}) = \left(\lim_{\mathfrak{a}} \lambda\right) . \left(\lim_{\mathfrak{a}} f\right).$$

c) Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens, és $\lim(f \circ \mathbf{s}) = \lim_{\mathfrak{a}} f$, így az $\|f(\cdot)\| \circ \mathbf{s} = \|(f \circ \mathbf{s})(\cdot)\|$ és $(\alpha.f) \circ \mathbf{s} = \alpha.(f \circ \mathbf{s})$ sorozatok is konvergensek. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy a $\|f(\cdot)\|$ és $\alpha.f$ függvényeknek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}} \|f(\cdot)\| = \lim(\|f(\cdot)\| \circ \mathbf{s}) = \lim(\|(f \circ \mathbf{s})(\cdot)\|) = \left\|\lim_{\mathfrak{a}} f\right\|$$
$$\lim_{\mathfrak{a}}(\alpha.f) = \lim((\alpha.f) \circ \mathbf{s}) = \lim(\alpha.(f \circ \mathbf{s})) = \alpha. \lim_{\mathfrak{a}} f.$$

d) Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(\lambda) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint az $\lambda \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens, és $\lim(\lambda \circ \mathbf{s}) = \lim_{\mathfrak{a}} \lambda$, így az $\overline{\lambda} \circ \mathbf{s} = \overline{\lambda \circ \mathbf{s}}$ sorozat is konvergens. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy az $\overline{\lambda}$ függvénynek is létezik határértéke $\mathfrak{a}$-nak, és ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(\lambda) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(\overline{\lambda}) = \lim(\overline{\lambda} \circ \mathbf{s}) = \lim \overline{(\lambda \circ \mathbf{s})} = \overline{\lim_{\mathfrak{a}} \lambda}$$

teljesül. ■

6.4. Függvények kompozíciójának határértéke

6.4.1. Állítás. (Függvények kompozíciójának határértéke) *Legyenek (M,d), (M',d'), valamint (M'',d'') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$, $g : M' \rightarrowtail M''$ függvények, és $\mathfrak{a} \in M$. Tegyük fel, hogy*

- *az $\mathfrak{a}$ pont torlódási pontja $\mathrm{Dom}(g \circ f)$-nek, és*
- *az f függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és*
- *a g függvénynek létezik határéréke a $\mathfrak{b} := \lim_{\mathfrak{a}} f$ pontban.*

Tegyük fel továbbá, hogy a következő feltételek valamelyike teljesül:

a) $\mathfrak{b} \notin \mathrm{Dom}(g)$*;*

b) $\mathfrak{b} \in \mathrm{Dom}(g)$ *és* $\lim_{\mathfrak{b}} g = g(\mathfrak{b})$*.*

Ekkor $g \circ f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és fennáll a

$$\lim_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \lim_{\mathfrak{b}} g$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Először tekintsünk tetszőleges $V'' \in \mathscr{T}_{d''}(\lim_{\mathfrak{b}} g)$ környezetet. A határérték definíciója szerint vehetünk olyan $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b})$ környezetet, amelyre $g\langle V' \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq V''$. Ugyanakkor $\mathfrak{b} := \lim_{\mathfrak{a}} f$, ezért V'-höz vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. Ekkor nyilvánvalóan teljesül az, hogy

$$(g \circ f)\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = g\langle f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle\rangle \subseteq g\langle V'\rangle.$$

Ha a) teljesül, vagyis $\mathfrak{b} \notin \mathrm{Dom}(g)$ akkor

$$g\langle V'\rangle = g\langle V' \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq V''.$$

Ha b) teljesül, vagyis $\mathfrak{b} \in \mathrm{Dom}(g)$ és $\lim_{\mathfrak{b}} g = g(\mathfrak{b})$, akkor

$$g\langle V'\rangle = g\langle \{\mathfrak{b}\} \cup (V' \setminus \{\mathfrak{b}\})\rangle = \{g(\mathfrak{b})\} \cup g\langle V' \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle = \{\lim_{\mathfrak{b}} g\} \cup g\langle V' \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq V''.$$

Tehát akár a), akár b) teljesül, az adódik, hogy a $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetre

$$(g \circ f)\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'',$$

vagyis $g \circ f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \lim_{\mathfrak{b}} g$. ∎

6.5. Metrikus szorzattérbe vezető függvény határértéke

6.5.1. Állítás. *Legyen (M, d) metrikus tér, (M', d') az $((M'_i, d'_i))_{i \in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény és $\mathfrak{a} \in M$ torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Az f függvénynek pontosan akkor létezik határértéke a d és d' metrikák szerint az $\mathfrak{a}$ pontban, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f : M \rightarrowtail M'_i$ függvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d'_i metrikák szerint. Ha létezik f-nek határértéke a d és d' metrikák szerint az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor minden $i \in I$ esetén* $\mathrm{pr}_i(\lim_{\mathfrak{a}} f) = \lim_{\mathfrak{a}}(\mathrm{pr}_i \circ f)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke a d és d' metrikák szerint az $\mathfrak{a}$ pontban. Legyen $i \in I$ és $V' \in \mathscr{T}_{d'_i}(\mathrm{pr}_i(\lim_{\mathfrak{a}} f))$. A környezetek definíciója szerint vehetünk olyan $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'_i}$ halmazt, hogy $\mathrm{pr}_i(\lim_{\mathfrak{a}} f) \in \Omega' \subseteq V'$. Ekkor $\overset{-1}{\mathrm{pr}_i}\langle\Omega'\rangle = \prod_{j \in I} \Omega'_j$, ahol minden $j \in I$ esetén $\Omega'_j := M'_j$, ha $j \neq i$, és $\Omega'_i := \Omega'$. Nyílt halmazok szorzata nyílt a szorzatmetrika szerint, ezért $\prod_{j \in I} \Omega'_j$ nyílt halmaz d' szerint és természetesen $\lim_{\mathfrak{a}} f \in \prod_{j \in I} \Omega'_j$. Tehát $\prod_{j \in I} \Omega'_j$ nyílt környezete $\lim_{\mathfrak{a}} f$-nek d' szerint, így vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \prod_{j \in I} \Omega'_j$. Ekkor

$$(\mathrm{pr}_i \circ f)\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = \mathrm{pr}_i\langle f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle\rangle \subseteq \mathrm{pr}_i\langle \prod_{j \in I} \Omega'_j\rangle = \Omega'_i = \Omega' \subseteq V',$$

ami azt jelenti, hogy a $\mathrm{pr}_i \circ f : M \rightarrowtail M'_i$ függvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d'_i metrikák szerint, és $\lim_{\mathfrak{a}}(\mathrm{pr}_i \circ f) = \mathrm{pr}_i(\lim_{\mathfrak{a}} f)$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f : M \rightarrowtail M'_i$ függvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d'_i metrikák szerint, és képezzük a $\mathfrak{b} := (\lim_{\mathfrak{a}}(\mathrm{pr}_i \circ f))_{i\in I} \in M'$ pontot. Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b})$ tetszőleges, és vegyünk olyan $(V'_i)_{i\in I}$ rendszert, amelyre minden $i \in I$ esetén $V'_i \in \mathscr{T}_{d'_i}(\mathfrak{b}_i)$ és $\prod_{i\in I} V'_i \subseteq V'$. Minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{b}_i := \lim_{\mathfrak{a}}(\mathrm{pr}_i \circ f)$ és $V'_i \in \mathscr{T}_{d'_i}(\mathfrak{b}_i)$, ezért van olyan $V_i \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $(\mathrm{pr}_i \circ f)\langle V_i \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'_i$. Ekkor $V := \bigcap_{i\in I} V_i \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan környezet, amelyre

$$f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i\langle f\langle V_i \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle\rangle = \prod_{i\in I}(\mathrm{pr}_i \circ f)\langle V_i \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \prod_{i\in I} V'_i \subseteq V',$$

tehát $\mathfrak{b}$ az f függvénynek határértéke a $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, és láthatóan minden $i \in I$ esetén $\mathrm{pr}_i(\lim_{\mathfrak{a}} f) = \mathfrak{b}_i := \lim_{\mathfrak{a}}(\mathrm{pr}_i \circ f)$. ■

6.6. Metrikus szorzattérben értelmezett függvény határértéke

6.6.1. Definíció. *Legyen $(M_i)_{i\in I}$ halmazrendszer és $M := \prod_{i\in I} M_i$. Ha $k \in I$ és $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in M$, akkor $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}$ jelöli azt az $M_k \to M$ függvényt, amely minden $x_k \in M_k$ ponthoz azt az $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(x_k)$ elemet rendeli az M szorzathalmazból, amelyre $i \in I$ és $i \neq k$ esetén $(\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(x_k))(i) := \mathfrak{a}_i$, és $(\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(x_k))(i) := x_k$. Ha M' halmaz és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, akkor minden $k \in I$ indexre és $\mathfrak{a} \in M$ pontra az $f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : M_k \rightarrowtail M'$ függvényt az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli k-adik* **parciális függvényének** *nevezzük.*

Két halmaz szorzatában értelmezett függvények esetében egyszerűbb jelöléseket alkalmazunk. Ha M_1, M_2, M' halmazok, $f{:}M_1{\times}M_2{\rightarrowtail}M'$ függvény és $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in M_1 \times M_2$, akkor az f függvény $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ pontbeli első (illetve második) parciális függvényét $f(\cdot, \mathfrak{a}_2)$ (illetve $f(\mathfrak{a}_1, \cdot)$) jelöli, tehát

a) $f(\cdot, \mathfrak{a}_2) : M_1 \rightarrowtail M'$ az a függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f(\cdot, \mathfrak{a}_2)) := \{x_1 \in M_1 | (x_1, \mathfrak{a}_2) \in \mathrm{Dom}(f)\}$, és minden $x_1 \in \mathrm{Dom}(f(\cdot, \mathfrak{a}_2))$ esetén $f(\cdot, \mathfrak{a}_2)(x_1) := f(x_1, \mathfrak{a}_2)$;

b) $f(\mathfrak{a}_1, \cdot) : M_2 \rightarrowtail M'$ az a függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f(\mathfrak{a}_1, \cdot)) := \{x_2 \in M_2 | (\mathfrak{a}_1, x_2) \in \mathrm{Dom}(f)\}$, és minden $x_2 \in \mathrm{Dom}(f(\mathfrak{a}_1, \cdot))$ esetén $f(\mathfrak{a}_1, \cdot)(x_2) := f(\mathfrak{a}_1, x_2)$.

6.6.2. Állítás. *Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, (M', d') metrikus tér, $f{:}M{\rightarrowtail}M'$ függvény, és $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in M$. Ha f-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, és $k \in I$ olyan, hogy $\mathfrak{a}_k$ torlódási pontja az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli k-adik parciális függvénye definíciós tartományának (vagyis $\mathrm{Dom}(f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}})$-nak), akkor az $f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}{:}M_k{\rightarrowtail}M'$ parciális függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}_k$-ban a d_k és d' metrikák szerint, és $\lim_{\mathfrak{a}_k}(f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}) = \lim_{\mathfrak{a}} f$.*

Bizonyítás. Legyen V' tetszőleges környezete $\lim_{\mathfrak{a}} f$-nek a d' metrika szerint. Vegyük $\mathfrak{a}$-nak olyan V környezetét a d metrika szerint, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. A V halmazhoz vehetünk olyan $(V_i)_{i\in I}$ halmazrendszert, amelyre minden $i \in I$ esetén V_i a $\mathfrak{a}_i$-nek környezete d_i szerint és $\prod_{i\in I} V_i \subseteq V$. Ha $k \in I$, akkor V_k a $\mathfrak{a}_k$-nak környezete a d_k szerint, és az $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}$ függvény értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}\langle V_k \setminus \{\mathfrak{a}_k\}\rangle \subseteq \Big(\prod_{i\in I} V_i\Big) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq V \setminus \{\mathfrak{a}\}$, tehát

$$(f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}})\langle V_k \setminus \{\mathfrak{a}_k\}\rangle = f\langle \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}\langle V_k \setminus \{\mathfrak{a}_k\}\rangle\rangle \subseteq f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V',$$

ami az állítást bizonyítja. ■

Nyilvánvaló, hogy az előző állítás alkalmazható annak bizonyítására, hogy egy metrikus szorzattérben értelmezett függvénynek adott pontban *nincs* határértéke. Alkalmazható továbbá egy metrikus szorzattérben értelmezett függvény határértékének *kiszámítására* is, ha már ismert az, hogy létezik határárték az adott pontban.

Azonban előfordulhat, hogy egy szorzathalmazban értelmezett függvénynek egy pontban az összes parciális függvénye az *üres függvény*, holott a szóbanforgó pont a függvény definíciós tartományának torlódási pontja. Ilyen esetben a parciális függvényeknek semmi kapcsolatuk nincs azzal a problémával, hogy létezik-e az eredeti függvénynek határértéke, vagy sem? Ha például $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, akkor a $(0,0)$ pont $\mathrm{Dom}(f)$-nek torlódási pontja, de $f(\cdot,0) = \emptyset = f(0,\cdot)$; e mellett lehetséges, hogy f-nek van határértéke $(0,0)$-ban, és az is lehetséges, hogy nincs. Azonban ilyen esetben is létezhet kapcsolat a függvény határértékének létezése és a függvény bizonyos parciális függvényei határátékeinek létezése között. Ezzel a problémával foglalkozunk a következő pontban.

6.7. A kettős határértékek tétele

6.7.1. Lemma. (**Lokalizációs lemma határértékekre.**) *Legyenek (M,d), (M',d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in M$. Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor*

$$\lim_{\mathfrak{a}} f \in \bigcap_{U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \overline{f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle}.$$

Bizonyítás. Legyen $U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\lim_{\mathfrak{a}} f)$. Létezik olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. Ekkor $U \cap V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $(U \cap V) \cap (\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \neq \emptyset$, mivel $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. Ha $x \in (U \cap V) \cap (\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\})$, akkor $f(x) \in f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle$, továbbá $f(x) \in f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$, vagyis $f(x) \in V'$. Ez azt jelenti, hogy $V' \cap f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \neq \emptyset$, amiből következik az állítás. ■

6.7.2. Tétel. (A kettős határértékek tétele) *Legyen (M,d) az (M_1,d_1) és (M_2,d_2) metrikus terek szorzata, (M',d') metrikus tér, $f{:}M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) \in M$. Jelölje f_2 azt az $M_2 \rightarrowtail M'$ függvényt, amelyre* $\mathrm{Dom}(f_2) := \{x_2 \in M_2 | \lim_{\mathfrak{a}_1} f(\cdot,x_2)$ *létezik*$\}$, *és minden $x_2 \in \mathrm{Dom}(f_2)$ esetén $f_2(x_2) := \lim_{\mathfrak{a}_1} f(\cdot,x_2)$. Továbbá, jelölje f_1 azt az $M_1 \rightarrowtail M'$ függvényt, amelyre* $\mathrm{Dom}(f_1) := \{x_1 \in M_1 | \lim_{\mathfrak{a}_2} f(x_1,\cdot)$ *létezik*$\}$ *és minden $x_1 \in \mathrm{Dom}(f_1)$ esetén $f_1(x_1) := \lim_{\mathfrak{a}_2} f(x_1,\cdot)$.*

a) *Ha $\mathfrak{a}_2 \in \overline{\mathrm{Dom}(f_2)}$ vagy $\mathfrak{a}_1 \in \overline{\mathrm{Dom}(f_1)}$, akkor $\mathfrak{a}$ torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek.*

b) *Ha $\mathfrak{a}_2$ torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f_2)$*-nek és f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor f_2-nek* *létezik határértéke $\mathfrak{a}_2$-ben, és $\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}_2} f_2$ teljesül.*

c) *Ha $\mathfrak{a}_1$ torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f_1)$*-nek és f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor f_1-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}_1$-ben, és $\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}_1} f_1$ teljesül.*

Bizonyítás. a) Legyen $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, és vegyünk olyan $V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$ és $V_2 \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)$ környezeteket, amelyekre $V_1 \times V_2 \subseteq V$. Az $\mathfrak{a}_2 \in \overline{\mathrm{Dom}(f_2)}$ feltevés alapján $V_2 \cap \mathrm{Dom}(f_2) \neq \emptyset$; legyen x_2 eleme ennek a halmaznak. Ekkor $f(\cdot, x_2)$-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}_1$ pontban, így $\mathfrak{a}_1$ torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(f(\cdot, x_2))$ halmaznak. Ugyanakkor $V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$, tehát $V_1 \cap (\mathrm{Dom}(f(\cdot, x_2)) \setminus \{\mathfrak{a}_1\}) \neq \emptyset$; legyen x_1 eleme ennek a halmaznak. Ekkor (x_1, x_2) olyan pont $M_1 \times M_2$-ben, hogy $(x_1, x_2) \in \mathrm{Dom}(f)$ és $(x_1, x_2) \neq \mathfrak{a}$, valamint $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$, tehát $(x_1, x_2) \in V$. Ez azt jelenti, hogy $V \cap (\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \neq \emptyset$, tehát $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek.

b) Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{a}_2$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f_2)$-nek és f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim_{\mathfrak{a}} f$ az f_2-nek határértéke $\mathfrak{a}_2$-ben. Ehhez legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\lim_{\mathfrak{a}} f)$ tetszőleges, és rögzítsünk olyan $W' \in \mathscr{T}_{d'}(\lim_{\mathfrak{a}} f)$ környezetet, amely *zárt* és $W' \subseteq V'$ teljesül. Legyen $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan, hogy $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq W'$, továbbá legyenek $V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$ és $V_2 \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)$ olyan környezetek, amelyekre $V_1 \times V_2 \subseteq V$. Be fogjuk bizonyítani azt, hogy $f_2\langle V_2 \setminus \{\mathfrak{a}_2\}\rangle \subseteq \overline{W'}$, amiből a W' zártsága és $W' \subseteq V'$ miatt $f_2\langle V_2 \setminus \{\mathfrak{a}_2\}\rangle \subseteq V'$ következik. Legyen ugyanis $x_2 \in (V_2 \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(f_2)$ rögzített. Ekkor $\lim_{\mathfrak{a}_1} f(\cdot, x_2)$ létezik és a definíció szerint $f_2(x_2) := \lim_{\mathfrak{a}_1} f(\cdot, x_2)$. Az előző lemma alapján

$$f_2(x_2) \in \bigcap_{U \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)} \overline{f(\cdot, x_2)\langle U \setminus \{\mathfrak{a}_1\}\rangle},$$

továbbá, $V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$, így $f_2(x_2) \in \overline{f(\cdot, x_2)\langle V_1 \setminus \{\mathfrak{a}_1\}\rangle}$ is igaz. Ha $y \in f(\cdot, x_2)\langle V_1 \setminus \{\mathfrak{a}_1\}\rangle$, akkor van olyan $x_1 \in (V_1 \setminus \{\mathfrak{a}_1\}) \cap \mathrm{Dom}(f(\cdot, x_2))$, amelyre $y = f(x_1, x_2)$; ekkor $(x_1, x_2) \in ((V_1 \times V_2) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(f)$, tehát $y \in f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq W'$. Ez azt jelenti, hogy $f(\cdot, x_2)\langle V_1 \setminus \{\mathfrak{a}_1\}\rangle \subseteq W'$, következésképpen $f_2(x_2) \in \overline{W'} = W' \subseteq V'$. Tehát $f_2\langle V_2 \setminus \{\mathfrak{a}_2\}\rangle \subseteq V'$, így $\lim_{\mathfrak{a}} f$ az f_2-nek határértéke $\mathfrak{a}_2$-ben.

c) A b) állítás fenti bizonyításának mintájára igazolható. ■

Megjegyezzük, hogy a tétel feltételei mellett előfordulhat az, hogy $\mathfrak{a}_2 \in \overline{\mathrm{Dom}(f_2)}$ és $\lim_{\mathfrak{a}} f$ létezik, de $\mathfrak{a}_2$ nem torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f_2)$-nek, ezért a $\lim_{\mathfrak{a}_2} f_2$ határérték nem létezhet!

A kettős határértékek tételében szereplő $\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}_2} f_2$ egyenlőséget a

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2\to\mathfrak{a}_2} \left(\lim_{x_1\to\mathfrak{a}_1} f(x_1, x_2) \right)$$

alakban is szokták írni. A jobb oldalon álló kifejezést az f függvény *kettős határértékének* nevezzük az $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ pontban. Természetesen elkészíthető a másik

$$\lim_{x_1\to\mathfrak{a}_1} \left(\lim_{x_2\to\mathfrak{a}_2} f(x_1, x_2) \right)$$

kettős határérték is, amelyre értelemszerűen hasonló állítás érvényes.

6.8. Valós függvény alsó- és felső határértéke

6.8.1. Definíció. *Legyen* (M,d) *metrikus tér,* $f : M \rightarrowtail \overline{\mathbb{R}}$ *függvény, és* $\mathfrak{a} \in M$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Ekkor*

$$\limsup_{\mathfrak{a}} f := \inf_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\sup_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big),$$

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f := \sup_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big),$$

és a $\limsup_{\mathfrak{a}} f \in \overline{\mathbb{R}}$ *(illetve és a* $\liminf_{\mathfrak{a}} f \in \overline{\mathbb{R}}$*) elemet az* f *függvény* **felső** *(illetve* **alsó***)* **határértékének** *nevezzük az* $\mathfrak{a}$ *pontban.*

6.8.2. Állítás. *Ha* (M,d) *metrikus tér,* $f : M \rightarrowtail \overline{\mathbb{R}}$ *függvény, és* $\mathfrak{a} \in M$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, akkor*

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f = -\limsup_{\mathfrak{a}} (-f),$$

$$\limsup_{\mathfrak{a}} f = -\liminf_{\mathfrak{a}} (-f).$$

Bizonyítás. Felhasználva azt, hogy minden $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ esetén $-\inf(E) = \sup(-E)$, a definíció alapján kapjuk, hogy

$$-\limsup_{\mathfrak{a}} (-f) = -\inf_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\sup_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} (-f(x)) \Big) = \sup_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(-\sup_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} (-f(x)) \Big) =$$
$$= \sup_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) = \liminf_{\mathfrak{a}} f.$$

Felhasználva azt, hogy minden $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ esetén $-\sup(E) = \inf(-E)$, a definíció alapján kapjuk, hogy

$$-\liminf_{\mathfrak{a}} (-f) = -\sup_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} (-f(x)) \Big) = \inf_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(-\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} (-f(x)) \Big) =$$
$$= \inf_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\sup_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) = \limsup_{\mathfrak{a}} f. \blacksquare$$

6.8.3. Állítás. *Ha* (M,d) *metrikus tér,* $f : M \rightarrowtail \overline{\mathbb{R}}$ *függvény, és* $\mathfrak{a} \in M$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek, akkor*

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f \leq \limsup_{\mathfrak{a}} f.$$

Bizonyítás. Legyen $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ rögzítve. Ha $V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ tetszőleges, akkor $V \cap V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $V \cap V' \subseteq V$, ezért

$$\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \inf_{\substack{x \in (V \cap V') \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \sup_{\substack{x \in (V \cap V') \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \sup_{\substack{x \in V' \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x),$$

amiből következik, hogy

$$\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \inf_{V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\sup_{\substack{x \in V' \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) = \limsup_{\mathfrak{a}} f,$$

tehát

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f = \sup_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) \leq \limsup_{\mathfrak{a}} f. \blacksquare$$

6.8.4. Állítás. *Legyen (M, d) metrikus tér, $f : M \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény (tehát f valós értékű), és $\mathfrak{a} \in M$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. Az f függvénynek pontosan akkor létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ha*

$$-\infty < \liminf_{\mathfrak{a}} f = \limsup_{\mathfrak{a}} f < +\infty.$$

Továbbá, ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \liminf_{\mathfrak{a}} f = \limsup_{\mathfrak{a}} f.$$

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Ekkor a határérték definíciója szerint vehetünk olyan $V_\varepsilon \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, hogy $f\langle V_\varepsilon \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \Big[\lim_{\mathfrak{a}} f - \varepsilon, \lim_{\mathfrak{a}} f + \varepsilon\Big]$, vagyis minden $x \in V_\varepsilon \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra, ha $x \neq \mathfrak{a}$, akkor $\lim_{\mathfrak{a}} f - \varepsilon \leq f(x) \leq \lim_{\mathfrak{a}} f + \varepsilon$. Ha $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ tetszőleges, akkor $V \cap V_\varepsilon \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $V \cap V_\varepsilon \subseteq V_\varepsilon$, ezért minden $x \in (V \cap V_\varepsilon) \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra, ha $x \neq \mathfrak{a}$, akkor $\lim_{\mathfrak{a}} f - \varepsilon \leq f(x) \leq \lim_{\mathfrak{a}} f + \varepsilon$, vagyis

$$\limsup_{\mathfrak{a}} f \leq \sup_{\substack{x \in (V \cap V_\varepsilon) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \lim_{\mathfrak{a}} f + \varepsilon < +\infty,$$

valamint

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f \geq \inf_{\substack{x \in (V \cap V_\varepsilon) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \geq \lim_{\mathfrak{a}} f - \varepsilon > -\infty.$$

Ebből látható, hogy $\liminf_{\mathfrak{a}} f,\ \limsup_{\mathfrak{a}} f \in \mathbb{R}$, és 6.8.3. állítás alapján kapjuk, minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$\lim_{\mathfrak{a}} f - \varepsilon \leq \liminf_{\mathfrak{a}} f \leq \limsup_{\mathfrak{a}} f \leq \lim_{\mathfrak{a}} f + \varepsilon,$$

vagyis $\lim_{\mathfrak{a}} f = \liminf_{\mathfrak{a}} f = \limsup_{\mathfrak{a}} f$.

(II) Most tegyük fel, hogy $-\infty < \liminf_{\mathfrak{a}} f = \limsup_{\mathfrak{a}} f < +\infty$ és $\mathfrak{b} := \liminf_{\mathfrak{a}} f = \limsup_{\mathfrak{a}} f$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Ekkor

$$\mathfrak{b} - \varepsilon = \liminf_{\mathfrak{a}} f - \varepsilon < \liminf_{\mathfrak{a}} f = \sup_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big),$$

ezért van olyan $V_- \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy

$$\mathfrak{b} - \varepsilon < \inf_{\substack{x \in V_- \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x). \tag{1}$$

Ugyanakkor

$$\mathfrak{b} + \varepsilon = \limsup_{\mathfrak{a}} f + \varepsilon > \limsup_{\mathfrak{a}} f = \inf_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\sup_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big),$$

ezért van olyan $V_+ \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy

$$\mathfrak{b} + \varepsilon > \sup_{\substack{x \in V_+ \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x). \tag{2}$$

Ekkor $V_- \cap V_+ \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, ezért (1) és (2) alapján minden $x' \in ((V_- \cap V_+) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\mathfrak{b} - \varepsilon < \inf_{\substack{x \in V_- \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \inf_{\substack{x \in (V_- \cap V_+) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq f(x') \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x \in (V_- \cap V_+) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \sup_{\substack{x \in V_+ \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) < \mathfrak{b} + \varepsilon,$$

vagyis $f\langle (V_- \cap V_+) \setminus \{\mathfrak{a}\} \rangle \subseteq]\mathfrak{b} - \varepsilon, \mathfrak{b} + \varepsilon[= \mathrm{B}_\varepsilon(\mathfrak{b}; \mathbb{R})$. Ez azt jelenti, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = \mathfrak{b}$. ■

6.8.5. Állítás. *Legyen* (M, d) *metrikus tér,* $f : M \rightarrowtail \overline{\mathbb{R}}$ *függvény, és* $\mathfrak{a} \in M$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek. Legyen* $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ *olyan halmaz, hogy minden* $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ *esetén létezik olyan* $U \in \mathscr{B}$*, hogy* $U \subseteq V$*. Ekkor*

$$\limsup_{\mathfrak{a}} f = \inf_{U \in \mathscr{B}} \Big(\sup_{\substack{x \in U \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big),$$

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f = \sup_{U \in \mathscr{B}} \Big(\inf_{\substack{x \in U \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big).$$

Bizonyítás. (I) Ha $U \in \mathscr{B}$, akkor $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ miatt $U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, ezért

$$\sup_{\substack{x \in U \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \geq \inf_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\sup_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) = \limsup_{\mathfrak{a}} f,$$

tehát

$$\overline{c} := \inf_{U \in \mathscr{B}} \Big(\sup_{\substack{x \in U \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) \geq \limsup_{\mathfrak{a}} f.$$

Ha $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, akkor a hipotézis szerint van olyan $U \in \mathscr{B}$, hogy $U \subseteq V$, így

$$\sup_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \geq \sup_{\substack{x \in U \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \geq \overline{c},$$

tehát

$$\limsup_{\mathfrak{a}} f = \inf_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\sup_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) \geq \overline{c}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f = \overline{c}$.

(II) Ha $U \in \mathscr{B}$, akkor $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ miatt $U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, ezért

$$\inf_{\substack{x \in U \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \sup_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) = \liminf_{\mathfrak{a}} f,$$

tehát

$$\underline{c} := \sup_{U \in \mathscr{B}} \Big(\inf_{\substack{x \in U \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) \leq \liminf_{\mathfrak{a}} f.$$

Ha $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, akkor a hipotézis szerint van olyan $U \in \mathscr{B}$, hogy $U \subseteq V$, így

$$\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \inf_{\substack{x \in U \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \underline{c},$$

tehát

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f = \sup_{V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \Big(\inf_{\substack{x \in V \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) \leq \underline{c}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\liminf\limits_{\mathfrak{a}} f = \underline{c}$. ■

6.8.6. Állítás. *Legyen* (M, d) *metrikus tér,* $f : M \rightarrowtail \overline{\mathbb{R}}$ *függvény, és* $\mathfrak{a} \in M$ *torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$*-nek.*

a) *Ha* $\mathbf{s}$ *tetszőleges olyan* $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$*-ban haladó sorozat, amelyre* $\lim \mathbf{s} = \mathfrak{a}$*, akkor*

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f \leq \liminf (f \circ \mathbf{s}) \leq \limsup (f \circ \mathbf{s}) \leq \limsup_{\mathfrak{a}} f.$$

b) *Léteznek olyan* $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$*-ban haladó* $\mathbf{s}_+$ *és* $\mathbf{s}_-$ *sorozatok, hogy* $\lim \mathbf{s}_+ = \mathfrak{a} = \lim \mathbf{s}_-$ *és*

$$\limsup_{\mathfrak{a}} f = \limsup (f \circ \mathbf{s}_+),$$
$$\liminf_{\mathfrak{a}} f = \liminf (f \circ \mathbf{s}_-).$$

Bizonyítás. a) Legyen $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim \mathbf{s} = \mathfrak{a}$. Rögzítsünk egy $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor minden $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ esetén létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \subseteq V$, így az előző állítást alkalmazhatjuk a $\mathscr{B} := \{\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) | n \in \mathbb{N}\}$ halmazra, tehát

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\inf_{\substack{x \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big). \tag{1}$$

$$\limsup_{\mathfrak{a}} f = \inf_{n \in \mathbb{N}} \Big(\sup_{\substack{x \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big), \tag{2}$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\lim \mathbf{s} = \mathfrak{a}$ miatt van olyan $N_n \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq N_n$ természetes számra $d(\mathbf{s}(k), \mathfrak{a}) < \varepsilon_n$, vagyis $\mathbf{s}(k) \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \cap \mathrm{Dom}(f)$ és $\mathbf{s}(k) \neq \mathfrak{a}$, tehát

$$\inf_{\substack{x \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \inf_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq N_n}} f(\mathbf{s}(k)) \leq \liminf (f \circ \mathbf{s}) \leq$$
$$\leq \limsup (f \circ \mathbf{s}) \leq \sup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq N_n}} f(\mathbf{s}(k)) \leq \inf_{\substack{x \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x),$$

vagyis

$$\inf_{\substack{x \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \leq \liminf (f \circ \mathbf{s}) \leq \limsup (f \circ \mathbf{s}) \leq \inf_{\substack{x \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x).$$

Ez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz, így (1) és (2) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\inf_{\substack{x \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) \leq \liminf (f \circ \mathbf{s}) \leq$$
$$\leq \limsup (f \circ \mathbf{s}) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \Big(\sup_{\substack{x \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d) \cap \mathrm{Dom}(f) \\ x \neq \mathfrak{a}}} f(x) \Big) = \limsup_{\mathfrak{a}} f,$$

amivel a)-t igazoltuk.

b) A $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f$-fel kapcsolatos állítás bizonyításához két alternatívát tekintünk.

1) Feltesszük, hogy az $\mathfrak{a}$ pontnak létezik olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezete, hogy az f függvény *felülről korlátos* a $(V \cap \mathrm{Dom}(f)) \setminus \{\mathfrak{a}\})$ halmazon. Rögzítsünk olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \subseteq V$, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f felülről korlátos a $(\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \cap \mathrm{Dom}(f)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon, amely nem üres, mert $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a szuprémum definíciója szerint létezik olyan $x' \in (\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \cap \mathrm{Dom}(f)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pont, hogy $\sup\limits_{\substack{x\in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d)\cap\mathrm{Dom}(f)\\ x\neq\mathfrak{a}}} f(x) \leq f(x') + \varepsilon_n$, így *kiválaszthatunk* olyan $(\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \cap \mathrm{Dom}(f)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\mathbf{s}_+$ sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sup\limits_{\substack{x\in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d)\cap\mathrm{Dom}(f)\\ x\neq\mathfrak{a}}} f(x) \leq f(\mathbf{s}_+(n)) + \varepsilon_n$. Ekkor $\mathbf{s}_+$ olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim \mathbf{s}_+ = \mathfrak{a}$, így a) szerint $\limsup(f \circ \mathbf{s}) \leq \limsup\limits_{\mathfrak{a}} f$. A fordított egyenlőtlenség bizonyításához legyen $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\limsup(f \circ \mathbf{s}_+) < c$. Rögzítsünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számot. Ekkor a sorozatok felső határértékének definíciója szerint létezik olyan $n_c \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq n_c$ természetes számra $f(\mathbf{s}_+(k)) < c$, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ miatt létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq n_\varepsilon$ természetes számra $\varepsilon_k < \varepsilon$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq \max(n_c, n_\varepsilon)$. Ekkor az a) állítás bizonyításában szereplő (2) formula alkalmazható az $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zérussorozatra, tehát

$$\limsup_{\mathfrak{a}} f = \inf_{m\in\mathbb{N}} \Bigg(\sup_{\substack{x\in \mathrm{B}_{\varepsilon_m}(\mathfrak{a};d)\cap\mathrm{Dom}(f)\\ x\neq\mathfrak{a}}} f(x) \Bigg) \leq \sup_{\substack{x\in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d)\cap\mathrm{Dom}(f)\\ x\neq\mathfrak{a}}} f(x) \leq f(\mathbf{s}_+(n)) + \varepsilon_n < c + \varepsilon,$$

mert $n \geq n_c$ miatt $f(\mathbf{s}_+(n)) < c$, és $n \geq n_\varepsilon$ miatt $\varepsilon_n < \varepsilon$. Tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f - c < \varepsilon$, így $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f - c \leq 0$, azaz $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f \leq c$. Ebből következik, hogy $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f \leq \limsup(f \circ \mathbf{s}_+)$, amivel igazoltuk a $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f = \limsup(f \circ \mathbf{s}_+)$ egyenlőséget.

2) Most azt tesszük fel, hogy az $\mathfrak{a}$ pont minden $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetére az f függvény *nem korlátos felülről* a $(V \cap \mathrm{Dom}(f)) \setminus \{\mathfrak{a}\})$ halmazon, azaz $\sup\limits_{\substack{x\in V\cap\mathrm{Dom}(f)\\ x\neq\mathfrak{a}}} f(x) = +\infty$. Rögzítsünk egy $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot, továbbá vegyünk olyan $\mathbb{R}$-ben haladó $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = +\infty$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sup\limits_{\substack{x\in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a};d)\cap\mathrm{Dom}(f)\\ x\neq\mathfrak{a}}} f(x) = +\infty$, ezért létezik olyan $x \in (\mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \cap \mathrm{Dom}(f)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, hogy $f(x) \geq r_n$. Tehát *kiválasztható* olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\mathbf{s}_+$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}_+(n) \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d)$ és $f(\mathbf{s}_+(n)) \geq r_n$. Ekkor $\lim \mathbf{s}_+ = \mathfrak{a}$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq n}} (f \circ \mathbf{s}_+)(k) \geq \sup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq n}} r_k = +\infty,$$

amiből a sorozatok felső határértékének definíciója szerint kapjuk, hogy $\limsup(f \circ \mathbf{s}_+) = +\infty$, tehát $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f \leq \limsup(f \circ \mathbf{s}_+)$, ugyanakkor a) szerint $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f \geq \limsup(f \circ \mathbf{s}_+)$, amivel igazoltuk a $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f = \limsup(f \circ \mathbf{s}_+)$ egyenlőséget.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha (M, d) metrikus tér, akkor minden $f : M \rightarrowtail \overline{\mathbb{R}}$ függvényhez, és a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz minden $\mathfrak{a} \in M$ torlódási pontjához létezik olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\mathbf{s}_+$ sorozat, hogy $\lim \mathbf{s}_+ = \mathfrak{a}$ és $\limsup\limits_{\mathfrak{a}} f = \limsup(f \circ \mathbf{s}_+)$. Ha (M, d)

metrikus tér, és $f : M \rightarrowtail \overline{\mathbb{R}}$ függvény, és $\mathfrak{a} \in M$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, akkor $-f : M \rightarrowtail \overline{\mathbb{R}}$ olyan függvény, hogy $\mathfrak{a} \in M$ torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(-f) = \mathrm{Dom}(f)$ halmaznak, így létezik olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\mathbf{s}_-$ sorozat, hogy $\lim \mathbf{s}_- = \mathfrak{a}$ és $\limsup_{\mathfrak{a}}(-f) = \limsup((-f) \circ \mathbf{s}_-)$. Ekkor kihasználva a $(-f) \circ \mathbf{s}_- = -(f \circ \mathbf{s}_-)$ egyenlőséget, és alkalmazva a 6.8.2. és **NUM** 3.10.2. állításokat kapjuk, hogy

$$\liminf_{\mathfrak{a}} f = -\big(\limsup_{\mathfrak{a}}(-f)\big) = -\left(\limsup((-f) \circ \mathbf{s}_-)\right) =$$
$$= -\left(\limsup(-(f \circ \mathbf{s}_-)\right) = -\left(-\liminf(f \circ \mathbf{s}_-)\right) = \liminf(f \circ \mathbf{s}_-),$$

amivel igazoltuk a $\liminf_{\mathfrak{a}} f$-fel kapcsolatos állítást is. ■

6.9. Gyakorlatok

1. Legyen (M, d) az (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus terek szorzata, $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in M$ és $E \subseteq M$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{a}_1$ torlódási pontja a $\mathrm{pr}_1\langle E \cap (M_1 \times \{\mathfrak{a}_2\})\rangle$ halmaznak a d_1 metrika szerint, *vagy* $\mathfrak{a}_2$ torlódási pontja a $\mathrm{pr}_2\langle E \cap (\{\mathfrak{a}_1\} \times M_2)\rangle$ halmaznak a d_2 metrika szerint, akkor $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ torlódási pontja E-nek a d metrika szerint. Azonban lehetséges az, hogy $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ torlódási pontja E-nek a d metrika szerint, de $\mathfrak{a}_1$ nem torlódási pontja a $\mathrm{pr}_1\langle E \cap (M_1 \times \{\mathfrak{a}_2\})\rangle$ halmaznak a d_1 metrika szerint, *és* $\mathfrak{a}_2$ nem torlódási pontja a $\mathrm{pr}_2\langle E \cap (\{\mathfrak{a}_1\} \times M_2)\rangle$ halmaznak a d_2 metrika szerint.

2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f) := \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 | x_0 + x_1 \neq 0\}$, és minden $(x_0, x_1) \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$f(x_0, x_1) := \frac{x_0 - x_1}{x_0 + x_1}.$$

Ekkor $(0, 0)$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és a

$$\lim_{x_0 \to 0}\Big(\lim_{x_1 \to 0} f(x_0, x_1)\Big); \quad \lim_{x_1 \to 0}\Big(\lim_{x_0 \to 0} f(x_0, x_1)\Big)$$

kettős határértékek léteznek, de *nem egyenlők*, így f-nek nincs határértéke a $(0, 0)$ pontban.

3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f) := \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 | x_0^2 x_1^2 + (x_0 - x_1)^2 \neq 0\}$, és minden $(x_0, x_1) \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$f(x_0, x_1) := \frac{x_0^2 x_1^2}{x_0^2 x_1^2 + (x_0 - x_1)^2}.$$

Ekkor $(0, 0)$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és a

$$\lim_{x_0 \to 0}\Big(\lim_{x_1 \to 0} f(x_0, x_1)\Big); \quad \lim_{x_1 \to 0}\Big(\lim_{x_0 \to 0} f(x_0, x_1)\Big)$$

kettős határértékek léteznek és *egyenlők*, de f-nek nincs határértéke a $(0, 0)$ pontban.

4. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f) := \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 | x_0 \neq 0, x_1 \neq 0\}$, és minden $(x_0, x_1) \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$f(x_0, x_1) := (x_0 + x_1)\sin\left(\frac{1}{x_0}\right)\sin\left(\frac{1}{x_1}\right).$$

Ekkor f-nek *létezik* határértéke a $(0,0)$ pontban és

$$\lim_{x_0\to 0}\Big(\lim_{x_1\to 0} f(x_0,x_1)\Big) = 0 = \lim_{x_1\to 0}\Big(\lim_{x_0\to 0} f(x_0,x_1)\Big).$$

5. Legyen (M,d) metrikus tér és $(F,\|\cdot\|)$ normált tér. Ha $f : M \rightarrowtail F$ olyan leképezés, hogy létezik M-ben d-szerint kompakt halmazoknak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $\mathrm{Dom}(f) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (vagyis a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz σ-kompakt) és minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = 0$, akkor az $\{x \in \mathrm{Dom}(f) | f(x) \neq 0\}$ halmaz megszámlálható.

7. fejezet

Folytonos függvények és egyenletesen folytonos függvények

7.1. A folytonosság értelmezése és alaptulajdonságai

7.1.1. Definíció. *Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, valamint $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Azt mondjuk, hogy f* **folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban** *(a d és d' metrikák szerint), ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, és az $f(\mathfrak{a})$ minden d' szerinti V' környezetéhez létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan d szerinti V környezete, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V'$ teljesül, vagyis fennáll a*

$$(\forall\ V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a})))(\exists\ V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}))\ \ (\ f\langle V\rangle \subseteq V'\ )$$

kijelentés. Azt mondjuk, hogy f-nek **szakadása van** *az $\mathfrak{a}$ pontban, ha f nem folytonos $\mathfrak{a}$-ban. Azt mondjuk, hogy az $f : M \rightarrowtail M'$ függvény* **folytonos**, *ha f a $\mathrm{Dom}(f)$ minden pontjában folytonos.*

A környezetek definíciója alapján az f függvény folytonossága az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban ekvivalens a

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists\delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f))\ \ (d(x, \mathfrak{a}) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(\mathfrak{a})) < \varepsilon)$$

állítással. Ez azt mutatja, hogy egy $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor folytonos az $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontban a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi metrika szerint, ha folytonos a III. fejezet 1. pontjában adott definíció szerint. Az értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy metrikus terek között ható függvény a definíciós tartományának minden *izolált* pontjában folytonos; speciálisan, minden olyan függvény folytonos, amelynek a definíciós tartománya *véges.*

7.1.2. Állítás. (A folytonosság lokalitása) *Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f, g : M \rightarrowtail M'$ függvények, $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$, és tegyük fel, hogy létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan W környezete, amelyre $W \cap \mathrm{Dom}(f) = W \cap \mathrm{Dom}(g)$, és $f = g$ ezen a halmazon. Ekkor f pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha g folytonos $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$. Legyen $U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan, hogy $f\langle U\rangle \subseteq V'$. Ekkor $V := U \cap W \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és a definíciók alapján

$$g\langle V\rangle = f\langle V\rangle \subseteq f\langle U\rangle \subseteq V',$$

ami azt jelenti, hogy g folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

A pontbeli folytonosság természetes szükséges feltételét fogalmazza meg a következő állítás.

7.1.3. Állítás. *Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. Ha f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezete, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq M'$ korlátos halmaz a d' metrika szerint.*

Bizonyítás. Az $f(\mathfrak{a}) \in M'$ pontnak *létezik* olyan környezete a d' metrika szerint, amely korlátos a d' metrika szerint; például bármely $f(\mathfrak{a})$ középpontú, d' szerinti nyílt gömb ilyen környezet. Ha $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ olyan környezete $f(\mathfrak{a})$-nak, amely korlátos a d' metrika szerint, akkor az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli folytonossága miatt vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, hogy $f\langle V\rangle \subseteq V'$, így az $f\langle V\rangle$ halmaz korlátos a d' metrika szerint. ■

7.1.4. Definíció. *Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek. Azt mondjuk, hogy az $f : M \rightarrowtail M'$ függvény* **lokálisan korlátos** *a d és d' metrikák szerint, ha minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontnak létezik olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezete, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq M'$ korlátos halmaz a d' metrika szerint.*

Tehát a 7.1.3. állítás szerint a metrikus terek között ható folytonos függvények lokálisan korlátosak. Nyilvánvaló, hogy a metrikus terek között ható korlátos függvények lokálisan is korlátosak, de egyáltalán nem feltétlenül folytonosak, vagyis a lokális korlátosság a folytonosságnak csak szükséges, de nem elégséges feltétele.

7.1.5. Állítás. *Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$.*

a) *Ha f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, akkor minden $E \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ halmazra, $\mathfrak{a} \in E$ esetén az $f|_E : E \to M'$ leszűkített függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{E\times E}$ és d' metrikák szerint.*

b) *Az f függvény pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{\mathrm{Dom}(f)\times\mathrm{Dom}(f)}$ és d' metrikák szerint, ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint.*

c) *Ha $F \subseteq M'$ olyan halmaz, hogy $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$, akkor az f pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint, ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és $d'|_{F\times F}$ metrikák szerint.*

Bizonyítás. a) Ha $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$, akkor van olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V'$, hiszen f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint. Ekkor $E \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ és $\mathfrak{a} \in E$ esetén $V \cap E$ az $\mathfrak{a}$-nak környezete $d|_{E\times E}$ szerint, és $(f|_E)\langle V\rangle \subseteq f\langle V\rangle \subseteq V'$, így $(f|_E)(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a})$ miatt $f|_E$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{E\times E}$ és d' metrikák szerint.

b) Ha f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, akkor az a) alapján az f függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{\mathrm{Dom}(f)\times\mathrm{Dom}(f)}$ és d' metrikák szerint, hiszen $f = f|_{\mathrm{Dom}(f)}$. Megfordítva, ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{\mathrm{Dom}(f)\times\mathrm{Dom}(f)}$ és d' metrikák szerint, akkor $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ esetén vehetünk olyan $U \in \mathscr{T}_{d|_{\mathrm{Dom}(f)\times\mathrm{Dom}(f)}}(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle U\rangle \subseteq V'$. Ekkor van olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $U = V \cap \mathrm{Dom}(f)$, így $f\langle V\rangle = f\langle V \cap \mathrm{Dom}(f)\rangle = f\langle U\rangle \subseteq V'$, vagyis f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint.

c) Legyen $F \subseteq M'$ olyan halmaz, hogy $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$. Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint, továbbá $V' \in \mathscr{T}_{d'|_{F\times F}}(f(\mathfrak{a}))$, akkor van olyan $U' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$, hogy $V' = U' \cap F$; ekkor létezik olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $f\langle V\rangle \subseteq U'$, következésképpen $f\langle V\rangle \subseteq U' \cap F = V'$ is teljesül, vagyis f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és $d'|_{F\times F}$ metrikák szerint. Megfordítva, ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és $d'|_{F\times F}$ metrikák szerint, és $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$, akkor $V' \cap F \in \mathscr{T}_{d'|_{F\times F}}(f(\mathfrak{a}))$, így létezik olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V' \cap F \subseteq V'$, vagyis f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint. ■

Az előző állítás b) és c) pontja szerint a folytonosság szempontjából az általánosságnak semmilyen korlátozását nem jelentené az, ha metrikus terek között csak olyan függvények folytonosságát vizsgálnánk, amelyek definíciós tartománya *egyenlő* az indulási metrikus tér alaphalmazával, és az értékkészlete *egyenlő* az érkezési metrikus tér alaphalmazával (vagyis szürjektív). Azonban ez több szempontból célszerűtlen, például a pontbeli folytonosság és a határérték létezésének kapcsolatát illetően.

Vigyázzunk arra, hogy ha (M,d) és (M',d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, Z
$\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, és $E \subseteq M$ olyan halmaz, amelyre $E \neq \mathrm{Dom}(f)$ és $\mathfrak{a} \in E$, akkor abból, hogy az $f|_E : E \to M'$ leszűkített függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{E\times E}$ és d' metrikák szerint *nem következik*, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint. Például, ha $E := \{\mathfrak{a}\}$, akkor $f|_E$ folytonos a $d|_{E\times E}$ és d' metrikák szerint, akár folytonos f az $\mathfrak{a}$-ban, akár nem a d és d' metrikák szerint.

7.2. A folytonosság és a határérték kapcsolata

7.2.1. Állítás. *Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek. Az f függvény pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim_{\mathfrak{a}} f = f(\mathfrak{a})$.*

Bizonyítás. Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor minden $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ esetén van olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V'$; ekkor $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$ még inkább teljesül, tehát f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim_{\mathfrak{a}} f = f(\mathfrak{a})$. Megfordítva; ha $f(\mathfrak{a})$ az f függvénynek határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ esetén van olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$; ekkor $f\langle V\rangle = \{f(\mathfrak{a})\} \cup f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$, következésképpen f folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

7.2.2. Állítás. *Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, és tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Ha $g : M \rightarrowtail M'$ az a függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(g) := \mathrm{Dom}(f) \cup \{\mathfrak{a}\}$ és minden $x \in \mathrm{Dom}(g)$ esetén*

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{, ha } x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}, \\ \lim_{\mathfrak{a}} f & \text{, ha } x = \mathfrak{a}, \end{cases}$$

akkor g folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

Bizonyítás. Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(g(\mathfrak{a}))$ tetszőleges, és $g(\mathfrak{a}) := \lim_{\mathfrak{a}} f$ alapján vegyünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. Ekkor a g értelmezése alapján

$$g\langle V\rangle = \{g(\mathfrak{a})\} \cup g\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle := \{\lim_{\mathfrak{a}} f\} \cup f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V',$$

tehát g folytonos a $\mathfrak{a}$ pontban. ■

7.3. Átviteli elv folytonosságra

7.3.1. Állítás. (Átviteli elv folytonosságra) *Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. Az f függvény pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha minden $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó s sorozatra, $\lim(\mathrm{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $f \circ \mathrm{s}$ sorozat konvergens és $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \mathrm{s})$ teljesül.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\mathbf{s}$ tetszőleges olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$. Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ tetszőleges. Ekkor vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V'$. A V-hez legyen $N{\in}\mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n{>}N$ természetes számra $\mathbf{s}(n) \in V$. Ekkor minden $n{>}N$ természetes számra $\mathbf{s}(n){\in}V \cap \mathrm{Dom}(f)$, ezért $f(\mathbf{s}(n)){\in}f\langle V\rangle \subseteq V'$. Ez azt jelenti, hogy $f{\circ}\mathbf{s}$ konvergens sorozat és $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \mathbf{s})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f *nem folytonos* $\mathfrak{a}$-ban. Ekkor

$$(\exists\, V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a})))(\forall\, V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})) : f\langle V\rangle \setminus V' \neq \emptyset.$$

Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ olyan, hogy minden $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ esetén $f\langle V\rangle \setminus V' \neq \emptyset$, vagyis

$$V \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle \neq \emptyset.$$

Legyen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathfrak{a}$ pont környezeteinek olyan sorozata, amely tartalmazás tekintetében monoton fogyó, és rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy az $\mathfrak{a}$ minden V környezetéhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $V_n \subseteq V$. Például, ha $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó monoton fogyó zérussorozat, akkor a $(\mathrm{B}_{\delta_n}(\mathfrak{a}; d))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat megfelelő. Ekkor a V' definíciója szerint a

$$\left(V_n \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

halmazsorozat minden tagja nem üres halmaz, így a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(V_n \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle\right) \neq \emptyset.$$

Legyen $\mathbf{s}$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}(n) \in V_n$ és $f(\mathbf{s}(n)) \notin V'$. Ebből következik, hogy $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, ugyanakkor $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \mathbf{s})$ lehetetlen, mert $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(\mathbf{s}(n)) \notin V'$. Ezért vagy $f \circ \mathbf{s}$ nem konvergens, vagy konvergens, de nem $f(\mathfrak{a})$ a határértéke. ■

7.4. Az egyenlőségek folytatásának elve

7.4.1. Tétel. (Az egyenlőségek folytatásának elve) *Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, és $f, g : M \to M'$ folytonos függvények. Ha $E \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $x \in E$ esetén $f(x) = g(x)$, akkor minden $\overline{E} \ni x$-re $f(x) = g(x)$ teljesül.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az $\{x \in M | f(x) = g(x)\}$ halmaz *zárt*. Ebből már következik az állítás, hiszen a feltevés szerint $E \subseteq \{x \in M | f(x) = g(x)\}$, tehát ha $\{x \in M | f(x) = g(x)\}$ zárt, akkor $\overline{E} \subseteq \{x \in M | f(x) = g(x)\}$ is teljesül.

Legyen $\mathfrak{a} \in M \setminus \{x \in M | f(x) = g(x)\}$, vagyis $f(\mathfrak{a}) \neq g(\mathfrak{a})$. Vegyünk olyan $V'_f \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ és $V'_g \in \mathscr{T}_{d'}(g(\mathfrak{a}))$ környezeteket, amelyekre $V'_f \cap V'_g = \emptyset$. Az f és g függvény $\mathfrak{a}$-beli folytonossága miatt vehetünk olyan $V_f \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $V_g \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezeteket, amelyekre $f\langle V_f\rangle \subseteq V'_f$ és $g\langle V_g\rangle \subseteq V'_g$. Ekkor $V := V_f \cap V_g \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan környezet, amelyre $V \subseteq M \setminus \{x \in M | f(x) = g(x)\}$, tehát az $M \setminus \{x \in M | f(x) = g(x)\}$ halmaz nyílt. ■

Az egyenlőségek folytatásának elvét rendszerint olyan esetben alkalmazzuk, amikor két folytonos függvény egy *sűrű* halmazon megegyezik; ekkor az egyenlőségek folytatásának elve alapján a két függvény egyenlő.

7.5. Folytonos függvények kiterjesztése

7.5.1. Tétel. (Folytonos függvények folytonos kiterjesztése) *Legyenek* (M,d), (M',d') *metrikus terek, és* $f : M \rightarrowtail M'$ *függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan* $\overline{\mathrm{Dom}(f)} \to M'$ *folytonos függvény, amely az* f*-nek kiterjesztése, ha minden* $\mathrm{Dom}(f)$*-ben haladó,* d *szerint konvergens* $\mathbf{s}$ *sorozatra az* $f \circ \mathbf{s}$ *sorozat konvergens* d' *szerint. Továbbá, az* f*-nek legfeljebb egy folytonos kiterjesztése létezik* $\overline{\mathrm{Dom}(f)}$*-ra.*

Bizonyítás. Ha $g : \overline{\mathrm{Dom}(f)} \to M'$ az f függvénynek folytonos kiterjesztése, akkor a g-re vonatkozó átviteli elv szerint minden $\overline{\mathrm{Dom}(f)}$-ben haladó, d szerint konvergens $\mathbf{s}$ sorozatra a $g \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens d' szerint, hiszen $\lim(\mathbf{s}) \in \overline{\mathrm{Dom}(f)}$ és g folytonos a $\lim(\mathbf{s})$ pontban. Speciálisan, ha $\mathbf{s}$ tetszőleges, $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó, d szerint konvergens sorozat, akkor $g \circ \mathbf{s} = f \circ \mathbf{s}$ miatt az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens d' szerint.

Tegyük fel, hogy minden $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó, d szerint konvergens $\mathbf{s}$ sorozatra az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens d' szerint. Legyen $\mathfrak{a} \in \overline{\mathrm{Dom}(f)}$ rögzített pont. Ha $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozatok, amelyek d szerint konvergálnak $\mathfrak{a}$-hoz, akkor az

$$\mathbf{s} : \mathbb{N} \to M; \quad n \mapsto \begin{cases} \mathbf{s}_1(k) & ; \text{ha } n = 2k \\ \mathbf{s}_2(k) & ; \text{ha } n = 2k+1 \end{cases}$$

sorozat szintén $\mathrm{Dom}(f)$-ben halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál d szerint, ezért az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens a d' metrika szerint. Ugyanakkor $f \circ \mathbf{s}_1$ és $f \circ \mathbf{s}_2$ részsorozata $f \circ \mathbf{s}$-nek, ezért $\lim(f \circ \mathbf{s}_1) = \lim(f \circ \mathbf{s}_2)$. Ebből következik, hogy jól értelmezett az a $g : \overline{\mathrm{Dom}(f)} \to M'$ függvény, amely minden $\mathfrak{a} \in \overline{\mathrm{Dom}(f)}$ ponthoz a $\lim(f \circ \mathbf{s})$ határértéket rendeli, ahol $\mathbf{s}$ tetszőleges olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó, d szerint konvergens sorozat, amelyre $\mathfrak{a} = \lim(\mathbf{s})$. Nyilvánvaló, hogy g kiterjesztése f-nek, hiszen ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ és $\mathbf{s}$ jelöli azt az állandó sorozatot, amelynek értéke $\mathfrak{a}$, akkor $\mathfrak{a} = \lim(\mathbf{s})$, tehát $g(\mathfrak{a}) := \lim(f \circ \mathbf{s})$, ugyanakkor $f \circ \mathbf{s}$ az az állandó sorozat, amelynek értéke $f(\mathfrak{a})$, így $\lim(f \circ \mathbf{s}) = f(\mathfrak{a})$, így $g(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a})$.

Most megmutatjuk, hogy

$$(\forall \mathfrak{a} \in \overline{\mathrm{Dom}(f)})(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*) : \; f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')$$

teljesül. Tegyük fel, hogy nem így van, és legyen $\mathfrak{a} \in \overline{\mathrm{Dom}(f)}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy minden $\delta > 0$ valós számra $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d)\rangle \nsubseteq \mathrm{B}_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')$, vagyis

$$(\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d)) \setminus \overset{-1}{f}\langle \mathrm{B}_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')\rangle \neq \emptyset.$$

Rögzítsünk egy $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{B}_{\delta_n}(\mathfrak{a}; d)) \setminus \overset{-1}{f}\langle \mathrm{B}_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')\rangle \neq \emptyset,$$

ezért a kiválasztási axióma alapján vehetünk egy

$$\mathbf{s} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \left((\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{B}_{\delta_n}(\mathfrak{a}; d)) \setminus \overset{-1}{f}\langle \mathrm{B}_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')\rangle \right)$$

elemet. Ekkor $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál d szerint, mert minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d(\mathbf{s}(n), \mathfrak{a}) < \delta_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Ezért g definíciója alapján $\lim(f \circ \mathbf{s}) = g(\mathfrak{a})$, ami viszont lehetetlen, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{s}(n) \notin \overset{-1}{f}\langle \mathrm{B}_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')\rangle,$$

vagyis $d'(f(\mathbf{s}(n)), g(\mathfrak{a})) \geq \varepsilon$.

Ezután könnyen igazolhatjuk, hogy a g függvény folytonos. Ehhez legyen $\mathfrak{a} \in \overline{\mathrm{Dom}(f)}$ rögzített pont, és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Legyen $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ egy rögzített valós szám, és az előző bekezdés alapján vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon'}(g(\mathfrak{a}); d')$. Ha $\mathfrak{a}' \in \overline{\mathrm{Dom}(f)} \cap \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d)$ és $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}'$-höz konvergál, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $\mathbf{s}(n) \in \mathrm{B}_{\delta - d(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})}(\mathfrak{a}'; d)$; ekkor minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}(n) \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d)$, így $f(\mathbf{s}(n)) \in \mathrm{B}_{\varepsilon'}(g(\mathfrak{a}); d')$, ezért

$$g(\mathfrak{a}') := \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{s}(n)) \in \overline{\mathrm{B}_{\varepsilon'}(g(\mathfrak{a}); d')} \subseteq \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon'}(g(\mathfrak{a}); d') \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d').$$

Ez azt jelenti, hogy $g\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')$, tehát g folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Végül, ha $g' : \overline{\mathrm{Dom}(f)} \to M'$ szintén folytonos kiterjesztése f-nek, akkor minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén $g(x) = f(x) = g'(x)$, így az egyenlőségek folytatásának elve alapján minden $\overline{\mathrm{Dom}(f)} \ni x$-re $g(x) = g'(x)$, vagyis $g = g'$, tehát f-nek egyetlen folytonos kiterjesztése létezik. ∎

7.6. Összetett függvények folytonossága

7.6.1. Állítás. *Legyen (M, d) metrikus tér és $(F, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett. Legyenek $f, g : M \rightarrowtail F$ és $\lambda : M \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, valamint $\alpha \in \mathbb{K}$.*

a) *Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f+g)$, továbbá f és g folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f+g$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.*

b) *Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(\lambda.f)$-nek, továbbá λ és f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\lambda.f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.*

c) *Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor az $\|f(\cdot)\| : M \rightarrowtail \mathbb{R}$ és $\alpha.f : M \rightarrowtail F$ függvények folytonosak $\mathfrak{a}$-ban.*

d) *Ha λ folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor az $\overline{\lambda} : M \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény is folytonos $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. a) Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f+g)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint $f \circ \mathbf{s}$ és $g \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozatok, továbbá $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \mathbf{s})$ és $g(\mathfrak{a}) = \lim(g \circ \mathbf{s})$; így az $(f+g) \circ \mathbf{s} = (f \circ \mathbf{s}) + (g \circ \mathbf{s})$ sorozat is konvergens, és

$$\lim((f+g) \circ \mathbf{s}) = \lim(f \circ \mathbf{s}) + \lim(g \circ \mathbf{s}) = f(\mathfrak{a}) + g(\mathfrak{a}) = (f+g)(\mathfrak{a}).$$

Ezért az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $f+g$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

b) Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(\lambda.f)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint $\lambda \circ \mathbf{s}$ és $f \circ \mathbf{s}$ konvergens sorozatok, továbbá $\lambda(\mathfrak{a}) = \lim(\lambda \circ \mathbf{s})$ és $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \mathbf{s})$; így a $(\lambda.f) \circ \mathbf{s} = (\lambda \circ \mathbf{s}).(f \circ \mathbf{s})$ sorozat is konvergens, és

$$\lim((\lambda.f) \circ \mathbf{s}) = \lim(\lambda \circ \mathbf{s}).\lim(f \circ \mathbf{s}) = \lambda(\mathfrak{a}).f(\mathfrak{a}) = (\lambda.f)(\mathfrak{a}).$$

Ezért az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $\lambda.f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

c) Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint az $f \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens, és $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \mathbf{s})$; így az $\|f(\cdot)\| \circ \mathbf{s} = \|(f \circ \mathbf{s})(\cdot)\|$ és $(\alpha.f) \circ \mathbf{s} = \alpha.(f \circ \mathbf{s})$ sorozatok is konvergensek és

$$\lim(\|f(\cdot)\| \circ \mathbf{s}) = \|\lim(f \circ \mathbf{s})\| = \|(f(\mathfrak{a})\| = \|f(\cdot)\|(\mathfrak{a})$$
$$\lim((\alpha.f) \circ \mathbf{s}) = \alpha.\lim(f \circ \mathbf{s}) = \alpha.f(\mathfrak{a}) = (\alpha.f)(\mathfrak{a}).$$

Az átviteli elv alapján kapjuk, hogy a $\|f(\cdot)\|$ és $\alpha.f$ függvények folytonosak $\mathfrak{a}$-ban.

d) Ha $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(\lambda)$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\mathbf{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint az $\lambda \circ \mathbf{s}$ sorozat konvergens, és $\lambda(\mathfrak{a}) = \lim(\lambda \circ \mathbf{s})$, így az $\overline{\lambda} \circ \mathbf{s} = \overline{\lambda \circ \mathbf{s}}$ sorozat is konvergens, és

$$\lim(\overline{\lambda} \circ \mathbf{s}) = \overline{\lim(\lambda \circ \mathbf{s})} = \overline{\lambda(\mathfrak{a})} = \overline{\lambda}(\mathfrak{a}).$$

Az átviteli elv alapján kapjuk, hogy az $\overline{\lambda}$ függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

7.7. Függvények kompozíciójának folytonossága

7.7.1. Állítás. (Függvények kompozíciójának folytonossága) *Tegyük fel, hogy (M, d), (M', d'), valamint (M'', d'') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$, $g : M' \rightarrowtail M''$ függvények, és $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$. Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban és g folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban, akkor $g \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.*

Bizonyítás. Vegyünk tetszőleges $V'' \in \mathscr{T}_{d''}(g(f(\mathfrak{a}))$ környezetet. A g folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért vehetünk olyan $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ környezetet, amelyre $g\langle V' \rangle \subseteq V''$. Az f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ezért V'-höz vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V \rangle \subseteq V'$. Ekkor nyilvánvalóan teljesül az, hogy $(g \circ f)\langle V \rangle = g\langle f\langle V \rangle \rangle \subseteq g\langle V' \rangle \subseteq V''$, vagyis $g \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

7.8. A folytonosság topologikus jellemzése

7.8.1. Állítás. (A folytonosság topologikus jellemzése) *Tegyük fel, hogy (M, d), (M', d') metrikus terek és $f : M \to M'$ függvény. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Minden $\mathfrak{a} \in M$ pontra és $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ környezetre $\overset{-1}{f}\langle V' \rangle \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$.*

(ii) *Az f függvény folytonos a d és d' metrikák szerint.*

(iii) *Minden $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle \in \mathscr{T}_d$.*

(iv) *Minden $F' \subseteq M'$ halmazra, ha F' zárt a d' metrika szerint, akkor $\overset{-1}{f}\langle F' \rangle \subseteq M$ zárt a d metrika szerint.*

(v) *Minden $E \subseteq M$ halmazra $f\langle \overline{E} \rangle \subseteq \overline{f\langle E \rangle}$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $\mathfrak{a} \in M$ és $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$. Az (i) szerint $V := \overset{-1}{f}\langle V' \rangle \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, és nyilvánvaló, hogy $f\langle V \rangle \subseteq V'$, tehát f folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

(ii)⇒(iii) Legyen $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$ és $\mathfrak{a} \in \overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$. Ekkor $f(\mathfrak{a}) \in \Omega'$, tehát a környezetek értelmezése alapján $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$. Ezért (ii) miatt van olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $f\langle V \rangle \subseteq \Omega'$. Ekkor $V \subseteq \overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$, következésképpen $\mathfrak{a}$ belső pontja az $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$ halmaznak, vagyis $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$ nyílt halmaz.

(iii)⇒(iv) Legyen $F' \subseteq M'$ zárt halmaz. Ekkor $M' \setminus F' \in \mathscr{T}_{d'}$, tehát (iii) alapján $\overset{-1}{f}\langle M' \setminus F' \rangle \in \mathscr{T}_d$. Ugyanakkor $\overset{-1}{f}\langle M' \setminus F' \rangle = M \setminus \overset{-1}{f}\langle F' \rangle$, így $\overset{-1}{f}\langle F' \rangle \subseteq M$ zárt halmaz.

(iv)⇒(v) Legyen $E \subseteq M$. Az $\overline{f\langle E \rangle} \subseteq M'$ halmaz zárt, ezért a (iv) szerint $\overset{-1}{f}\langle \overline{f\langle E \rangle} \rangle \subseteq M$ zárt halmaz, és nyilvánvaló, hogy

$$E \subseteq \overset{-1}{f}\langle f\langle E \rangle \rangle \subseteq \overset{-1}{f}\langle \overline{f\langle E \rangle} \rangle.$$

Ebből következik, hogy $\overline{E} \subseteq \overset{-1}{f}\langle\overline{f\langle E\rangle}\rangle$, ezért

$$f\langle\overline{E}\rangle \subseteq f\langle\overset{-1}{f}\langle\overline{f\langle E\rangle}\rangle\rangle \subseteq \overline{f\langle E\rangle}.$$

(v)⇒(i) Legyen $\mathfrak{a} \in M$ és $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$; azt kell igazolni, hogy (v) teljesülése esetén $\overset{-1}{f}\langle V'\rangle \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, vagy ami ugyanaz: $\mathfrak{a} \in \operatorname{Int}(\overset{-1}{f}\langle V'\rangle)$. Ehhez felhasználjuk azt, hogy

$$\operatorname{Int}(\overset{-1}{f}\langle V'\rangle) = M \setminus \overline{(M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle)},$$

tehát az $\mathfrak{a} \in \operatorname{Int}(\overset{-1}{f}\langle V'\rangle)$ kijelentés ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{a} \notin \overline{M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle}$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\mathfrak{a} \in \overline{M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle}$. Az (v) alapján ekkor

$$f(\mathfrak{a}) \in f\langle\overline{M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle}\rangle \subseteq \overline{f\langle M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle\rangle}.$$

A V' halmaz $f(\mathfrak{a})$-nak környezete, ezért

$$V' \cap f\langle M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle\rangle \neq \emptyset.$$

Ugyanakkor halmazelméleti trivialitás az, hogy ez a metszet üres, hiszen ha y eleme neki, akkor van olyan $x \in M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle$, hogy $y = f(x) \notin V'$ és $y \in V'$, ami ellentmondás. ■

7.8.2. Következmény. *Legyenek (M, d), (M', d') metrikus terek és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Az f függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$ halmazhoz létezik olyan $\Omega \in \mathscr{T}_d$, amelyre $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle = \Omega \cap \operatorname{Dom}(f)$ teljesül.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy f pontosan akkor folytonos a d és d' metrikák szerint, ha f folytonos a $d|_{\operatorname{Dom}(f)\times\operatorname{Dom}(f)}$ és d' metrikák szerint. Az előző állítás szerint az utóbbi tulajdonság ekvivalens azzal, hogy minden $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle$ nyílt $\operatorname{Dom}(f)$-ben a $d|_{\operatorname{Dom}(f)\times\operatorname{Dom}(f)}$ metrika szerint. De az altér-metrika szerint nyílt halmazok jellemzése alapján a $\operatorname{Dom}(f)$-nek egy részhalmaza pontosan akkor nyílt a $d|_{\operatorname{Dom}(f)\times\operatorname{Dom}(f)}$ metrika szerint, ha az $\Omega \cap \operatorname{Dom}(f)$ alakú, ahol $\Omega \subseteq M$ d szerint nyílt halmaz. ■

7.9. Metrikus szorzattérbe ható függvények folytonossága

7.9.1. Állítás. (A projekciók folytonossága) *Ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, akkor minden $k \in I$ esetén a $\operatorname{pr}_k : M \to M_k$ projekció-függvény folytonos a d és d_k metrikák szerint.*

Bizonyítás. Legyen $k \in I$ és $\Omega \in \mathscr{T}_{d_k}$. Nyilvánvaló, hogy $\overset{-1}{\operatorname{pr}_k}\langle\Omega\rangle = \prod_{i\in I} \Omega_i$, ahol minden $i \in I$ esetén $\Omega_i := M_i$, ha $i \neq k$, és $\Omega_k := \Omega$. Ezért $\overset{-1}{\operatorname{pr}_k}\langle\Omega\rangle$ nyílt halmaz M-ben a d szorzatmetrika szerint, hiszen nyílt halmazok szorzata nyílt. A folytonosság topologikus jellemzése alapján ebből következik, hogy a $\operatorname{pr}_k : M \to M_k$ függvény folytonos a d és d_k metrikák szerint. ■

7.9.2. Állítás. *Legyen* (M,d) *metrikus tér,* (M',d') *az* $((M'_i,d'_i))_{i\in I}$ *véges metrikustér-rendszer szorzata, és* $f : M \rightarrowtail M'$ *függvény. Az* f *pontosan akkor folytonos az* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ *pontban a* d *és* d' *metrikák szerint, ha minden* $i \in I$ *esetén* $\mathrm{pr}_i \circ f$ *folytonos* $\mathfrak{a}$*-ban a* d *és* d'_i *metrikák szerint. Az* f *pontosan akkor folytonos a* d *és* d' *metrikák szerint, ha minden* $i \in I$ *esetén* $\mathrm{pr}_i \circ f$ *folytonos a* d *és* d'_i *metrikák szerint.*

Bizonyítás. A második állítás nyilvánvalóan következik az elsőből; legyen tehát $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ rögzített pont.

Ha $i \in I$, akkor az előző állítás alapján a $\mathrm{pr}_i : M' \to M'_i$ függvény folytonos az $f(\mathfrak{a})$ pontban a d' és d'_i metrikák szerint, tehát ha f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, a függvények kompozíciójának folytonossági tétele alapján a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d'_i metrikák szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d'_i metrikák szerint. Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$, és vegyünk olyan $(V'_i)_{i\in I}$ rendszert, amelyre minden $i \in I$ esetén $V'_i \in \mathscr{T}_{d'_i}(\mathrm{pr}_i(f(\mathfrak{a})))$ és $\prod_{i\in I} V'_i \subseteq V'$. Minden $i \in I$ esetén legyen $V_i \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan környezet, amelyre $(\mathrm{pr}_i \circ f)\langle V_i\rangle \subseteq V'_i$, továbbá $V := \bigcap_{i\in I} V_i$. Ekkor $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, és nyilvánvaló, hogy

$$f\langle V\rangle \subseteq \prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i\langle f\langle V_i\rangle\rangle = \prod_{i\in I} (\mathrm{pr}_i \circ f)\langle V_i\rangle \subseteq \prod_{i\in I} V'_i \subseteq V',$$

vagyis f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint. ■

7.10. Metrikus szorzattérben értelmezett függvény folytonossága

7.10.1. Állítás. *Legyen* (M,d) *az* $((M_i,d_i))_{i\in I}$ *véges metrikustér-rendszer szorzata,* (M',d') *metrikus tér, és* $f : M \rightarrowtail M'$ *függvény. Ha* f *folytonos az* $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \mathrm{Dom}(f)$ *pontban a* d *és* d' *metrikák szerint, akkor minden* $k \in I$ *esetén az* $f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : M_k \rightarrowtail M'$ *parciális függvény folytonos* $\mathfrak{a}_k$*-ban a* d_k *és* d' *metrikák szerint. Ha* f *folytonos a* d *és* d' *metrikák szerint, akkor minden* $k \in I$ *és* $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ *esetén az* $f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : M_k \rightarrowtail M'$ *parciális függvény folytonos a* d_k *és* d' *metrikák szerint.*

Bizonyítás. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy $k \in I$ és $\mathfrak{a} \in M$ esetén az $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : M_k \to M$ függvény *izometria* a d_k és d metrikák szerint, ezért folytonos és $\mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_k) = \mathfrak{a}$, így a folytonos függvények kompozíciójának folytonossága miatt $f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}} : M_k \rightarrowtail M'$ folytonos a d_k és d' metrikák szerint az $\mathfrak{a}_k$ pontban, ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban d és d' szerint. ■

Azonban vigyázzunk arra, hogy az előző állítás feltételei mellett lehetséges az, hogy $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ olyan pont, amelyre *minden* $k \in I$ esetén $f \circ \mathrm{in}_{k,\mathfrak{a}}$ folytonos $\mathfrak{a}_k$-ban a d_k és d' metrikák szerint, de f nem folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint.

7.11. Az egyenlőtlenségek folytatásának elve

7.11.1. Állítás. *Legyen* (M,d) *metrikus tér. Ha* $f,g : M \to \mathbb{R}$ *folytonos függvények, akkor az* $\{x \in M | f(x) < g(x)\}$ *halmaz nyílt és az* $\{x \in M | f(x) \leq g(x)\}$ *halmaz zárt a* d

metrika szerint. Ha $f, g : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és $E \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $x \in E$ esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor minden $x \in \overline{E}$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül (*az* **egyenlőtlenségek folytatásának elve**).

Bizonyítás. Legyenek $f, g : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és $h := g - f$; ekkor $h : M \to \mathbb{R}$ is folytonos függvény.

Az $\mathbb{R}_+^*$ halmaz nyílt $\mathbb{R}$-ben az euklideszi metrika szerint, és $\{x \in M | f(x) < g(x)\} = \overset{-1}{h}\langle \mathbb{R}_+^* \rangle$, tehát a folytonosság topologikus jellemzése alapján $\{x \in M | f(x) < g(x)\}$ nyílt a d metrika szerint.

Az $\mathbb{R}_+$ halmaz zárt $\mathbb{R}$-ben az euklideszi metrika szerint, és $\{x \in M | f(x) \leq g(x)\} = \overset{-1}{h}\langle \mathbb{R}_+ \rangle$, tehát a folytonosság topologikus jellemzése alapján $\{x \in M | f(x) \leq g(x)\}$ zárt a d metrika szerint.

Ha $E \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $x \in E$ esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor $E \subseteq \{x \in M | f(x) \leq g(x)\}$, tehát az $\{x \in M | f(x) \leq g(x)\}$ halmaz zártsága folytán $\overline{E} \subseteq \{x \in M | f(x) \leq g(x)\}$, vagyis minden $x \in \overline{E}$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül. ■

7.12. Homeomorfizmusok

Jelölés. Ha (M, d), (M', d') metrikus terek, akkor a d és d' metrikák szerint folytonos $M \to M'$ függvények halmazát $\mathscr{C}(M, d; M', d')$ jelöli; vagy ha nyilvánvaló, hogy mely metrikák szerinti folytonosságról van szó, akkor a rövidebb $\mathscr{C}(M; M')$ jelölést alkalmazzuk. Ha (M, d), (M', d') metrikus terek, akkor a d és d' metrikák szerint folytonos és korlátos $M \to M'$ függvények halmazát $\mathscr{C}^b(M, d; M', d')$ jelöli; vagy ha nyilvánvaló, hogy mely metrikák szerinti folytonosságról és korlátosságról van szó, akkor a rövidebb $\mathscr{C}^b(M; M')$ jelölést alkalmazzuk.

Megjegyezzük, hogy a $\mathscr{C}(M, d; M', d')$ függvényhalmaz a d és d' metrikáktól csak az általuk meghatározott topológián keresztül függ, tehát ez *topologikus objektum.* Ugyanakkor a $\mathscr{C}^b(M, d; M', d')$ függvényhalmaz d-től az általa meghatározott topológián keresztül függ, de a d' metrikát vele ekvivalens metrikára cserélve teljesen megváltozhat, hiszen ekkor az M' korlátos halmazai egészen mások lehetnek.

7.12.1. Definíció. *Az (M, d) és (M', d') metrikus terek közötti* **homeomorfizmusnak** *nevezünk minden olyan $f : M \to M'$ bijekciót, amely folytonos a d és d' metrikák szeint, és az f^{-1} inverzfüggvény is folytonos a d' és d metrikák szerint. Az (M, d) és (M', d') metrikus tereket* **homeomorfaknak** *nevezzük, ha létezik (M, d) és (M', d') között homeomorfizmus.*

Z Vigyázzunk arra, hogy metrikus terek közti folytonos bijekció nem szükségképpen homeomorfizmus, vagyis az inverze nem feltétlenül folytonos (**3**. gyakorlat). Világos, hogy a homeomorfizmusok topologikus objektumok, és a homeomorfia topologikus tulajdonság.

Metrikus terek homeomorfiájának eldöntése lehet egészen nehéz feladat; például az euklideszi metrikákkal ellátott $\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^n$ aritmetikai terek homeomorfiájának eldöntésére irányuló erőfeszítések a matematika új területének, az *algebrai topológiának* létrehozását eredményezték. Később (a komplex függvénytanban) bevezetünk egy homeomorfiánál gyengébb kapcsolatot metrikus terek között: a *homotópiát.*

7.13. Egyenletesen folytonos függvények

7.13.1. Definíció. *Legyenek* (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek, és* $f : M \rightarrowtail M'$ *függvény.*

a) *Azt mondjuk, hogy* f **egyenletesen folytonos** (*a* d *és* d' *metrikák szerint*), *ha*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall (x_1, x_2) \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f))$$
$$\Big(d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \Big).$$

b) *Azt mondjuk, hogy az* f *függvény* α**-rendű Hölder-függvény**, *ha* $\alpha \in]0, 1]$ *valós szám, és létezik olyan* $C \in \mathbb{R}_+^*$, *amelyre minden* $(x_1, x_2) \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f)$ *esetén*

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2)^\alpha.$$

c) *Az elsőrendű Hölder-függvényeket* **Lipschitz-függvényeknek** *nevezzük.*

d) *Azt mondjuk, hogy* f **kontrakció**, *ha létezik olyan* $C \in [0, 1[$ *valós szám, amelyre minden* $(x_1, x_2) \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f)$ *esetén fennáll a*

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2)$$

egyenlőtlenség.

Nyilvánvaló, hogy minden kontrakció Lipschitz-függvény, és minden Lipschitz-függvény Hölder-függvény.

7.13.2. Állítás. *Ha* (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek, akkor minden* $M \rightarrowtail M'$ *egyenletesen folytonos függvény folytonos, és minden* $M \rightarrowtail M'$ *Hölder-függvény egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f : M \rightarrowtail M'$ egyenletesen folytonos függvény, és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Ekkor van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre minden $(x_1, x_2) \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f)$ esetén, ha $d(x_1, x_2) < \delta$, akkor $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ teljesül. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); d'))$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy f a $\mathrm{Dom}(f)$ minden pontjában folytonos.

Tegyük fel, hogy $\alpha \in]0, 1]$ és $C > 0$ olyan valós szám, hogy az $f : M \rightarrowtail M'$ függvényre teljesül az, hogy minden $(x_1, x_2) \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f)$ esetén $d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2)^\alpha$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $C \cdot \delta^\alpha < \varepsilon$; ekkor minden $(x_1, x_2) \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f)$ esetén, ha $d(x_1, x_2) < \delta$, akkor $d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2)^\alpha < C \cdot \delta^\alpha < \varepsilon$, tehát f egyenletesen folytonos függvény. ■

Példák (egyenletesen folytonos függvényekre).

1) Ha (M, d) metrikus tér, akkor a $d : M \times M \to \mathbb{R}$ leképezés Lipschitz-függvény a d metrika önmagával vett d' szorzata és az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint, hiszen minden $x_1, x_2, x_1', x_2' \in M$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség kétszeres alkalmazásával kapjuk, hogy

$$|d(x_1, x_2) - d(x_1', x_2')| \leq d(x_1, x_1') + d(x_2, x_2') \leq$$
$$\leq 2 \cdot \max(d(x_1, x_1'), d(x_2, x_2')) = 2 \cdot d'((x_1, x_2), (x_1', x_2')).$$

Az itt álló első egyenlőtlenséget *négyszög-egyenlőtlenségnek* nevezzük.

2) Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor a $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ leképezés Lipschitz-függvény a $\|\cdot\|$

által generált E feletti metrika és az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint, hiszen minden $x_1, x_2 \in E$ vektorra

$$|\|x_1\| - \|x_2\|| \leq \|x_1 - x_2\|$$

teljesül.

3) Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor a $+ : E \times E \to E$ összeadás-függvény Lipschitz-függvény a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrika önmagával vett d' szorzata és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ szerint, hiszen minden $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in E$ esetén

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{\|\cdot\|}(x_1 + x_2, x'_1 + x'_2) &:= \|(x_1 + x_2) - (x'_1 + x'_2)\| = \|(x_1 - x'_1) + (x_2 - x'_2)\| \leq \\ &\leq \|x_1 - x'_1\| + \|x_2 - x'_2\| = \mathrm{d}_{\|\cdot\|}(x_1, x'_1) + \mathrm{d}_{\|\cdot\|}(x_2, x'_2) \leq \\ &\leq 2 \cdot \max(\mathrm{d}_{\|\cdot\|}(x_1, x'_1), \mathrm{d}_{\|\cdot\|}(x_2, x'_2)) = 2 \cdot d'((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) \end{aligned}$$

teljesül.

4) Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor $\alpha \in \mathbb{K}$ és $z \in E$ esetén az $E \to E;\ x \mapsto \alpha.x + z$ leképezés Lipschitz-függvény, és ha $\alpha \neq 0$, akkor ez homeomorfizmus a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrikák szerint. Valóban, ha $x_1, x_2 \in E$, akkor

$$\mathrm{d}_{\|\cdot\|}(\alpha.x_1 + z, \alpha.x_2 + z) := \|(\alpha.x_1 + z) - (\alpha.x_2 + z)\| = |\alpha|\|x_1 - x_2\| = |\alpha|\mathrm{d}_{\|\cdot\|}(x_1, x_2),$$

és ha $\alpha \neq 0$, akkor az $E \to E;\ x \mapsto \alpha.x + z$ leképezés inverze az $E \to E;\ y \mapsto \alpha^{-1}.y - \alpha^{-1}.z$ függvény.

5) Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a $\mathbb{K} \times E \to E;\ (\alpha, x) \mapsto \alpha.x$ leképezés *folytonos* a $\mathbb{K}$ feletti $\mathrm{d}_{|\cdot|}$ euklidészi metrika és az E feletti $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrika szorzata, valamint $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ szerint, ami azonnal látható abból, hogy $(\alpha, x), (\alpha_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$ esetén

$$\|\alpha.x - \alpha_0.x_0\| \leq |\alpha - \alpha_0|\|x - x_0\| + |\alpha - \alpha_0|\|x_0\| + |\alpha_0|\|x - x_0\|.$$

Azonban, ha E nem nulla dimenziós, akkor ez a leképezés *nem egyenletesen folytonos* az adott metrikák szerint (**5**. gyakorlat).

6) Normált algebra belső szorzása folytonos a szorzatnorma szerint, hiszen ha $(A, \|\cdot\|)$ normált algebra és $a, b, a_0, b_0 \in A$, akkor

$$\|ab - a_0b_0\| \leq \|a - a_0\|\|b - b_0\| + \|a - a_0\|\|b_0\| + \|a_0\|\|b - b_0\|.$$

7) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ leképezés olyan, hogy minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén, ha $x_1 \neq x_2$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$, azonban f *nem kontrakció* az euklidészi metrika szerint. Valóban, ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 > x_2$, akkor a Lagrange-középérték-tétel alapján van olyan $z \in]x_2, x_1[$, amelyre $f(x_1) - f(x_2) = (\mathrm{D}f)(z)(x_1 - x_2)$; ekkor $(\mathrm{D}f)(z) = z/\sqrt{1 + z^2} \in] - 1, 1[$ miatt $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$. Ugyanakkor minden $x \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x},$$

és természetesen

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} = 1,$$

ezért nem létezhet olyan $C \in [0, 1[$ szám, amelyre minden $x \in \mathbb{R}_+^*$ esetén fennáll az $|f(x) - f(0)| \leq C|x - 0|$ egyenlőtlenség, vagyis f nem kontrakció.

8) Az $1/\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ függvény folytonos, sőt homeomorfizmus az eukidészi altérmetrika szerint, azonban *nem egyenletesen folytonos*.

7.14. Metrikus terek normálissága

Most azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy metrikus téren létezik-e "elég sok" folytonos, valós értékű függvény?

7.14.1. Definíció. *Ha (M,d) metrikus tér és $E \subseteq M$ nem üres halmaz, akkor*

$$d(\cdot,E) : M \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \inf_{y\in E} d(x,y),$$

és $x \in M$ esetén a $d(x,E) \geq 0$ valós számot az x pont E **halmaztól mért távolságának** *nevezzük (a d metrika szerint).*

7.14.2. Lemma. *Legyen (M,d) metrikus tér és $E \subseteq M$ nem üres halmaz. A $d(\cdot,E) : M \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül az, hogy minden $x_1, x_2 \in M$ esetén*

$$|d(x_1,E) - d(x_2,E)| \leq d(x_1,x_2),$$

tehát $d(\cdot,E)$ Lipschitz-függvény az M feletti d metrika és az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint. Fennáll továbbá az

$$\overline{E} = \{x \in M | d(x,E) = 0\}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Ha $x_1, x_2 \in M$ és $y \in E$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d(x_1,E) \leq d(x_1,y) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,y),$$

tehát $d(x_1,E) - d(x_1,x_2) \leq d(x_2,y)$, így $d(x_1,E) - d(x_1,x_2) \leq d(x_2,E)$, vagyis $d(x_1,E) - d(x_2,E) \leq d(x_1,x_2)$. Ebből az x_1 és x_2 felcserélésével $d(x_2,E) - d(x_1,E) \leq d(x_2,x_1)$ adódik, tehát a d szimmetriája miatt $|d(x_1,E) - d(x_2,E)| \leq d(x_1,x_2)$.

Az nyilvánvaló, hogy $E \subseteq \{x \in M | d(x,E) = 0\}$, és a $d(\cdot,E)$ függvény folytonossága miatt a jobb oldalon zárt halmaz áll, így $\overline{E} \subseteq \{x \in M | d(x,E) = 0\}$. Legyen $x \in M \setminus \overline{E}$, és vegyünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $\mathrm{B}_r(x;d) \cap E = \emptyset$. Ha $y \in E$, akkor $y \notin \mathrm{B}_r(x;d)$, vagyis $d(x,y) \geq r$, így $d(x,E) \geq r > 0$. Ez azt jelenti, hogy $\{x \in M | d(x,E) = 0\} \subseteq \overline{E}$ is teljesül. ■

7.14.3. Állítás. *Metrikus térben minden zárt halmaz előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként, és minden nyílt halmaz előáll megszámlálható sok zárt halmaz uniójaként.*

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér, és $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n = 0$.

Ha $F \subseteq M$ nem üres zárt halmaz, akkor

$$F = \overline{F} = \{x \in M | d(x,F) = 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in M | d(x,F) < \varepsilon_n\},$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{x \in M | d(x,F) < \varepsilon_n\}$ nyílt halmaz.

Ha $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz, akkor $M \setminus \Omega$ zárt halmaz, tehát van olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\Omega_n \subseteq M$ nyílt halmaz és $M \setminus \Omega = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$; ekkor $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (M \setminus \Omega_n)$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $M \setminus \Omega_n$ zárt halmaz. ■

7.14.4. Tétel. (Metrikus terek normálissága) *Ha (M,d) metrikus tér és $F_1, F_2 \subseteq M$ olyan zárt halmazok, hogy $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, akkor léteznek olyan $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq M$ nyílt halmazok, amelyekre $F_1 \subseteq \Omega_1$, $F_2 \subseteq \Omega_2$ és $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.*

Bizonyítás. Természetesen feltehető, hogy sem F_1, sem F_2 nem üres, különben az állítás triviálisan igaz.

A $d(\cdot, F_1)+d(\cdot, F_2) : M \to \mathbb{R}$ függvény mindenütt nullánál nagyobb értéket vesz fel, mert ha az $x \in M$ pontban az értéke nulla volna, akkor $d(x, F_1) = 0 = d(x, F_2)$, és az F_1, F_2 halmazok zártsága miatt $x \in F_1 \cap F_2$ teljesülne. Továbbá, a $d(\cdot, F_1) + d(\cdot, F_2) : M \to \mathbb{R}$ függvény folytonos is, így az

$$f := \frac{d(\cdot, F_1)}{d(\cdot, F_1) + d(\cdot, F_2)} : M \to \mathbb{R}$$

függvény jól értelmezett és folytonos. Nyilvánvaló, hogy

$$F_1 = \{x \in M | d(x, F_1) = 0\} \subseteq \{x \in M | f(x) = 0\}, \quad F_2 \subseteq \{x \in M | f(x) = 1\}.$$

Ezért bármely $r \in]0, 1[$ valós számra az $\Omega_1 := \{x \in M | f(x) < r\}$ és $\Omega_2 := \{x \in M | f(x) > r\}$ halmazok olyan diszjunkt nyílt halmazok M-ben, amelyekre $F_1 \subseteq \Omega_1$ és $F_2 \subseteq \Omega_2$. ■

7.14.5. Tétel. (**Uriszon-tétel metrikus terekre**) *Legyen (M,d) metrikus tér, $F \subseteq M$ zárt halmaz, és $\Omega \subseteq M$ olyan nyílt halmaz, hogy $F \subseteq \Omega$. Ekkor létezik olyan $f : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre minden $x \in M$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$, $F \subseteq \{x \in M | f(x) = 1\}$, és $\overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega$.*

Bizonyítás. Természetesen feltehető, hogy sem $F \neq \emptyset$ és $\Omega \neq M$, különben az állítás triviálisan igaz. Az $F \subseteq \Omega$ hipotézis szerint az F és $M \setminus \Omega$ halmazok diszjunktak és zártak, ezért az előző állítás alapján vehetünk olyan $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq M$ nyílt halmazokat, amelyekre $F \subseteq \Omega_1$, $M \setminus \Omega \subseteq \Omega_2$ és $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Ekkor az F és $M \setminus \Omega_1$ zárt halmazok diszjunktak, ezért a $d(\cdot, F)+d(\cdot, M\setminus\Omega_1) : M \to \mathbb{R}$ függvény mindenütt nullánál nagyobb értéket vesz fel. Tehát az

$$f := \frac{d(\cdot, M \setminus \Omega_1)}{d(\cdot, F) + d(\cdot, M \setminus \Omega_1)} : M \to \mathbb{R}$$

függvény jól értelmezett és folytonos. Nyilvánvaló, hogy minden $x \in M$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$, $F = \{x \in M | d(x, F) = 0\} \subseteq \{x \in M | f(x) = 1\}$, valamint

$$\{x \in M | f(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in M | d(x, M \setminus \Omega_1)(x) \neq 0\} \subseteq \Omega_1 \subseteq M \setminus \Omega_2.$$

Az $M \setminus \Omega_2$ halmaz zárt, ezért $\overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}} \subseteq M \setminus \Omega_2$, ugyanakkor $M \setminus \Omega_2 \subseteq \Omega$, ezért $\overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega$. ■

7.14.6. Definíció. *Ha (M,d) metrikus tér és F vektortér, akkor az $f : M \to F$ függvény* **tartójának** *nevezzük az $\overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}}$ halmazt, és ezt* $\mathrm{supp}(f)$*-fel jelöljük.*

Tehát ha (M,d) metrikus tér, $F \subseteq M$ zárt halmaz, és $\Omega \subseteq M$ olyan nyílt halmaz, amelyre $F \subseteq \Omega$, akkor létezik olyan $f \in \mathscr{C}(M; \mathbb{R})$, hogy minden $x \in M$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$, $F \subseteq \{x \in M | f(x) = 1\}$, és $\mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega$. Egy ilyen f függvény a (rendszerint szakadásos) χ_F karakterisztikus függvénynek folytonos "közelítése", mégpedig annál "pontosabb" közelítés, minél "közelebb" esik az Ω nyílt halmaz az F zárt halmazhoz.

7.15. Konvex függvények folytonossága

7.15.1. Definíció. *Legyen E vektorér $\mathbb{K}$ felett. Egy $C \subseteq E$ halmazt* **konvexnek** *nevezünk, ha minden $x, y \in C$ és $\alpha \in [0,1]$ esetén $(1-\alpha).x + \alpha.y \in C$. Azt mondjuk, hogy az $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ leképezés* **konvex függvény**, *ha $\mathrm{Dom}(f) \subseteq E$ konvex halmaz, és minden $x, x' \in C$ és $\alpha \in [0,1]$ esetén $f((1-\alpha).x + \alpha.x') \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x')$.*

7.15.2. Állítás. *Legyen E valós vektortér, $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és tegyük fel, hogy $\mathrm{Dom}(f)$ konvex halmaz E-ben. Az f függvény pontosan akkor konvex, ha minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra és minden $(x_k)_{k\in n}$ $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó rendszerre és minden $(\alpha_k)_{k\in n}$ $[0,1]$-ben haladó rendszerre, ha $\sum\limits_{k\in n} \alpha_k = 1$, akkor*

$$f\Big(\sum_{k\in n} \alpha_k x_k\Big) \leq \sum_{k\in n} \alpha_k f(x_k).$$

Bizonyítás. Szó szerint követhető az $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényekre vonatkozó analóg állítás bizonyítása (**ANA** 2.3.2.). ■

7.15.3. Állítás. *Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f)$ konvex halmaz. Az f függvény pontosan akkor konvex, ha minden $x, x' \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén*

$$f\left(\frac{x+x'}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(x')}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen $x, x' \in \mathrm{Dom}(f)$ és

$$A := \{\alpha \in [0,1] \mid f((1-\alpha).x + \alpha.x') \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x')\};$$

azt kell igazolni, hogy $A = [0,1]$. Az f folytonosságából következik, hogy A zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben, és a hipotézis alapján $1/2 \in A$. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \leq 2^n$, akkor $k/2^n \in A$. Ebből következik, hogy

$$D := \left\{\frac{k}{2^n} \,\middle|\, (n \in \mathbb{N}^*) \wedge (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \leq 2^n)\right\} \subseteq A,$$

ugyanakkor D sűrű $[0,1]$-ben az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint, ezért az f folytonossága miatt $A = [0,1]$. ■

7.15.4. Állítás. *Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f)$ nem üres nyílt konvex halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonos, ha létezik olyan $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nem üres nyílt halmaz, amelyre $f\langle U\rangle \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz.*

Bizonyítás. A feltétel szükséges, mert folytonos függvény lokálisan korlátos (**1.** gyakorlat). Az elégségesség bizonyításához legyen $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan nem üres nyílt halmaz és $C \in \mathbb{R}$ olyan szám, hogy minden $x \in U$ esetén $f(x) \leq C$.

Először megmutatjuk, hogy f az U minden pontjában folytonos. Ehhez legyen $\mathfrak{a} \in U$ rögzített, és vegyünk olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d) \subseteq U$ (ahol d-vel jelöltük a $\|\cdot\|$ által generált E feletti metrikát). Ha $x \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor $\mathfrak{e} := (x-\mathfrak{a})/\|x-\mathfrak{a}\|$ olyan vektor, hogy a $t := \|x-\mathfrak{a}\|/r \in]0,1]$ valós számra $x = (1-t).\mathfrak{a} + t.(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e})$ teljesül, továbbá a $t' := \|x-\mathfrak{a}\|/(\|x-\mathfrak{a}\| + r) \in]0,1[$ valós számra $\mathfrak{a} = (1-t')x + t'.(\mathfrak{a} - r.\mathfrak{e})$

teljesül, ezért $\mathfrak{a} \pm r.\mathfrak{e} \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d)$, a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d)$ gömb konvexitása, valamint az f függvény konvexitása miatt felírhatjuk a következő egyenlőtlenségeket:

$$f(x) \leq (1-t)f(\mathfrak{a}) + tf(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}) \leq f(\mathfrak{a}) + \left(\frac{C - f(\mathfrak{a})}{r}\right)\|x - \mathfrak{a}\|,$$

továbbá

$$f(\mathfrak{a}) \leq (1-t')f(x) + t'f(\mathfrak{a} - r.\mathfrak{e}) \leq f(x) + \left(\frac{C - f(x)}{\|x - \mathfrak{a}\| + r}\right)\|x - \mathfrak{a}\|.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből átrendezéssel nyerjük, hogy minden $x \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; d) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ vektorra

$$-\left(\frac{C - f(\mathfrak{a})}{r}\right)\|x - \mathfrak{a}\| \leq f(x) - f(\mathfrak{a}) \leq \left(\frac{C - f(\mathfrak{a})}{r}\right)\|x - \mathfrak{a}\|,$$

vagyis

$$|f(x) - f(\mathfrak{a})| \leq \left(\frac{C - f(\mathfrak{a})}{r}\right)\|x - \mathfrak{a}\|.$$

Ebből nyilvánvalóan következik, hogy f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

Megmutatjuk, hogy minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ pontnak van olyan $U_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete, amelyre $f\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ebből az előzőek alapján következik, hogy f a $\mathrm{Dom}(f)$ minden pontjában folytonos.

Legyen tehát $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ és rögzítsünk egy $\mathfrak{c} \in U$ pontot. Az $\mathbb{R} \to E;\ t \mapsto \mathfrak{c} + t.(\mathfrak{a} - \mathfrak{c})$ függvény folytonos, és az 1-hez $\mathfrak{a}$-t rendeli, továbbá $\mathrm{Dom}(f)$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, ezért van olyan $\varrho > 1$ valós szám, hogy $\mathfrak{c} + \varrho(\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) \in \mathrm{Dom}(f)$. Legyen ϱ ilyen szám, és $x_\varrho := \mathfrak{c} + \varrho.(\mathfrak{a} - \mathfrak{c})$. A

$$g : E \to E; \quad x \mapsto \frac{1}{\varrho}.x_\varrho + \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right).x$$

függvény *homeomorfizmus* és $g(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}$, ezért $g\langle U\rangle$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak. Megmutatjuk, hogy f a $g\langle U\rangle$ halmazon felülről korlátos. Valóban, ha $y \in g\langle U\rangle$, akkor van olyan $x \in U$, hogy $y = g(x) := \varrho^{-1}.x_\varrho + (1 - \varrho^{-1}).x$; ekkor $\varrho > 1$, valamint $x_\varrho, x \in \mathrm{Dom}(f)$ és $\mathrm{Dom}(f)$ konvexitása miatt $y \in \mathrm{Dom}(f)$, ezért az f konvexitásából következik, hogy

$$f(y) \leq \frac{1}{\varrho}f(x_\varrho) + \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)f(x) \leq \frac{1}{\varrho}f(x_\varrho) + \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)C$$

teljesül, vagyis a $\varrho^{-1}f(x_\varrho) + (1 - \varrho^{-1})C$ szám felső korlátja f-nek a $g\langle U\rangle$ halmazon. ■

7.15.5. Állítás. *Ha* $(E, \|\cdot\|)$ *véges dimenziós normált tér és* $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ *olyan konvex függvény, hogy* $\mathrm{Dom}(f)$ *nyílt halmaz, akkor* f *folytonos.*

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f)$ nyílt halmaz az $\mathbb{R}^n$ feletti $\|\cdot\|_\infty$ norma, akkor f folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ és $|\cdot|$ normák szerint.

Természetesen feltehető, hogy $n > 0$ és f nem az üres függvény. Az előző állítás szerint elég azt megmutatni, hogy létezik olyan $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ nem üres nyílt halmaz, amelyen f felülről korlátos.

Legyen $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_k)_{k\in n} \in \mathrm{Dom}(f)$ rögzített pont, és $r > 0$ olyan valós szám, amelyre

$V := \prod_{k\in n}[\mathfrak{a}_k - r, \mathfrak{a}_k + r] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Legyen $U := \prod_{k\in n}\left]\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_k + \frac{r}{n}\right[$; ekkor U nem üres nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, és $U \subseteq V \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Megmutatjuk, hogy f felülről korlátos az U halmazon.

Jelölje $(\mathfrak{e}_k)_{k\in n}$ a kanonikus bázist $\mathbb{R}^n$-ben, és legyen $x \in U$ tetszőleges. Ekkor

$$x = \sum_{k\in n}\left(\frac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r}\right).(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}_k) + \left(1 - \sum_{k\in n}\left(\frac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r}\right)\right).\mathfrak{a},$$

továbbá minden $k \in n$ esetén $\mathfrak{a}_k < x_k < \mathfrak{a}_k + \frac{r}{n}$, tehát

$$0 < \frac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r} < \frac{1}{n} \leq 1,$$

következésképpen

$$0 < \sum_{k\in n}\left(\frac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r}\right) < n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Legyen $k \in n + 1$ esetén

$$\alpha_k := \begin{cases} \dfrac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r} & \text{, ha } k < n \\ 1 - \sum\limits_{k\in n}\left(\dfrac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r}\right) & \text{, ha } k = n. \end{cases}$$

Ekkor minden $k \in n+1$ esetén $\alpha_k \in [0, 1]$ és $\sum\limits_{k\in n+1} \alpha_k = 1$. A V definíciója szerint $k \in n$ esetén $\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}_k \in V \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, ezért az f konvexitása és a **6**. gyakorlat szerint

$$f(x) = f\left(\sum_{k\in n}\alpha_k.(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}_k) + \alpha_n.\mathfrak{a}\right) \leq \sum_{k\in n}\alpha_k f(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}_k) + \alpha_n f(\mathfrak{a}) \leq C,$$

ahol

$$C := \sum_{k\in n}|f(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}_k)| + |f(\mathfrak{a})|.$$

Tehát a C szám f-nek felső korlátja az U halmazon.

(II) Legyen $(E, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér és $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, hogy $\mathrm{Dom}(f)$ nyílt halmaz. Jelölje $E_{\mathbb{R}}$ az E alatt fekvő valós vektorteret (**ALG** 8.13.6.); ekkor $(E_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|)$ véges dimenziós valós normált tér. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy az $\mathbb{R}^n$ és $E_{\mathbb{R}}$ valós vektorterek lineárisan izomorfak, és rögzítsünk egy $u : \mathbb{R}^n \to E_{\mathbb{R}}$ lineáris bijekciót.

A $\|\cdot\| \circ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ leképezés norma $\mathbb{R}^n$ felett, tehát ez ekvivalens az $\mathbb{R}^n$ feletti $\|\cdot\|_\infty$ normával (5.7.2.), így vehetünk olyan $C, C' > 0$ valós számokat, hogy $\|\cdot\|_\infty \leq C\|\cdot\| \circ u$ és $\|\cdot\| \circ u \leq C'\|\cdot\|_\infty$, vagyis minden $x \in E$ esetén $\|u^{-1}(x)\|_\infty \leq C\|x\|$ és minden $y \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|u(y)\| \leq C'\|y\|_\infty$. Ekkor minden $x, x' \in E$ esetén $\|u^{-1}(x') - u^{-1}(x)\| = \|u^{-1}(x' - x)\|_\infty \leq C\|x' - x\|$, tehát $u^{-1} : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-függvény, ezért folytonos a $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák szerint. Hasonlóan, minden $y, y' \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|u(y') - u(y)\| = \|u(y' - y)\| \leq C'\|y' - y\|_\infty$, tehát $u : \mathbb{R}^n \to E_{\mathbb{R}}$ Lipschitz-függvény, ezért folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ és $\|\cdot\|$ normák szerint. Mivel $\mathrm{Dom}(f) \subseteq E_{\mathbb{R}}$ nyílt halmaz $\|\cdot\|$ szerint, így $\mathrm{Dom}(f \circ u) = \overset{-1}{u}\langle\mathrm{Dom}(f)\rangle$ nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben $\|\cdot\|_\infty$ szerint, továbbá u linearitása és $\mathrm{Dom}(f)$ konvexitása miatt konvex is $\mathbb{R}^n$-ben. Ezért (I) szerint az $f \circ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex függvény folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ és $|\cdot|$ normák szerint, ugyanakkor $u^{-1} : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^n$ folytonos a $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák szerint, következésképpen $f = (f \circ u) \circ u^{-1} : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ folytonos a $\|\cdot\|$ és és $|\cdot|$ normák szerint. ■

7.16. Gyakorlatok

1. Legyenek (M, d), (M', d') metrikus terek és $f : M \to M'$ függvény. Tegyük fel, hogy $(F_i)_{i \in I}$ az M zárt részhalmazainak olyan *lokálisan véges* rendszere (**MET** 2.7. **2**. gyakorlat), amelyre teljesül az, hogy minden $i \in I$ esetén az $f|_{F_i}$ leszűkített függvény folytonos a $d|_{F_i \times F_i}$ altérmetrika és a d' metrika szerint. Ha $M = \bigcup_{i \in I} F_i$, akkor f folytonos a d és d' metrikák szerint.

(*Útmutatás.* Minden $H \subseteq M'$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle H \rangle = \bigcup_{i \in I} (\overset{-1}{f|_{F_i}})\langle H \rangle$, és ha H zárt, akkor a folytonosság topologikus jellemzése miatt minden $i \in I$ esetén az $(\overset{-1}{f|_{F_i}})\langle H \rangle$ halmaz zárt F_i-ben a $d|_{F_i \times F_i}$ altérmetrika szerint, így zárt M-ben a d metrika szerint is, hiszen F_i zárt d szerint. Ezért elég azt észrevenni, hogy minden $H \subseteq M'$ halmazra az $((\overset{-1}{f|_{F_i}})\langle H \rangle)_{i \in I}$ halmazrendszer lokálisan véges, továbbá fel kell használni azt, hogy zárt halmazok lokálisan véges rendszerének az uniója zárt (2. pont, **2**. gyakorlat). Ezután a folytonosság topologikus jellemzése alapján kapjuk, hogy f folytonos.)

2. Legyen M halmaz, és d, d' olyan nem ekvivalens metrikák M felett, hogy $\mathscr{T}_{d'} \subseteq \mathscr{T}_d$ (például d a diszkrét metrika M felett, és d' olyan M feletti metrika, amelyre $\mathscr{T}_{d'} \neq \mathscr{P}(M)$). Ekkor az $\mathrm{id}_M : M \to M$ függvény bijekció, és folyonos a d és d' metrikák szerint, azonban nem folytonos a d' és d metrikák szerint, így *nem homeomorfizmus*.

3. Legyenek (M, d), (M', d') metrikus terek és $f : M \to M'$ függvény. Az f pontosan akkor egyenletesen folytonos a d és d' metrikák szerint, ha minden M-ben haladó $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra: $\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0$ esetén $\lim_{n \to \infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$ teljesül.

(*Útmutatás.* A feltétel nyilvánvalóan szükséges; az elégségesség indirekt könnyen bizonyítható.)

4. Ha $(E, \|\cdot\|)$ nem nulla dimenziós normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a $\mathbb{K} \times E \to E$; $(\alpha, x) \mapsto \alpha.x$ leképezés *nem egyenletesen* folytonos a $\mathrm{d}_{|\cdot|}$ és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrikák szorzata, és a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrika szerint.

(*Útmutatás.* Jelölje f a szóban forgó függvényt, valamint d' a $\mathrm{d}_{|\cdot|}$ és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrikák szorzatát. Legyen $(\alpha, x) \in \mathbb{K}^* \times (E \setminus \{0\})$ rögzített pont, és $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó zérussorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra értelmezzük az $X_n := (\varepsilon_n^{-1}\alpha, \varepsilon_n^{-1}.x)$ és $Y_n := ((\varepsilon_n^{-1} + \varepsilon_n)\alpha, (\varepsilon_n^{-1} + \varepsilon_n).x)$ pontokat. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$d'(X_n, Y_n) = \varepsilon_n \max(|\alpha|, \|x\|), \quad \mathrm{d}_{\|\cdot\|}(f(X_n), f(Y_n)) = (2 + \varepsilon_n^2)|\alpha|\|x\|,$$

amiből következik, hogy $\lim_{n \to \infty} d'(X_n, Y_n) = 0$, de $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}_{\|\cdot\|}(f(X_n), f(Y_n)) = 2|\alpha|\|x\| \neq 0$, így a **4**. gyakorlat szerint f nem egyenletesen folytonos a d' és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrikák szerint.)

5. Ha (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ nem üres kompakt halmaz, $F \subseteq M$ nem üres zárt halmaz, és $K \cap F = \emptyset$, akkor

$$\inf_{(x,y) \in K \times F} d(x, y) > 0.$$

Azonban létezik olyan (M, d) metrikus tér, és léteznek olyan $F_1, F_2 \subseteq M$ nem üres zárt halmazok, hogy $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, de

$$\inf_{(x,y)\in F_1\times F_2} d(x,y) = 0.$$

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy $\inf\limits_{(x,y)\in K\times F} d(x,y) = 0$. Ekkor kiválasztható olyan $K\times F$-ben haladó $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$, és a K kompaktsága, valamint a Bolzano-Weierstrass tétel alapján, alkalmas részsorozatra áttérve feltehető, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál egy $x \in K$ ponthoz. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(x,y_n) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n)$, ezért az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergál x-hez. Az F zártsága miatt $x \in F$, tehát $x \in K \cap F$.

Az euklidészi metrika szerint $F_1 := \{n \in \mathbb{N} | n > 2\}$ és $F_2 := \{n + n^{-1} | n \in \mathbb{N}^*\}$ nem üres diszjunkt zárt halmazok $\mathbb{R}$-ben, de $\inf\limits_{(x,y)\in F_1\times F_2} |x-y| = 0$.)

8. fejezet

Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

8.1. Kompakt halmaz folytonos függvény által létesített képe

8.1.1. Tétel. *Ha (M, d), (M', d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény, akkor minden $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ kompakt halmazra $f\langle K\rangle \subseteq M'$ kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $(\Omega'_i)_{i\in I}$ az M' nyílt részhalmazainak olyan rendszere, amelyre $f\langle K\rangle \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega'_i$. Ekkor $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle$, és a folytonosság topologikus jellemzésének következménye alapján minden $i \in I$ esetén az $\overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle$ halmazhoz létezik olyan $\Omega_i \subseteq M$ nyílt halmaz, amelyre $\Omega_i \cap \mathrm{Dom}(f) = \overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle$. Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ ilyen halmazrendszer; ekkor $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, tehát vehetünk olyan $J \subseteq I$ véges halmazt, amelyre $K \subseteq \bigcup_{i\in J} \Omega_i$. Világos, hogy

$$f\langle K\rangle \subseteq \bigcup_{i\in J} f\langle\Omega_i\rangle = \bigcup_{i\in J} f\langle\Omega_i \cap \mathrm{Dom}(f)\rangle = \bigcup_{i\in J} f\langle \overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle\rangle \subseteq \bigcup_{i\in J} \Omega'_i,$$

ezért $f\langle K\rangle$ kompakt halmaz. ■

Tehát ha (M, d), (M', d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény, akkor minden $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ *kompakt* halmazra $f\langle K\rangle \subseteq M'$ *korlátos* és *zárt* halmaz M'-ben, mert minden kompakt halmaz korlátos és zárt. Speciálisan, ha (M, d) kompakt metrikus tér és (M', d') metrikus tér, akkor $\mathscr{C}(M; M') = \mathscr{C}^b(M; M')$. Azonban korlátos (illetve zárt) halmaz folytonos függvény által létesített képe nem szükségképpen korlátos (illetve zárt).

8.1.2. Következmény. *Ha (M, d) kompakt metrikus tér, és (M', d') metrikus tér, akkor minden $M \to M'$ folytonos bijekció homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Ha $f : M \to M'$ folytonos bijekció, akkor a folytonosság topologikus jellemzése alapján az $f^{-1} : M' \to M$ inverzfüggvény folytonossága azzal ekvivalens, hogy minden $F \subseteq M$ zárt halmazra az $\overset{-1}{(f^{-1})}\langle F\rangle = f\langle F\rangle \subseteq M'$ halmaz zárt. Az (M, d)

metrikus tér kompaktsága miatt minden $F \subseteq M$ zárt halmaz kompakt, így az előző tétel szerint $f\langle F\rangle$ kompakt M'-ben, ezért zárt is. ■

8.1.3. Következmény. *Legyen* $(E, \|\cdot\|)$ *normált tér,* $\mathfrak{a} \in E$ *és* $r \in \mathbb{R}_+^*$. *A* $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$ *zárt gömb pontosan akkor kompakt halmaz, ha az* $\mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$ *gömbfelület kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Az állítás triviálisan igaz, ha $E = \{0\}$, ezért feltesszük, hogy $E \neq \{0\}$, tehát van olyan $e \in E$, hogy $\|e\| = 1$.

Mivel $\mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$ zárt részhalmaza a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}, \|\cdot\|)$ gömbnek, így 5.1.3. szerint $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}, \|\cdot\|)$ kompaktságából következik $\mathrm{S}_r(\mathfrak{a}, \|\cdot\|)$ kompaktsága.

Megfordítva, az

$$f : \mathbb{R} \times E \to E; \quad (t, x) \mapsto \mathfrak{a} + t.(x - \mathfrak{a})$$

függvény folytonos, és ha $\mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$ kompakt halmaz, akkor $[0, 1] \times \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$ kompakt halmaz az $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_{|\cdot|})$ és $(E, \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ metrikus terek szorzatában, így a 8.1.1. állítás szerint $f\langle[0, 1] \times \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)\rangle$ kompakt halmaz az $(E, \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ metrikus térben. Ugyanakkor világos, hogy $f\langle[0, 1] \times \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)\rangle = \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$, hiszen

– ha $(t, x) \in [0, 1] \times \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$, akkor

$$\|f(t, x) - \mathfrak{a}\| = \|\mathfrak{a} + t.(x - \mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\| = t\|x - \mathfrak{a}\| = tr \leq r,$$

tehát $f(t, x) \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$, így $f\langle[0, 1] \times \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)\rangle \subseteq \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$;

– ha $y \in \overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$ és $y \neq \mathfrak{a}$, akkor $\dfrac{\|y - \mathfrak{a}\|}{r} \in [0, 1]$ és $\mathfrak{a} + \left(\dfrac{r}{\|y - \mathfrak{a}\|}\right).(y - \mathfrak{a}) \in \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$, így

$$\begin{aligned} y &= \mathfrak{a} + \left(\frac{\|y - \mathfrak{a}\|}{r}\right) . \left(\mathfrak{a} + \left(\frac{r}{\|y - \mathfrak{a}\|}\right).(y - \mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\right) = \\ &= f\left(\frac{\|y - \mathfrak{a}\|}{r}, \mathfrak{a} + \left(\frac{r}{\|y - \mathfrak{a}\|}\right).(y - \mathfrak{a})\right), \end{aligned}$$

tehát $y \in f\langle[0, 1] \times \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)\rangle$, vagyis $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq f\langle[0, 1] \times \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)\rangle$, továbbá világos, hogy ha $e \in E$ olyan, hogy $\|e\| = 1$, akkor $(0, \mathfrak{a} + r.e) \in [0, 1] \times \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$ és $\mathfrak{a} = f(0, \mathfrak{a} + r.e)$, vagyis $\mathfrak{a} \in f\langle[0, 1] \times \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)\rangle$ is teljesül, azaz $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|) \subseteq f\langle[0, 1] \times \mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)\rangle$.

Ezért az $\mathrm{S}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$ gömbfelület kompaktságából következik a $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; \|\cdot\|)$ gömb kompaktsága. ■

8.2. Weierstrass-féle maximum-minimum elv

8.2.1. Tétel. (Weierstrass-féle maximum-minimum elv) *Ha* (M, d) *metrikus tér és* $f : M \rightarrowtail \mathbb{R}$ *folytonos függvény, akkor minden* $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ *nem üres kompakt halmazhoz léteznek olyan* $\mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_- \in K$ *pontok, amelyekre minden* $x \in K$ *esetén* $f(x) \leq f(\mathfrak{a}_+)$ *és* $f(x) \geq f(\mathfrak{a}_-)$ *(vagyis* $\mathfrak{a}_+$*-ban* **maximuma** *és* $\mathfrak{a}_-$*-ban* **minimuma** *van* f*-nek a* K *halmazon).*

Bizonyítás. Az $f\langle K\rangle \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem üres és kompakt, ezért zárt is $\mathbb{R}$-ben, így $\sup(f\langle K\rangle) \in \overline{f\langle K\rangle} = f\langle K\rangle$, és hasonlóan $\inf(f\langle K\rangle) \in \overline{f\langle K\rangle} = f\langle K\rangle$. Ez éppen olyan $\mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_- \in K$ pontok létezését jelenti, amelyekre minden $x \in K$ esetén $f(x) \leq \sup(f\langle K\rangle) = f(\mathfrak{a}_+)$ és $f(x) \geq \inf(f\langle K\rangle) = f(\mathfrak{a}_-)$. ■

8.2.2. Következmény. *Ha (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ nem üres kompakt halmaz, akkor minden $x \in M$ ponthoz létezik olyan $y \in K$, amelyre $d(x, y) = d(x, K)$ (vagyis y az x-hez legközelebbi pont K-ban).*

Bizonyítás. Ha $x \in M$, akkor a $d(x, \cdot) : M \to \mathbb{R}$ parciális függvény folytonos, tehát a Weierstrass-féle minimum-elv alapján létezik olyan $y \in K$, amelyre minden $y' \in K$ esetén $d(x, y) \leq d(x, y')$, így $d(x, y) = d(x, K)$. ■

8.2.3. Következmény. *Ha (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz, $U \subseteq M$ nyílt halmaz, és $K \subseteq U$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy*

$$\{x' \in M | (\exists x \in K) : \ d(x', x) \leq r\} = \bigcup_{x \in K} \overline{\mathrm{B}}_r(x; d) \subseteq U. \tag{$*$}$$

Bizonyítás. Ha $K = \emptyset$ vagy $U = M$, akkor az állítás triviálisan igaz, bármely $r > 0$ valós számra. Ezért feltehető, hogy $K \neq \emptyset$ és $U \neq M$. Ekkor $M \setminus U$ nem üres, és a $d(\cdot, M \setminus U) : M \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, valamint az $M \setminus U$ halmaz zártsága miatt $M \setminus U = \{x \in M | d(x, M \setminus U) = 0\}$ (7.14.2.). A Weierstrass-féle minimum-elv alapján vehetünk olyan $x_0 \in K$ pontot, amelyre minden $x \in K$ esetén $d(x, M \setminus U) \geq d(x_0, M \setminus U)$. Mivel $x_0 \in K \subseteq U$, így $M \setminus U = \{x \in M | d(x, M \setminus U) = 0\}$ miatt $R := d(x_0, M \setminus U) > 0$. Állítjuk, hogy ha $r \in]0, R[$ tetszőleges valós szám, akkor fennáll a $(*)$ összefüggés. Valóban, ha $x' \in \bigcup_{x \in K} \overline{\mathrm{B}}_r(x; d)$, akkor van olyan $x \in K$, hogy $d(x', x) \leq r$, ezért $x' \in U$, különben $x' \in M \setminus U$, így $d(x', x) = d(x, x') \geq d(x, M \setminus U) \geq d(x_0, M \setminus U) = R$, ami $d(x', x) \leq r < R$ miatt lehetetlen. ■

8.3. Kompakt halmazok véges dimenziós normált térben

8.3.1. Tétel. (Heine–Borel-tétel) *Véges dimenziós normált térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér $\mathbb{K}$ felett, és $n \in \mathbb{N}$ olyan szám (az E algebrai dimenziója), amelyhez létezik $u : \mathbb{K}^n \to E$ lineáris bijekció. Legyen K korlátos és zárt halmaz E-ben a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrika szerint, és $\|\cdot\|_u := \|\cdot\| \circ u$. Ekkor $\|\cdot\|_u$ norma $\mathbb{K}^n$ felett, és az u függvény izometria a $(\mathbb{K}^n, \mathrm{d}_{\|\cdot\|_u})$ és $(E, \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ metrikus terek között. Ezért $\overset{-1}{u}\langle K \rangle$ a $\mathbb{K}^n$-ben korlátos és zárt halmaz a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_u}$ metrika szerint. A $\mathbb{K}^n$ felett bármely két norma ekvivalens, ezért $\|\cdot\|_u$ és $\|\cdot\|_\infty$ is ekvivalensek. Ebből következik, hogy az $\overset{-1}{u}\langle K \rangle$ korlátos és zárt a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ metrika szerint is. Korábban igazoltuk, hogy $\mathbb{K}^n$-ben egy halmaz a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ metrika szerint pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Ezért $\overset{-1}{u}\langle K \rangle$ kompakt $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ szerint, így $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_u}$ szerint is kompakt. Az u leképezés izometria a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrikák szerint, ezért folytonos is, és a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_u}$ metrikák ekvivalensek, így u folytonos a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|_\infty}$ és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrikák szerint. Ezért a $K = u\langle \overset{-1}{u}\langle K \rangle \rangle$ halmaz kompakt E-ben $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ szerint. ■

8.4. Alkalmazás: Az algebra alaptétele

Most bebizonyítjuk az algebra alaptelét, tehát azt, hogy minden legalább elsőfokú komplex polinomnak létezik komplex gyöke. Ezt előkészítjük három állítással, amelyek közül az első valójában az algebra alaptételének egy speciális esete.

8.4.1. Lemma. *Minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $w \in \mathbb{C}$ számhoz van olyan $z \in \mathbb{C}$, amelyre $z^n = w$.*

Bizonyítás. A $w \in \mathbb{C}$ számoz léteznek olyan $r \in \mathbb{R}_+$ és $\theta \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre $w = r \cdot \mathrm{Exp}(\mathbf{i}\theta)$ (**ANA** 2.12.11. gyakorlat), ezért $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az Exp függvényre vonatkozó nevezetes egyenlőség alapján $z := \sqrt[n]{r} \cdot \mathrm{Exp}(\mathbf{i}\theta/n) \in \mathbb{C}$ olyan szám, amelyre $z^n = w$ teljesül. ■

A következő állításra rendszerint úgy hivatkozunk, mint *a polinomiális függvények átrendezésének tétele.*

8.4.2. Lemma. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{a}_k)_{0 \leq k \leq n}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszer, és $c \in \mathbb{K}$. Minden $c' \in \mathbb{K}$ ponthoz (egyértelműen) létezik olyan $\mathbb{K}$-ban haladó $(\mathbf{a}'_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer, amelyre*

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k (\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}'_k (\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c')^k$$

teljesül, és itt fennáll az $\mathbf{a}'_n = \mathbf{a}_n$ egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $c' \in \mathbb{K}$ rögzített. Ha $z \in \mathbb{K}$, akkor a $\mathbb{K}$ testre alkalmazva a binomiális tételt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k (z-c)^k = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k ((z-c') + (c'-c))^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathbf{a}_k (z-c')^j (c'-c)^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \mathbf{a}_k (c'-c)^{k-j} \right) (z-c')^j,$$

tehát ha minden $j \leq n$ természetes számra

$$\mathbf{a}'_j := \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \mathbf{a}_k (c'-c)^{k-j},$$

akkor minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k (z-c)^k = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}'_k (z-c')^j$$

teljesül, és az is látható, hogy $\mathbf{a}'_n = \mathbf{a}_n$. ■

8.4.3. Lemma. *Legyen $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbf{a}_k)_{0 \leq k \leq n}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszer, és $c \in \mathbb{K}$. Ha $\mathbf{a}_n \neq 0$, akkor az $f := \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k (\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ függvényre teljesül az, hogy minden $C > 0$ valós számhoz létezik olyan $r > 0$ valós szám, amelyre minden $z \in \mathbb{K}$ elemre, ha $|z| > r$, akkor $|f(z)| > C$.*

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy minden $z \in \mathbb{K} \setminus \{c\}$ pontra

$$f(z) = \mathbf{a}_n (z-c)^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_n} (z-c)^{k-n} \right),$$

amiből következik, hogy

$$|f(z)| = |\mathbf{a}_n||z-c|^n \left|1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_n}(z-c)^{k-n}\right| \geq$$

$$\geq |\mathbf{a}_n||z-c|^n \left(1 - \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_n}(z-c)^{k-n}\right|\right) \geq |\mathbf{a}_n||z-c|^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_n}\right| |z-c|^{k-n}\right),$$

ahol kihasználtuk azt, hogy minden $x \in \mathbb{K}$ esetén $|1+x| \geq 1 - |x|$, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség szerint $|1+x| + |x| = |-1-x| + |x| \geq |-1-x+x| = |-1| = 1$.
Ebből látható, hogy ha $z \in \mathbb{K}$ és $q \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $|z-c| > 1/q$, akkor

$$|f(z)| > |\mathbf{a}_n||z-c|^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_n}\right| q^{n-k}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{q \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_n}\right| q^{n-k} = 0,$$

ezért rögzíthetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy minden $q \in]0, \delta[$ valós számra

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_n}\right| q^{n-k} < \frac{1}{2}.$$

Ebből következik, hogy ha $q \in]0, \delta[$ és $|z-c| > 1/q$, akkor $|f(z)| > (1/2)|\mathbf{a}_n||z-c|^n$. Legyen most $C > 0$ tetszőleges valós szám, és rögzítsünk egy $q \in]0, \min(1/C, \delta)[$ valós számot, valamint értelmezzük az

$$R := \max\left(\frac{1}{q}, \sqrt[n]{\frac{2C}{|\mathbf{a}_n|}}\right)$$

számot. Ekkor $|z-c| > R$ esetén az előzőek alapján $|f(z)| > C$. Ezért ha r olyan valós szám, amelyre $r > |c| + R$, akkor minden $z \in \mathbb{K}$ pontra, $|z| > r$ esetén $|z-c| > R$, így $|f(z)| > C$. ■

8.4.4. Állítás. *Legyen $(E_1, \|\cdot\|_1)$ véges dimenziós normált tér, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, és $f : E_1 \to E_2$ olyan függvény, amelyre teljesülnek a következők:*

a) *f folytonos;*

b) *létezik olyan $C > \inf_{x \in E_1} \|f(x)\|_2$ valós szám és olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $x \in E_1$ vektorra, ha $\|x\|_1 > r$, akkor $\|f(x)\|_2 > C$;*

c) *az $\mathrm{Im}(\|f(\cdot)\|) \setminus \{0\}$ halmaznak nincs legkisebb eleme, vagyis*

$$(\forall \mathfrak{a} \in E_1)(\ (\|f(\mathfrak{a})\|_2 > 0) \Rightarrow ((\exists x \in E_1) : \|f(x)\|_2 < \|f(\mathfrak{a})\|_2)\ ).$$

Ekkor létezik olyan $\mathfrak{a} \in E_1$, hogy $f(\mathfrak{a}) = 0$ (vagyis f-nek **létezik gyöke***).*

Bizonyítás. Legyen $\alpha := \inf_{x \in E_1} \|f(x)\|_2$, és a b) alapján vegyünk olyan $C > \alpha$, valamint $r > 0$ valós számot, amelyekre minden $x \in E_1 \setminus \overline{\mathrm{B}}_r(0, \mathrm{d}_{\|\cdot\|_1})$ esetén $\|f(x)\|_2 > C$. Legyen

$\alpha_r := \inf_{x \in \overline{\mathrm{B}}_r(0, \mathrm{d}_{\|\cdot\|_1})} \|f(x)\|_2$; megmutatjuk, hogy $\alpha_r = \alpha$. Valóban, $\alpha < C$ és az α definíciója szerint van olyan $x \in E_1$, hogy $\|f(x)\|_2 < C$; ekkor szükségképpen $\|x\|_1 \leq r$, tehát $\alpha_r \leq \|f(x)\|_2 < C$. Ha most $x \in E_1$ tetszőleges, akkor $\|x\|_1 \leq r$ esetén $\alpha_r \leq \|f(x)\|_2$, míg $\|x\|_1 > r$ esetén $\|f(x)\|_2 > C > \alpha_r$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in E_1$ esetén $\alpha_r \leq \|f(x)\|_2$, tehát $\alpha_r \leq \alpha$, így $\alpha_r = \alpha$.

Az E_1 véges dimenziós, ezért $\overline{\mathrm{B}}_r(0, \mathrm{d}_{\|\cdot\|_1})$ kompakt halmaz, így az a) és a Weierstrass-féle minimum-elv szerint létezik olyan $\mathfrak{a} \in \overline{\mathrm{B}}_r(0, \mathrm{d}_{\|\cdot\|_1})$ pont, amelyre $\|f(\mathfrak{a})\|_2 = \inf_{x \in \overline{\mathrm{B}}_r(0, \mathrm{d}_{\|\cdot\|_1})} \|f(x)\|_2 = \alpha$. Ekkor az $\mathfrak{a}$ pontban $\|f(\cdot)\|_2$-nek minimuma van, ezért a c) miatt $f(\mathfrak{a}) = 0$. ■

8.4.5. Tétel. (Az algebra alaptétele) *Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak létezik komplex gyöke.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz a 8.4.4. állítást fogjuk alkalmazni abban a speciális esetben, amikor $(E_1, \|\cdot\|_1) := (E_2, \|\cdot\|_2) := (\mathbb{C}, |\cdot|)$ és $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinomiális függvény, tehát léteznek olyan $n \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{C}$ és $(\mathbf{a}_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer $\mathbb{C}$-ben, hogy $\mathbf{a}_n \neq 0$, és

$$f = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - c)^k.$$

Elegendő a 8.4.4. állításban megfogalmazott a), b) és c) feltételek teljesülését ellenőrizni f-re. Az f függvény nyilvánvalóan folytonos, tehát elég b)-vel és c)-vel foglalkozni.

A 8.4.3. lemma szerint még egy b)-nél erősebb állítás is igaz.

Most a következő, c)-nél erősebb kijelentést igazoljuk: az $|f(\cdot)| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\{z \in \mathbb{C} | f(z) \neq 0\}$ halmaz egyetlen pontjában sincs lokális minimuma; vagyis minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ pontra, ha $f(\mathfrak{a}) \neq 0$, akkor a $\mathfrak{a}$-nak minden környezetében van olyan z pont, amelyre $|f(z)| < |f(\mathfrak{a})|$. Ehhez legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ olyan pont, amelyre $f(\mathfrak{a}) \neq 0$, és $r > 0$ tetszőleges valós szám; belátjuk, hogy létezik $z \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$, amelyre $|f(z)| < |f(\mathfrak{a})|$.

A 8.4.2. lemma szerint $\mathfrak{a}$-hoz egyértelműen létezik olyan $(\mathbf{a}'_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer $\mathbb{C}$-ben, hogy

$$f = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}'_k (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k,$$

és $\mathbf{a}'_n = \mathbf{a}_n \neq 0$. Ugyanakkor $n > 0$, hiszen az f polinomiális függvény legalább elsőfokú, így van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $0 < k \leq n$ és $\mathbf{a}'_k \neq 0$. Legyen

$$m := \min\{k \in \mathbb{N} | (0 < k \leq n) \wedge (\mathbf{a}'_k \neq 0)\}.$$

Ekkor $\mathbf{a}'_0 = f(\mathfrak{a}) \neq 0$ és minden $z \in \mathbb{C}$ pontra

$$f(z) = \mathbf{a}'_0 + \sum_{k=m}^{n} \mathbf{a}'_k (z - \mathfrak{a})^k = \mathbf{a}'_0 \left(1 + \frac{\mathbf{a}'_m}{\mathbf{a}'_0} (z - \mathfrak{a})^m \sum_{k=m}^{n} \frac{\mathbf{a}'_k}{\mathbf{a}'_m} (z - \mathfrak{a})^{k-m} \right) =$$
$$= f(\mathfrak{a}) \left(1 + \frac{\mathbf{a}'_m}{\mathbf{a}'_0} (z - \mathfrak{a})^m (1 + g(z)) \right),$$

ahol definíció szerint:

$$g(z) := \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\mathbf{a}'_k}{\mathbf{a}'_m} (z - \mathfrak{a})^{k-m},$$

ha $m < n$, míg $m = n$ esetén $g(z) := 0$. Ebből látható, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ pontra

$$|f(z)| \leq |f(\mathfrak{a})| \left(\left| 1 + \frac{\mathbf{a}'_m}{\mathbf{a}'_0}(z-\mathfrak{a})^m \right| + \left| \frac{\mathbf{a}'_m}{\mathbf{a}'_0}(z-\mathfrak{a})^m \right| |g(z)| \right).$$

Világos, hogy $\lim\limits_{z \to \mathfrak{a}} g(z) = g(\mathfrak{a}) = 0$, ezért van olyan $r_g > 0$ valós szám, amelyre minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $|z - \mathfrak{a}| < r_g$, akkor $|g(z)| < 1/2$. Most az $r > 0$ valós számhoz válasszunk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre

$$\delta < \min \left(1, r_g \sqrt[m]{\frac{|\mathbf{a}'_m|}{|\mathbf{a}'_0|}}, r \sqrt[m]{\frac{|\mathbf{a}'_m|}{|\mathbf{a}'_0|}} \right).$$

A 8.4.1. lemma alkalmazásával vegyünk olyan $z_\delta \in \mathbb{C}$ számot, amelyre teljesül a

$$z_\delta^m = -\delta^m \frac{\mathbf{a}'_0}{\mathbf{a}'_m}$$

egyenlőség. Ekkor a $z := \mathfrak{a} + z_\delta$ számra

$$|z - \mathfrak{a}| = |z_\delta| = \delta \sqrt[m]{\frac{|\mathbf{a}'_0|}{|\mathbf{a}'_m|}} < \min(r, r_g),$$

tehát $z \in \mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ és $|g(z)| < 1/2$; továbbá

$$\frac{\mathbf{a}'_m}{\mathbf{a}'_0}(z-\mathfrak{a})^m = \frac{\mathbf{a}'_m}{\mathbf{a}'_0} z_\delta^m = -\delta^m,$$

így $\delta < 1$ miatt

$$\left| 1 + \frac{\mathbf{a}'_m}{\mathbf{a}'_0}(z-\mathfrak{a})^m \right| = 1 - \delta^m$$

is teljesül. Ebből látható, hogy

$$|f(z)| < |f(\mathfrak{a})| \left(1 - \delta^m + \delta^m \frac{1}{2} \right) = |f(\mathfrak{a})| \left(1 - \frac{1}{2}\delta^m \right) < |f(\mathfrak{a})|,$$

tehát az $|f(\cdot)|$ függvénynek $\mathfrak{a}$-ban nincs lokális minimuma. Ezért f-re a 8.4.4. állítás c) feltétele is teljesül. ■

8.5. Heine-tétel

8.5.1. Tétel. (Heine-tétel) *Ha (M, d), (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény és* $\mathrm{Dom}(f)$ *kompakt halmaz, akkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. (*I. Bizonyítás.*) Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $f : M \rightarrowtail M'K$ folytonos függvény, $\mathrm{Dom}(f)$ kompakt halmaz, továbbá f nem egyenletesen folytonos. Az egyenletes folytonosság jellemzése szerint ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $\delta > 0$ valós számhoz létezik olyan $(x, x') \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f)$ pár, amelyre $d(x, x') < \delta$ és $d'(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ egy ilyen szám és rögzítsünk egy $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{(x, x') \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f) | (d(x, x') < \delta_n) \wedge (d'(f(x), f(x')) \geq \varepsilon)\} \neq \emptyset,$$

ezért a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}}\{(x,x')\in\mathrm{Dom}(f)\times\mathrm{Dom}(f)|(d(x,x')<\delta_n)\wedge(d'(f(x),f(x'))\geq\varepsilon)\}\neq\emptyset.$$

Legyen $\mathbf{S}$ eleme ennek a szorzathalmaznak, és vezessük be a

$$\begin{aligned}\mathrm{p}:\mathrm{Dom}(f)\times\mathrm{Dom}(f)\to\mathrm{Dom}(f);\quad (x,y)\mapsto x,\\ \mathrm{p}':\mathrm{Dom}(f)\times\mathrm{Dom}(f)\to\mathrm{Dom}(f);\quad (x,y)\mapsto y\end{aligned}$$

leképezéseket. Ekkor $\mathbf{s}:=\mathrm{p}\circ\mathbf{S}$ és $\mathbf{s}':=\mathrm{p}'\circ\mathbf{S}$ olyan függvények, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ számra $\mathbf{S}(n)=(\mathbf{s}(n),\mathbf{s}'(n))$, tehát $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozatok, amelyekre minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $d(\mathbf{s}(n),\mathbf{s}'(n))<\delta_n$ és $d'(f(\mathbf{s}(n)),f(\mathbf{s}'(n)))\geq\varepsilon$. A $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz kompakt, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel alapján van olyan $\sigma':\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre $\mathbf{s}\circ\sigma'$ konvergens és $\lim(\mathbf{s}\circ\sigma')\in\mathrm{Dom}(f)$. Ismét a Bolzano-Weierstrass-tételt alkalmazva kapjuk olyan $\sigma'':\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény létezését, amelyre $(\mathbf{s}'\circ\sigma')\circ\sigma''$ konvergens és $\lim((\mathbf{s}'\circ\sigma')\circ\sigma'')\in\mathrm{Dom}(f)$. Ekkor $\sigma:=\sigma'\circ\sigma''$ olyan $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre az $\mathbf{s}\circ\sigma$ és $\mathbf{s}'\circ\sigma$ sorozatok mindketten konvergensek, és a határértékük eleme a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaznak. Legyenek $\mathfrak{a}:=\lim(\mathbf{s}\circ\sigma)$ és $\mathfrak{a}':=\lim(\mathbf{s}'\circ\sigma)$. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $d(\mathbf{s}(\sigma(n)),\mathbf{s}'(\sigma(n)))<\delta_{\sigma(n)}$, ezért

$$\begin{aligned}d(\mathfrak{a},\mathfrak{a}')\leq d(\mathfrak{a},\mathbf{s}(\sigma(n)))+d(\mathbf{s}(\sigma(n)),\mathbf{s}'(\sigma(n)))+d(\mathbf{s}'(\sigma(n)),\mathfrak{a}')<\\ <d(\mathfrak{a},\mathbf{s}(\sigma(n)))+\delta_n+d(\mathbf{s}'(\sigma(n)),\mathfrak{a}').\end{aligned}$$

Mivel $(\delta_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat, így ebből $d(\mathfrak{a},\mathfrak{a}')=0$ következik, tehát $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$. Az f függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért az átviteli elv alapján $\lim(f\circ(\mathbf{s}\circ\sigma))=f(\mathfrak{a})=f(\mathfrak{a}')=\lim(f\circ(\mathbf{s}'\circ\sigma))$. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$d'(f(\mathbf{s}(\sigma(n))),f(\mathbf{s}'(\sigma(n))))\leq d'(f(\mathbf{s}(\sigma(n))),f(\mathfrak{a}))+d'(f(\mathfrak{a}),f(\mathbf{s}'(\sigma(n)))),$$

ezért $\lim\limits_{n\to\infty}d'(f(\mathbf{s}(\sigma(n))),f(\mathbf{s}'(\sigma(n))))=0$. Ez viszont lehetetlen, mert minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $d'(f(\mathbf{s}(\sigma(n))),f(\mathbf{s}'(\sigma(n))))\geq\varepsilon$.

(*II. Bizonyítás.*) Az állítás igaz, ha $\mathrm{Dom}(f)=\emptyset$ (vagyis f az üres függvény), ezért feltesszük, hogy $\mathrm{Dom}(f)\neq\emptyset$. Legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tetszőleges.

Az f függvény minden $\mathfrak{a}\in\mathrm{Dom}(f)$ pontban folytonos, ezért kiválasztható olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\delta_\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Dom}(f)}$ rendszer, amelyre minden $\mathfrak{a}\in\mathrm{Dom}(f)$ esetén $f\langle\mathrm{B}_{\delta_\mathfrak{a}}(\mathfrak{a};d)\rangle\subseteq\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(f(\mathfrak{a});d')$. Ekkor a $(\mathrm{B}_{\delta_\mathfrak{a}/2}(\mathfrak{a};d))_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Dom}(f)}$ halmazrendszer nyilvánvalóan nyílt befedése $\mathrm{Dom}(f)$-nek, ezért $\mathrm{Dom}(f)$ kompaktsága miatt vehetünk olyan $H\subseteq\mathrm{Dom}(f)$ véges halmazt, amelyre

$$\mathrm{Dom}(f)\subseteq\bigcup_{\mathfrak{a}\in H}\mathrm{B}_{\delta_\mathfrak{a}/2}(\mathfrak{a};d).$$

A $\mathrm{Dom}(f)\neq\emptyset$ feltétel miatt $H\neq\emptyset$, így képezhető a $\delta:=\min\limits_{\mathfrak{a}\in H}(\delta_\mathfrak{a}/2)$ valós szám.

Legyenek $x_1,x_2\in\mathrm{Dom}(f)$ olyan pontok, amelyekre $d(x_1,x_2)<\delta$. Ekkor x_1-hez van olyan $\mathfrak{a}\in H$, amelyre $d(x_1,\mathfrak{a})<\delta_\mathfrak{a}/2$, ugyanakkor $d(x_2,x_1)<\delta\leq\delta_\mathfrak{a}/2$, tehát $d(x_2,\mathfrak{a})\leq d(x_2,x_1)+d(x_1,\mathfrak{a})<\delta_\mathfrak{a}$. Ezért $x_1,x_2\in\mathrm{B}_{\delta_\mathfrak{a}}(\mathfrak{a};d)$, így $d'(f(x_1),f(\mathfrak{a}))<\varepsilon/2$ és $d'(f(x_2),f(\mathfrak{a}))<\varepsilon/2$. Ebből következik, hogy $d'(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$, tehát f egyenletesen folytonos. ■

8.6. Alkalmazás: Approximáció Bernstein-polinomokkal

8.6.1. Definíció. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, és $(F, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az $f : [a, b] \to F$ függvény n-edik Bernstein-polinomjának nevezzük, és $\mathrm{B}_n(f)$-fel jelöljük azt az $\mathbb{R} \to F$ függvényt, amelyre minden $t \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(\mathrm{B}_n(f))(t) := \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)(t-a)^k(b-t)^{n-k}.$$

8.6.2. Állítás. (Approximáció Bernstein-polinomokkal) *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, és legyen $(F, \|\cdot\|)$ normált tér. Ha $f : [a, b] \to F$ folytonos függvény, akkor fennáll a*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[a,b]} \|(\mathrm{B}_n(f))(t) - f(t)\|\right) = 0$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \to F$ tetszőleges függvény. Ha $t \in [a, b]$, akkor a binomiális tétel alapján

$$\begin{aligned}(\mathrm{B}_n(f))(t) - f(t) &= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)(t-a)^k(b-t)^{n-k} - \\ &\quad - \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(t)(t-a)^k(b-t)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right)(t-a)^k(b-t)^{n-k},\end{aligned}$$

tehát teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned}&\|(\mathrm{B}_n(f))(t) - f(t)\| \le \\ &\le \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right\| (t-a)^k(b-t)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

Most tegyük fel, hogy f folytonos, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A Heine-tétel alapján f egyenletesen folytonos, ezért vehetünk olyan $\delta > 0$ valós számot, amelyre minden $t, t' \in [a, b]$ esetén, ha $|t - t'| < \delta$, akkor $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon/2$. Legyen minden $t \in [a, b]$ pontra és $n \in \mathbb{N}^*$ számra:

$$\begin{aligned}H_{n,\delta}(t) &:= \left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left|a + \frac{k}{n}(b-a) - t\right| < \delta,\ k \le n\right\}, \\ H'_{n,\delta}(t) &:= \left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left|a + \frac{k}{n}(b-a) - t\right| \ge \delta,\ k \le n\right\}.\end{aligned}$$

Kompakt halmazon folytonos függvény korlátos, ezért f korlátos is. Legyen $C > 0$ olyan valós szám, hogy minden $t \in [a, b]$ pontra $\|f(t)\| \le C$. Ekkor minden $t \in [a, b]$ és $n \in \mathbb{N}^*$

esetén érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

$$\|(\mathrm{B}_n(f))(t) - f(t)\| \leq$$

$$\leq \sum_{k \in H_{n,\delta}(t)} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k \in H'_{n,\delta}(t)} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in H_{n,\delta}(t)} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + 2C \sum_{k \in H'_{n,\delta}(t)} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + 2C \sum_{k \in H'_{n,\delta}(t)}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + 2C \sum_{k \in H'_{n,\delta}(t)}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.$$

Könnyen látható, hogy ha $t \in [a, b]$ és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor minden $k \in H'_{n,\delta}(t)$ számra (a definíció szerint) $(k - nx(t))^2 \geq \delta^2 n^2/(b-a)^2$, ahol $x(t) := (t-a)/(b-a)$, tehát fennáll az

$$1 \leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2}(k - nx(t))^2$$

egyenlőtlenség. Ebből következik, hogy minden $t \in [a, b]$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\|(\mathrm{B}_n(f))(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \sum_{k \in H'_{n,\delta}(t)}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx(t))^2 x(t)^k (1 - x(t))^{n-k}.$$

Most pontosan meghatározzuk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ számra a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

összeg értékét. Ehhez vezessük be a $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto (x + y)^n$ függvényt. Ekkor minden $y \in \mathbb{R}$ számra a binomiális tétel alapján teljesül, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$nx(x+y)^{n-1} = x(\mathrm{D}Q(\cdot, y))(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k},$$

amiből az $y := 1 - x$ választással következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

Továbbá, rögzített $y \in \mathbb{R}$ számra minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ha $n > 1$, akkor fennáll az

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = x^2(\mathrm{D}^2 Q(\cdot, y))(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^k y^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k y^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k y^{n-k} - nx(x+y)^{n-1}$$

egyenlőség, ezért

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx.$$

Tehát minden $t \in [a,b]$ pontra és $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ számra

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{B}_n(f))(t) - f(t)\| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k - nx(t))^2 x(t)^k(1-x(t))^{n-k} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2}\left(n(n-1)x(t)^2 + nx(t) - 2n^2x(t)^2 + n^2x(t)^2\right) = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n}x(t)(1-x(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2}\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Ha $N \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy

$$2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2}\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2},$$

akkor minden $t \in [a,b]$ pontra és $n \in \mathbb{N}$ számra, $n > N$ esetén $\|(\mathrm{B}_n(f))(t) - f(t)\| < \varepsilon$ teljesül. Tehát minden $n > N$ természetes számra

$$\sup_{t\in[a,b]} \|(\mathrm{B}_n(f))(t) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\left(\sup_{t\in[a,b]} \|(\mathrm{B}_n(f))(t) - f(t)\|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ számsorozat zérussorozat. ■

8.7. Gyakorlatok

1. Legyen (M,d) metrikus tér, $K \subseteq M$ nem üres kompakt halmaz, $F \subseteq M$ nem üres zárt halmaz, és tegyük fel, hogy $K \cap F = \emptyset$. Ekkor létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $\{x \in M | d(x,K) < \varepsilon\}$ és $\{x \in M | d(x,F) < \varepsilon\}$ *diszjunkt* halmazok.

(*Útmutatás.* Értelmezzük a következő függvényt

$$K \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto d(x,F).$$

Ez folytonos $M \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $K \neq \emptyset$ kompakt, így a Weierstrass-féle minimum-elv alapján van olyan $x_0 \in K$, amelyben e függvénynek minimuma van, vagyis minden $x \in K$ esetén $d(x_0,F) \leq d(x,F)$. Tehát ha $x \in K$ és $y \in F$, akkor $d(x_0,F) \leq d(x,y)$ teljesül. Ugyanakkor $d(x_0,F) > 0$, különben az F zártsága folytán $x_0 \in \overline{F} = F$ teljesülne és $x_0 \in K$, holott $K \cap F = \emptyset$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $2\varepsilon \leq d(x_0,F)$, akkor az $\{x \in M | d(x,K) < \varepsilon\}$ és $\{x \in M | d(x,F) < \varepsilon\}$ halmazok nem metszik egymást, hiszen ha z közös pontjuk volna, akkor létezne olyan $x \in K$, hogy $d(z,x) < \varepsilon$ és létezne olyan $y \in F$, hogy $d(z,y) < \varepsilon$, tehát ekkor $d(x,y) < 2\varepsilon \leq d(x_0,F)$, ami lehetetlen.)

2. Ha (M,d) ultrametrikus tér, akkor minden $x \in M$ pontra a $d(\cdot,x) : M \to \mathbb{R}$ függvény értékkészlete olyan *megszámlálható* részhalmaza $\mathbb{R}_+$-nak, amelynek a 0 kivételével minden pontja *izolált pont*, vagyis a $\{d(x',x) | x' \in M \setminus \{x\}\}$ halmaz diszkrét $\mathbb{R}$-ben.

3. Ha (M,d) metrikus tér, akkor egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvényt *alulról* (illetve *felülről*) *félig folytonosnak* nevezzük, ha minden $\mathbb{R} \ni x$-re az $\{x \in M | f(x) > c\}$ (illetve $\{x \in M | f(x) < c\}$) halmaz nyílt.

a) Egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvény pontosan alulról (illetve felülről) félig folytonos, ha $-f$ felülről (illetve alulról) félig folytonos.

b) Egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos, ha alulról és felülről félig folytonos.

c) Ha $E \subseteq M$, akkor a χ_E karakterisztikus függvény pontosan akkor alulról (illetve felülről) félig folytonos, ha E nyílt (illetve zárt) halmaz. Ha $E \subseteq M$, akkor a χ_E karakterisztikus függvény pontosan akkor folytonos, ha E nyílt-zárt halmaz.

d) Ha M kompakt és $f : M \to \mathbb{R}$ alulról (illetve) felülről félig folytonos függvény, akkor $\mathrm{Im}(f)$ alulról (illetve felülről) korlátos halmaz $\mathbb{R}$-ben, és ha $M \neq \emptyset$, akkor létezik olyan pont M-ben, amelyben f-nek globális minimuma (illetve maximuma) van.

(*Útmutatás.* Legyen $f : M \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos függvény; megmutatjuk, hogy ha M kompakt, akkor $\mathrm{Im}(f)$ alulról korlátos, és ha $M \neq \emptyset$, akkor létezik olyan $\mathfrak{a} \in M$, hogy $f(\mathfrak{a}) = \inf(\mathrm{Im}(f))$, tehát f-nek $\mathfrak{a}$-ban globális minimuma van.

Valóban, az f alulról félig folytonossága miatt minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\{x \in M | f(x) \leq -n\}$ *zárt* halmaz, és a $(\{x \in M | f(x) \leq -n\})_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyó. Ha f nem korlátos alulról, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mathbb{N} \ni n$-re $\{x \in M | f(x) \leq -n\} \neq \emptyset$, ezért M kompaktsága miatt, a Cantor-féle közösrész-tétel alapján kapjuk, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in M | f(x) \leq -n\} \neq \emptyset$, holott ez a metszethalmaz nyilvánvalóan üres.

Tegyük fel, hogy M kompakt és nem üres, továbbá legyen $\alpha := \inf(\mathrm{Im}(f))$. Ha $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó monoton fogyó zérussorozat, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\{x \in M | f(x) \leq \alpha + \varepsilon_n\}$ nem üres zárt halmaz, és a $(\{x \in M | f(x) \leq \alpha + \varepsilon_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyó. Ezért M kompaktsága miatt, a Cantor-féle közösrész-tétel alapján kapjuk, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in M | f(x) \leq \alpha + \varepsilon_n\} \neq \emptyset$. E metszethalmaz bármely $\mathfrak{a}$ elemére $f(\mathfrak{a}) = \inf(\mathrm{Im}(f))$ teljesül.)

4. Ha (M, d) kompakt metrikus tér, és $f : M \to M$ olyan függvény, hogy minden $x, y \in M$ esetén $d(x, y) \leq d(f(x), f(y))$, akkor f *izometrikus bijekció.*

(*Útmutatás.* Először megmutatjuk, hogy ha $x \in M$ esetén $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jelöli x kezdőpont és az $f : M \to M$ függvény által meghatározott iterációs sorozatot, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $d(x, x_n) < \varepsilon$. Ha nem így lenne, akkor volna olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $d(x, x_n) \geq \varepsilon$. Ekkor $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m < n$ esetén $d(x_m, x_n) = d(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) \geq d(x_{m-1}, x_{n-1})$, amiből látható, hogy $d(x_m, x_n) \geq d(x, x_{n-m}) \geq \varepsilon$. Ezért az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak nincs konvergens részsorozata, ami ellentmond a Bolzano-Weierstrass tételnek.

Az előzőekből máris következik, hogy $\mathrm{Im}(f)$ sűrű részhalmaza M-nek, ezért ha f folytonos lenne, akkor $\mathrm{Im}(f)$ kompaktsága, tehát zártsága miatt f ráképezne M-re.

Legyen most (M', d') az (M, d) metrikus tér önmagával vett szorzata, és

$$f' : M' \to M'; \quad (x, y) \mapsto (f(x), f(y)).$$

Ekkor (M', d') kompakt metrikus tér, és világos, hogy minden $x', y' \in M'$ esetén $d'(f'(x'), f'(y')) \geq d'(x', y')$, tehát ha az $(x, y) \in M'$ párra $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jelöli az (x, y) kezdőpont és az f' függvény által meghatározott iterációs sorozatot, akkor az előzőek alapján minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $d'((x, y), (x_n, y_n)) < \varepsilon$, azaz $d(x, x_n) < \varepsilon$ és $d(y, y_n) < \varepsilon$. Ugyanakkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (illetve $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) sorozat azonos az x

(illetve y) kezdőpont és az $f : M \to M$ függvény által meghatározott iterációs sorozattal. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és $n \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy $d(x, x_n) < \varepsilon$ és $d(y, y_n) < \varepsilon$, akkor

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(f(x), f(y)) = d(x_1, y_1) \leq d(x_n, y_n) \leq \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) < d(x, y) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

ezért $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, vagyis f izometria.)

5. Az (M, d) metrikus teret *pszeudokompaktnak* nevezzük, ha minden $M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény korlátos. Minden kompakt metrikus tér pszeudokompakt. Ha (M, d) pszeudokompakt metrikus tér, akkor M *teljesen korlátos* halmaz.

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy M nem teljesen korlátos halmaz. Igazoljuk olyan $M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény létezését, amely nem korlátos.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy minden $H \subseteq M$ véges halmazra $M \neq \bigcup_{x \in H} \mathrm{B}_\varepsilon(x; d)$. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tétel alkalmazásával előállíthatunk olyan M-ben haladó $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} \notin \bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(x_k; d)$, és itt az x_0 kezdőpont az M tetszőleges pontja lehet. Ekkor $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ esetén $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$, ezért a $(\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x_n; d))_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat *diszjunkt.* A metrikus terekre vonatkozó Uriszon-tétel (7.14.5.) alapján kiválaszthatunk olyan $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatot, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $x \in M$ esetén $0 \leq f_k(x) \leq 1$, $f_k(x_k) = k$ és $\mathrm{supp}(f_k) \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon/4}(x_k; d)$. A $(\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x_n; d))_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat diszjunktsága folytán minden $x \in M$ ponthoz legfeljebb egy olyan $k \in \mathbb{N}$ létezik, hogy $f_k(x) \neq 0$, ezért jól értelmezett az

$$f : M \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

függvény. Ha $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x_k; d)$, akkor van egyetlen olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $x \in \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x_k; d)$, és ekkor $\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x_k; d)$ olyan környezete x-nek M-ben, hogy $f = f_k$ a $\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x_k; d)$ halmazon. Ha $x \in M \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x_k; d)$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $d(x, x_k) \geq \varepsilon/2$, ezért $\mathrm{B}_{\varepsilon/4}(x; d)$ olyan környezete x-nek M-ben, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{B}_{\varepsilon/4}(x; d) \cap \mathrm{B}_{\varepsilon/4}(x_k; d) = \emptyset$, ezért $\mathrm{B}_{\varepsilon/4}(x; d) \cap \mathrm{supp}(f_k) = \emptyset$, tehát $f = 0$ a $\mathrm{B}_{\varepsilon/4}(x; d)$ halmazon. Ezért a folytonosság lokalitása miatt f folytonos, és világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $f(x_k) = k$, tehát $\mathbb{N} = \{f(x_k) | k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{Im}(f)$, vagyis f nem korlátos.)

6. Mutassuk meg, hogy metrikus tér pontosan akkor kompakt, ha pszeudokompakt.

(*Útmutatás.* Indirekt, tegyük fel, hogy az (M, d) metrikus tér pszeudokompakt, de nem kompakt. Ekkor a létezik az M nem üres zárt részhalmazainak olyan $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_{n+1} \subseteq F_n$ és $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $d(\cdot, F_n) : M \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és $\{x \in M | d(x, F_n) = 0\} = F_n$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n := \inf(d(\cdot, F_n), 1)$; és vegyünk olyan $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{R}_+^*$-ban, amelyre a $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ sor konvergens. Ekkor az $f := \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n$ függvény folytonos (!), és minden

$x \in M$ esetén $f(x) > 0$. Tehát az $1/f$ reciprok-függvény is folytonos, így (M,d) pszeudokompaktsága miatt korlátos felülről. Ez azt jelenti, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $x \in M$ esetén $f(x) \geq c$. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ tetszőleges. Ha $k,n \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$, akkor $x_n \in F_n \subseteq F_k$, ezért $d(x_n,F_k) = 0$, tehát $f_k(x_n) = 0$. Ebből következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$0 < c \leq f(x_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k f_k(x_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k,$$

és a $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ sor konvergenciája miatt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k = 0$, ami ellentmondás.)

7. Legyen $m \in \mathbb{N}^*$ és értelmezzük az

$$P_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^m \ - \ \prod_{j=0}^{m-1}(x-j),$$

pontosan $m-1$-ed fokú, egész együtthatós, homogén polinomiális függvényt, továbbá legyen $(c_{m,j})_{0\leq j\leq m-1}$ a P_m együttható-rendszere, vagyis minden $\mathbb{R} \ni x$-re

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{m,j} x^j.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| x^m \ - \ \mathrm{B}_n\left(\mathrm{id}_{[0,1]}^m\right)(x) \right| \leq \sum_{j=0}^{m-1} \frac{|c_{m,j}|}{n^{m-j}}$$

teljesül. Ebből következik, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényre és $a,b \in \mathbb{R}$ valós számra, ha $a < b$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[a,b]} \left| f(t) - \mathrm{B}_n(f|_{[a,b]})(t) \right| \right) = 0$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Legyen $n \in \mathbb{N}^*$. Rögzített $y \in \mathbb{R}_+^*$ esetén az

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*; \quad x \mapsto (x+y)^n$$

függvényt m-szer differenciálva x szerint, a binomiális tételt alkalmazva kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$n(n-1)...(n-m+1)(x+y)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)...(k-m+1)x^{k-m}y^{n-k},$$

tehát x^m-mel szorozva és kihasználva a P_m polinom definícióját

$$(n^m - P_m(n))x^m(x+y)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k^m - P_m(k))x^k y^{n-k}.$$

adódik. Ez tehát minden $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ esetén igaz, így az $x \in]0,1[$ és $y := 1-x$ választással kapjuk, hogy

$$(n^m - P_m(n))x^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k^m - P_m(k))x^k(1-x)^{n-k}.$$

Közvetlenül látható, hogy ez az egyenlőség $x := 0$ és $x := 1$ esetén is teljesül.

Legyen most $n \in \mathbb{N}^*$ és $x \in [0,1]$ is rögzítve. Az előző egyenlőség mindkét oldalát osztjuk n^m-mel, felhasználjuk a Bernstein-polinomok definícióját, majd átrendezzük, így a következőre jutunk:

$$x^m - \mathrm{B}_n\left(\mathrm{id}_{[0,1]}^m\right)(x) = \frac{P_m(n)}{n^m}x^m - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{P_m(k)}{n^m}x^k(1-x)^{n-k}.$$

A $(c_{m,j})_{0 \le j \le m-1}$ a P_m együttható-rendszer definíciója alapján a jobb oldal így írható:

$$\frac{P_m(n)}{n^m}x^m - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{P_m(k)}{n^m}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= x^m \sum_{j=0}^{m-1}\frac{c_{m,j}}{n^{m-j}} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{m-1} c_{m,j}k^j\right)}{n^m}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= x^m \sum_{j=0}^{m-1}\frac{c_{m,j}}{n^{m-j}} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{c_{m,j}}{n^{m-j}}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^j x^k(1-x)^{n-k}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{c_{m,j}}{n^{m-j}}\left(x^m - \mathrm{B}_n\left(\mathrm{id}_{[0,1]}^j\right)(x)\right).$$

A Bernstein-polinomok definíciója alapján nyilvánvaló, hogy $0 \le j \le m-1$ és $x \in [0,1]$ esetén $0 \le \mathrm{B}_n\left(\mathrm{id}_{[0,1]}^j\right)(x) \le 1$, és persze $0 \le x^m \le 1$, ezért azt kapjuk, hogy $|x^m - \mathrm{B}_n\left(\mathrm{id}_{[0,1]}^j\right)(x)| \le 1$, így

$$\left|x^m - \mathrm{B}_n\left(\mathrm{id}_{[0,1]}^m\right)(x)\right| = \left|\sum_{j=0}^{m-1}\frac{c_{m,j}}{n^{m-j}}\left(x^m - \mathrm{B}_n\left(\mathrm{id}_{[0,1]}^j\right)(x)\right)\right| \le \sum_{j=0}^{m-1}\frac{|c_{m,j}|}{n^{m-j}}$$

teljesül, és ebből már következik az állítás.)

9. fejezet

Teljes metrikus terek

9.1. Cauchy-sorozatok metrikus térben

9.1.1. Definíció. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor az M-ben haladó* $\mathbf{s}$ *sorozatot* **Cauchy-sorozatnak** *nevezzük (a d metrika szerint), ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > N$ és $n > N$ természetes számra $d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) < \varepsilon$.*

A Cauchy-sorozatok fogalma metrikus, és nem topologikus fogalom.

9.1.2. Állítás. *Metrikus térben minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat, és minden Cauchy-sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, és $\mathbf{s}$ konvergens sorozat M-ben. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor az $\varepsilon/2$ számhoz legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $d(\mathbf{s}(n), \lim(\mathbf{s})) < \varepsilon/2$. Ha $m > N$ és $n > N$ tetszőleges természetes számok, akkor $d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) \leq d(\mathbf{s}(m), \lim(\mathbf{s})) + d(\lim(\mathbf{s}), \mathbf{s}(n)) < \varepsilon$, tehát $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat,

Legyen $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat és rögzítsünk egy $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot. Az r-hez legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m > N$ és $n > N$ természetes számra $d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) < r$. Ekkor $\{\mathbf{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\} \subseteq \mathrm{B}_r(\mathbf{s}(N+1); d)$, tehát az $\{\mathbf{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\}$ halmaz korlátos, továbbá az $\{\mathbf{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq N)\}$ halmaz is korlátos, mert véges, így az $\mathrm{Im}(\mathbf{s}) = \{\mathbf{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\} \cup \{\mathbf{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq N)\}$ halmaz is korlátos, vagyis $\mathbf{s}$ korlátos sorozat. ■

9.1.3. Állítás. *Metrikus térben Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, ezért a feltétel *szükséges.* A feltétel *elégségességének* bizonyításához legyen (M, d) metrikus tér, és $\mathbf{s}$ M-ben haladó Cauchy-sorozat. Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan szigorúan monoton növő függvény, amelyre $\mathbf{s} \circ \sigma$ konvergens sorozat. Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathbf{s}$-nek a $\lim(\mathbf{s} \circ \sigma)$ pont a határértéke.

Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m > N'$ és $n > N'$ természetes számra $d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) < \varepsilon/2$; ilyen létezik, mert $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat. Legyen továbbá $N'' \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N''$ természetes számra $d((\mathbf{s} \circ \sigma)(n), \lim(\mathbf{s} \circ \sigma)) < \varepsilon/2$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N', N'')$, akkor $\sigma(n) \geq n > N'$, így $d(\mathbf{s}(\sigma(n)), \mathbf{s}(n)) < \varepsilon/2$, továbbá $n > N''$ miatt $d(\mathbf{s}(\sigma(n)), \lim(\mathbf{s} \circ \sigma)) < \varepsilon/2$, amiből a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy $d(\mathbf{s}(n), \lim(\mathbf{s} \circ \sigma)) < \varepsilon$. ■

9.1.4. Állítás. *Legyen (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek, és* $\mathbf{s}$ *M'-ben haladó sorozat. Ekkor* $\mathbf{s}$ *pontosan akkor Cauchy-sorozat d' szerint, ha Cauchy-sorozat d szerint.*

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan következik a Cauchy-sorozatok definíciójából és abból, hogy $d' := d|_{M' \times M'}$. ■

9.1.5. Állítás. *Ha (M, d), (M', d') metrikus terek és $f : M \rightarrowtail M'$ egyenletesen folytonos függvény, akkor minden* $\mathrm{Dom}(f)$*-ben haladó* $\mathbf{s}$ *sorozatra, ha* $\mathbf{s}$ *a d metrika szerint Cauchy-sorozat, akkor $f \circ \mathbf{s}$ a d' metrika szerint Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. Az f egyenletes folytonossága miatt vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, amelyre minden $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ pontra, ha $d(x_1, x_2) < \delta$, akkor $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Legyen $\mathbf{s}$ $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$ és $m, n > N$ esetén $d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) < \delta$. Ekkor minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra, ha $m, n > N$, akkor $d'(f(\mathbf{s}(m)), f(\mathbf{s}(n))) < \varepsilon$, tehát $f \circ \mathbf{s}$ Cauchy-sorozat a d' metrika szerint. ■

9.1.6. Állítás. *Ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i \in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, akkor egy M-ben haladó* $\mathbf{s}$ *sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat d szerint, ha minden $I \ni i$-re az M_i-ben haladó* $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}$ *sorozat Cauchy-sorozat d_i szerint.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{s}$ M-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat, akkor az előző állás szerint minden $I \ni i$-re $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}$ Cauchy-sorozat d_i szerint, mert $\mathrm{pr}_i : M \to M_i$ Lipschitz-függvény függvény a d és d_i metrikák szerint, ezért egyenletesen folytonos.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $I \ni i$-re az M_i-ben haladó $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}$ sorozat Cauchy-sorozat d_i szerint. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és válasszunk ki olyan $(N_i)_{i \in I}$ rendszert $\mathbb{N}$-ben, amelyre minden $I \ni i$-re és $m, n > N_i$ természetes számra $d_i(\mathrm{pr}_i(\mathbf{s}(m)), \mathrm{pr}_i(\mathbf{s}(n))) < \varepsilon$. Ekkor $N := \max_{i \in I} N_i \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m, n > N$ természetes számra $d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) := \max_{i \in I} d_i(\mathrm{pr}_i(\mathbf{s}(m)), \mathrm{pr}_i(\mathbf{s}(n))) < \varepsilon$, tehát $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat d szerint. ■

9.2. Teljes halmazok és teljes metrikus terek

Sok olyan metrikus tér létezik, amelyben nem minden Cauchy-sorozat konvergens. Például, a $\mathbb{Q}$ halmaz az euklidészi metrikával ellátva olyan metrikus altere az euklidészi metrikával ellátott $\mathbb{R}$ metrikus térnek, hogy minden $\mathbb{Q}$-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozatra, ha $\mathbf{s}$ konvergens $\mathbb{R}$-ben, és a határértéke *irracionális* szám, akkor $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat $\mathbb{Q}$-ban, de nem konvergens $\mathbb{Q}$-ban.

9.2.1. Definíció. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor az $E \subseteq M$ halmazt* **teljesnek** *nevezzük (a d metrika szerint), ha minden E-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat konvergens d szerint, és a határértéke eleme E-nek. Az (M, d) metrikus teret* **teljesnek** *nevezzük, ha M teljes a d metrika szerint, vagyis minden M-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat konvergens d szerint. Az $(E, \|\cdot\|)$ normált teret* **teljesnek** *nevezzük, ha az $(E, \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ metrikus tér teljes. A teljes normált tereket* **Banach-tereknek** *nevezzük.*

Metrikus terek teljessége metrikus, és nem topologikus tulajdonság.

9.2.2. Állítás. *Ha (M, d) metrikus tér, és $F \subseteq M$, akkor az F halmaz pontosan akkor teljes d szerint, ha az $(F, d|_{F \times F})$ metrikus tér teljes.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{s}$ olyan F-ben haladó sorozat, amely Cauchy-sorozat $d|_{F\times F}$ szerint, akkor $\mathbf{s}$ a d szerint is Cauchy-sorozat, tehát ha az F halmaz teljes a d metrika szerint, akkor $\mathbf{s}$ konvergens d szerint és $\lim(\mathbf{s}) \in \overline{F} = F$, így $\mathbf{s}$ a $d|_{F\times F}$ altérmetrika szerint is konvergens. Tehát ha F halmaz teljes a d metrika szeint, akkor az $(F, d|_{F\times F})$ metrikus tér teljes.

Megfordítva, ha $\mathbf{s}$ olyan F-ben haladó sorozat, amely a d szerint Cauchy-sorozat, akkor $\mathbf{s}$ a $d|_{F\times F}$ altérmetrika szerint is Cauchy-sorozat, tehát ha $(F, d|_{F\times F})$ teljes metrikus tér, akkor $\mathbf{s}$ konvergens $d|_{F\times F}$ szerint, így d szerint is konvergens. Tehát ha $(F, d|_{F\times F})$ teljes metrikus tér, akkor F teljes halmaz a d metrika szerint. ■

9.2.3. Állítás. *Ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, és $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $I \ni i$-re $E_i \subseteq M_i$ teljes halmaz d_i szerint, akkor $\prod_{i\in I} E_i$ teljes halmaz d szerint. Teljes metrikus terek véges rendszerének a szorzata teljes.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy minden $I \ni i$-re $E_i \subseteq M_i$ teljes halmaz d_i szerint, és legyen $\mathbf{s}$ egy $\prod_{i\in I} E_i$-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat. Ekkor minden $I \ni i$-re $\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}$ Cauchy-sorozat d_i szerint, tehát konvergens is ugyanezen metrika szerint és $\lim(\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}) \in E_i$. Ezért $\mathbf{s}$ konvergens d szerint is, és $\lim(\mathbf{s}) = (\lim(\mathrm{pr}_i \circ \mathbf{s}))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$. Ez azt jelenti, hogy $\prod_{i\in I} E_i$ teljes halmaz d szerint. ■

9.2.4. Állítás. *Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes, és minden teljes halmaz zárt. Teljes metrikus térben egy halmaz pontosan akkor teljes, ha zárt.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér. Ha $K \subseteq M$ kompakt halmaz, és $\mathbf{s}$ egy K-ban haladó Cauchy-sorozat, akkor a Bozano-Weierstrass tétel alapján létezik $\mathbf{s}$-nek olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme K-nak; ekkor az $\mathbf{s}$ sorozat is konvergens, és a határértéke eleme K-nak, így K teljes halmaz. Ha $E \subseteq M$ teljes halmaz, és $\mathbf{s}$ egy E-ben haladó konvergens sorozat, akkor $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat, így az E teljessége miatt $\lim(\mathbf{s}) \in E$; ez viszont a zárt halmazok sorozatokkal való jellemzési tétele alapján azt jelenti, hogy E zárt halmaz. Ha M teljes halmaz, és $F \subseteq M$ zárt halmaz, továbbá $\mathbf{s}$ egy F-ben haladó Cauchy-sorozat, akkor $\mathbf{s}$ konvergens, és $\lim(\mathbf{s}) \in \overline{F} = F$, vagyis F teljes halmaz. ■

9.3. A teljes korlátosság jellemzései

9.3.1. Állítás. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $H \subseteq M$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{x\in H} \mathrm{B}_\varepsilon(x; d)$. (Tehát itt nem követeljük meg, hogy $H \subseteq E$ legyen.)*

Bizonyítás. A teljes korlátosság definíciója (5.5.5.) szerint a feltétel nyilvánvalóan szükséges. Az elégségesség bizonyításához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített, és vegyünk olyan $H \subseteq M$ véges halmazt, amelyre $E \subseteq \bigcup_{x\in H} \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x; d)$. Legyen $H_* := \{x \in H | E \cap \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x; d) \neq \emptyset\}$ és válasszunk ki egy

$$f \in \prod_{x\in H_*} \left(E \cap \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x; d)\right)$$

függvényt. Mivel $E = \bigcup_{x \in H_*} \left(E \cap \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x;d)\right)$, így $x \in E$ esetén vehetünk olyan $x_* \in H_*$ pontot, hogy $x \in E \cap \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x_*;d)$, és ekkor $f(x_*) \in E \cap \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x_*;d)$ miatt $d(x, f(x_*)) \leq d(x, x_*) + d(x_*, f(x_*)) < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(f) \subseteq E$ olyan véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{y \in \mathrm{Im}(f)} \mathrm{B}_\varepsilon(y;d)$, vagyis E teljesen korlátos. ■

9.3.2. Állítás. *Legyen (M,d) metrikus tér, $N \subseteq M$ és $d_N := d|_{N \times N}$. Az $E \subseteq N$ halmaz pontosan akkor teljesen korlátos N-ben a d_N altér-metrika szerint, ha teljesen korlátos M-ben a d metrika szerint.*

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan következik a teljes korlátosság definíciójából és abból, hogy minden $x \in N$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\mathrm{B}_\varepsilon(x;d_N) = N \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x;d)$. ■

A teljes korlátosság nagyon jól használható elégséges feltételét fogalmazza meg a következő állítás.

9.3.3. Állítás. *Ha (M,d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan $K \subseteq M$ (nem feltétlenül véges) teljesen korlátos halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{x \in K} \mathrm{B}_\varepsilon(x;d)$.*

Bizonyítás. A feltétel triviálisan szükséges ($K := E$). Az elégségesség bizonyításhoz legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített. Az $\varepsilon/2$ számhoz vegyünk olyan $K \subseteq M$ teljesen korlátos halmazt, hogy $E \subseteq \bigcup_{x \in K} \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x;d)$. Mivel K teljesen korlátos, vehetünk olyan $H \subseteq M$ véges halmazt, hogy $K \subseteq \bigcup_{x \in H} \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x;d)$. Tehát $H \subseteq M$ véges halmaz és minden $x \in E$ esetén van olyan $x' \in K$, hogy $x \in \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x';d)$, valamint létezik olyan $x'' \in H$, hogy $x' \in \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(x'';d)$, ami azt jelenti, hogy $d(x,x') < \varepsilon/2$ és $d(x',x'') < \varepsilon/2$, következésképpen $d(x,x'') \leq d(x,x') + d(x',x'') < \varepsilon$, vagyis $x \in \bigcup_{y \in H} \mathrm{B}_\varepsilon(y;d)$. Ez azt jelenti, hogy $E \subseteq \bigcup_{y \in H} \mathrm{B}_\varepsilon(y;d)$, ezért 9.3.1. alapján E teljesen korlátos halmaz. ■

9.3.4. Állítás. *Ha (M,d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ nem üres halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden $\mathbb{R}_+^* \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $(E_i)_{i \in I}$ véges halmazrendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq M$, és $E \subseteq \bigcup_{i \in I} E_i$, és minden $I \ni i$-re $\mathrm{diam}(E_i) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Legyen E teljesen korlátos és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\varepsilon' < \varepsilon/2$, és ε'-höz legyen $H \subseteq E$ olyan véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup_{x \in H} \mathrm{B}_{\varepsilon'}(x;d)$. Ekkor minden $H \ni x$-re $\mathrm{diam}(\mathrm{B}_{\varepsilon'}(x;d)) \leq 2\varepsilon' < \varepsilon$, tehát a feltétel szükséges.
Az elégségesség bizonyításához tegyük fel, hogy a feltétel teljesül, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Vegyünk olyan $(E_i)_{i \in I}$ véges halmazrendszert, amelyre $E \subseteq \bigcup_{i \in I} E_i$, és minden $I \ni i$-re $\mathrm{diam}(E_i) < \varepsilon$. Legyen $I' := \{i \in I | E \cap E_i \neq \emptyset\}$ és $(x_i)_{i \in I'}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I'$ esetén $x_i \in E \cap E_i$. Ha $x \in E$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $x \in E_i$; ekkor $i \in I'$, és $d(x,x_i) \leq \mathrm{diam}(E_i) < \varepsilon$, vagyis $x \in \mathrm{B}_\varepsilon(x_i;d)$. Ez azt jelenti, hogy a $H := \{x_i | i \in I'\} \subseteq E$ halmazra fennáll az $E \subseteq \bigcup_{x \in H} \mathrm{B}_\varepsilon(x;d)$ összefüggés, tehát E teljesen korlátos. ■

9.3.5. Következmény. *Metrikus térben teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza is teljesen korlátos, és teljesen korlátos halmaz lezártja teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $E \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz.

Ha $F \subseteq E$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor 9.3.4. szerint van olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges halmazrendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq M$, és $E \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$, és minden $I \ni i$-re $\mathrm{diam}(E_i) < \varepsilon$. Mivel ekkor $F \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$ is teljesül, így 9.3.4. alapján F is teljesen korlátos.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzítve. Ekkor 9.3.4. szerint van olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges halmazrendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq M$, és $E \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$, és minden $I \ni i$-re $\mathrm{diam}(E_i) < \varepsilon$. Ha $i \in I$, akkor 3.3.2. alapján $\mathrm{diam}(\overline{E_i}) = \mathrm{diam}(E_i) < \varepsilon$. Mivel pedig $\overline{E} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{E_i}$, így 9.3.4. szerint $\overline{E}$ teljesen korlátos halmaz. ■

9.3.6. Tétel. (Hausdorff-tétel) *Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden E-ben haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy E nem teljesen korlátos halmaz. A Bolzano-Weierstrass tételt megelőző állítás *bizonyításában* láttuk, hogy ekkor létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ és olyan E-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $i < n+1$ esetén $\mathbf{s}(i) \notin \bigcup_{j\in i} \mathrm{B}_\varepsilon(\mathbf{s}(j); d)$. Ha $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, akkor $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ esetén $d(\mathbf{s}(\sigma(i)), \mathbf{s}(\sigma(j))) \geq \varepsilon$, így $\mathbf{s} \circ \sigma$ nem Cauchy-sorozat. Tehát ha minden E-ben haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely Cauchy-sorozat, akkor E teljesen korlátos.

Megfordítva, tegyük fel, hogy E teljesen korlátos, és legyen $\mathbf{s}$ tetszőleges E-ben haladó sorozat. Ki fogjuk választani az $\mathbf{s}$-nek egy olyan részsorozatát, amely Cauchy-sorozat.

Ehhez legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőlegesen rögzített $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat. Először a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tétel alkalmazásával igazoljuk olyan $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-ben haladó $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és olyan M-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $N_n \subseteq \mathbb{N}$ *végtelen* halmaz, továbbá $N_{n+1} \subseteq N_n$ és $x_{n+1} \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x_n; d)$, valamint $\mathbf{s}\langle N_n\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x_n; d)$.

Az $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz az E teljes korlátossága folytán létezik olyan $H \subseteq E$ véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup_{x\in H} \mathrm{B}_{\varepsilon_0}(x; d)$; ekkor $\mathrm{Im}(\mathbf{s}) \subseteq E$ miatt $\mathbb{N} = \bigcup_{x\in H} \overset{-1}{\mathbf{s}}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_0}(x; d)\rangle$, következésképpen van olyan $x \in H$, amelyre $\overset{-1}{\mathbf{s}}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_0}(x; d)\rangle$ végtelen halmaz. Legyen $x \in H$ ilyen pont, és $x_0 := x$, valamint $N_0 := \overset{-1}{\mathbf{s}}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_0}(x; d)\rangle$. Ekkor az $(x_0, N_0) \in M \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$ olyan pár, amelyre $N_0 \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmaz, és $\mathbf{s}\langle N_0\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon_0}(x_0; d)$.

Legyen most $n \in \mathbb{N}$ és $((x_k, N_k))_{0\leq k\leq n}$ olyan rendszer, amely $M \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$-ben halad, és minden $0 \leq k \leq n$ természetes számra $N_k \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmaz, $\mathbf{s}\langle N_k\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon_k}(x_k; d)$, valamint $k < n$ esetén $N_{k+1} \subseteq N_k$ és $x_{k+1} \in \mathrm{B}_{\varepsilon_k}(x_k; d)$. Ekkor $\mathbf{s}\langle N_n\rangle \subseteq E$, és E teljesen korlátos, ezért az előző következmény szerint $\mathbf{s}\langle N_n\rangle$ is teljesen korlátos halmaz. Ezért az $\varepsilon_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan $H \subseteq \mathbf{s}\langle N_n\rangle \subseteq E$ véges halmaz, amelyre $\mathbf{s}\langle N_n\rangle \subseteq \bigcup_{x\in H} \mathrm{B}_{\varepsilon_{n+1}}(x; d)$. Ekkor $N_n = \bigcup_{x\in H} (N_n \cap \overset{-1}{\mathbf{s}}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_{n+1}}(x; d)\rangle)$, így N_n végtelensége és H végessége miatt vehetünk olyan $x \in H$ pontot, amelyre $N_n \cap \overset{-1}{\mathbf{s}}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_{n+1}}(x; d)\rangle$ végtelen halmaz; legyen $x_{n+1} := x$ és $N_{n+1} := N_n \cap \overset{-1}{\mathbf{s}}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_{n+1}}(x;d)\rangle$. Ekkor $N_{n+1} \subseteq N_n$ és N_{n+1} végtelen halmaz, továbbá

$$\mathbf{s}\langle N_{n+1}\rangle \subseteq \mathbf{s}\langle \overset{-1}{\mathbf{s}}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1};d)\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1};d),$$

valamint $x_{n+1} \in \mathbf{s}\langle N_n\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x_n;d)$. Ez azt jelenti, hogy az $((x_k,N_k))_{0\leq k\leq n+1}$ rendszer $M \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$-ben halad, és minden $0 \leq k \leq n+1$ természetes számra $N_k \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmaz, $\mathbf{s}\langle N_k\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon_k}(x_k;d)$, valamint $k < n+1$ esetén $N_{k+1} \subseteq N_k$ és $x_{k+1} \in \mathrm{B}_{\varepsilon_k}(x_k;d)$.

Most a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tétel alkalmazásával veszünk olyan $M \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$-ben haladó $((x_n,N_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $N_n \subseteq \mathbb{N}$ *végtelen* halmaz, továbbá $N_{n+1} \subseteq N_n$ és $x_{n+1} \in \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x_n;d)$, valamint $\mathbf{s}\langle N_n\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(x_n;d)\rangle$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor N_n végtelensége miatt $N_n \cap]n,\rightarrow[\neq \emptyset$, ezért jól értelmezett a

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \min(N_n \cap]n,\rightarrow[)$$

függvény. Jelölje σ a $0 \in \mathbb{N}$ kezdőpont és g függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor $\sigma(0) = 0$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\sigma(n+1) := g(\sigma(n)) \in N_{\sigma(n)} \cap]\sigma(n),\rightarrow[,$$

vagyis $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ és $\sigma(n+1) \in N_{\sigma(n)}$ miatt $\mathbf{s}(\sigma(n+1)) \in \mathrm{B}_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(n)};d)$, vagyis fennáll a $d((\mathbf{s}\circ\sigma)(n+1), x_{\sigma(n)}) < \varepsilon_{\sigma(n)}$ egyenlőtlenség.

Most megmutatjuk, hogy ha az $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat olyan, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat. Valóban, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $d(x_{k+1},x_k) < \varepsilon_k$, ezért ha $m,n \in \mathbb{N}$ és $m < n$, akkor

$$d(x_m,x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k,x_{k+1}) < \sum_{k=m}^{n-1} \varepsilon_k < \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Ebből következik, hogy minden $m,n \in \mathbb{N}$ számra

$$d(x_m,x_n) < \sum_{k=\min(m,n)}^{\infty} \varepsilon_k,$$

ezért a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$ sor konvergenciája miatt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat.

Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben; ekkor az előzőek szerint $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathbf{s}\circ\sigma$ is Cauchy-sorozat. Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m,n > N_1$ esetén $d(x_m,x_n) < \varepsilon/3$. Az $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat 0-hoz konvergál, ezért vehetünk olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N_2$ esetén $\varepsilon_n < \varepsilon/3$. Legyen $N := \max(N_1,N_2)$, és legyenek $m,n \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $m,n > N+1$. Ekkor $\sigma(m-1) > \sigma(N) \geq N \geq N_1$, és hasonlóan $\sigma(n-1) > N_1$, így $d(x_{\sigma(m-1)},x_{\sigma(n-1)}) < \varepsilon/3$. Ugyanakkor $\sigma(m-1) > N_2$ és $\sigma(n-1) > N_2$, ezért $d((\mathbf{s}\circ\sigma)(m),x_{\sigma(m-1)}) < \varepsilon_{\sigma(m-1)} < \varepsilon/3$, és hasonlóan $d((\mathbf{s}\circ\sigma)(n),x_{\sigma(n-1)}) < \varepsilon_{\sigma(n-1)} < \varepsilon/3$. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} &d((\mathbf{s}\circ\sigma)(m),(\mathbf{s}\circ\sigma)(n)) \leq \\ &\leq d((\mathbf{s}\circ\sigma)(m),x_{\sigma(m-1)}) + d(x_{\sigma(m-1)},x_{\sigma(n-1)}) + d(x_{\sigma(n-1)},(\mathbf{s}\circ\sigma)(n)) < \varepsilon, \end{aligned}$$

vagyis $\mathbf{s}\circ\sigma$ Cauchy-sorozat. ■

9.3.7. Következmény. *Ha (M, d) és $(M', d'))$ metrikus terek, valamint $f : M \to M'$ egyenletesen folytonos függvény, akkor minden $E \subseteq M$ d szerint teljesen korlátos halmazra az $f\langle E\rangle \subseteq M'$ halmaz teljesen korlátos d' szerint.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}'$ tetszőleges $f\langle E\rangle$-ben haladó sorozat. Ekkor kiválasztható olyan E-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat, amelyre $\mathbf{s}' = f \circ \mathbf{s}$. A Hausdorff-tétel szerint vehetünk olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot, amelyre $\mathbf{s}\circ\sigma$ Cauchy-sorozat d szerint. Ekkor $\mathbf{s}'\circ\sigma = f\circ(\mathbf{s}\circ\sigma)$, továbbá f egyenletes folytonossága és 9.1.5. miatt itt a jobb oldalon d' szerinti Cauchy-sorozat áll. Ezért ismét a Hausdorff-tétel alapján, az $f\langle E\rangle$ halmaz teljesen korlátos a d' metrika szerint. ■

9.4. A kompaktság metrikus jellemzése

A Bolzano-Weierstrass tétel és Hausdorff-tétel kombinálásával kapjuk a kompaktság következő *metrikus jellemzését.*

9.4.1. Tétel. (A kompaktság metrikus jellemzése) *Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljes és teljesen korlátos.*

Bizonyítás. A Bolzano-Weierstrass tétel bizonyítása során láttuk, hogy minden kompakt halmaz teljesen korlátos, továbbá teljes is. Megfordítva, ha (M, d) metrikus tér, és $K \subseteq M$ teljes és teljesen korlátos halmaz, akkor bármely K-ban haladó $\mathbf{s}$ sorozatnak a Hausdorff-tétel szerint létezik olyan részsorozata, amely Cauchy-sorozat, és egy ilyen részsorozat a K teljessége miatt konvergens, és a határértéke $\overline{K}$-nak eleme, vagyis K-nak is eleme, mert teljes halmaz zárt. Ezért a Bolzano-Weierstrass tétel alapján K kompakt halmaz. ■

Az előző tételben az a meghökkentő, hogy mind a teljesség, mind a teljes korlátosság *metrikus tulajdonságok*; ugyanakkor ezek *konjunkciója* a tétel alapján ekvivalens a kompaktsággal, ami viszont *topologikus tulajdonság.*

9.4.2. Következmény. *Teljes metrikus térben egy halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha relatív kompakt.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) teljes metrikus tér és $E \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz. Ekkor 9.3.5. alapján $\overline{E}$ is teljesen korlátos, és zárt, így 9.2.4. szerint teljes is. Ezért az előző tételből következik, hogy $\overline{E}$ kompakt, így E relatív kompakt halmaz az (M, d) teljes metrikus térben.

Megfordítva, ha (M, d) metrikus tér és $E \subseteq M$ relatív kompakt halmaz, akkor $\overline{E}$ kompakt, így 5.5.6. szerint $\overline{E}$ teljesen korlátos. Mivel 9.3.5. szerint teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza teljesen korlátos, így E is teljesen korlátos. ■

9.4.3. Állítás. *Ha E véges dimenziós normált tér, akkor minden $B \subseteq E$ halmazra a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *B korlátos.*

(ii) *B relatív kompakt.*

(iii) *B teljesen korlátos.*

(iv) *Minden B-ben haladó sorozatnak létezik korlátos részsorozata.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ha B korlátos, akkor 2.2.3. alapján $\overline{B}$ is korlátos és természetesen zárt, így a Heine–Borel-tételből (8.3.1.) következik, hogy kompakt, vagyis B relatív kompakt.

(ii)⇒(iii) Ha B relatív kompakt, akkor $\overline{B}$ kompakt, tehát a kompaktság metrikus jellemzése (9.4.1.) szerint teljesen korlátos, és mivel teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza teljesen korlátos (9.3.5.), így B teljesen korlátos.

(iii)⇒(iv) Ha B teljesen korlátos, akkor a teljes korlátosság sorozatokkal való jellemzése, vagyis a Hausdorff-tétel (9.3.6.) szerint minden B-ben haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely Cauchy-sorozat, továbbá a Cauchy-sorozatok korlátosak (3.6.2.), így minden B-ben haladó sorozatnak létezik korlátos részsorozata.

(iv)⇒(i) Tegyük fel, hogy B nem korlátos. Legyen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó monoton növő sorozat, amely nem korlátos $\mathbb{R}$-ben. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $B \setminus \mathrm{B}_{r_n}(0) \neq \emptyset$, így a kiválasztási axióma szerint $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}(B \setminus \mathrm{B}_{r_n}(0)) \neq \emptyset$. Legyen $\mathbf{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\mathbf{s}$ olyan B-ben haladó sorozat, hogy ha $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|(\mathbf{s} \circ \sigma)(n)\| \geq r_{\sigma(n)} \geq r_n$, ahol felhasználtuk azt, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\sigma(n) \geq n$ (**ENS** 3.8.6.). Tehát a B-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat minden részsorozata nem korlátos, vagyis (iv) nem igaz. ■

9.5. Véges dimenziós normált terek teljessége

9.5.1. Állítás. *Ha egy metrikus térben minden zárt gömb teljes halmaz, akkor a metrikus tér teljes.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) olyan metrikus tér, amelyben minden zárt gömb teljes halmaz, és legyen $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat M-ben. Ekkor $\mathbf{s}$ korlátos, ezért van olyan $B \subseteq M$ zárt gömb, amelyre $\mathrm{Im}(\mathbf{s}) \subseteq B$. A B halmaz teljessége miatt $\mathbf{s}$ konvergens, így (M, d) teljes metrikus tér. ■

9.5.2. Tétel. *Minden véges dimenziós normált tér Banach-tér.*

Bizonyítás. Véges dimenziós normált térben minden zárt gömb korlátos és zárt halmaz, tehát kompakt, így teljes is. Ezért az előző állítás szerint véges dimenziós normált tér teljes. ■

9.5.3. Következmény. *Normált tér minden véges dimenziós lineáris altere teljes* (*ezért zárt*) *halmaz.*

Bizonyítás. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $F \subseteq E$ véges dimenziós lineáris altér, akkor $(F, \|\cdot\||_F)$ véges dimenziós normált tér, tehát az előző állítás szerint teljes, következésképpen F teljes halmaz. ■

Példák (Banach-terekre).

1) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{K}^n$ tetszőleges normával ellátva Banach-tér, hiszen ez véges dimenziós normált tér.

2) Ha $p \geq 1$ tetszőleges valós szám, vagy $p = \infty$, akkor az $(l^p_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_p)$ sorozattér Banach-tér. Azonban $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ a $\|\cdot\|_p$ normák egyikének leszűkítésével ellátva sem Banach-tér. (A **FUN** 2.4.4. gyakorlatban majd megmutatjuk, hogy a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ vektortér felett egyáltalán

nem létezik olyan, norma, amellyel $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ Banach-tér.)

3) Ha T halmaz, akkor a $T \to \mathbb{K}$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{K})$ vektortere a sup-normával ellátva Banach-tér. Ezt a 11. pontban még általánosabb feltételek mellett is bizonyítani fogjuk.

9.5.4. Állítás. *Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Létezik olyan $x \in E$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy a $\overline{\mathrm{B}}_r(x; \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ gömb kompakt halmaz.*

(ii) *A $0 \in E$ vektornak létezik kompakt környezete.*

(iii) *Az E vektortér véges dimenziós.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Triviális.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Legyen minden $\varrho \in \mathbb{R}$ és $X \subseteq E$ esetén $\varrho.X := \{\varrho.x | x \in X\}$, továbbá minden $X, Y \subseteq E$ esetén $X + Y := \{x + y | (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$. Ha $\varrho \in \mathbb{R}$, akkor az $h_\varrho : E \to E;\ x \mapsto \varrho.x$ leképezés folytonos, így 8.1.1. szerint minden $K \subseteq E$ kompakt halmazra $\varrho.K = h_\varrho\langle K\rangle$ kompakt halmaz E-ben. Továbbá, ha V környezete E-ben a 0 vektornak, akkor minden $\varrho \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\varrho.V$ szintén környezete 0-nak, mert van olyan $R \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{B}_R(0) \subseteq V$, így $x \in E$ és $\|x\| < \varrho \cdot R$ esetén $\|\varrho^{-1}.x\| < R$, vagyis $\varrho^{-1}.x \in V$, azaz $x \in \varrho.V$, ami azt jelenti, hogy $\mathrm{B}_{\varrho \cdot R}(0) \subseteq \varrho.V$.

A (ii) feltétel alapján rögzítsük a 0-nak egy V kompakt környezetét. Ekkor a $2.V$ halmaz szintén kompakt környezete 0-nak, és $0 \in V$ miatt $2.V \subseteq \bigcup_{x \in 2.V} (x + V)$, ezért létezik olyan $H \subseteq 2.V$ *véges* halmaz, hogy $2.V \subseteq \bigcup_{x \in H} (x + V)$. Jelölje F a H által generált, szükségképpen véges dimenziós lineáris alteret E-ben. Ekkor $2.V \subseteq F + V$, és $F + 2.V \subseteq F + F + V = F + V$. Ebből kapjuk, hogy

$$F + 4.V = 2.F + 4.V = 2.(F + 2.V) \subseteq 2.(F + V) = 2.F + 2.V = F + 2.V \subseteq F + V.$$

Ezután teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $2^n.V \subseteq F + 2^n.V \subseteq F + V$. Ugyanakkor $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} 2^n.V$ is teljesül, ezért $E = F + V$. Ebből kiindulva megmutatjuk, hogy $E = F$, tehát E véges dimenziós. Ezt indirekt bizonyítjuk, tehát feltesszük egy $x \in E \setminus F$ vektor létezését. Az F altér *zárt*, ezért van a 0-nak olyan B nyílt gömbi környezete, amelyre $x + B \subseteq E \setminus F$, tehát $x \notin F + B$. Ezért minden $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $r.x \notin r.F + r.B = F + r.B$. A V halmaz korlátos is E-ben, hiszen kompakt, tehát van olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre $V \subseteq r.B$. Ekkor viszont $r.x \notin F + r.B$ miatt $x \notin F + V$, ami ellentmond annak, hogy $E = F + V$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Véges dimenziós normált térben minden korlátos és zárt halmaz kompakt. ■

9.6. Banach-terek jellemezése abszolút konvergens sorokkal

Most megadjuk a normált terek teljességének sorokkal való jellemzését. Ehhez szükségünk van a következő lemmára.

9.6.1. Lemma. *Legyen (M, d) metrikus tér és $\mathbf{s}$ egy M-ben haladó Cauchy-sorozat. Ekkor minden $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozathoz létezik $\mathbf{s}$-nek olyan $\mathbf{s}'$ részsorozata, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(\mathbf{s}'(n), \mathbf{s}'(n+1)) < \varepsilon_n$ teljesül.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\varepsilon'_n := \min_{0 \leq k \leq n} \varepsilon_k$. Ekkor $(\varepsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^*_+$-ban haladó *monoton fogyó* sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon'_n \leq \varepsilon_n$. Az $\mathbf{s}$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $j, k \in \mathbb{N}$ és $j, k \geq N$ esetén $d(\mathbf{s}(j), \mathbf{s}(k)) < \varepsilon'_n$ teljesül, továbbá, ha N ilyen, akkor minden N-nél nagyobb-egyenlő természetes szám is ilyen tulajdonságú. Ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $]n, \rightarrow [\cap \{N \in \mathbb{N} | (\forall j \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(((j \geq N) \wedge (k \geq N)) \Rightarrow (d(\mathbf{s}(j), \mathbf{s}(k)) < \varepsilon'_n))\}$ nem üres halmaz; legyen $f(n)$ e halmaz legkisebb eleme. Jelölje σ' a 0 kezdőpont és az imént bevezetett $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Tehát $\sigma' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre $\sigma'(0) := 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma'(n+1) := f(\sigma'(n))$, tehát $f(\sigma'(n)) \in]\sigma'(n), \rightarrow [$ miatt $\sigma'(n+1) > \sigma'(n)$, továbbá $\sigma'(n+1) \in \{N \in \mathbb{N} | (\forall j \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(((j \geq N) \wedge (k \geq N)) \Rightarrow (d(\mathbf{s}(j), \mathbf{s}(k)) < \varepsilon'_{\sigma'(n)}))\}$, következésképpen $d(\mathbf{s}(\sigma'(n+1)), \mathbf{s}(\sigma'(n+2))) < \varepsilon'_{\sigma'(n)}$. Legyen $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; $n \mapsto \sigma'(n+1)$; ekkor $\mathbf{s}' := \mathbf{s} \circ \sigma$ olyan részsorozata $\mathbf{s}$-nek, amelyre minden $\mathbb{N} \ni n$ esetén $d(\mathbf{s}'(n), \mathbf{s}'(n+1)) = d(\mathbf{s}(\sigma'(n+1)), \mathbf{s}(\sigma'(n+2))) < \varepsilon'_{\sigma'(n)} \leq \varepsilon'_n \leq \varepsilon_n$, hiszen $\sigma'(n) \geq n$, és $(\varepsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozat. ■

9.6.2. Tétel. *Normált tér pontosan akkor teljes, ha minden benne haladó abszolút konvergens sor konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\mathbf{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre a $\sum \mathbf{s}$ sor abszolút konvergens a $\|\cdot\|$ szerint. Ekkor $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ esetén vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \|\mathbf{s}(k)\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{s}(k)\| - \sum_{k=0}^{N} \|\mathbf{s}(k)\| < \varepsilon,$$

tehát minden $m, n > N$, $m \neq n$ természetes számra

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \mathbf{s}(k) - \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}(k) \right\| \leq \sum_{k=\min(m,n)}^{\max(m,n)} \|\mathbf{s}(k)\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|\mathbf{s}(k)\| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sum \mathbf{s}$ sor Cauchy-sorozat. Tehát ha $(E, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor minden E-ben haladó abszolút konvergens sor konvergens.

Legyen most $(E, \|\cdot\|)$ olyan normált tér, hogy minden E-ben haladó abszolút konvergens sor konvergens, és legyen $\mathbf{s}$ E-ben haladó Cauchy-sorozat. Rögzítsünk olyan $\mathbb{R}^*_+$-ban haladó $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre a $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Az előző lemma alkalmazásával vegyük az $\mathbf{s}$-nek egy olyan $\mathbf{s}'$ részsorozatát, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|\mathbf{s}'(k) - \mathbf{s}'(k+1)\| < \varepsilon_k$ teljesül. Értelmezzük azt az E-ben haladó $\mathbf{s}''$ sorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}''(k) := \mathbf{s}'(k+1) - \mathbf{s}'(k)$. Ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n} \|\mathbf{s}''(k)\| \leq \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k,$$

tehát a $\sum \mathbf{s}''$ sor abszolút konvergens, így a hipotézis alapján konvergens is. Ugyanakkor $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{s}'(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}''(k) + \mathbf{s}'(0),$$

tehát az $\mathbb{N} \rightarrow E$; $n \mapsto \mathbf{s}'(n+1)$ függvény *konvergens* részsorozata az $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozatnak, így $\mathbf{s}$ is konvergens. Ezért $(E, \|\cdot\|)$ Banach-tér. ■

9.7. Egyenletesen folytonos függvények kiterjesztése

9.7.1. Tétel. (Egyenletesen folytonos függvények kiterjesztése) *Tegyük fel, hogy (M,d), (M',d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Ha f egyenletesen folytonos és (M',d') teljes, akkor egyértelműen létezik f-nek folytonos kiterjesztése $\overline{\mathrm{Dom}(f)}$-ra, és ez a kiterjesztés is egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Ha $g_1, g_2 : \overline{\mathrm{Dom}(f)} \to M'$ olyan folytonos függvények, amelyek f-nek kiterjesztései, akkor g_1 és g_2 folytonosak a $d'' := d|_{\overline{\mathrm{Dom}(f)} \times \overline{\mathrm{Dom}(f)}}$ altérmetrika és d' szerint, továbbá $g_1 = g_2$ a $\mathrm{Dom}(f)$ halmazon, és $\mathrm{Dom}(f)$ sűrű $\overline{\mathrm{Dom}(f)}$-ben a d'' metrika szerint. Ezért az egyenlőségek folytatásának elve alapján $g_1 = g_2$.

Legyen $\mathbf{s}$ olyan $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladó sorozat, amely konvergens d szerint. Ekkor $\mathbf{s}$ a d metrika szerint Cauchy-sorozat, így f egyenletes folytonossága miatt $f \circ \mathbf{s}$ Cauchy-sorozat a d' metrika szerint. Az (M',d') metrikus tér teljessége következtében $f \circ \mathbf{s}$ konvergens a d' metrika szerint. Ezért a folytonos függvények kiterjesztésének tételéből következik, hogy f folytonosan kiterjeszthető $\overline{\mathrm{Dom}(f)}$-ra. Jelölje g ezt a kiterjesztést.

A g függvény egyenletes folytonosságának bizonyításához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, és rögzítsünk egy $\varepsilon' \in]0,\varepsilon[$ valós számot. Az f egyenletes folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$, amelyre minden $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén, ha $d(x_1,x_2) < \delta'$, akkor $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon'$. Legyen $\delta \in]0, \delta'/3]$ tetszőleges valós szám. Megmutatjuk, hogy minden $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathrm{Dom}(g)$ esetén, ha $d(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) < \delta$, akkor $d(f(\mathfrak{a}_1), f(\mathfrak{a}_2)) < \varepsilon$. Valóban, legynek $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathrm{Dom}(g)$ olyanok, hogy $d(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) < \delta$. Vegyünk olyan $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$ sorozatokat, amelyek $\mathrm{Dom}(f)$-ben haladnak, d szerint konvergensek, valamint $\mathfrak{a}_1 = \lim(\mathbf{s}_1)$ és $\mathfrak{a}_2 = \lim(\mathbf{s}_2)$. Rögzítsünk olyan $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ számokat, amelyekre $n \in \mathbb{N}$, $n > N_1$ esetén $d(\mathbf{s}_1(n), \mathfrak{a}_1) < \delta$, és $n \in \mathbb{N}$, $n > N_2$ esetén $d(\mathbf{s}_2(n), \mathfrak{a}_2) < \delta$. Tehát az $N := \max(N_1, N_2)$ szám rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n)) \le d(\mathbf{s}_1(n), \mathfrak{a}_1) + d(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) + d(\mathfrak{a}_2, \mathbf{s}_2(n)) < 3\delta < \delta',$$

következésképpen $d'(f(\mathbf{s}_1(n)), f(\mathbf{s}_2(n))) < \varepsilon'$. Ugyanakkor $f \circ \mathbf{s}_1 = g \circ \mathbf{s}_1$ és $f \circ \mathbf{s}_2 = g \circ \mathbf{s}_2$, ezért az átviteli elvet alkalmazva kapjuk, hogy $\lim(f \circ \mathbf{s}_1) = g(\mathfrak{a}_1)$ és $\lim(f \circ \mathbf{s}_2) = g(\mathfrak{a}_2)$. Ebből következik, hogy az

$$\mathbb{N} \to M' \times M'; \quad n \mapsto (f(\mathbf{s}_1(n)), f(\mathbf{s}_2(n)))$$

sorozat konvergens az (M',d') metrikus tér önmagával vett szorzatában, és a határértéke a $(g(\mathfrak{a}_1), g(\mathfrak{a}_2))$ pont. Ugyanakkor a $d' : M' \times M' \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos a szorzatmetrika szerint (sőt Lipschitz-függvény), ezért ismét az átviteli elvet alkalmazva kapjuk, hogy az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto d'(f(\mathbf{s}_1(n)), f(\mathbf{s}_2(n)))$$

valós sorozat konvergens, és a határértéke a $d'(g(\mathfrak{a}_1), g(\mathfrak{a}_2))$ szám. De minden $n > N$ természetes számra $d'(f(\mathbf{s}_1(n)), f(\mathbf{s}_2(n))) < \varepsilon'$, ezért $d'(g(\mathfrak{a}_1), g(\mathfrak{a}_2)) \le \varepsilon' < \varepsilon$, és ezt kellett igazolni. ■

A tételt gyakran abban a speciális esetben alkalmazzuk, amikor $\mathrm{Dom}(f)$ *sűrű* halmaz M-ben: ekkor azt mondjuk, hogy f *sűrűn értelmezett.* Tehát metrikus térben sűrűn értelmezett, teljes metrikus térbe ható, egyenletesen folytonos függvény egyértelműen kiterjeszthető az indulási metrikus térre folytonos függvénnyé, és ez a kiterjesztés automatikusan egyenletesen folytonos.

9.7.2. Következmény. *Legyenek (M, d), (M', d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Ha (M', d') teljes és* $\mathrm{Dom}(f)$ *relatív kompakt halmaz, akkor az f függvény pontosan akkor terjeszthető ki folytonosan $\overline{\mathrm{Dom}(f)}$-ra, ha f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Az egyenletesen folytonos függvények kiterjesztési tétele alapján a feltétel elégséges (még akkor is, ha $\mathrm{Dom}(f)$ nem relatív kompakt halmaz). Ha g az f folytonos kiterjesztése $\overline{\mathrm{Dom}(f)}$-ra, akkor a Heine-tétel alapján g egyenletesen folytonos, mert a feltevés szerint $\overline{\mathrm{Dom}(f)}$ kompakt, amiből következik, hogy f is szükségképpen egyenletesen folytonos függvény. ■

9.8. Metrikus tér teljesítése

Teljes metrikus térnek sok olyan metrikus altere létezhet, amely nem teljes; például minden nem zárt altere ilyen. Felvetődik a kérdés, hogy ha tekintjük a teljes metrikus terek metrikus altereit, akkor izomorfia erejéig megkapjuk-e az *összes* metrikus teret? Ha (M, d) olyan metrikus tér, amely metrikus altere a $(\widehat{M}, \widehat{d})$ teljes metrikus térnek, akkor az $(\overline{M}, \widehat{d}|_{\overline{M}\times\overline{M}})$ metrikus tér szintén teljes, és (M, d) sűrű metrikus altere ennek a térnek. Tehát az a kérdés, hogy vajon metrikus tér kibővíthető-e teljes metrikus térré úgy, hogy annak sűrű metrikus altere legyen?

Másként fogalmazva; ha egy metrikus tér nem teljes, akkor léteznek benne olyan Cauchy-sorozatok, amelyek nem konvergensek, tehát az a probléma, hogy a térhez hozzávehetők-e olyan pontok, és a kibővített halmazon értelmezhető-e olyan metrika, hogy:

– az eredeti metrikus tér metrikus altere legyen a bővítésnek;

– az eredeti tér Cauchy-sorozatainak létezzen határértékük a bővebb térben, csak a limeszpontok esetleg nincsenek benne az eredeti halmazban;

– a térbővítés teljes legyen, tehát az újabb Cauchy-sorozatok (amelyek nem az eredeti halmazban haladnak) szintén konvergensek legyenek a bővebb metrikus térben;

– a bővítés a "lehető legkisebb" legyen, amely eleget tesz az előző feltételeknek, például teljesüljön az, hogy az eredeti metrikus tér sűrű metrikus altere a térbővítésnek.

A metrikus terek előzőekben körvonalazott "teljesítéséről" szól a következő tétel.

9.8.1. Tétel. (Metrikus tér teljesítése) *Legyen (M, d) metrikus tér.*

a) *Létezik olyan $(\widehat{M}, \widehat{d})$ teljes metrikus tér, és létezik olyan $j : M \to \widehat{M}$ függvény, hogy j izometria a d és $\widehat{d}$ metrikák szerint, és $\mathrm{Im}(j)$ sűrű részhalmaza $\widehat{M}$-nak a $\widehat{d}$ metrika szerint.*

b) *Legyenek $((\widehat{M_1}, \widehat{d_1}), j_1)$ és $((\widehat{M_2}, \widehat{d_2}), j_2)$ olyan párok, hogy $(\widehat{M_1}, \widehat{d_1})$ és $(\widehat{M_2}, \widehat{d_2})$ teljes metrikus terek, továbbá $j_1 : M \to \widehat{M_1}$ és $j_2 : M \to \widehat{M_2}$ izometriák, valamint $\mathrm{Im}(j_1) \subseteq \widehat{M_1}$ sűrű $\widehat{d_1}$ szerint és $\mathrm{Im}(j_2) \subseteq \widehat{M_2}$ sűrű $\widehat{d_2}$ szerint. Ekkor létezik egyetlen olyan $f : \widehat{M_1} \to \widehat{M_2}$ leképezés, amely* **izometrikus bijekció** *a $\widehat{d_1}$ és $\widehat{d_2}$ metrikák szerint, és $f \circ j_1 = j_2$.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{M}$ az M-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozatok halmazát. Nevezzünk két M-ben haladó $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$ Cauchy-sorozatot *ekvivalensek* (jelben: $\mathbf{s}_1 \approx \mathbf{s}_2$), ha az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \mapsto d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n))$ számsorozat nullához konvergál. Ez az $\mathfrak{M}$ halmazon értelmezett $\approx$ reláció *ekvivalencia* $\mathfrak{M}$ felett. Valóban, a $\approx$ reláció $(\mathrm{M_I})$ miatt reflexív $\mathfrak{M}$-en, továbbá $(\mathrm{M_{II}})$ alapján szimmetrikus, végül a $\approx$ tranzitivitása egyszerűen adódik $(\mathrm{M_{III}})$-ból, és abból, hogy két valós zérussorozat összege is zérussorozat. Legyen $\widehat{M} := \mathfrak{M}/\approx$, és jelölje $j : M \to \widehat{M}$ azt a függvényt, amely minden $x \in M$ ponthoz az x értékű állandó-sorozat $\approx$ szerinti ekvivalencia-osztályát rendeli.

Megmutatjuk, hogy $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathfrak{M}$ esetén az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \mapsto d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n))$ számsorozat konvergens. Valóban, ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor a négyszög-egyenlőtlenség alapján

$$|d(\mathbf{s}_1(m), \mathbf{s}_2(m)) - d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n))| \leq d(\mathbf{s}_1(m), \mathbf{s}_1(n)) + d(\mathbf{s}_2(m), \mathbf{s}_2(n)),$$

és az $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ sorozatok Cauchy-sorozatok, ezért az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \mapsto d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n))$ sorozat Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben, vagyis konvergens.

Legyenek most $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}'_1 \in \mathfrak{M}$ és $\mathbf{s}_2, \mathbf{s}'_2 \in \mathfrak{M}$ olyan sorozatok, amelyekre $\mathbf{s}_1 \approx \mathbf{s}'_1$ és $\mathbf{s}_2 \approx \mathbf{s}'_2$; megmutatjuk, hogy ekkor $\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n)) = \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}'_1(n), \mathbf{s}'_2(n))$. Valóban, minden $\mathbb{N} \ni n$-re ismét a négyszög-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$|d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n)) - d(\mathbf{s}'_1(n), \mathbf{s}'_2(n))| \leq d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}'_1(n)) + d(\mathbf{s}_2(n), \mathbf{s}'_2(n))$$

adódik, továbbá $\mathbf{s}_1 \approx \mathbf{s}'_1$ és $\mathbf{s}_2 \approx \mathbf{s}'_2$ miatt itt a jobb oldalon zérussorozat áll.

Ezért jól értelmezett az a $\widehat{d} : \widehat{M} \times \widehat{M} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden $\xi_1, \xi_2 \in \widehat{M}$ esetén

$$\widehat{d}(\xi_1, \xi_2) := \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n)),$$

ahol $\mathbf{s}_1 \in \xi_1$ és $\mathbf{s}_2 \in \xi_2$ tetszőleges.

Megmutatjuk, hogy $(\widehat{M}, \widehat{d})$ metrikus tér. A d szimmetrikussága miatt $\widehat{d}$ nyilvánvalóan szimmetrikus, továbbá $\xi \in \widehat{M}$ esetén $\widehat{d}(\xi, \xi) = 0$ triviálisan teljesül. Ha $\xi_1, \xi_2 \in \widehat{M}$ és $\widehat{d}(\xi_1, \xi_2) = 0$, akkor bármely $\xi_1 \ni \mathbf{s}_1$-re és $\xi_2 \ni \mathbf{s}_2$-re $\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n))$, tehát $\mathbf{s}_1 \approx \mathbf{s}_2$, így $\xi_1 = \xi_2$. Ha $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \widehat{M}$ és $\mathbf{s}_1 \in \xi_1$, $\mathbf{s}_2 \in \xi_2$, $\mathbf{s}_3 \in \xi_3$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség alapján $d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_3(n)) \leq d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n)) + d(\mathbf{s}_2(n), \mathbf{s}_3(n))$, így

$$\widehat{d}(\xi_1, \xi_3) := \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_3(n)) \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n)) + \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}_2(n), \mathbf{s}_3(n)) = \widehat{d}(\xi_1, \xi_2) + \widehat{d}(\xi_2, \xi_3),$$

ami azt jelenti, hogy $\widehat{d}$-ra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Ezzel megmutattuk, hogy $(\widehat{M}, \widehat{d})$ metrikus tér.

Nyilvánvaló, hogy a $j : M \to \widehat{M}$ függvény izometria a d és $\widehat{d}$ metrikák szerint, hiszen ha $x_1, x_2 \in M$, akkor $\widehat{d}(j(x_1), j(x_2)) := \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n))$, ahol $\mathbf{s}_1$ (illetve $\mathbf{s}_2$) az x_1 (illetve x_2) értékű állandó-sorozat, és persze $\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}_1(n), \mathbf{s}_2(n)) = d(x_1, x_2)$.

Most megmutatjuk, hogy az $\mathrm{Im}(j) \subseteq \widehat{M}$ halmaz sűrű a $\widehat{d}$ metrika szerint. Ehhez legyen $\xi \in \widehat{M}$, és rögzítsünk egy $\mathbf{s} \in \xi$ elemet. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N$ esetén $d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) < \varepsilon$, tehát ha $m \in \mathbb{N}$ és $m > N$, akkor $\widehat{d}(j(\mathbf{s}(m)), \xi) = \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ esetén $\mathrm{Im}(j) \cap \overline{\mathrm{B}}_\varepsilon(\xi; \widehat{d}) \neq \emptyset$, vagyis $\mathrm{Im}(j)$ sűrű a $\widehat{d}$ metrika szerint.

Bebizonyítjuk az $(\widehat{M}, \widehat{d})$ metrikus tér teljességét. Legyen $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\widehat{M}$-ben haladó, $\widehat{d}$ szerinti Cauchy-sorozat. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^*_+$-ban haladó zérussorozat. Az előző bekezdés alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overset{-1}{j}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\xi_n; \widehat{d})\rangle \neq \emptyset$, ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk egy

$$\mathbf{s} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{j}\langle \mathrm{B}_{\varepsilon_n}(\xi_n; \widehat{d})\rangle$$

elemet. Ekkor $\mathbf{s}$ olyan M-ben haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\widehat{d}(j(\mathbf{s}(n)), \xi_n) < \varepsilon_n$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor van olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N_1$ esetén $\widehat{d}(\xi_m, \xi_n) \leq \varepsilon/3$, továbbá van olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $\varepsilon_n < \varepsilon/3$; ekkor $m, n \in \mathbb{N}$ és $m, n > \max(N_1, N_2)$ esetén

$$d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) = \widehat{d}(j(\mathbf{s}(m)), j(\mathbf{s}(n))) \leq$$
$$\leq \widehat{d}(j(\mathbf{s}(m)), \xi_m) + \widehat{d}(\xi_m, \xi_n) + \widehat{d}(\xi_n, j(\mathbf{s}(n))) < \varepsilon_m + \widehat{d}(\xi_m, \xi_n) + \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat d szerint, vagyis $\mathbf{s} \in \mathfrak{M}$. Jelölje ξ az $\mathbf{s}$ ekvivalencia-osztályát $\approx$ szerint, tehát $\xi \in \widehat{M}$ az a pont, amelyre $\mathbf{s} \in \xi$. Megmutatjuk, hogy a $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ξ-hez konvergál $\widehat{d}$ szerint. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N_1$ esetén $d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) \leq \varepsilon/2$, továbbá válasszunk olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $m > N_2$ esetén $\varepsilon_m < \varepsilon/2$. Ekkor $m \in \mathbb{N}$, $m > \max(N_1, N_2)$ esetén

$$\widehat{d}(\xi_m, \xi) \leq \widehat{d}(\xi_m, j(\mathbf{s}(m))) + \widehat{d}(j(\mathbf{s}(m)), \xi) < \varepsilon_m + \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) \leq \varepsilon_m + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{m\to\infty} \widehat{d}(\xi_m, \xi) = 0$, tehát a $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\widehat{d}$ szerint. Ezért $(\widehat{M}, \widehat{d})$ teljes metrikus tér.

Legyenek most $((\widehat{M_1}, \widehat{d_1}), j_1)$ és $((\widehat{M_2}, \widehat{d_2}), j_2)$ olyan párok, hogy $(\widehat{M_1}, \widehat{d_1})$ és $(\widehat{M_2}, \widehat{d_2})$ teljes metrikus terek, továbbá $j_1 : M \to \widehat{M_1}$ és $j_2 : M \to \widehat{M_2}$ izometriák, valamint $\mathrm{Im}(j_1) \subseteq \widehat{M_1}$ sűrű $\widehat{d_1}$ szerint és $\mathrm{Im}(j_2) \subseteq \widehat{M_2}$ sűrű $\widehat{d_2}$ szerint. Ha $f, f' : \widehat{M_1} \to \widehat{M_2}$ olyan folytonos függvények, hogy $f \circ j_1 = j_2 = f' \circ j_1$, akkor $f = f'$ az $\mathrm{Im}(j_1)$ halmazon, amelys sűrű $\widehat{M_1}$-ben $\widehat{d_1}$ szerint, továbbá f és f' folytonosak, így az egyenlőségek folytatásának elve alapján $f = f'$. Tehát legfeljebb egy olyan $f : \widehat{M_1} \to \widehat{M_2}$ folytonos függvény létezik, amelyre $f \circ j_1 = j_2$. Ilyen tulajdonságú f függvény létezésének bizonyításához először megjegyezzük, hogy a $j_2 \circ j_1{}^{-1} : \widehat{M_1} \rightarrowtail \widehat{M_2}$ függvény izometria (ezért egyenletesen folytonos) a $\widehat{d_1}$ és $\widehat{d_2}$ metrikák szerint, továbbá $\mathrm{Dom}(j_2 \circ j_1{}^{-1}) = \mathrm{Im}(j_1)$ a $\widehat{d_1}$ szerint sűrű halmaz $\widehat{M_1}$-ben, valamint $(\widehat{M_2}, \widehat{d_2})$ teljes metrikus tér. Ezért az egyenletesen folytonos függvények kiterjesztési tétele alapján létezik egyetlen olyan $f : \widehat{M_1} \to \widehat{M_2}$ folytonos függvény, amely a $j_2 \circ j_1{}^{-1}$-nek kiterjesztése, és ez a kiterjesztés automatikusan egyenletesen folytonos. Azonban az egyenlőségek folytatásának elve alapján f valójában izometria a $\widehat{d_1}$ és $\widehat{d_2}$ metrikák szerint. A definíció szerint $f = j_2 \circ j_1{}^{-1}$ az $\mathrm{Im}(j_1)$ halmazon, ezért $f \circ j_1 = j_2$. Megcserélve az $(\widehat{M_1}, \widehat{d_1})$ és $(\widehat{M_2}, \widehat{d_2})$ metrikus terek szerepét, az előző érvelést megismételve a $j_1 \circ j_2{}^{-1}$ függvényre azt kapjuk, hogy egyértelműen létezik olyan $g : \widehat{M_2} \to \widehat{M_1}$ folytonos függvény, amely kiterjesztése a $j_1 \circ j_2{}^{-1}$ függvénynek, tehát amelyre $g \circ j_2 = j_1$ teljesül. Ekkor fennállnak az $(f \circ g) \circ j_2 = f \circ j_1 = j_2$ és $(g \circ f) \circ j_1 = g \circ j_2 = j_1$ egyenlőségek, tehát $f \circ g = \mathrm{id}_{\widehat{M_2}}$ az $\mathrm{Im}(j_2)$ sűrű halmazon, és $g \circ f = \mathrm{id}_{\widehat{M_1}}$ az $\mathrm{Im}(j_1)$ sűrű halmazon. Az egyenlőségek folytatásának elve alapján $f \circ g = \mathrm{id}_{\widehat{M_2}}$ és $g \circ f = \mathrm{id}_{\widehat{M_1}}$. Ez azt azt jelenti, hogy f bijekció is (és $f^{-1} = g$). Tehát $f : \widehat{M_1} \to \widehat{M_2}$ olyan bijekció, amely izometria a $\widehat{d_1}$ és $\widehat{d_2}$ metrikák szerint, valamint kielégíti az $f \circ j_1 = j_2$ egyenlőséget. ■

Megjegyezzük, hogy az előző tétel b) pontjában szereplő $(\widehat{M_1}, \widehat{d_1})$ és $(\widehat{M_2}, \widehat{d_2})$ teljes metrikus terek között sok izometrikus bijekció létezhet, de az $f \circ j_1 = j_2$ feltétel ezek közül kitüntet pontosan egyet.

9.8.2. Definíció. *Az* (M, d) *metrikus tér* **teljes burkának** (*vagy* **teljesítésének**) *nevezünk minden olyan* $((\widehat{M}, \widehat{d}), j)$ *párt, amelyre* $(\widehat{M}, \widehat{d})$ *teljes metrikus tér,* $j : M \to \widehat{M}$ *izometria a* d *és* $\widehat{d}$ *metrikák szerint, valamint* $\mathrm{Im}(j)$ *sűrű* $\widehat{M}$*-ban* $\widehat{d}$ *szerint.*

Tehát az imént igazolt tétel szerint minden metrikus térnek *létezik* teljes burka, és bármely két teljes burka kitüntetett módon (*kanonikusan*) *azonosítható.* Speciálisan, minden metrikus tér izomorf egy teljes metrikus tér sűrű metrikus alterével.

Metrikus térnek általában nagyon sok teljes burka létezik. Amikor ezek közül rögzítünk egyet (például azt, amit a tétel bizonyításában előállítottunk), akkor azt mondjuk, hogy a teljes burkot *realizáltuk*, és minden konkrét teljes burkot a teljes burok *realizációjának* nevezünk. A következő állítás egy gyakran előforduló realizációt mutat be.

9.8.3. Állítás. *Legyen* (M, d) *metrikus tér,* (M', d') *teljes metrikus tér, és* $j : M \to M'$ *izometria a* d *és* d' *metrikák szerint. Ekkor az* $((\overline{\mathrm{Im}(j)}, d'|_{\overline{\mathrm{Im}(j)} \times \overline{\mathrm{Im}(j)}}), j)$ *pár az* (M, d) *metrikus térnek teljes burka.*

Bizonyítás. Teljes metrikus térben a zárt halmazok teljesek, ezért

$$(\overline{\mathrm{Im}(j)}, d'|_{\overline{\mathrm{Im}(j)} \times \overline{\mathrm{Im}(j)}})$$

teljes metrikus tér, és $\mathrm{Im}(j)$ természetesen sűrű ebben a metrikus térben. ■

Azonban ez az állítás nem helyettesítheti a metrikus terek teljesítéséről szóló tételt, mert *előre* nem tudjuk azt, hogy minden metrikus tér *izometrikusan* leképezhető-e egy *teljes* metrikus térbe? Ezzel kapcsolatos még a 11. pont **10**. gyakorlata.

9.8.4. Következmény. *Ha* (M, d) *teljes metrikus tér és* $E \subseteq M$*, akkor az*

$$\left(\left(\overline{E}, d|_{\overline{E} \times \overline{E}}\right), \mathrm{in}_{E,\overline{E}}\right)$$

pár teljesítése az $(E, d|_{E\times E})$ *metrikus altérnek.*■

A teljesítés segítségével könnyen jellemezhetjük a teljesen korlátos halmazokat metrikus terekben. Erről szól a következő állítás.

9.8.5. Állítás. *Legyen* (M, d) *metrikus tér. Az* $E \subseteq M$ *halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha az* $(E, d|_{E\times E})$ *metrikus altér teljesítése kompakt metrikus tér.*

Bizonyítás. Jelölje $\left(\left(\widehat{E}, \delta\right), j\right)$ az $(E, d|_{E\times E})$ metrikus altér teljes burkát.

Tegyük fel, hogy E teljesen korlátos a d metrika szerint. Ekkor az $(E, d|_{E\times E})$ metrikus altér teljesen korlátos és $j : E \to \widehat{E}$ izometria, tehát egyenletesen folytonos függvény, így 9.3.7. szerint a $j\langle E\rangle \subseteq \widehat{E}$ halmaz teljesen korlátos a δ metrika szerint. Ezért 9.3.5. alapján $\overline{j\langle E\rangle} = \widehat{E}$ is teljesen korlátos halmaz δ szerint. Mivel $\widehat{E}$ teljes halmaz a δ metrika szerint, így a kompaktság metrikus jellemzése (9.4.1.) szerint az $\left(\widehat{E}, \delta\right)$ metrikus tér kompakt.

Tegyük fel, hogy a $\left(\widehat{E}, \delta\right)$ metrikus tér kompakt. Ekkor ismét a kompaktság metrikus jellemzése (9.4.1.) szerint a $\widehat{E}$ halmaz teljesen korlátos a $\widehat{d|_{E\times E}}$ metrika szerint, így 9.3.5. alapján a $j\langle E\rangle \subseteq \widehat{E}$ halmaz is teljesen korlátos δ szerint, tehát a $\left(j\langle E\rangle, \delta|_{j\langle E\rangle \times j\langle E\rangle}\right)$ metrikus altér teljesen korlátos. Mivel a $j : E \to j\langle E\rangle$ leképezés izometrikus bijekció az $(E, d|_{E\times E})$ és $\left(j\langle E\rangle, \delta|_{j\langle E\rangle \times j\langle E\rangle}\right)$ metrikus alterek között, így az $(E, d|_{E\times E})$ metrikus altér is teljesen korlátos, tehát az E halmaz teljesen korlátos d szerint. ■

9.8.6. Definíció. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor azt mondjuk, hogy az $E \subseteq M$ halmaz* **prekompakt** *(a d metrika szerint), ha az $(E, d|_{E\times E})$ metrikus altér teljesítése kompakt metrikus tér.*

Tehát metrikus térben a prekompakt halmazok azonosak a teljesen korlátos halmazokkal, így metrikus terek esetében feleslegesnek tűnik a prekompaktság fogalmának bevezetése és alkalmazása. Azonban a metrikus terek fogalmának létezik olyan természetes általánosítása, az *uniform terek* fogalma, amelyekben kitüntetett metrikáról nincs szó, de bevezethető velük kapcsolatban az uniform altér és a teljes burok fogalma, így ezekben a terekben a prekompaktság az iménti definíció alapján metrika választása nélkül bevezethető, és fontos szerepet játszik.

9.9. Banach fixponttétele

9.9.1. Definíció. *Az f függvény* **fixpontjának** *nevezünk minden olyan $x \in \mathrm{Dom}(f)$ elemet, amelyre $f(x) = x$ teljesül.*

9.9.2. Definíció. *Legyen M halmaz és $f : M \to M$ függvény. Az id_M kezdőpont és az $\mathscr{F}(M; M) \to \mathscr{F}(M; M);\ h \mapsto f \circ h$ függvény által meghatározott iterációs sorozat n-edik tagját (ahol természetesen $n \in \mathbb{N}$) az f függvény* **n-edik iteráltjának** *nevezzük.*

Tehát ha M halmaz, $f : M \to M$ függvény, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jelöli az id_M kezdőpont és az $\mathscr{F}(M; M) \to \mathscr{F}(M; M);\ h \mapsto f \circ h$ függvény által meghatározott iterációs sorozatot, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re az f n-edik iteráltja az f_n függvény, és a definíció szerint az f nulladik iteráltja id_M, első iteráltja f, második iteráltja $f \circ f$, harmadik iteráltja $f \circ f \circ f$, s.í.t.

Teljes indukcióval könnyen látható, hogy ha M halmaz, $f : M \to M$ függvény, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az f iteráltjainak sorozata, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f \circ f_n = f_n \circ f$ teljesül. Valóban, ez $n = 0$-ra triviálisan igaz, mert $f_0 := \mathrm{id}_M$, és ha az $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, akkor az iteráltak definíciója és az indukciós hipotézis alapján

$$f \circ f_{n+1} = f \circ (f \circ f_n) = f \circ (f_n \circ f) = (f \circ f_n) \circ f = f_{n+1} \circ f,$$

vagyis az állítás $n + 1$-re is igaz.

9.9.3. Tétel. (Banach fixponttétele) *Ha (M, d) teljes metrikus tér, $M \neq \emptyset$, és $f : M \to M$ olyan függvény, amelynek valamelyik iteráltja kontrakció (7.13.1.), akkor f-nek létezik egyetlen fixpontja.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha az f függvény kontrakció, akkor f-nek egyértelműen létezik fixpontja. Ehhez rögzítünk olyan $C \in [0, 1[$ valós számot, amelyre minden $(x_1, x_2) \in M \times M$ esetén $d(f(x_1), f(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$ teljesül.

Ha x_1 és x_2 az f-nek fixpontjai, akkor $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$, ezért $x_1 \neq x_2$, vagyis $d(x_1, x_2) > 0$ esetén $1 \leq C$ teljesülne, holott $C < 1$. Ezért f-nek legfeljebb egy fixpontja lehet.

Az f fixpontja létezésének bizonyításához legyen $x_0 \in M$ tetszőlegesen rögzített pont, és jelölje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az x_0 kezdőpont és az f függvény által meghatározott iterációs sorozatot, vagyis minden $\mathbb{N} \ni n$-re $x_{n+1} = f(x_n)$.

Megmutatjuk, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $d(x_k, x_{k+1}) \leq C^k d(x_0, x_1))$ teljesül. Valóban, ez $k = 0$ esetén nyilván igaz, és ha a $k \in \mathbb{N}$ számra teljesül, akkor

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(f(x_k), f(x_{k+1})) \leq C d(x_k, x_{k+1}) \leq C^{k+1} d(x_0, x_1),$$

tehát az állítás $k+1$-re is teljesül. Most legyenek $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ tetszőlegesek; ekkor a háromszög-egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{n-1} C^k d(x_0, x_1) =$$

$$= C^m \left(\sum_{k=0}^{n-m-1} C^k \right) d(x_0, x_1) \leq C^m \frac{1 - C^{n-m}}{1 - C} d(x_0, x_1) \leq C^m \frac{1}{1 - C} d(x_0, x_1).$$

Ebből azonnal következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re

$$d(x_m, x_n) \leq \left(\frac{d(x_0, x_1)}{1 - C} \right) C^{\min(m,n)},$$

amiből látszik, hogy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, hiszen $C \in [0, 1[$ miatt $\lim\limits_{n \to \infty} C^n = 0$.

Az (M, d) metrikus tér teljessége miatt az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens; legyen $x := \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Ekkor x fixpontja f-nek, hiszen az $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat az f folytonossága és az átviteli elv alapján $f(x)$-hez konvergál, másfelől $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(x_n) = x_{n+1}$, tehát $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *részsorozata* az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatnak, így

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

teljesül.

Ezzel megmutattuk, hogy nem üres alaphalmazú teljes metrikus tér minden kontrakciójának létezik egyetlen fixpontja.

Most tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, amelyre az f n-edik iteráltja (amit f_n-nel jelölünk) kontrakció. Az előzőek alapján f_n-nek egyértelműen létezik fixpontja: legyen ez x. Ekkor $f(x) = f(f_n(x)) = f_n(f(x))$, vagyis $f(x)$ szintén fixpontja f_n-nek, így az f_n fixpontjának egyértelműsége miatt $f(x) = x$, vagyis x fixpontja f-nek is. Továbbá, ha x' szintén fixpontja f-nek, akkor teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k(x') = x'$ (ahol $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ az f iteráltjainak sorozata), ezért $f_n(x') = x'$ is teljesül, így ismét az f_n fixpontjának egyértelműsége miatt $x' = x$. Tehát f-nek egyértelműen létezik fixpontja. ■

A Banach-féle fixponttétel fenti bizonyítása eljárást is szolgáltat a fixpont meghatározására. Sőt még arra is becslést ad, hogy kontrakció esetében az x fixponthoz konvergáló $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iterációs sorozat milyen *gyorsan* konvergál x-hez, ugyanis $m \in \mathbb{N}$ esetén minden $n \in \mathbb{N}$, $n > m$ számra

$$d(x_m, x_n) \leq \left(\frac{d(x_0, x_1)}{1 - C} \right) C^m,$$

következésképpen

$$d(x_m, x) = \lim_{n \to \infty} d(x_m, x_n) \leq \left(\frac{d(x_0, x_1)}{1 - C} \right) C^m.$$

Ez azt mutatja, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iterációs sorozat annál gyorsabban konvergál x-hez, minél kisebb a $d(x_0, x_1) := d(x_0, f(x_0))$ távolság, vagyis az iteráció x_0 *kezdőpontja* minél közelebb van a fixponthoz, és minél kisebb a C *kontrakciós együttható*.

9.10. A fixpont paramétertől való folytonos függése

9.10.1. Tétel. (A fixpont paramétertől való folytonos függése) *Legyen* (M, d) *teljes metrikus tér,* (Λ, d_Λ) *metrikus tér, és* $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *olyan rendszer, amelyre minden* $\Lambda \ni \lambda$*-ra* $f_\lambda : M \to M$ *függvény, és teljesülnek a következők.*

– *Létezik olyan* $C \in [0, 1[$ *valós szám, amelyre minden* $\lambda \in \Lambda$ *és minden* $(x_1, x_2) \in M \times M$ *esetén* $d(f_\lambda(x_1), f_\lambda(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$*.*

– *Minden* $x \in M$ *pontra a* $\Lambda \to M$; $\lambda \mapsto f_\lambda(x)$ *függvény folytonos a* d_Λ *és* d *metrikák szerint.*

Ekkor egyértelműen létezik olyan $\xi : \Lambda \to M$ *függvény, amelyre minden* $\lambda \in \Lambda$ *esetén* $f_\lambda(\xi(\lambda)) = \xi(\lambda)$ *(vagyis* $\xi(\lambda)$ *fixpontja* f_λ*-nak), és a* ξ *függvény folytonos a* d_Λ *és* d *metrikák szerint.*

Bizonyítás. A ξ függvény egyértelmű létezése a Banach-féle fixponttételből következik, tehát csak a ξ folytonosságát kell igazolni.

Legyen $C \in [0, 1[$ olyan valós szám, amelyre minden $\lambda \in \Lambda$ és minden $(x_1, x_2) \in M \times M$ esetén $d(f_\lambda(x_1), f_\lambda(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$ teljesül. Ha $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, akkor

$$d(\xi(\lambda'), \xi(\lambda)) = d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda')), f_\lambda(\xi(\lambda))) \leq d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda')), f_{\lambda'}(\xi(\lambda)))+$$
$$+d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda)), f_\lambda(\xi(\lambda))) \leq Cd(\xi(\lambda'), \xi(\lambda)) + d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda)), f_\lambda(\xi(\lambda))),$$

amiből következik, hogy

$$d(\xi(\lambda'), \xi(\lambda)) \leq \left(\frac{1}{1-C}\right) d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda)), f_\lambda(\xi(\lambda))).$$

Legyen most $\lambda \in \Lambda$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített. A feltevés szerint a $\Lambda \to M$; $\lambda' \mapsto f_{\lambda'}(\xi(\lambda))$ függvény folytonos a λ pontban a d_Λ és d metrikák szerint, ezért az $(1-C)\varepsilon$ valós számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $\lambda' \in \mathrm{B}_\delta(\lambda; d_\Lambda)$ pontra $d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda)), f_\lambda(\xi(\lambda))) < (1-C)\varepsilon$. Ekkor minden $\lambda' \in \mathrm{B}_\delta(\lambda; d_\Lambda)$ pontra $d(\xi(\lambda'), \xi(\lambda)) < \varepsilon$ teljesül, tehát

$$\xi\langle \mathrm{B}_\delta(\lambda; d_\Lambda)\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(\xi(\lambda); d),$$

vagyis ξ a λ pontban folytonos a d_Λ és d metrikák szerint. ■

9.11. Gyakorlatok

1. Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljes és pszeudokompakt (8. pont, **5**. gyakorlat).

(*Útmutatás.* Minden pszeudokompakt halmaz teljesen korlátos (8. pont, **5**. gyakorlat).)

2. Ha (M, d) metrikus tér és létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $x \in M$ pontra a $\overline{\mathrm{B}}_r(x; d)$ gömb teljes halmaz, akkor (M, d) teljes.

(*Útmutatás.* Ha r ilyen szám, akkor minden M-ben haladó $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozathoz van olyan $x \in M$ és $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}(n) \in \overline{\mathrm{B}}_r(x; d)$.)

3. Legyen $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ esetén

$d(m,n) := 1 + \dfrac{1}{m+n}$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $d(n,n) := 0$. Ekkor $(\mathbb{N}, d)$ teljes metrikus tér (1. pont, **3**. gyakorlat).

(*Útmutatás.* Ha $\mathbf{s}$ egy $\mathbb{N}$-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat, akkor $\mathbf{s}$ *stacionárius*, vagyis létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{s}(n) = \mathbf{s}(N)$. Ez abból következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re, $m \neq n$ esetén $d(m,n) > 1$.)

4. Ha (M,d) metrikus tér, akkor minden M-ben haladó $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozatra és minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathbf{s}(n), \mathbf{s}(n+k)) = 0$. Ha (M,d) *ultrametrikus* tér, akkor egy M-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat d szerint, ha $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathbf{s}(n), \mathbf{s}(n+1)) = 0$. Azonban létezik olyan (M,d) metrikus tér, és olyan M-ben haladó $\mathbf{s}$ sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathbf{s}(n), \mathbf{s}(n+1)) = 0$, de $\mathbf{s}$ nem Cauchy-sorozat d szerint.

(*Útmutatás.* Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy ha (M,d) ultrametrikus tér, és $\mathbf{s}$ egy M-ben haladó sorozat, akkor minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re, $m < n$ esetén

$$d(\mathbf{s}(m), \mathbf{s}(n)) \leq \max_{m \leq k \leq n-1} d(\mathbf{s}(k), \mathbf{s}(k+1)),$$

így ha $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathbf{s}(n), \mathbf{s}(n+1)) = 0$, akkor $\mathbf{s}$ Cauchy-sorozat d szerint. Ha minden $\mathbb{N}^* \ni n$-re

$$\mathbf{s}(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

és $\mathbf{s}(0) := 0$, akkor $\mathbf{s}$ nem Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben az euklidészi metrika szerint (sőt nem is korlátos), de minden $N \ni n$-re $|\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n+1)| = \dfrac{1}{n+1}$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n+1)| = 0$.)

5. Legyen M az összes $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvények halmaza, és minden $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in M$ esetén, ha $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$, akkor

$$\delta(\mathbf{s}, \mathbf{s}') := \min\{n \in \mathbb{N} | \mathbf{s}(n) \neq \mathbf{s}'(n)\}.$$

Legyen $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amelyre $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in M$ esetén

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{s}') := \begin{cases} \dfrac{2 + \delta(\mathbf{s}, \mathbf{s}')}{1 + \delta(\mathbf{s}, \mathbf{s}')} & \text{, ha } \mathbf{s} \neq \mathbf{s}'; \\ 0 & \text{, ha } \mathbf{s} = \mathbf{s}'. \end{cases}$$

Ekkor (M,d) *szeparábilis* és *teljes* ultrametrikus tér.

6. Legyen (M,d) olyan metrikus tér, hogy M korlátos halmaz d szerint. Jelölje $\mathscr{H}$ az M nem üres és zárt részhalmazainak halmazát, továbbá

$$\varrho : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{R}_+; \quad (E,F) \mapsto \sup_{x \in E} \Big(\inf_{y \in F} d(x,y) \Big);$$
$$\mathbf{d} : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{R}_+; \quad (E,F) \mapsto \max(\varrho(E,F), \varrho(F,E)).$$

Ekkor $(\mathscr{H}, \mathbf{d})$ teljes metrikus tér.

7. Legyen $((M_k, d_k))_{k\in\mathbb{N}}$ metrikustér-sorozat és $\mathbf{c} := (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+^*$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Legyen

$$\mathrm{d}_{\mathbf{c}} : \Big(\prod_{k\in\mathbb{N}} M_k\Big) \times \Big(\prod_{k\in\mathbb{N}} M_k\Big) \to \mathbb{R}_+; \quad (\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d_k(\mathbf{s}(k), \mathbf{s}'(k))}{1 + d_k(\mathbf{s}(k), \mathbf{s}'(k))}.$$

Ha minden $\mathbb{N} \ni k$-ra (M_k, d_k) teljes metrikus tér, akkor a $\Big(\prod_{k\in\mathbb{N}} M_k, \mathrm{d}_{\mathbf{c}}\Big)$ metrikus tér is teljes.

8. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $((\widehat{E}, \widehat{\mathrm{d}}_{\|\cdot\|}), j)$ az $(E, \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ metrikus tér teljes burka. Ekkor létezik egyetlen olyan $\widehat{+} : \widehat{E} \times \widehat{E} \to \widehat{E}$ függvény, és létezik egyetlen olyan $\widehat{\cdot} : \mathbb{K} \times \widehat{E} \to \widehat{E}$ függvény, valamint létezik egyetlen olyan $\widehat{\|\cdot\|} : \widehat{E} \to \mathbb{R}_+$ függvény, hogy $(\widehat{E}, \widehat{+}, \widehat{\cdot})$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, és $(\widehat{E}, \widehat{\|\cdot\|})$ *Banach-tér*, továbbá j olyan *lineáris operátor* az E és $\widehat{E}$ vektorterek között, amely *norma-tartó*, vagyis minden $E \ni x$-re $\widehat{\|j(x)\|} = \|x\|$ teljesül. (Minden ilyen tulajdonságú $((\widehat{E}, \widehat{\mathrm{d}}_{\|\cdot\|}), j)$ párt az $(E, \|\cdot\|)$ *normált tér teljes-burkának* nevezünk. Megjegyezzük, hogy a VI. fejezetben megadjuk a normált terek teljes burkának egészen másféle realizációját.)

9. Legyen $\varepsilon \in [0, 1[$ tetszőleges valós szám.

- Minden $y \in \mathbb{R}$ számra az

$$x - \varepsilon \cdot \sin(x) = y$$

ε*-paraméterű Kepler-egyenlet* egyértelműen megoldható $\mathbb{R}$-ben.

- Ha $y \in \mathbb{R}$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan iterációs sorozat, amelyre $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $x_{n+1} = y + \varepsilon \cdot \sin(x_n)$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és az $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ szám megoldása az y jobboldalú Kepler-egyenletnek.

- Legyen $f : [0, 1[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre minden $\varepsilon\in[0, 1[$ és $y\in\mathbb{R}$ esetén $f(\varepsilon, y)\in\mathbb{R}$ az ε-paraméterű Kepler-egyenlet megoldása, vagyis

$$f(\varepsilon, y) - \varepsilon \cdot \sin(f(\varepsilon, y)) = y$$

teljesül. Ekkor f *folytonos* függvény.

10. Legyen $M := \mathbb{R}$, d az euklidészi metrika $\mathbb{R}$ felett, $\Lambda := [0, 1[$ és d_Λ az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika leszűkítése $[0, 1[\times[0, 1[$-re. Minden $\lambda \in \Lambda$ paraméterre legyen $f_\lambda : M \to M; x \mapsto \lambda\sqrt{1 + x^2}$. Ekkor létezik egyetlen olyan $\xi : \Lambda \to M$ függvény, amelyre minden $\Lambda \ni \lambda$-ra $f_\lambda(\xi(\lambda)) = \xi(\lambda)$, és ez a ξ függvény folytonos a d_Λ és d metrikák szerint, azonban *nem létezik* olyan $C > 0$ valós szám, hogy minden $\Lambda \ni \lambda$-ra és $M \ni x_1, x_2$-re $d(f_\lambda(x_1), f_\lambda(x_2)) \leq C d(x_1, x_2)$ teljesül.

10. fejezet

Ívszerűen összefüggő és összefüggő metrikus terek

10.1. Ívszerűen összefüggő halmazok és ívszerűen összefüggő metrikus terek

10.1.1. Definíció. *Ha M halmaz, akkor M-ben haladó* **görbének** *nevezünk minden olyan γ függvényt, amelyre* $\mathrm{Dom}(\gamma) \subseteq \mathbb{R}$ *intervallum és* $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq M$. *Ha M halmaz, akkor M-ben haladó* **ívnek** *nevezünk minden olyan M-ben haladó γ görbét, amelyre* $\mathrm{Dom}(\gamma)$ *nem üres kompakt intervallum $\mathbb{R}$-ben.*

Vigyázzunk arra, hogy egy görbét (ami függvény) ne tévesszünk össze annak értékkészletével (ami részhalmaza minden olyan halmaznak, amelyben a görbe halad)! Z
Ha M halmaz és $C \subseteq M$ legfeljebb kontinuum-számosságú halmaz, akkor nagyon sok olyan M-ben haladó görbe létezhet, amelynek értékkészlete egyenlő C-vel.

10.1.2. Definíció. *Ha M halmaz és γ M-ben haladó ív, akkor egyértelműen léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$ számok, hogy $a \leq b$ és* $\mathrm{Dom}(\gamma) = [a, b]$; *ekkor a $\gamma(a) \in M$ (illetve $\gamma(b) \in M$) pontot a γ ív* **kezdőpontjának** (*illetve* **végpontjának**) *nevezzük; továbbá azt mondjuk, hogy a γ ív* **zárt**, *ha a γ kezdőpontja egyenlő a végpontjával.*

Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy M ben haladó görbe $\mathbb{R} \rightarrowtail M$ függvény, és $\mathbb{R}$-t mindig metrikus térnek tekintjük az euklidészi metrikával ellátva, ezért van értelme az M-ben haladó görbék (speciálisan ívek) *folytonosságáról* beszélni.

Nem szabad fenntartások nélkül megbízni a folytonos ívekről alkotott intuitív képünk helyességében, mert egészen meghökkentő tulajdonságokkal rendelkező folytonos ívek is konstruálhatók. Létezik például olyan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-ben haladó folytonos ív, amelynek értékkészlete *egyenlő* a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzettel (V. fejezet, 11. pont, **13**. gyakorlat).

10.1.3. Definíció. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $C \subseteq M$ halmazt* **ívszerűen összefüggőnek** *nevezzük (a d metrika szerint), ha minden $x, y \in C$ ponthoz létezik olyan M-ben haladó γ folytonos ív, amelyre* $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq C$ *(vagyis γ a C halmazban halad), továbbá γ kezdőpontja az x és végpontja az y pont (amit úgy fejezünk ki, hogy γ* **összeköti** *az x és y pontokat). Az (M, d) metrikus teret* **ívszerűen összefüggőnek** *nevezzük, ha az M halmaz ívszerűen összefüggő a d metrika szerint.*

10.2. Csillaghalmazok ívszerű összefüggősége

10.2.1. Definíció. *Legyen E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett.*

– *Egy $C \subseteq E$ halmazt* **konvexnek** *nevezünk, ha minden $x, y \in C$ pontra az $[\![x, y]\!] := \{(1-t).x + t.y | t \in [0,1]\}$ halmaz (amit x kezdőpontú, y végpontú* **szakasznak** *nevezünk) részhalmaza C-nek.*

– *Egy $C \subseteq E$ halmazt* **csillaghalmaznak** *nevezünk, ha létezik olyan $c \in C$, amelyre minden $C \ni x$-re $[\![c, x]\!] \subseteq C$ (minden ilyen tulajdonságú $c \in C$ pontot a C halmaz* **csillagcentrumának** *nevezünk).*

Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{K}$ feletti vektortérben minden nem üres konvex halmaz olyan csillaghalmaz, amelynek minden pontja csillagcentrum. Azonban léteznek olyan csillaghalmazok, amelyeknek nem minden pontja csillagcentrum; természetesen ezek nem lehetnek konvexek.

Példák (ívszerűen összefüggő halmazokra).

1) Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor minden $\mathfrak{a} \in E$ pontra és $r > 0$ valós számra a $\mathrm{B}_r(\mathfrak{a}; \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ és $\overline{\mathrm{B}}_r(\mathfrak{a}; \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ gömbök konvex halmazok, hiszen $x, y \in E$ és $t \in [0,1]$ esetén

$$\|(1-t).x + t.y - \mathfrak{a}\| = \|(1-t).x + t.y - (1-t).\mathfrak{a} - t.\mathfrak{a}\| \leq (1-t)\|x - \mathfrak{a}\| + t.\|y - \mathfrak{a}\|,$$

ezért $\|x - \mathfrak{a}\|, \|y - \mathfrak{a}\| < r$ (illetve $\|x - \mathfrak{a}\|, \|y - \mathfrak{a}\| \leq r$) esetén $\|(1-t).x + t.y - \mathfrak{a}\| < r$ (illetve $\|(1-t).x + t.y - \mathfrak{a}\| \leq r$).

2) Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor minden $C \subseteq E$ csillaghalmaz *ívszerűen összefüggő* (természetesen a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrika szerint). Legyen ugyanis $c \in C$ csillagcentruma C-nek, és rögzítsük az $x, y \in C$ pontokat. A $\gamma : [0,1] \to E$ függvényt úgy értelmezzük, hogy minden $[0,1] \ni t$-re

$$\gamma(t) := \begin{cases} (1-2t).x + 2t.c & \text{, ha } t \in [0, 1/2[\\ (2-2t).c + (2t-1).y & \text{, ha } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Ekkor γ olyan E-ben haladó ív, amelyre $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ és $\mathrm{Im}(\gamma) = \gamma\langle[0, 1/2[\rangle \cup \gamma\langle[1/2, 1]\rangle = [\![x, c[\![\cup [\![c, y]\!] \subseteq C$. A γ függvény $[0, 1/2]$ és $[1/2, 1]$ intervallumokra vett leszűkítései folytonosak, ezért γ folytonos ív (7. pont, **2**. gyakorlat). Ez azt jelenti, hogy x és y összeköthetőek C-ben haladó folytonos ívvel, így C ívszerűen összefüggő.

3) Egy $C \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor konvex, ha intervallum. Ez a konvex halmazok, valamint a rendezés szerinti intervallumok definíciójának nyilvánvaló következménye.

10.3. Ívszerűen összefüggő halmaz folytonos függvény által létesített képe

10.3.1. Állítás. *Ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény, akkor minden $C \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, d szerint ívszerűen összefüggő halmazra $f\langle C\rangle$ a d' szerint ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyenek $x', y' \in f\langle C\rangle$ tetszőlegesek, és vegyünk olyan $x, y \in C$ pontokat,amelyekre $x' = f(x)$ és $y' = f(y)$. A C halmaz ívszerű összefüggősége miatt vehetünk olyan $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ számokat, és olyan $\gamma : [a, b] \to M$ folytonos ívet, amelyekre

$\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq C$, $x = \gamma(a)$ és $y = \gamma(b)$. A folytonos függvények kompozíciójának folytonossága következtében $f \circ \gamma : [a, b] \to M'$ folytonos függvény, és $\mathrm{Im}(f \circ \gamma) = f\langle \mathrm{Im}(\gamma) \rangle \subseteq f\langle C \rangle$, valamint $(f \circ \gamma)(a) = x'$ és $(f \circ \gamma)(b) = y'$. Ezért x' és y' összeköthetők $f\langle C \rangle$-ben haladó folytonos ívvel. ■

10.4. Összefüggő halmazok és össszefüggő metrikus terek

10.4.1. Definíció. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $C \subseteq M$ halmazt* **összefüggőnek** *nevezünk (a d metrika szerint), ha nem léteznek olyan $E, F \subseteq M$ halmazok, amelyekre $C = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Az (M, d) metrikus teret* **összefüggőnek** *nevezzük, ha M összefüggő halmaz a d metrika szerint.*

Legyen (M, d) metrikus tér. Ha $E \subseteq M$ olyan halmaz, amely egyszerre nyílt is és zárt is (röviden: *nyílt-zárt*), akkor $E = \mathrm{Int}(E)$ és $E = \overline{E}$, ezért $\overline{E} \setminus \mathrm{Int}(E) = \emptyset$. Ilyen halmaz például $\emptyset$ és M. Megfordítva, ha $E \subseteq M$ olyan halmaz, amelyre $\overline{E} \setminus \mathrm{Int}(E) = \emptyset$, akkor $\mathrm{Int}(E) \subseteq E \subseteq \overline{E}$ miatt $E = \mathrm{Int}(E)$ és $E = \overline{E}$, vagyis E nyílt-zárt halmaz. Másként fogalmazva: az $E \subseteq M$ halmaz pontosan akkor nyílt-zárt, ha $\overline{E} \setminus \mathrm{Int}(E) = \emptyset$. Ugyanakkor metrikus térben sok olyan halmaz létezhet amely nem nyílt-zárt; ilyen E halmazokra szükségképpen $\overline{E} \setminus \mathrm{Int}(E) \neq \emptyset$, vagyis az $\overline{E} \setminus \mathrm{Int}(E)$ halmaz *nem triviális.*

10.5. Az összefüggő terek topologikus jellemzése

10.5.1. Definíció. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ halmaz* **határának** *nevezzük (a d metrika szerint) az $\overline{E} \setminus \mathrm{Int}(E)$ halmazt, és ezt a halmazt $\mathrm{Fr}(E)$ vagy $\dot{E}$ jelöli.*

10.5.2. Állítás. *Ha (M, d) metrikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *(M, d) összefüggő metrikus tér.*

(ii) *Minden $E \subseteq M$ nyílt-zárt halmazra: $E = \emptyset$ vagy $E = M$. (Tehát M-nek csak triviális nyílt-zárt részhalmazai vannak.)*

(iii) *Minden $E \subseteq M$ halmazra: ha $E \neq \emptyset$ és $E \neq M$, akkor $\mathrm{Fr}(E) \neq \emptyset$. (Tehát az M minden nemtriviális részhalmazának a határa is nemtriviális.)*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Tegyük fel, hogy b) nem igaz, és legyen $E \subseteq M$ olyan nyílt-zárt halmaz, amelyre $E \neq \emptyset$ és $E \neq M$. Ekkor az $F := M \setminus E$ halmaz olyan, hogy $F \neq \emptyset$ és $F \neq M$, továbbá $M = E \cup F$, és F is nyílt-zárt részhalmaza M-nek, így $\overline{E} \cap F = E \cap F = \emptyset$ és $E \cap \overline{F} = E \cap F = \emptyset$, tehát M nem összefüggő halmaz, így a) nem igaz.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Tegyük fel, hogy c) nem igaz, és legyen $E \subseteq M$ olyan halmaz, amelyre $E \neq \emptyset$, $E \neq M$, azonban $\mathrm{Fr}(E) = \emptyset$. Ekkor E nyílt-zárt halmaz, és $E \neq \emptyset$, valamint $E \neq M$, tehát b) nem igaz.

(iii)$\Rightarrow$(i) Tegyük fel, hogy a) nem igaz, és legyenek $E, F \subseteq M$ olyan halmazok, amelyekre $M = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Ekkor $E \neq \emptyset$ és $E \neq M$, továbbá $\overline{E} \subseteq M \setminus F = E$ miatt $\overline{E} = E$. Ugyanakkor $\overline{F} \subseteq M \setminus E = F$ miatt $\overline{F} = F$, így $\mathrm{Int}(E) = M \setminus \overline{M \setminus E} = M \setminus F = E$. Ezért $\mathrm{Fr}(E) = \emptyset$, vagyis c) nem igaz. ■

10.6. Összefüggő halmazok speciális tulajdonságai

10.6.1. Állítás. *Legyen (M,d) metrikus tér és $C \subseteq M$ összefüggő halmaz. Ha $E \subseteq M$ olyan halmaz, amelyre $C \cap E \neq \emptyset$ és $C \cap (M \setminus E) \neq \emptyset$, akkor $C \cap \mathrm{Fr}(E) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen $E' := C \cap E$ és $F' := C \cap (M \setminus E)$. A hipotézis szerint $E' \neq \emptyset$ és $F' \neq \emptyset$, továbbá nyilvánvalóan $C = E' \cup F'$. A C halmaz összefüggő, ezért $E' \cap \overline{F'} \neq$ *vagy* $F' \cap \overline{E'} \neq \emptyset$. Ha $x \in E' \cap \overline{F'}$, akkor $x \in E \subseteq \overline{E}$ és $x \in \overline{F'}$ miatt az x minden környezete metszi $M \setminus E$-t, tehát x nem belső pontja E-nek, vagyis $x \notin \mathrm{Int}(E)$; ami azt jelenti, hogy $x \in \overline{E} \setminus \mathrm{Int}(E) = \mathrm{Fr}(E)$. Ha $x \in \overline{E'} \cap F'$, akkor $x \notin E$, így $x \notin \mathrm{Int}(E)$, továbbá $x \in \overline{E'} \subseteq \overline{E}$, vagyis $x \in \overline{E} \setminus \mathrm{Int}(E) = \mathrm{Fr}(E)$. Ez azt jelenti, hogy $(\overline{E'} \cap F') \cup (E' \cap \overline{F'}) \subseteq C \cap \mathrm{Fr}(E)$, tehát $C \cap \mathrm{Fr}(E) \neq \emptyset$. ■

10.7. Összefüggő metrikus alterek

10.7.1. Állítás. *Ha (M',d') metrikus altere az (M,d) metrikus térnek, és $C \subseteq M'$, akkor a C halmaz pontosan akkor összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő) a d' altér-metrika szerint, ha összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő) a d metrika szerint.*

Bizonyítás. Először megállapodunk abban, hogy minden $H \subseteq M'$ halmazra $\overline{H}$ jelöli a H lezárját M-ben a d metrika szerint, és $\tilde{H}$ jelöli a H lezártját M'-ben a d' altér-metrika szerint. Tudjuk, hogy $H \subseteq M'$ esetén $\tilde{H} = \overline{H} \cap M'$ teljesül.

Tegyük fel, hogy C nem összefüggő a d' altér-metrika szerint. Ekkor léteznek olyan $E', F' \subseteq C$ halmazok, amelyekre $C = E' \cup F'$, $E' \neq \emptyset \neq F'$, és $\tilde{E}' \cap F' = \emptyset = E' \cap \tilde{F}'$. Ugyanakkor

$$\overline{E'} \cap F' = \overline{E'} \cap (M' \cap F') = (\overline{E'} \cap M') \cap F' = \tilde{E}' \cap F' = \emptyset,$$

és hasonlóan látható, hogy $E' \cap \overline{F'} = \emptyset$, ezért C nem összefüggő M-ben a d metrika szerint. Megfordítva; tegyük fel, hogy C nem összefüggő a d metrika szerint. Ekkor léteznek olyan $E, F \subseteq C$ halmazok, amelyekre $C = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$, és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Világos, hogy ekkor $\tilde{E} \cap F = \emptyset = E \cap \tilde{F}$, így C nem összefüggő a d' altér-metrika szerint.

Az ívszerű összefüggőségre vonatkozó állítás nyilvánvalóan kövtkezik abból, hogy egy C-ben haladó ív pontosan akkor folytonos a d metrika szerint, ha a d' altér-metrika szerint folytonos. ■

10.7.2. Következmény. *Ha (M,d) metrikus tér és $C \subseteq M$, akkor a C halmaz pontosan akkor összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő) a d metrika szerint, ha a $(C, d|_{C \times C})$ metrikus tér összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő).*

Bizonyítás. Az előző állításból következik, az $(M', d') := (C, d|_{C \times C})$ választással. ■

10.8. Összefüggő halmaz folytonos függvény által létesített képe

A következő állítás a Bolzano-tétel általánosítása.

10.8.1. Állítás. *Ha (M,d) és (M',d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény, akkor minden $C \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, d szerint összefüggő halmazra $f\langle C \rangle$ a d' szerint összefüggő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $C \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ olyan halmaz, amelyre $f\langle C\rangle$ nem összefüggő; megmutatjuk, hogy ekkor C sem összefüggő.

A feltevés alapján léteznek olyan $E', F' \subseteq M'$ halmazok, hogy $f\langle C\rangle = E' \cup F'$, $E' \neq \emptyset \neq F'$ és $\overline{E'} \cap F' = \emptyset = E' \cap \overline{F'}$. Legyenek $E := C \cap \overset{-1}{f}\langle E'\rangle$ és $F := C \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle$; ekkor nyilvánvalóan $C = E \cup F$. A folytonosság topologikus jellemzése szerint $\overset{-1}{f}\langle \overline{E'}\rangle$ és $\overset{-1}{f}\langle \overline{F'}\rangle$ zárt halmazok a $d|_{\mathrm{Dom}(f)\times\mathrm{Dom}(f)}$ altérmetrika szerint, ezért $\overline{\overset{-1}{f}\langle E'\rangle} \cap \mathrm{Dom}(f) \subseteq \overset{-1}{f}\langle \overline{E'}\rangle$, valamint $\overline{\overset{-1}{f}\langle F'\rangle} \cap \mathrm{Dom}(f) \subseteq \overset{-1}{f}\langle \overline{F'}\rangle$, hiszen $\overline{\overset{-1}{f}\langle E'\rangle} \cap \mathrm{Dom}(f)$ (illetve $\overline{\overset{-1}{f}\langle F'\rangle} \cap \mathrm{Dom}(f)$) az $\overset{-1}{f}\langle E'\rangle$ (illetve $\overset{-1}{f}\langle F'\rangle$) halmaz lezártja a $d|_{\mathrm{Dom}(f)\times\mathrm{Dom}(f)}$ altérmetrika szerint. Ebből következik, hogy

$$\overline{E} \cap F := \overline{C \cap \overset{-1}{f}\langle E'\rangle} \cap (C \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle) \subseteq \overline{\overset{-1}{f}\langle E'\rangle} \cap \mathrm{Dom}(f) \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle \subseteq$$
$$\subseteq \overset{-1}{f}\langle \overline{E'}\rangle \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle = \overset{-1}{f}\langle \overline{E'} \cap F'\rangle = \emptyset,$$

és hasonlóan kapjuk, hogy

$$E \cap \overline{F} := (C \cap \overset{-1}{f}\langle E'\rangle) \cap \overline{C \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle} \subseteq \overset{-1}{f}\langle E'\rangle \cap \mathrm{Dom}(f) \cap \overline{\overset{-1}{f}\langle F'\rangle} \subseteq$$
$$\subseteq \overset{-1}{f}\langle E'\rangle \cap \overset{-1}{f}\langle \overline{F'}\rangle = \overset{-1}{f}\langle E' \cap \overline{F'}\rangle = \emptyset,$$

ezért $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$, így C nem összefüggő a d metrika szerint. ■

10.9. Az ívszerű összefüggőség és az össszefüggőség kapcsolata

Most tisztázzuk az összefüggőség és az ívszerű összefüggőség kapcsolatát. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára.

10.9.1. Lemma. *Egy $C \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor összefüggő az euklidészi metrika szerint, ha C konvex.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy C nem konvex, és legyenek $a, b \in C$ olyan pontok, hogy $a < b$, és az $[\![a, b]\!]$ szakasz (ami nem más, mint az $[a, b]$ intervallum) *nem része* C-nek, vagyis van olyan $c \in [a, b]$, amelyre $c \notin C$. Ekkor az $E :=]\leftarrow, c[\cap C$ és $F :=]c, \rightarrow[\cap C$ halmazokra $a \in E$, $b \in F$, $C = E \cup F$ nyilvánvalóan teljesül, továbbá

$$\overline{E} \cap F \subseteq \overline{]\leftarrow, c[} \cap]c, \rightarrow[=]\leftarrow, c] \cap]c, \rightarrow[= \emptyset,$$

valamint

$$E \cap \overline{F} \subseteq]\leftarrow, c[\cap \overline{]c, \rightarrow[} =]\leftarrow, c[\cap [c, \rightarrow[= \emptyset,$$

is nyilvánvalóan igaz, így C nem összefüggő. Tehát ha C összefüggő, akkor konvex.

Most tegyük fel, hogy C konvex; megmutatjuk, hogy C összefüggő. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy C konvex, de nem összefüggő. Legyenek $E, F \subseteq M$ olyan halmazok, amelyekre $C = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Legyenek

$a \in E$ és $b \in F$; az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $a < b$. Ekkor az $E' := [a, b] \cap E$ halmaz nem üres és felülről korlátos, ezért képezhető a $c := \sup(E')$ szám. Világos, hogy $c \in [a, b] \subseteq C$, mert C konvex, így $C = E \cup F$ miatt $c \in E$ vagy $c \in F$. Továbbá $c \in \overline{E'} \subseteq \overline{E}$, ezért $\overline{E} \cap F = \emptyset$ miatt $c \notin F$, vagyis $c \in E$. Ez azt jelenti, hogy $c \in E'$, vagyis c az E' halmaz *legnagyobb* eleme. Ugyanakkor $c \in E$ és $E \cap \overline{F} = \emptyset$ miatt $c \notin \overline{F}$, ezért van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $]c - \delta, c + \delta[\cap F = \emptyset$. Világos, hogy $c < b$, hiszen $b \in F$ és $c \notin F$, ezért δ megválasztható úgy, hogy $\delta < b - c$ teljesüljön. Ha $x \in]c, c + \delta[$, akkor $x \in [a, b]$, tehát $x \in E$ vagy $x \in F$; de $]c, c + \delta[\cap F = \emptyset$ miatt $x \notin F$, vagyis $x \in E$. Tehát a $]c, c + \delta[$ intervallum minden eleme E'-ben van és *nagyobb* c-nél, holott c az E' legnagyobb eleme; ez ellentmondás. ■

10.9.2. Állítás. *Metrikus térben ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $C \subseteq M$ ívszerűen összefüggő halmaz; megmutatjuk, hogy C összefüggő. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy C nem összefüggő; legyenek $E, F \subseteq M$ olyan halmazok, amelyekre $C = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Rögzítsünk $x \in E$ és $y \in F$ pontokat, és a C ívszerű összefüggőségét kihasználva vegyünk olyan C-ben haladó γ folytonos ívet, amely összeköti az x és y pontokat; legyen $\mathrm{Dom}(\gamma) = [a, b]$. Ekkor $[a, b] = \overset{-1}{\gamma}\langle E \rangle \cup \overset{-1}{\gamma}\langle F \rangle$, mivel $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq C = E \cup F$. Továbbá, $a \in \overset{-1}{\gamma}\langle E \rangle$, mert $\gamma(a) = x \in E$, és $b \in \overset{-1}{\gamma}\langle F \rangle$, mert $\gamma(b) = y \in F$. A folytonosság topologikus jellemzése alapján $\overset{-1}{\gamma}\langle \overline{E} \rangle$ és $\overset{-1}{\gamma}\langle \overline{F} \rangle$ zárt halmazok $[a, b]$-ben az euklidészi altérmetrika szerint. De az $[a, b]$ intervallum zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben az euklidészi metrika szerint, így $\overset{-1}{\gamma}\langle \overline{E} \rangle$ és $\overset{-1}{\gamma}\langle \overline{F} \rangle$ zárt halmazok $\mathbb{R}$-ben az euklidészi szerint. Ezért $\overline{\overset{-1}{\gamma}\langle E \rangle} \subseteq \overset{-1}{\gamma}\langle \overline{E} \rangle$ és $\overline{\overset{-1}{\gamma}\langle F \rangle} \subseteq \overset{-1}{\gamma}\langle \overline{F} \rangle$ teljesül. Ebből következik, hogy

$$\overline{\overset{-1}{\gamma}\langle E \rangle} \cap \overset{-1}{\gamma}\langle F \rangle \subseteq \overset{-1}{\gamma}\langle \overline{E} \rangle \cap \overset{-1}{\gamma}\langle F \rangle = \overset{-1}{\gamma}\langle \overline{E} \cap F \rangle = \emptyset$$
$$\overset{-1}{\gamma}\langle E \rangle \cap \overline{\overset{-1}{\gamma}\langle F \rangle} \subseteq \overset{-1}{\gamma}\langle E \rangle \cap \overset{-1}{\gamma}\langle \overline{F} \rangle = \overset{-1}{\gamma}\langle E \cap \overline{F} \rangle = \emptyset.$$

Ez azt jelenti, hogy az $[a, b]$ intervallum nem összefüggő halmaz $\mathbb{R}$-ben az euklidészi metrika szerint, ami ellentmond az előző lemmának. ■

10.9.3. Állítás. *Metrikus térben összefüggő halmaz lezártja összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, és $C \subseteq M$ olyan halmaz, amelyre $\overline{C}$ nem összefüggő; megmutatjuk, hogy ekkor C sem összefüggő.

A feltevés alapján legyenek $E, F \subseteq M$ olyan halmazok, amelyekre $\overline{C} = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Ekkor $C = (C \cap E) \cup (C \cap F)$, továbbá $\overline{C \cap E} \cap (C \cap F) \subseteq \overline{E} \cap F = \emptyset$ és $(C \cap E) \cap \overline{C \cap F} \subseteq E \cap \overline{F} = \emptyset$, tehát a C halmaz nem összefüggő, ha $C \cap E \neq \emptyset$ *és* $C \cap F \neq \emptyset$ teljesül.

Ha $C \cap E = \emptyset$ volna, akkor $C = C \cap F$, azaz $C \subseteq F$, így $\overline{C} \subseteq \overline{F}$ teljesülne. Ekkor $\overline{C} = \overline{C} \cap \overline{F} = (E \cup F) \cap \overline{F} = (E \cap \overline{F}) \cup (F \cap \overline{F}) = F$, hiszen $E \cap \overline{F} = \emptyset$. Ebből $\overline{C} = E \cup F$ miatt $E = \emptyset$ következne, holott $E \neq \emptyset$; ezért $C \cap E \neq \emptyset$.

Ha $C \cap F = \emptyset$ volna, akkor $C = C \cap E$, azaz $C \subseteq E$, így $\overline{C} \subseteq \overline{E}$ teljesülne. Ekkor $\overline{C} = \overline{C} \cap \overline{E} = (E \cup F) \cap \overline{E} = (E \cap \overline{E}) \cup (F \cap \overline{E}) = E$, hiszen $F \cap \overline{E} = \emptyset$. Ebből $\overline{C} = E \cup F$ miatt $F = \emptyset$ következne, holott $F \neq \emptyset$; ezért $C \cap F \neq \emptyset$. ■

Láttuk, hogy összefüggő halmaz lezártja összefüggő, azonban létezik ívszerűen összefüggő halmaz, amelynek a lezártja nem ívszerűen összefüggő, bár összefüggő.

Például a $C := [0,1] \times \{(t, \sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}_+^*\}$ halmaz összefüggő, mert az $\mathbb{R}_+^*$ halmaz összefüggő az euklidészi metrika szerint, és az

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (t, \sin(1/t))$$

leképezés az $\mathbb{R}$ és az $\mathbb{R}^2$ feletti euklidészi metrikák szerint folytonos, vagyis f $\mathbb{R}^2$-ben haladó folytonos görbe, ezért $\mathrm{Im}(f)$ ívszerűen összefüggő halmaz $\mathbb{R}^2$-ben, így összefüggő is. Ezért $\overline{\mathrm{Im}(f)}$ is összefüggő, ugyanakkor $C = \overline{\mathrm{Im}(f)}$, vagyis C összefüggő. Azonban igazolható, hogy C nem ívszerűen összefüggő halmaz $\mathbb{R}^2$-ben.

10.10. Normált térben nyílt halmaz összefüggőségének jellemzése

Habár az összefüggőségből általában nem következtethetünk az ívszerű összefüggőségre, létezik egy speciális halmaztípus, amelyre vonatkozóan az összefüggőség ekvivalens az ívszerű összefüggőséggel. Erről szól a következő tétel.

10.10.1. Tétel. *Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz és minden $\Omega \ni x, y$-hoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $(z_k)_{0 \le k \le n}$ rendszer E-ben, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$, és minden $0 \le k < n$ természetes számra $[\![z_k, z_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$.*

(ii) *Minden $\Omega \ni x, y$-hoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $(z_k)_{0 \le k \le n}$ rendszer E-ben, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$, és minden $0 \le k < n$ természetes számra $[\![z_k, z_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$.*

(iii) *Az Ω halmaz ívszerűen összefüggő.*

(iv) *Az Ω halmaz összefüggő.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Triviális.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Tegyük fel, hogy (ii) teljesül, és legyenek $x, y \in \Omega$. Vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot és olyan E-ben haladó $(z_k)_{0 \le k \le n}$ rendszert, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$, és minden $0 \le k < n$ természetes számra $[\![z_k, z_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$. Értelmezzük a $\gamma : [0,1] \to E$ függvény úgy, hogy $\gamma(1) := y$, és minden $t \in [0,1[$ esetén

$$\gamma(t) := (1 - \{nt\}).z_{[nt]} + \{nt\}.z_{[nt]+1},$$

ahol $\{nt\}$ (illetve $[nt]$) az $nt \in [0, n[$ valós szám törtrésze (illetve egészrésze). Könnyen látható, hogy minden $0 \le k < n$ természetes számra $\gamma(\frac{k}{n}) = z_k$, és γ leszűkítése a $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ intervallumra folytonos, hiszen $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ esetén

$$\gamma(t) = (1 + k - nt).z_k + (nt - k).z_{k+1}.$$

Ebből következik, hogy γ folytonos függvény (7. pont, **2**. gyakorlat), vagyis γ olyan E-ben haladó folytonos ív, amely összeköti az x és y pontokat. Továbbá nyilvánvaló, hogy minden $0 \le k < n$ természetes számra $\gamma\langle[k/n, (k+1)/n]\rangle = [\![z_k, z_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$, következésképpen

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \bigcup_{k \in n} \gamma\langle[k/n, (k+1)/n]\rangle \subseteq \Omega,$$

vagyis a γ ív Ω-ban halad. Ez azt jelenti, hogy Ω ívszerűen összefüggő halmaz.

(iii)⇒(iv) Ez a következtetés tetszőleges metrikus tér tetszőleges Ω részhalmazára igaz.

(iv)⇒(i) Tegyük fel, hogy Ω nem üres és összefüggő, továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Rögzítsünk egy $c \in \Omega$ pontot, és jelölje Ω_c azon $x \in \Omega$ pontok halmazát, amelyekhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer E-ben, hogy $z_0 = c$, $z_n = x$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[\![z_k, z_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$.

Először megmutatjuk, hogy Ω_c nyílt halmaz a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrika szerint. Legyen ugyanis $x \in \Omega_c$, és az Ω nyíltsága alapján vegyünk olyan $r \in]0, \varepsilon[$ valós számot, amelyre $\mathrm{B}_r(x, \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq \Omega$. Vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszert E-ben, hogy $z_0 = c$, $z_n = x$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[\![z_k, z_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$. Ha $x' \in \mathrm{B}_r(x, \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ és $z_{n+1} := x'$, akkor a $\mathrm{B}_r(x, \mathrm{d}_{\|\cdot\|})$ gömb konvexitása folytán $[\![z_n, z_{n+1}]\!] = [\![x, x']\!] \subseteq \mathrm{B}_r(x, \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq \Omega$; ezért a $(z_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ rendszer olyan, hogy $z_0 = c$, $z_{n+1} = x'$, és minden $0 \leq k < n+1$ természetes számra $[\![z_k, z_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{B}_r(x, \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq \Omega_c$, vagyis Ω_c nyílt halmaz.

Megmutatjuk, hogy $\overline{\Omega_c} \cap \Omega = \Omega_c$. Legyen $x \in \overline{\Omega_c} \cap \Omega$ rögzített, és ismét az Ω nyíltsága alapján vegyünk olyan $r \in]0, \varepsilon[$ valós számot, amelyre $\mathrm{B}_r(x, \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \subseteq \Omega$. Ekkor $x \in \overline{\Omega_c}$ miatt $\mathrm{B}_r(x, \mathrm{d}_{\|\cdot\|}) \cap \Omega_c \neq \emptyset$; legyen x' eleme ennek a halmaznak. Vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszert E-ben, hogy $z_0 = c$, $z_n = x'$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[\![z_k, z_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$. Ha $z_{n+1} := x$, akkor a $(z_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ rendszer olyan, hogy $z_0 = c$, $z_{n+1} = x$, és minden $0 \leq k < n+1$ természetes számra $[\![z_k, z_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$, tehát $x \in \Omega_c$. Ez azt jelenti, hogy $\overline{\Omega_c} \cap \Omega \subseteq \Omega_c$, és a fordított tartalmazás nyilvánvaló.

Állítjuk, hogy $\Omega = \Omega_c$. Tegyük fel, hogy nem így van, tehát Ω_c valódi részhalmaza Ω-nak, vagyis $\Omega \setminus \Omega_c \neq \emptyset$. Természetesen $c \in \Omega_c$, így $\Omega_c \neq \emptyset$. Ekkor az előző bekezdés alapján $\overline{\Omega_c} \cap (\Omega \setminus \Omega_c) = (\overline{\Omega_c} \cap \Omega) \setminus \Omega_c = \Omega_c \setminus \Omega_c = \emptyset$. Továbbá, ha $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_c} \cap \Omega_c$, akkor Ω_c nyílt környezete x-nek, ezért $(\Omega \setminus \Omega_c) \cap \Omega_c \neq \emptyset$, holott ez a metszethalmaz nyilvánvalóan üres. Ezért $\overline{\Omega \setminus \Omega_c} \cap \Omega_c = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy az $E := \Omega_c$ és $F := \Omega \setminus \Omega_c$ halmazok olyanok, hogy $\Omega = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$, vagyis Ω nem összefüggő halmaz. Tehát az $\Omega \neq \Omega_c$ hipotézis ellentmond a d) feltételnek.

Végül legyenek $x, y \in \Omega$ tetszőlegesek. Az előző bekezdés szerint $x, y \in \Omega_c$, tehát

- van olyan olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer E-ben, hogy $z_0 = c$, $z_n = x$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[\![z_k, z_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$, valamint
- van olyan olyan $n' \in \mathbb{N}$ és olyan $(z'_k)_{0 \leq k \leq n'}$ rendszer E-ben, hogy $z'_0 = c$, $z'_{n'} = y$, és minden $0 \leq k < n'$ természetes számra $[\![z'_k, z'_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$ és $\|z'_k - z'_{k+1}\| < \varepsilon$.

Legyen $(u_k)_{0 \leq k \leq n+n'}$ az az E-ben haladó rendszer, amelyre minden $0 \leq k \leq n+n'$ esetén

$$u_k := \begin{cases} z_{n-k} & \text{, ha } 0 \leq k \leq n \\ z'_{k-n} & \text{, ha } n < k \leq n+n' \end{cases}.$$

Ekkor $u_0 = x$, $u_{n+n'} = y$, és minden $0 \leq k < n+n'$ természetes számra $[\![u_k, u_{k+1}]\!] \subseteq \Omega$ és $\|u_k - u_{k+1}\| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy Ω-ra a) teljesül. ■

10.11. Összefüggő komponensek

10.11.1. Állítás. *Legyen (M, d) metrikus tér és $(C_i)_{i \in I}$ az M összefüggő részhalmazainak tetszőleges rendszere. Ha létezik olyan $x \in M$, amelyre minden $i \in I$ esetén $x \in C_i$, akkor $\bigcup_{i \in I} C_i$ összefüggő halmaz.*

Bizonyítás. Ha $I = \emptyset$, akkor $\bigcup_{i\in I} C_i = \emptyset$, tehát az állítás igaz, így feltehető, hogy $I \neq \emptyset$ és $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.

Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\bigcup_{i\in I} C_i$ nem összefüggő, és veszünk olyan $E, F \subseteq M$ halmazokat, amelyekre $\bigcup_{i\in I} C_i = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = \overline{F} \cap E$. Ha $i \in I$, akkor nyilvánvalóan $C_i = (C_i \cap E) \cup (C_i \cap F)$ és $\overline{C_i \cap E} \cap (C_i \cap F) \subseteq \overline{E} \cap F = \emptyset$, valamint $(C_i \cap E) \cap \overline{C_i \cap F} \subseteq E \cap \overline{F} = \emptyset$, így C_i összefüggősége miatt $C_i \cap E = \emptyset$ *vagy* $C_i \cap F = \emptyset$. Legyen $x \in \bigcap_{i\in I} C_i$ rögzített elem. Ekkor $x \in E \cup F$, tehát x az E és F diszjunkt halmazok közül pontosan az egyiknek eleme. Ha $x \in E$, akkor minden $i \in I$ esetén $x \in C_i \cap E$, ezért $C_i \cap F = \emptyset$. Ekkor $F = \bigcup_{i\in I}(C_i \cap F) = \emptyset$, holott $F \neq \emptyset$. Ezért $x \in F$, következésképpen minden $i \in I$ esetén $x \in C_i \cap F$, így $C_i \cap E = \emptyset$. Ekkor viszont $E = \bigcup_{i\in I}(C_i \cap E) = \emptyset$, holott $E \neq \emptyset$, és ez ellentmondás. ■

10.11.2. Állítás. *Ha (M, d) metrikus tér és $C \subseteq M$ nem üres összefüggő halmaz, akkor egyértelműen létezik M-nek olyan összefüggő részhalmaza, amely C-t tartalmazza, és amely tartalmazás tekintetében a legnagyobb a C halmazt tartalmazó összefüggő M-beli részhalmazok között.*

Bizonyítás. Az előző állítás szerint a C halmazt tartalmazó M-beli összefüggő részhalmazok *uniója* összefüggő, és természetesen tartalmazza az M minden olyan összefüggő részhalmazát, amely tartalmazza C-t. ■

10.11.3. Definíció. *Ha (M, d) metrikus tér és $C \subseteq M$ nem üres összefüggő halmaz, akkor a tartalmazás tekintetében legnagyobb, C-t tartalmazó M-beli összefüggő részhalmazt a C* **összefüggő komponensének** *nevezzük (a d metrika szerint). Ha (M, d) metrikus tér és $x \in M$, akkor az $\{x\}$ nem üres összefüggő halmaz összefüggő komponensét az x* **pont összefüggő komponensének** *nevezzük (a d metrika szerin).*

10.11.4. Állítás. *Metrikus térben nem üres összefüggő halmaz összefüggő komponense zárt halmaz.*

Bizonyítás. Egy C nem üres összefüggő halmaz összefüggő komponensének a lezártja összefüggő és tartalmazza a C halmazt, ezért részhalmaza a C összefüggő komponensének. ■

10.12. Gyakorlatok

1. Metrikus térben egy véges halmaz pontosan akkor összefüggő, ha legfeljebb egy elemű.

2. Ha (M, d) olyan összefüggő metrikus tér, hogy M nem korlátos halmaz, akkor semmilyen M-beli gömbfelület nem üres halmaz.
(*Útmutatás.* Ha $\mathfrak{a} \in M$, akkor a $d(\mathfrak{a}, \cdot) : M \to \mathbb{R}$ (egyenletesen) folytonos függvény értékkészlete, a Bolzano-tétel alapján, egyenlő az $\mathbb{R}_+$ intervallummal.)

3. Legyen (M, d) metrikus tér. Ha $x \in M$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, akkor legyen $E(x, \varepsilon)$ azon $y \in M$ pontok halmaza, amelyekhez van olyan $n \in \mathbb{N}^*$ és olyan M-ben haladó $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer, amelyre $x_0 = x$, $x_n = y$ és minden $k < n$ természetes számra $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$.

a) Minden $M \ni x$-re és $\mathbb{R}_+^* \ni \varepsilon$-ra az $E(x, \varepsilon)$ halmaz nyílt-zárt.

b) Ha (M, d) kompakt, akkor minden $x \in M$ pontra a $\bigcap\limits_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} E(x, \varepsilon)$ halmaz megegyezik az x pont nyílt-zárt környezeteinek a metszetével.

4. Legyen (M, d) olyan kompakt metrikus tér, amelyre minden $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $\overline{\mathrm{B}}_r(x; d) = \overline{\mathrm{B}_r(x; d)}$ teljesül. Ekkor M-ben minden gömb összefüggő halmaz.

(*Útmutatás.* Legyenek $x, y \in M$, $x \neq y$ és $B := \mathrm{B}_{d(y,x)}(x; d)$. Ekkor minden $\mathbb{R}_+^* \ni \varepsilon$-ra fennáll a

$$\{z \in M | d(z, x) < d(y, z)\} \subseteq E(y, \varepsilon)$$

tartalmazás (**3**. gyakorlat). Ebből a Weierstrass-féle maximum-minimum elv alkalmazásával, indirekt bizonyítással kapjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számra $x \in E(y, \varepsilon)$, és ebből következik az állítás.)

5. Legalább kétdimenziós normált térben minden gömbfelület ívszerűen összefüggő halmaz.

6. Összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő) halmazok véges rendszerének a szorzata a szorzatmetrika szerint összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő).

7. Ha (M, d) metrikus tér, és $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az M összefüggő részhalmazainak olyan sorozata, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$, akkor $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$ összefüggő halmaz.

(*Útmutatás.* Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $B_n := \bigcup\limits_{k=0}^{n} C_k$ halmaz összefüggő, és a $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat metszete tartalmazza a C_0 halmazt, amely nem üres, így $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$ összefüggő. Továbbá nyilvánvaló, hogy $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$.)

11. fejezet

Függvénysorozatok és függvénysorok határértéke

11.1. A pontonkénti limeszfüggvény

11.1.1. Definíció. *Legyen (M, d) metrikus tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{Im}(f_n) \subseteq M$. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat* **pontonkénti limeszfüggvényének** *nevezzük (a d metrika szerint) és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$-nel jelöljük azt a függvényt, amelyre*

$$\mathrm{Dom}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) :=$$

$$:= \left\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(f_n) \;\middle|\; \text{"az } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ sorozat konvergens a } d \text{ metrika szerint"} \right\},$$

és minden $x \in \mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ esetén

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

11.1.2. Definíció. *Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{Im}(f_k) \subseteq E$. Az $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat* **pontonkénti összegfüggvényének** *nevezzük (a $\|\cdot\|$ norma szerint) és $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$-val jelöljük azt a függvényt, amelyre*

$$\mathrm{Dom}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right) :=$$

$$:= \left\{ x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(f_k) \;\middle|\; \text{"a } \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) \text{ sor konvergens a } \mathrm{d}_{\|\cdot\|} \text{ metrika szerint"} \right\},$$

és minden $x \in \mathrm{Dom}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k\right)$ esetén

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Nyilvánvaló, hogy egy függvénysorozat pontonkénti limeszfüggvénye, illetve pontonkénti összegfüggvénye lehet az *üres függvény*. Világos, hogy a pontonkénti limeszfüggvény, illetve pontonkénti összegfüggvény fogalma *topologikus fogalom*, hiszen a sorozatok, illetve sorok konvergenciájának fogalma is az.

Példák (pontonkénti limeszfüggvényekre).

1) Legyen (M, d) metrikus tér és $F \subseteq M$ zárt halmaz. Van olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tartalmazás tekintetében monoton fogyó nyílthalmaz-sorozat, hogy $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ (7.14.3.). Kiválaszthatunk olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : M \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy minden $M \ni x$-re $0 \leq f(x) \leq 1$, és $\operatorname{supp}(f_n) \subseteq \Omega_n$, valamint $F \subseteq \{x \in M | f_n(x) = 1\}$. Ekkor fennáll a $\chi_F = \lim_{n\to\infty} f_n$ egyenőség, ugyanis $x \in F$ esetén $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ az 1 értékű állandó sorozat, tehát $\chi_F(x) = 1 = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, továbbá $x \in M \setminus F$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $x \notin \Omega_N$; ekkor minden $n > N$ természetes számra $f_n(x) = 0$, tehát $\chi_F(x) = 0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Ez azt jelenti, hogy a χ_F függvény előáll folytonos függvények pontonkénti limeszfüggvényeként, holott χ_F nem folytonos függvény, ha F nem nyílt-zárt halmaz.

2) Legyen $\mathbf{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, $c \in \mathbb{K}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}(k)(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k.$$

Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ függvény, és a definíció szerint ez a függvénysorozat *egyenlő* a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysorral, továbbá a $\lim_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvény *egyenlő* a $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k)(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ összegfüggvénnyel, ami viszont a definíció alapján egyenlő a $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c}$ elemi analitikus függvénnyel. Ezért a Cauchy–Hadamard-tétel szerint a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k)(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor pontonként konvergens a $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c; \mathbb{K})$ gömbön, ahol

$$\mathrm{R}_{\mathbf{a}} := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k}} & \text{, ha } 0 < \limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} < +\infty, \\ 0 & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = +\infty, \\ +\infty & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} |\mathbf{a}(k)|^{1/k} = 0, \end{cases}$$

és minden $z \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c; \mathbb{K})$ pontra $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k)(z - c)^k = \mathrm{P}_{\mathbf{a},c}(z)$, vagyis $\mathrm{P}_{\mathbf{a},c} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k)(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$.

11.2. Egyenletes konvergencia és lokálisan egyenletes konvergencia

Az 1) példa szerint metrikus terek között ható folytonos függvények pontonkénti limeszfüggvénye nem feltétlenül folytonos; ezt a tényt úgy is kifejezhetjük, hogy a folytonosság *nem öröklődik* a pontonkénti limeszfüggvényre. Később majd bevezetjük a normált terek között ható függvények differenciálhatóságának fogalmát, majd még később a mértéktéren értelmezett, Banach-térbe ható függvények integrálhatóságának fogalmát, és látni fogjuk, hogy sem a differenciálhatóság, sem az integrálhatóság nem öröklődik automatikusan a pontonkénti limeszfüggvényre.

Ezért felvetődik az a kérdés, hogy milyen konvergencia-fogalmat lehet bevezetni függvénysorozatokra úgy, hogy az erősebb legyen a pontonkénti konvergenciánál, és az e szerint konvergens függvénysorozatok limeszfüggvényei már örököljék a függvények fent említett analitikus tulajdonságait? Ebből a szempontból fontos bevezetni az *egyenletes konvergencia* fogalmát.

Itt arról van szó, hogy ha (M, d) metrikus tér, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{Im}(f_n) \subseteq M$, továbbá $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, akkor minden $E \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ halmazra teljesül az, hogy

$$(\forall t \in E)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)\ (n > N \Rightarrow d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon).$$

Tehát minden $t \in E$ ponthoz és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számhoz létezik olyan t-től és ε-tól függő $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden N-nél nagyobb n természetes számra az $f_n(t)$ és $f(t)$ pontok d szerinti távolsága kisebb ε-nál. Adott $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén a legkisebb ilyen tulajdonságú küszöbindexek is a $t \in E$ ponttól lényegesen függenek, és egyáltalán nem biztos az, hogy lehet olyan t-től független $N \in \mathbb{N}$ számot találni, hogy minden N-nél nagyobb n természetes számra és minden $t \in E$ pontra $d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon$ teljesüljön. Vagyis előfordulhat az, hogy a

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(\forall t \in E)(n > N \Rightarrow d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon)$$

kijelentés nem igaz, bár az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az E halmazon. Láthatóan ennek az a *logikai oka*, hogy ha $\mathbf{A}$ kijelentés és $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ különböző változók, akkor a $((\forall \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\mathbf{A}) \Rightarrow ((\exists \mathbf{y})(\forall \mathbf{x})\mathbf{A})$ kijelentés *nem logikai tétel*.

11.2.1. Definíció. *Legyen (M, d) metrikus tér, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{Im}(f_n) \subseteq M$ és $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat* **egyenletesen konvergens az E halmazon** *(a d metrika szerint), ha $E \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ (tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az E halmazon), és*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(\forall t \in E)\ (n > N \Rightarrow d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon)$$

teljesül.

11.2.2. Definíció. *Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{Dom}(f_n) \subseteq M$ és $\mathrm{Im}(f_n) \subseteq M'$. Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat* **lokálisan egyenletesen konvergens az E halmazon** *(a d és d' metrikák szerint), ha $E \subseteq \mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$, és az E minden pontjának létezik olyan V környezete (a d metrika szerint), hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $V \cap E$ halmazon (a d' metrika szerint).*

A definícióból látható, hogy ha egy függvénysorozat egyenletesen (illetve lokálisan egyenletesen) konvergens egy halmazon, akkor annak minden részhalmazán egyenletesen (illetve lokálisan egyenletesen) konvergens. Az is nyilvánvaló, hogy ha egy metrikus térből metrikus térbe vezető függvényekből álló sorozat egyenletesen konvergens egy halmazon, akkor azon lokálisan is egyenletesen konvergens; ennek megfordítása általában nem igaz.

11.3. Sup-metrika korlátos folytonos függvények terén

11.3.1. Állítás. *Legyen T halmaz, (M,d) nem üres metrikus tér, és tekintsük a $T \to M$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T;M)$ halmazát. Értelmezzük a következő $\mathbf{d}$ leképezést:*

$$\mathbf{d} : \mathscr{F}^b(T;M) \times \mathscr{F}^b(T;M) \to \mathbb{R}_+; \quad (f,g) \mapsto \sup_{t\in T} d(f(t),g(t)).$$

($\mathbb{R}_+$-beli üres rendszer szuprémuma definíció szerint egyenlő 0-val.) Ekkor $\mathbf{d}$ metrika az $\mathscr{F}^b(T;M)$ halmaz felett, és minden $\mathscr{F}^b(T;M)$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és $f \in \mathscr{F}^b(T;M)$ függvényre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ a $\mathbf{d}$ metrika szerint pontosan akkor teljesül, ha $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a T halmazon. Ha az (M,d) metrikus tér teljes, akkor az $(\mathscr{F}^b(T;M),\mathbf{d})$ metrikus tér is teljes.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy ha $f,g \in \mathscr{F}^b(T;M)$, akkor $\mathbf{d}(f,g)$ *véges*, mert $\mathrm{Im}(f)$ és $\mathrm{Im}(g)$ korlátossága miatt léteznek olyan $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in M$ pontok és $r,s \in \mathbb{R}_+^*$ számok hogy $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{B}_r(\mathfrak{a};d)$ és $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{B}_s(\mathfrak{b};d)$; ekkor minden $t \in T$ esetén $d(f(t),g(t)) \leq d(f(t),\mathfrak{a})+d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})+d(\mathfrak{b},g(t)) < r+d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})+s$, így $\mathbf{d}(f,g) \leq r+d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})+s$.

Ha $f,g \in \mathscr{F}^b(T;M)$, akkor $\mathbf{d}(f,g) = 0$ esetén minden $t \in T$ esetén $d(f(t),g(t)) \leq \mathbf{d}(f,g) = 0$ miatt $d(f(t),g(t)) = 0$, így $f(t) = g(t)$. Ez azt jelenti, hogy $f,g \in \mathscr{F}^b(T;M)$ esetén a $\mathbf{d}(f,g) = 0$ és $f = g$ kijelentések ekvivalensek.

Ha $f,g \in \mathscr{F}^b(T;M)$, akkor a d szimmetriája miatt $\mathbf{d}(f,g) := \sup\limits_{t\in T} d(f(t),g(t)) = \sup\limits_{t\in T} d(g(t),f(t)) = \mathbf{d}(g,f)$. Ha $f,g,h \in \mathscr{F}^b(T;M)$, akkor minden $T \ni t$-re fennáll a $d(f(t),g(t)) \leq d(f(t),h(t)) + d(h(t),g(t)) \leq \mathbf{d}(f,h) + \mathbf{d}(h,g)$ egyenlőtlenség, ezért $\mathbf{d}(f,g) \leq \mathbf{d}(f,h) + \mathbf{d}(h,g)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{d}$ metrika a $\mathscr{F}^b(T;M)$ halmaz felett.

Legyen $f \in \mathscr{F}^b(T;M)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{F}^b(T;M)$-ben haladó sorozat, amelyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ a $\mathbf{d}$ metrika szerint. Ez azt jelenti, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)\ (n > N \Rightarrow \mathbf{d}(f_n,f) < \varepsilon)$$

teljesül. Nyilvánvalóan ez matematikailag azzal egyenértékű, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(n > N \Rightarrow (\forall t \in T)\ d(f_n(t),f(t)) < \varepsilon),$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)\ (\forall t \in T)(n > N \Rightarrow d(f_n(t),f(t)) < \varepsilon).$$

Ebből a kijelentésből *logikailag következik* az, hogy

$$(\forall t \in T)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in N)(n > N \Rightarrow d(f_n(t),f(t)) < \varepsilon).$$

Ez azt jelenti, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens a T halmazon és $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Ugyanakkor az utolsó előtti formula azt mutatja, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen is konvergens a T halmazon.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{F}^b(T;M)$-ben haladó sorozat, amely egyenletesen konvergens a T halmazon, és legyen $f \in \mathscr{F}^b(T;M)$ olyan függvény, hogy $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Ekkor a definíció szerint

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(\forall t \in T)\ (n > N \Rightarrow d(f_n(t),f(t)) < \varepsilon)$$

teljesül, ami *logikailag ekvivalens* azzal, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(n > N \Rightarrow (\forall t \in T)\ d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon).$$

Ez viszont nyilvánvalóan maga után vonja azt, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)\ (n > N \Rightarrow \mathbf{d}(f_n, f) := \sup_{t \in T} d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon),$$

ami azt jelenti, hogy $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ a $\mathbf{d}$ metrika szerint.

Tegyük fel, hogy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{F}^b(T; M)$-ben haladó sorozat, amely a $\mathbf{d}$ metrika szerint Cauchy-sorozat. Ekkor

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in N)(\forall n \in N)\ (((m > N) \wedge (n > N)) \Rightarrow \mathbf{d}(f_m, f_n) < \varepsilon)$$

teljesül. Nyilvánvalóan ez matematikailag azzal egyenértékű, hogy

$$\begin{gathered}(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in N)(\forall n \in N)\\ (((m > N) \wedge (n > N)) \Rightarrow (\forall t \in T)\ d(f_m(t), f_n(t)) < \varepsilon),\end{gathered}$$

ami logikailag ekvivalens azzal, hogy

$$\begin{gathered}(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in N)(\forall n \in N)(\forall t \in T)\\ (((m > N) \wedge (n > N)) \Rightarrow d(f_m(t), f_n(t)) < \varepsilon).\end{gathered}$$

Ebből logikailag következik, hogy

$$\begin{gathered}(\forall t \in T)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in N)(\forall n \in N)\\ (((m > N) \wedge (n > N)) \Rightarrow d(f_m(t), f_n(t)) < \varepsilon),\end{gathered}$$

ami pontosan azt jelenti, hogy minden $t \in T$ esetén az $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat a d metrika szerint Cauchy-sorozat M-ben.

Tegyük most fel, hogy (M, d) teljes metrikus tér. Ekkor a fentiek szerint minden $t \in T$ esetén az $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens M-ben a d metrika szerint, vagyis a $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens T-n; legyen $f := \lim\limits_{n \to \infty} f_n$. Meg fogjuk mutatni, hogy $f \in \mathscr{F}^b(T; M)$, és az $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat a $\mathbf{d}$ metrika szerint konvergál f-hez.

Az f pontonkénti limeszfüggvény korlátosságának bizonyításához megjegyezzük, hogy az $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat korlátos a $\mathbf{d}$ metrika szerint (hiszen Cauchy-sorozat $\mathbf{d}$ szerint), ezért vehetünk olyan $h \in \mathscr{F}^b(T; M)$ függvényt és $r \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n \in \mathrm{B}_r(h; \mathbf{d})$, így minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in T$ esetén $d(f_n(t), h(t)) \leq \mathbf{d}(f_n, h) < r$. A h függvény korlátos, tehát van olyan $\mathfrak{a} \in M$ és $s \in \mathbb{R}_+^*$, hogy $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{B}_s(\mathfrak{a}; d)$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in T$ esetén $d(f_n(t), \mathfrak{a}) \leq d(f_n(t), h(t)) + d(h(t), \mathfrak{a}) < r + s$, tehát minden $t \in T$ pontra

$$d(f(t), \mathfrak{a}) := d(\lim_{n \to \infty} f_n(t), \mathfrak{a}) = \lim_{n \to \infty} d(f_n(t), \mathfrak{a}) \leq r + s,$$

vagyis $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{B}_{r+s}(\mathfrak{a}; d)$, azaz $f \in \mathscr{F}^b(T; M)$. Láthatóan itt az átviteli elvet alkalmaztuk a $d(\cdot, \mathfrak{a}) : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre.

Azt kell még igazolni, hogy az $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat a $\mathbf{d}$ metrika szerint konvergál f-hez. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és vegyünk egy $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ valós számot. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra, $m > N$ és $n > N$ esetén $\mathbf{d}(f_m, f_n) < \varepsilon'$.

Ha $t \in T$ és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > N$, akkor minden $m > N$ természetes számra $d(f_m(t), f_n(t)) \leq \mathbf{d}(f_m, f_n) < \varepsilon'$, ezért az átviteli elvet alkalmazva a $d(\cdot, f_n(t)) : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre kapjuk, hogy

$$d(f(t), f_n(t)) = \lim_{m\to\infty} d(f_m(t), f_n(t)) \leq \varepsilon',$$

ezért $\mathbf{d}(f, f_n) := \sup_{t\in T} d(f(t), f_n(t)) \leq \varepsilon' < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a $\mathbf{d}$ metrika szerint konvergál f-hez. Tehát ha (M, d) teljes metrikus tér, akkor az $(\mathscr{F}^b(T; M), \mathbf{d})$ metrikus tér is teljes. ■

11.3.2. Definíció. *Legyen T halmaz, (M, d) metrikus tér, és $\mathscr{F}^b(T; M)$ a $T \to M$ korlátos függvények halmaza. Ekkor a*

$$\mathscr{F}^b(T; M) \times \mathscr{F}^b(T; M) \to \mathbb{R}_+; \quad (f, g) \mapsto \sup_{t\in T} d(f(t), g(t))$$

leképezést a (d által meghatározott) **sup-metrikának** *nevezzük $\mathscr{F}^b(T; M)$ felett. Azt mondjuk, hogy a $\mathscr{F}^b(T; M)$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat* **egyenletesen korlátos az $E \subseteq T$ halmazon** *(a d metrika szerint), ha az $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n\langle E\rangle$ halmaz korlátos M-ben a d metrika szerint.*

Könnyen látható, hogy ha T halmaz és (M, d) metrikus tér, akkor egy $\mathscr{F}^b(T; M)$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor egyenletesen korlátos a T halmazon, ha az $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(f_n)$ halmaz korlátos M-ben a d metrika szerint, ami ekvivalens azzal, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a sup-metrika szerint korlátos.

11.3.3. Állítás. *Legyen T halmaz és $(F, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a $T \to F$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T; F)$ vektortere felett a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ által meghatározott sup-metrika normálható a*

$$|||\cdot||| : \mathscr{F}^b(T; F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t\in T} \|f(t)\|$$

normával, tehát az $(\mathscr{F}^b(T; F), |||\cdot|||)$ pár olyan normált tér, amelyre $\mathrm{d}_{|||\cdot|||}$ egyenlő a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ által meghatározott sup-metrikával. Ha az $(F, \|\cdot\|)$ pár Banach-tér, akkor az $(\mathscr{F}^b(T; F), |||\cdot|||)$ pár is Banach-tér.

11.3.4. Definíció. *Legyen T halmaz, $(F, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\mathscr{F}^b(T; F)$ a $T \to F$ korlátos függvények vektortere. Ekkor a*

$$\mathscr{F}^b(T; F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t\in T} \|f(t)\|$$

leképezést a ($\|\cdot\|$ által meghatározott) **sup-normának** *nevezzük $\mathscr{F}^b(T; F)$ felett, és a $|||\cdot|||$ szimbólummal jelöljük.*

11.4. A folytonosság öröklődése pontonkénti limeszfüggvényre

11.4.1. Állítás. *Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja $M \rightarrowtail M'$ függvény. Ha $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)$*

olyan pont, hogy az $\{n \in \mathbb{N} | f_n$ *folytonos* $\mathfrak{a}$*-ban*$\}$ *halmaz végtelen, és létezik olyan* V *környezete* $\mathfrak{a}$*-nak, hogy az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat egyenletesen konvergens a* $V \cap \mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ *halmazon, akkor a* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *pontonkénti limeszfüggvény is folytonos az* $\mathfrak{a}$ *pontban.*

Bizonyítás. Legyen $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Válasszunk egy $\varepsilon' \in]0, \varepsilon/3]$ valós számot. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $V \cap \mathrm{Dom}(f)$ halmazon, ezért ε'-höz vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $n > N$ természetes számra, és minden $x \in V \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra $d'(f(x), f_n(x)) < \varepsilon'$. Ekkor $\mathfrak{a} \in V \cap \mathrm{Dom}(f)$ miatt minden $n > N$ természetes számra $d'(f(\mathfrak{a}), f_n(\mathfrak{a})) < \varepsilon'$ is teljesül. Tehát ha $n > N$ tetszőleges természetes szám, akkor minden $x \in V \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra

$$d'(f(x), f(\mathfrak{a})) \leq d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(\mathfrak{a})) + d'(f_n(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{a})) <$$
$$< \varepsilon' + d'(f_n(x), f_n(\mathfrak{a})) + \varepsilon'.$$

A hipotézis alapján rögzíthetünk olyan $n > N$ természetes számot, amelyre f_n folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, hiszen az $\{n \in \mathbb{N} | f_n$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban$\}$ halmaz végtelen. Ekkor ε'-höz van olyan $V_\mathfrak{a}$ környezete $\mathfrak{a}$-nak M-ben a d metrika szerint, hogy minden $x \in V_\mathfrak{a} \cap \mathrm{Dom}(f_n)$ pontra $d'(f_n(x), f_n(\mathfrak{a})) < \varepsilon'$; ekkor az előzőek alapján minden $x \in V \cap V_\mathfrak{a} \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra $d'(f(x), f(\mathfrak{a})) < 3\varepsilon' \leq \varepsilon$, így $f\langle V \cap V_\mathfrak{a}\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}), d')$. Tehát, ha $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan, hogy $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d) \subseteq V \cap V_\mathfrak{a}$, akkor $f\langle \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); d')$, ami azt jelenti, hogy f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

11.4.2. Következmény. *Legyenek* (M, d) *és* (M', d') *metrikus terek, továbbá* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja* $M \rightarrowtail M'$ *folytonos függvény. Ha az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a* $\mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ *halmazon, akkor a* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *függvény folytonos.*

Bizonyítás. A feltétel szerint minden $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ pontnak van olyan V környezete, amelyre az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $V \cap \mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ halmazon, továbbá az $\{n \in \mathbb{N} | f_n$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban$\} = \mathbb{N}$ halmaz végtelen ezért az előző állítás alapján a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Speciálisan, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $\mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ halmazon egyenletesen konvergens, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n folytonos, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény folytonos.

11.4.3. Következmény. *Legyen* (M, d) *metrikus tér és* $(F, \|\cdot\|)$ *normált tér. Az* $M \to F$ *folytonos és korlátos függvények* $\mathscr{C}^b(M; F)$ *halmaza a sup-norma szerint zárt lineáris altere az* $(\mathscr{F}^b(M; F), \|\cdot\|_{\sup})$ *normált térnek. Ha* $(F, \|\cdot\|)$ *Banach-tér, akkor* $\mathscr{C}^b(M; F)$ *a sup-norma szerint teljes halmaz* $\mathscr{F}^b(M; F)$*-ben.*

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{F}^b(M; F)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{C}^b(M; F)$-ben haladó sorozat, amely a sup-norma szerint konvergál f-hez, akkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon, és f egyenlő a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvénnyel, ezért f is folytonos, azaz $f \in \mathscr{C}^b(M; F)$. A zárt halmazok sorozatokkal való jellemzése szerint ez azt jelenti, hogy $\mathscr{C}^b(M; F)$ a sup-norma szerint zárt. Ha $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor $(\mathscr{F}^b(M; F), \|\cdot\|_{\sup})$ is Banach-tér, ezért ennek minden zárt részhalmaza teljes. ■

11.4.4. Állítás. *Legyen T halmaz, valamint (M,d) és (M',d') metrikus terek. Legyenek $g : T \to M$ és $f : M \to M'$ függvények, valamint $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozatok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g_n : T \to M$ és $f_n : M \to M'$ függvény. Tegyük fel, hogy*

a) *a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a g függvényhez a T halmazon;*

b) *az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez az M halmazon;*

c) *az $f : M \to M'$ függvény egyenletesen folytonos a d és d' metrikák szerint.*

Ekkor az $(f_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f \circ g$ függvényhez a T halmazon.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Ekkor b) miatt létezik olyan $N' \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N'$ természetes számra és minden $x \in M$ pontra $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/2$. A c) feltételből következik, hogy $\varepsilon/2$-höz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $(x_1, x_2) \in M \times M$ esetén, ha $d(x_1, x_2) < \delta$, akkor $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon/2$. Végül, a)-ból következik, hogy δ-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra és minden $t \in T$ pontra és $d(g_n(t), g(t)) < \delta$.

Ha $n > \max(N, N')$ természetes szám és $t \in T$, akkor $n > N$ miatt $d(g_n(t), g(t)) < \delta$, ezért $d'(f(g_n(t)), f(g(t))) < \varepsilon/2$; ugyanakkor $n > N'$ miatt $d'(f_n(g_n(t)), f(g_n(t))) < \varepsilon/2$, ezért

$$d'((f_n \circ g_n)(t), (f \circ g)(t)) \le d'(f_n(g_n(t)), f(g_n(t))) + d'(f(g_n(t)), f(g(t))) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tehát az $(f_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f \circ g$ függvényhez a T halmazon. ■

11.5. Határérték-tétel pontonkénti limeszfüggvényre

11.5.1. Állítás. *Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja $M \rightarrowtail M'$ függvény. Legyen $\mathfrak{a}$ torlódási pontja a* $\mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ *halmaznak, és tegyük fel, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban. Ha létezik olyan W környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $W \cap \mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ halmazon, akkor $(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, és ha ez a sorozat konvergens is, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban és*

$$\lim_{\mathfrak{a}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{\mathfrak{a}} f_n\right).$$

Bizonyítás. Legyen $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ és jelölje W az $\mathfrak{a}$-nak olyan környezetét, amelyre az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $W \cap \mathrm{Dom}(f)$ halmazon.

Először megmutatjuk, hogy a $(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a d' metrika szerint Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges, és válasszunk egy $\varepsilon' \in]0, \varepsilon/4[$ valós számot. A W definíciója alapján van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra és minden $x \in W \cap \mathrm{Dom}(f)$ pontra $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon'$. Legyenek $m, n \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $m > N$ és $n > N$. Az f_m-nek létezik $\mathfrak{a}$-ban határértéke, ezért van olyan V_m környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy $f_m\langle V_m \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon'}(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_m; d')$. Ugyanakkor f_n-nek létezik $\mathfrak{a}$-ban határértéke, ezért van olyan V_n környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy $f_n\langle V_n \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \mathrm{B}_{\varepsilon'}(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n; d')$.

Ekkor $V_m \cap V_n \cap W$ környezete $\mathfrak{a}$-nak, és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, ezért rögzíthetünk egy $x \in V_m \cap V_n \cap W$ pontot, amely $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-nek is eleme. Ekkor fennállnak a

$$d'(\lim_{\mathfrak{a}} f_m, f_m(x)) < \varepsilon',$$
$$d'(f_m(x), f_n(x)) \leq d'(f_m(x), f(x)) + d'(f(x), f_n(x)) < 2\varepsilon';$$
$$d'(f_n(x), \lim_{\mathfrak{a}} f_n) < \varepsilon'.$$

egyenlőtlenségek, amiket összeadva

$$d'(\lim_{\mathfrak{a}} f_m, \lim_{\mathfrak{a}} f_n) < 4\varepsilon' < \varepsilon$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy a $\left(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a d' metrika szerint Cauchy-sorozat.

Most tegyük fel, hogy az M'-ben haladó $\left(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a d' metrika szerint konvergens; megmutatjuk, hogy ekkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n\right)$ az f függvénynek határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban.

Ehhez legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tilde{f}_n : M \rightarrowtail M'$ az a függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(\tilde{f}_n) := \mathrm{Dom}(f_n) \cup \{\mathfrak{a}\}$, és $\tilde{f}_n = f_n$ a $\mathrm{Dom}(f_n) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon, valamint $\tilde{f}_n(\mathfrak{a}) := \lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n$. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\tilde{f}_n$ folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért az $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti limeszfüggvénye az az $\tilde{f} : M \rightarrowtail M'$ függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(\tilde{f}) := \mathrm{Dom}(f) \cup \{\mathfrak{a}\}$, és $\tilde{f} = f$ a $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon, továbbá $\tilde{f}(\mathfrak{a}) := \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n\right)$. Könnyen látható, hogy az $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $W \cap \mathrm{Dom}(\tilde{f})$ halmazon, ezért az $\tilde{f}$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, így $\tilde{f}$-nak létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \tilde{f} = \tilde{f}(\mathfrak{a})$. De $\tilde{f} = f$ a $W \cap (\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\})$ halmazon, tehát a határérték lokalitása miatt f-nek is létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}} \tilde{f} = \tilde{f}(\mathfrak{a}) := \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\mathfrak{a}} f_n\right),$$

amivel az állítást bebizonyítottuk. ■

Ha az (M', d') metrikus tér *teljes*, akkor az előző állításban felesleges kikötni (a többi feltétel mellett), hogy a $(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Azonban lényeges az, hogy $\mathfrak{a}$ torlódási pontja legyen a $\mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ halmaznak, ugyanis előfordulhat az, hogy a tétel összes többi feltétele teljesül, de $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja a $\mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ halmaznak, így aztán a $\lim\limits_{\mathfrak{a}}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ határértékről *nem is beszélhetünk* (**7**. a) gyakorlat). Ha $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja a $\mathrm{Dom}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ halmaznak, akkor lehetséges az, hogy a tétel többi feltétele teljesül, de $(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nem Cauchy-sorozat* (**7**. b) gyakorlat).

11.6. Weierstrass tétele a normális konvergenciáról

Természetesen szükségtelen külön definíciót adni normált térbe vezető függvények sorozatához asszociált függvénysor egyenletes, illetve lokális egyenletes konvergenciájára, hiszen ezek a függvénysorok speciális függvénysorozatok. Azonban a függvénysorokra bevezethető két olyan konvergencia-fogalom, amely függvénysorozatokra általában értelmetlen.

11.6.1. Definíció. *Legyen* $(F, \|\cdot\|)$ *normált tér, és* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja* F*-be érkező függvény. Azt mondjuk, hogy a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *függvénysor az* E *halmazon* **pontonként abszolút konvergens**, *ha* $E \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(f_k)$, *és minden* $t \in E$ *esetén a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(t)$ *vektorsor abszolút konvergens* F*-ben a* $\|\cdot\|$ *norma szerint (vagyis a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k(t)\|$ *számsor konvergens* $\mathbb{R}$*-ben). Azt mondjuk, hogy a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *függvénysor az* E *halmazon normálisan konvergens, ha* $E \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(f_k)$, *és minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $\sup_{t\in E} \|f_k(t)\| < +\infty$, *továbbá a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{t\in E} \|f_k(t)\|\right)$ *számsor konvergens* $\mathbb{R}$*-ben.*

A majoráns kritérium alapján nyilvánvaló, hogy ha egy függvénysor normálisan konvergens egy halmazon, akkor azon pontonként abszolút konvergens is, de ennek a következtetésnek a megfordítása nem igaz.

11.6.2. Állítás. (Weierstrass tétele a normális konvergenciáról) *Tegyük fel, hogy* $(F, \|\cdot\|)$ *normált tér és* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja* F*-be érkező függvény. Ha* E *olyan halmaz, amelyen a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *függvénysor normálisan konvergens, és* $(F, \|\cdot\|)$ *Banach-tér, akkor a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *függvénysor egyenletesen konvergens az* E *halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $f := \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $c_k := \sup_{t\in E} \|f_k(t)\| < +\infty$. A $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor pontonként abszolút konvergens az E halmazon és $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér, ezért a függvénysor pontonként is konvergens is az E halmazon, vagyis $E \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. A feltevés szerint a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, ezért $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sum_{k=N}^{\infty} c_k < \varepsilon$; ekkor minden $n > N$ természetes számra és $t \in E$ pontra

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(t) \right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|f_k(t)\| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \|f_k(t)\| \leq \sum_{k=N}^{\infty} c_k < \varepsilon,$$

tehát a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens az E halmazon. ■

11.7. Cauchy–Hadamard-tétel

11.7.1. Definíció. *Legyen* $(F, \|\cdot\|)$ *normált tér* $\mathbb{K}$ *felett,* $c \in \mathbb{K}$ *és* **a** F*-ben haladó vektorsorozat. Ekkor a*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$$

függvénysort c centrumú, **a** *együtthatójú* **hatványfüggvény-sornak** *nevezzük, és az összegfüggvényét c centrumú,* **a** *együtthatójú* **elemi analitikus függvénynek** *nevezzük.*

A hatványfüggvény-sorok konvergenciájára vonatkozik a Cauchy–Hadamard-tétel.

11.7.2. Tétel. (Cauchy–Hadamard-tétel) *Legyen $(F, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett,* **a** *F-ben haladó vektorsorozat és*

$$\mathrm{R}_{\mathbf{a}} := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{a}(k)\|^{1/k}} & , \textit{ha } 0 < \limsup\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{a}(k)\|^{1/k} < +\infty, \\ 0 & , \textit{ha } \limsup\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{a}(k)\|^{1/k} = +\infty, \\ +\infty & , \textit{ha } \limsup\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{a}(k)\|^{1/k} = 0. \end{cases}$$

a) *Minden $c \in \mathbb{K}$ pontra és $r \in]0, \mathrm{R}_{\mathbf{a}}[$ valós számra a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor normálisan konvergens a $\overline{\mathrm{B}}_r(c;\mathbb{K})$ gömbön, és a $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazon pontonként abszolút konvergens.*

b) *Ha $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor minden $c \in \mathbb{K}$ pontra a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor lokálisan egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazon, és a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ összegfüggvény ezen a halmazon folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $c \in \mathbb{K}$ rögzített.

Legyen $r \in]0, \mathrm{R}_{\mathbf{a}}[$ tetszőleges valós szám, és vegyünk egy $r' \in]r, \mathrm{R}_{\mathbf{a}}[$ valós számot. Ekkor $\limsup\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{a}(k)\|^{1/k} < 1/r'$ teljesül, ezért a lim sup definíciója alapján van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > N$ természetes számra $\|\mathbf{a}(k)\|^{1/k} < 1/r'$. Ezért minden $k > N$ természetes számra és minden $z \in \overline{\mathrm{B}}_r(c;\mathbb{K})$ pontra

$$\left\|\mathbf{a}(k).(z-c)^k\right\| = \|\mathbf{a}(k)\||z-c|^k \le \left(\frac{r}{r'}\right)^k,$$

így $k \in \mathbb{N}$ és $k > N$ esetén

$$\sup_{z\in\overline{\mathrm{B}}_r(c;\mathbb{K})} \left\|\mathbf{a}(k).(z-c)^k\right\| \le \left(\frac{r}{r'}\right)^k.$$

Ha $k \in \mathbb{N}$ és $k \le N$, akkor

$$\sup_{z\in\overline{\mathrm{B}}_r(c;\mathbb{K})} \left\|\mathbf{a}(k).(z-c)^k\right\| < +\infty,$$

mert az $\mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k : \mathbb{K} \to F$ függvény folytonos és $\overline{\mathrm{B}}_r(c;\mathbb{K})$ kompakt halmaz $\mathbb{K}$-ban. Ebből a majoráns kritérium alapján kapjuk, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{z\in\overline{\mathrm{B}}_r(c;\mathbb{K})} \left\|\mathbf{a}(k).(z-c)^k\right\| \right)$$

számsor konvergens $\mathbb{R}$-ben, vagyis a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor normálisan konvergens a $\overline{\mathrm{B}}_r(c;\mathbb{K})$ halmazon. Ebből az is következik, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$

hatványfüggvény-sor pontonként abszolút konvergens a $\overline{\mathrm{B}}_r(c;\mathbb{K})$ gömbön.

Ha $z \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ és $r > 0$ olyan valós szám, hogy $r + |z-c| < \mathrm{R}_{\mathbf{a}}$, akkor az előzőek szerint a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor normálisan konvergens a $\overline{\mathrm{B}}_{r+|z-c|}(c;\mathbb{K})$ gömbön, tehát a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(z-c)^k$ sor abszolút konvergens. Ezért a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor pontonként abszolút konvergens a $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazon. Ezzel a)-t bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér. Legyen minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k,$$

továbbá S_0 a $\mathbb{K} \to F$ azonosan 0 függvény. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $S_n : \mathbb{K} \to F$ folytonos függvény és a definíció szerint $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$. Ha $z \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ és $r > 0$ olyan valós szám, hogy $r + |z-c| < \mathrm{R}_{\mathbf{a}}$, akkor előzőek szerint a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor normálisan konvergens a $\overline{\mathrm{B}}_{r+|z-c|}(c;\mathbb{K})$ gömbön, és $\mathrm{B}_r(z;\mathbb{K}) \subseteq \overline{\mathrm{B}}_{r+|z-c|}(c;\mathbb{K})$, tehát a $\mathrm{B}_r(z;\mathbb{K})$ gömbön is normálisan konvergens. Ezért az egyenletes konvergencia Weierstrass-kritériuma alapján a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_r(z;\mathbb{K})$, ami azt jelenti, hogy ez a függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazon, tehát az összegfüggvény folytonos is ezen a halmazon. ■

Azonban sok esetben a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor nem egyenletesen konvergens a $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazon. Megjegyezzük még, hogy az $\mathrm{R}_{\mathbf{a}} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ elemet ismét a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor *konvergencia sugarának*, és a $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{\mathbf{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazt a hatványfüggvény-sor *abszolút konvergencia-tartományának* nevezzük.

11.8. Abel tétele hatványfüggvény-sor összegfüggvényének radiális folytonosságáról

11.8.1. Lemma. *Legyen $(F, \|\cdot\|)$ normált tér és $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} z_k$ tetszőleges F-ben haladó konvergens sor. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $C_n := \sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \left\| \sum\limits_{k=n}^{n+p} z_k \right\| < +\infty$, és a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat $\mathbb{R}$-ben nullához konvergál.*

Bizonyítás. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} z_k$ sor is konvergens F-ben, ezért a $\left(\sum\limits_{k=n}^{n+p} z_k \right)_{p\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, tehát korlátos is, ami éppen azt jelenti, hogy $C_n < +\infty$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tetszőleges. A $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} z_k$ sor konvergens, ezért Cauchy-sorozat, így létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra, ha $m > N$ és $n > N$, akkor

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} z_k - \sum_{k=0}^{n} z_k \right\| < \varepsilon.$$

Ekkor $n, p \in \mathbb{N}$ és $n > N + 1$ esetén

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} z_k \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n+p} z_k - \sum_{k=0}^{n-1} z_k \right\| < \varepsilon,$$

következésképpen $C_n \leq \varepsilon$, vagyis $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat $\mathbb{R}$-ben. ■

11.8.2. Tétel. (Abel tétele hatványfüggvény-sor összegfüggvényének radiális folytonosságáról) *Legyen* $(F, \|\cdot\|)$ *Banach-tér* $\mathbb{K}$ *felett,* $\mathbf{a}$ F*-ben haladó sorozat,* $c \in \mathbb{K}$ *és* $f := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$*. Tegyük fel, hogy* $0 < \mathrm{R}_{\mathbf{a}} < +\infty$*, és legyen* $z \in \mathbb{K}$ *olyan pont, hogy* $|z - c| = \mathrm{R}_{\mathbf{a}}$*. Ha a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(z - c)^k$ *vektorsor konvergens, akkor a* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ *hatványfüggvény-sor egyenletesen konvergens a* $[\![c, z]\!]$ *szakaszon, és az* $f|_{[\![c,z]\!]}$ *leszűkített függvény folytonos a* z *pontban (a* $\mathbb{K}$ *feletti euklidészi metrika* $[\![c, z]\!]$ *szakaszra vett leszűkítése szerint), és fennáll a* $\lim_{z} \left(f|_{[\![c,z]\!]}\right) = f(z)$ *egyenlőség.*

Bizonyítás. Legyen $x \in [\![c, z[\![$ tetszőleges; ekkor $(x - c)/(z - c) \in [0, 1[$ és minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}(k).(x - c)^k \right\| = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{a}(k).(x - c)^k \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m-1} \mathbf{a}(k).(x - c)^k \right\|.$$

Ha $x \in [\![c, z[\![$, $n \in \mathbb{N}^*$ és $m \in \mathbb{N}^*$, akkor felírható a következő Abel-féle átrendezés:

$$\sum_{k=n}^{n+m-1} \mathbf{a}(k).(x - c)^k = \sum_{k=n}^{n+m-1} \mathbf{a}(k).(z - c)^k \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^k =$$
$$= \sum_{k=n}^{n+m-2} \left(\left(\left(\frac{x - c}{z - c}\right)^k - \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^{k+1} \right) \left(\sum_{j=n}^{k} \mathbf{a}(j).(z - c)^j \right) \right) +$$
$$+ \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^{n+m-1} . \sum_{k=n}^{n+m-1} \mathbf{a}(k).(z - c)^k,$$

ami m szerinti teljes indukcióval könnyen belátható. Ezért $x \in [\![c, z[\![$, $n \in \mathbb{N}^*$ és $m \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m-1} \mathbf{a}(k).(x - c)^k \right\| \leq \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^n C_n + \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^{n+m-1} C_n,$$

ahol $C_n := \sup_{p\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+p} \mathbf{a}(k).(z - c)^k \right\|$ az előző lemma szerint véges. Ebből következik, hogy minden $x \in [\![c, z[\![$ pontra és $\mathbb{N}^* \ni n$-re

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}(k).(x - c)^k \right\| \leq \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^n C_n \leq C_n,$$

ugyanakkor C_n *definíciója* szerint

$$\left\| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}(k).(z-c)^k \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m-1} \mathbf{a}(k).(z-c)^k \right\| \leq$$
$$\leq \sup_{m\in\mathbb{N}^*} \left\| \sum_{k=n}^{n+m-1} \mathbf{a}(k).(z-c)^k \right\| = C_n.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra

$$\sup_{x\in[\![c,z]\!]} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}(k).(x-c)^k \right\| \leq C_n.$$

A hipotézis szerint a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(z-c)^k$ vektorsor konvergens, ezért az előző lemma alapján $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$, következésképpen a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor egyenletesen konvergens a $[\![c,z]\!]$ szakaszon. Ebből adódik, hogy az $f|_{[\![c,z]\!]}$ leszűkített függvény folytonos a z pontban, és mivel z torlódási pontja is a $[\![c,z]\!]$ szakasznak, így $\lim_z \left(f|_{[\![c,z]\!]}\right) = f(z)$ is teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy az imént bizonyított $\lim_z \left(f|_{[\![c,z]\!]}\right) = f(z)$ egyenlőséget úgy is szokták írni, hogy

$$\lim_{\substack{z'\to z,\\ z'\in[\![c,z]\!]}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k).(z'-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k).(z-c)^k.$$

Azonban vigyázzunk arra, hogy mi ennek a pontos értelme, mert lehetséges az, hogy a

$$\lim_{z'\to z} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k).(z'-c)^k$$

(*nem radiális*, vagyis *nem sugárirányú*) határérték *nem létezik*, vagyis a pontonkénti összegfüggvénynek nincs határértéke z-ben, holott a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{a}(k).(z-c)^k$ vektorsor konvergens, tehát a $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}(k).(z-c)^k$ vektor *létezik*, és az Abel-tétel szerint egyenlő a z pontbeli *radiális* határértékkel.

11.9. Ekvifolytonos függvényhalmazok

11.9.1. Definíció. *Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathscr{F}(M;M')$ függvényhalmaz* **ekvifolytonos az $\mathfrak{a} \in M$ pontban** *(a d és d' metrikák szerint), ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan V környezete d szerint, hogy minden $x \in V$ pontra és minden $h \in H$ függvényre $d'(h(x),h(\mathfrak{a})) < \varepsilon$, vagyis*

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}))(\forall h \in H):\ h\langle V\rangle \subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(h(\mathfrak{a});d')$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathscr{F}(M;M')$ függvényhalmaz ekvifolytonos (a d és d' metrikák szerint), ha H az M halmaz minden pontjában ekvifolytonos (a d és d' metrikák szerint).

Könnyen látható, hogy ha (M,d) és (M',d') metrikus terek, és a $H \subseteq \mathscr{F}(M;M')$ függvényhalmaz ekvifolytonos az $\mathfrak{a} \in M$ pontban, akkor minden $H \ni h$-ra a h függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. Tehát, ha a $H \subseteq \mathscr{F}(M;M')$ függvényhalmaz ekvifolytonos, akkor $H \subseteq \mathscr{C}(M;M')$, vagyis H minden eleme folytonos függvény.

Az is nyilvánvaló, hogy ha (M,d) és (M',d') metrikus terek, és $H \subseteq \mathscr{C}(M;M')$ *véges* függvényhalmaz, akkor a H függvényhalmaz ekvifolytonos, mert metrikus térben egy pont véges sok környezetének a metszete is környezete a pontnak.

11.9.2. Definíció. *Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathscr{F}(M;M')$ függvényhalmaz* **egyenletesen ekvifolytonos** *(a d és d' metrikák szerint), ha minden $\mathbb{R}_+^* \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $h \in H$ függvényre és $(x_1,x_2) \in M \times M$ párra, ha $d(x_1,x_2) < \delta$, akkor $d'(h(x_1).h(x_2)) < \varepsilon$.*

Világos, hogy egyenletesen ekvifolytonos függvényhalmaz minden eleme egyenletesen folytonos függvény.

11.9.3. Állítás. *Ha (M,d) és (M',d') metrikus terek, akkor minden $H \subseteq \mathscr{F}(M;M')$ egyenletesen ekvifolytonos függvényhalmaz ekvifolytonos.*

Bizonyítás. Legyen H egyenletesen ekvifolytonos függvényhalmaz. Rögzítsünk egy $\mathfrak{a} \in M$ pontot, és vegyünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ számot. Az egyenletes ekvifolytonosság miatt vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy minden $h \in H$ függvényre és $(x_1,x_2) \in M \times M$ párra, $d(x_1,x_2) < \delta$ esetén $d'(h(x_1),h(x_2)) < \varepsilon$. Ekkor $x \in \mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};d)$ esetén $d(x,\mathfrak{a}) < \delta$, így minden $h \in H$ függvényre $d'(h(x),h(\mathfrak{a})) < \varepsilon$, és mivel $\mathrm{B}_\delta(\mathfrak{a};d)$ környezete $\mathfrak{a}$-nak a d metrika szerint, így H ekvifolytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Azonban ekvifolytonos függvényhalmaz nem szükségképpen egyenletesen ekvifolytonos, még akkor sem, ha minden eleme egyenletesen folytonos függvény (ld. **13.** gyakorlat).

11.9.4. Állítás. *Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek, T halmaz, és $f : T \times M \to M'$ olyan függvény, hogy minden $x \in M$ esetén az $f(\cdot,x) : T \to M'$ függvény korlátos a d' metrika szerint. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in M$ pontra a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az $\{f(t,\cdot)|t \in T\} \subseteq \mathscr{F}(M;M')$ függvényhalmaz ekvifolytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint.*

(ii) *Az $M \to \mathscr{F}^b(T;M')$; $x \mapsto f(\cdot,x)$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és $\mathbf{d}'$ metrikák szerint, ahol $\mathbf{d}'$ jelöli a d' metrika által meghatározott sup-metrikát $\mathscr{F}^b(T;M')$ felett.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} \in M$ rögzített pont. Ekkor a metrikus terek közötti függvények folytonosságának, a pontbeli ekvifolytonosságnak, és a $\mathbf{d}'$ sup-metrikának *definíciója* szerint írható, hogy:

$$\begin{gathered}
\text{"az } M \to \mathscr{F}^b(T;M');\ x \mapsto f(\cdot,x) \text{ függvény folytonos az } \mathfrak{a} \text{ pontban} \\
\text{a } d \text{ és } \mathbf{d}' \text{ metrikák szerint"} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}))(\forall x \in U) :\ \mathbf{d}'(f(\cdot,x),f(\cdot,\mathfrak{a})) \le \varepsilon \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}))(\forall x \in U) :\ \sup_{t \in T} d'(f(t,x),f(t,\mathfrak{a})) \le \varepsilon \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}))(\forall x \in U)(\forall t \in T) :\ d'(f(t,x),f(t,\mathfrak{a})) \le \varepsilon \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \text{"az } \{f(t,\cdot)|t \in T\} \subseteq \mathscr{F}(M;M') \text{ függvényhalmaz ekvifolytonos az } \mathfrak{a} \text{ pontban} \\
\text{a } d \text{ és } d' \text{ metrikák szerint"},
\end{gathered}$$

ami azt jelenti, hogy (i)⇔(ii). ■

11.9.5. Következmény. *Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, valamint $H \subseteq \mathscr{F}(M; M')$ olyan függvényhalmaz, amelyre minden $x \in M$ esetén $\{h(x) | h \in H\} \subseteq M'$ korlátos halmaz d' szerint (amit úgy fejezünk ki, hogy H* **pontonként korlátos** *d' szerint). Minden $x \in M$ esetén vezessük be az*

$$\widetilde{x} : H \to M'; \quad h \mapsto h(x)$$

függvényt. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in M$ pontra a következő állítások ekvivalensek.

(i) *A H függvényhalmaz ekvifolytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint.*

(ii) *Az $M \to \mathscr{F}^b(H; M')$; $x \mapsto \widetilde{x}$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és $\mathbf{d}'$ metrikák szerint, ahol $\mathbf{d}'$ jelöli a d' metrika által meghatározott sup-metrikát $\mathscr{F}^b(H; M')$ felett.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik az előző állításból, ha azt a $T := H$ halmazra és

$$f : H \times M \to M'; \quad (h, x) \mapsto h(x)$$

függvényre alkalmazzuk, hiszen minden $x \in M$ pontra $f(\cdot, x) = \widetilde{x}$, és minden $h \in H$ függvényre $f(h, \cdot) = h$, tehát $\{f(h, \cdot) | h \in H\} = H$. ■

11.9.6. Következmény. *Ha (M, d) kompakt metrikus tér és (M', d') metrikus tér, akkor minden $H \subseteq \mathscr{F}(M; M')$ pontonként korlátos és ekvifolytonos függvényhalmaz egyenletesen ekvifolytonos.*

Bizonyítás. Minden $x \in M$ esetén vezessük be az $\widetilde{x} : H \to M'$; $h \mapsto h(x)$ függvényt. A 11.9.5. állítás szerint az $M \to \mathscr{F}^b(H; M')$; $x \mapsto \widetilde{x}$ függvény folytonos a d és $\mathbf{d}'$ metrikák szerint, ahol $\mathbf{d}'$ jelöli a d' metrika által meghatározott sup-metrikát $\mathscr{F}^b(H; M')$ felett. Az (M, d) metrikus tér kompaktsága és a Heine-tétel alapján ez a függvény egyenletesen is folytonos a d és $\mathbf{d}'$ metrikák szerint, ami azt jelenti, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall (x_1, x_2) \in M \times M) : \Big(d(x_1, x_2) < \delta \ \Rightarrow \ \mathbf{d}'(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) \le \varepsilon\Big),$$

ami

$$\mathbf{d}'(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \sup_{h \in H} d'(\widetilde{x_1}(h), \widetilde{x_2}(h)) = \sup_{h \in H} d'(h(x_1), h(x_2))$$

és **LOG** 2.7.3. alapján azzal ekvivalens, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall (x_1, x_2) \in M \times M)(\forall h \in H) : \Big(d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d'(h(x_1), h(x_2)) \le \varepsilon\Big).$$

Ez utóbbi kijelentés ekvivalens a H függvényhalmaz egyenletes ekvifolytonosságával a d és d' metrikák szerint. ■

11.9.7. Tétel. (Metrikus Ascoli-tétel.) *Legyenek (M, d) kompakt metrikus tér, (M', d') metrikus tér, továbbá $H \subseteq \mathscr{C}(M; M')$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *A H függvényhalmaz teljesen korlátos $\mathscr{C}(M; M')$-ben a d' metrika által meghatározott $\mathbf{d}'$ sup-metrika szerint.*

(ii) *A H függvényhalmaz egyenletesen ekvifolytonos a d és d' metrikák szerint, és az $\bigcup_{h \in H} \mathrm{Im}(h) \subseteq M'$ halmaz teljesen korlátos a d' metrika szerint.*

(iii) *A H függvényhalmaz ekvifolytonos a d és d' metrikák szerint, és az $\bigcup_{h \in H} \mathrm{Im}(h) \subseteq M'$ halmaz teljesen korlátos a d' metrika szerint.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Megmutatjuk, hogy ha (i) igaz, akkor H egyenletesen ekvifolytonos a d és d' metrikák szerint. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített, és a H halmaz $\mathbf{d}'$ metrika szerinti teljes korlátossága alapján vegyünk olyan H-ban haladó $(h_i)_{i\in I}$ véges rendszert, hogy

$$H \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{\mathrm{B}}_{\varepsilon/3}(h_i; \mathbf{d}'),$$

ami azt jelenti, hogy

$$(\forall h \in H)(\exists i \in I)(\forall x \in M) : d'(h(x), h_i(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

A Heine-tétel szerint minden $i \in I$ esetén $h_i : M \to M'$ egyenletesen folytonos a d és d' metrikák szerint, tehát van olyan $\delta_i \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $(x_1, x_2) \in M \times M$ párra, ha $d(x_1, x_2) < \delta_i$, akkor $d'(h_i(x_1), h_i(x_2)) < \varepsilon/3$. Legyen $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ olyan szám, hogy minden $i \in I$ indexre $\delta \leq \delta_i$ (itt lényeges I végessége). Ekkor

$$(\forall i \in I)(\forall (x_1, x_2) \in M \times M) : \Big(d(x_1, x_2) < \delta \;\Rightarrow\; d'(h_i(x_1), h_i(x_2)) < \varepsilon/3\Big). \tag{2}$$

Legyen most $h \in H$ és $(x_1, x_2) \in M \times M$ olyan pár, hogy $d(x_1, x_2) < \delta$. Ekkor (1) alapján rögzíthetünk olyan $i \in I$ indexet, hogy minden $x \in M$ pontra $d'(h(x), h_i(x)) \leq \varepsilon/3$, tehát $d'(h(x_1), h_i(x_1)) \leq \varepsilon/3$ és $d'(h(x_2), h_i(x_2)) \leq \varepsilon/3$ is teljesül. Ugyanakkor (2) miatt erre az i indexre $d'(h_i(x_1), h_i(x_2)) < \varepsilon/3$. Ebből következik, hogy

$$d'(h(x_1), h(x_2)) \leq d'(h(x_1), h_i(x_1)) + d'(h_i(x_1), h_i(x_2) + d'(h_i(x_2), h(x_2)) < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

tehát a H függvényhalmaz egyenletesen ekvifolytonos a d és d' metrikák szerint.

Megmutatjuk, hogy ha (i) igaz, akkor az $\bigcup_{h\in H} \mathrm{Im}(h) \subseteq M'$ halmaz teljesen korlátos a d' metrika szerint. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített, és (i) alapján vegyünk olyan H-ban haladó $(h_i)_{i\in I}$ véges rendszert, hogy

$$H \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathrm{B}_{\varepsilon}(h_i; \mathbf{d}'). \tag{3}$$

Minden $i \in I$ esetén $\mathrm{Im}(h_i) \subseteq M'$ kompakt halmaz d' szerint (8.1.1.), tehát I végessége folytán $K := \bigcup_{i\in I} \mathrm{Im}(h_i)$ is kompakt halmaz M'-ben d' szerint. Ezért a kompaktság metrikus jellemzése (9.4.1.) alapján K teljesen korlátos halmaz M'-ben d' szerint. Ugyanakkor $h \in H$ és $x \in M$ esetén (3) miatt van olyan $i \in I$, hogy $h \in \mathrm{B}_{\varepsilon}(h_i; \mathbf{d}')$, ezért $d'(h(x), h_i(x)) \leq \mathbf{d}'(h, h_i) < \varepsilon$, vagyis $h_i(x) \in K$ folytán $h(x) \in \bigcup_{y\in K} \mathrm{B}_{\varepsilon}(y; d')$. Tehát a 9.3.3. kritériumból következik, hogy $\bigcup_{h\in H} \mathrm{Im}(h)$ teljesen korlátos halmaz M'-ben a d' metrika szerint.

(ii)⇒(iii) A 11.9.3. állítás szerint nyilvánvaló.

(iii)⇒(i) Először megjegyezzük, hogy (iii) alapján a H függvényhalmaz korlátos a $\mathbf{d}'$ metrika szerint, amiből következik, hogy H pontonként korlátos d' szerint, így H ekvifolytonossága és az (M, d) metrikus tér kompaktsága miatt a H függvényhalmaz egyenletesen ekvifolytonos a d és d' metrikák szerint (11.9.6.).

Azt fogjuk megmutatni, hogy ha (iii) teljesül, akkor a H függvényhalmaz teljesen korlátos az $M \to M'$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(M; M')$ terében a d' metrika által meghatározott sup-metrika szerint. Ebből 9.3.2. alapján következik (i), hiszen a $\mathscr{C}(M;M')$ feletti, d' által meghatározott sup-metrika egyenlő az $\mathscr{F}^b(M;M')$ feletti, d' által meghatározott sup-metrika $\mathscr{C}(M;M')$-re vett megszorításával. Természetesen $M \neq \emptyset$ feltehető, különben az állítás logikai trivialitás.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. A H függvényhalmaz egyenletes ekvifolytonossága miatt vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ számot, hogy minden $(x_1, x_2) \in M \times M$ párra, ha $d(x_1, x_2) < \delta$, akkor minden $h \in H$ esetén $d'(h(x_1), h(x_2)) < \varepsilon/2$. Mivel a $\left(\mathrm{B}_{\delta/2}(x;d)\right)_{x\in M}$ halmazrendszer nyílt befedése M-nek és az (M,d) metrikus tér kompakt, így létezik olyan $A \subseteq M$ véges halmaz, hogy $M = \bigcup\limits_{\mathfrak{a}\in A} \mathrm{B}_{\delta/2}(\mathfrak{a};d)$. Az **ENS** 5.1.6. állítás szerint vehetünk olyan $(M_j)_{j\in J}$ diszjunkt halmazrendszert, hogy $\bigcup\limits_{j\in J} M_j = \bigcup\limits_{\mathfrak{a}\in A} \mathrm{B}_{\delta/2}(\mathfrak{a};d) = M$, és J véges, valamint minden $j \in J$ esetén van olyan $\mathfrak{a} \in A$, hogy $M_j \subseteq \mathrm{B}_{\delta/2}(\mathfrak{a};d)$, ezért $\mathrm{diam}_d(M_j) \leq \mathrm{diam}_d(\mathrm{B}_{\delta/2}(\mathfrak{a};d)) \leq \delta$. Tehát $(M_j)_{j\in J}$ az M részhalmazainak olyan diszjunkt, véges rendszere, hogy $M = \bigcup\limits_{j\in J} M_j$ és minden $j \in J$ indexre az M_j halmaz d szerinti átmérője kisebb δ-nál, ezért a δ szám értelmezése alapján

$$(\forall j \in J)(\forall (x_1,x_2) \in M_j \times M_j)(\forall h \in H):\ d'(h(x_1), h(x_2)) < \varepsilon/2 \tag{1}$$

teljesül. Természetesen $M \neq \emptyset$ miatt feltehető, hogy minden $j \in J$ esetén $M_j \neq \emptyset$, így kiválaszthatunk egy $(x_j)_{j\in J} \in \prod\limits_{j\in J} M_j$ rendszert.

A (iii) hipotézis szerint az $\bigcup\limits_{h\in H} \mathrm{Im}(h) \subseteq M'$ halmaz teljesen korlátos a d' metrika szerint, így vehetünk olyan $Y \subseteq \bigcup\limits_{h\in H} \mathrm{Im}(h)$ véges halmazt, hogy

$$\bigcup_{h\in H} \mathrm{Im}(h) \subseteq \bigcup_{y\in Y} \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(y;d'). \tag{2}$$

Minden $\upsilon : J \to Y$ függvényre jelölje f_υ azt az $M \to M'$ függvényt, melyre minden $j \in J$ esetén f_υ az M_j halmazon egyenlő az $\upsilon(j)$ értékű konstansfüggvénnyel. Az $\mathscr{F}(J;Y)$ függvényhalmaz véges, tehát $(f_\upsilon)_{\upsilon\in\mathscr{F}(J;Y)}$ olyan véges rendszer, hogy minden $\upsilon \in \mathscr{F}(J;Y)$ esetén $f_\upsilon \in \mathscr{F}^b(M;M')$, hiszen $\mathrm{Im}(f_\upsilon) \subseteq Y$ és Y véges, így $\mathrm{Im}(f_\upsilon)$ korlátos halmaz az (M',d') metrikus térben. Megmutatjuk, hogy

$$H \subseteq \bigcup_{\upsilon\in\mathscr{F}(J;Y)} \overline{\mathrm{B}}_\varepsilon(f_\upsilon;\mathbf{d}'), \tag{3}$$

ahol $\mathbf{d}'$ jelöli a d' metrika által meghatározott sup-metrikát $\mathscr{F}^b(M;M')$ felett.

Ehhez legyen $h \in H$ rögzített. Ha $j \in J$, akkor (2) miatt $h(x_j) \in \bigcup\limits_{y\in Y} \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(y;d')$, tehát van olyan $y \in Y$, hogy $d'(h(x_j), y) < \varepsilon/2$, vagyis $\{y \in Y | d'(h(x_j), y) < \varepsilon/2\} \neq \emptyset$. Ezért kiválaszthatunk és rögzíthetünk egy

$$\upsilon \in \prod_{j\in J} \{y \in Y | d'(h(x_j), y) < \varepsilon/2\}$$

függvényt. A definíció alapján $\upsilon \in \mathscr{F}(J;Y)$ olyan függvény, hogy minden $j \in J$ indexre $d'(h(x_j), \upsilon(j)) < \varepsilon/2$, és mivel $x_j \in M_j$, így f_υ értelmezése alapján $f_\upsilon(x_j) = \upsilon(j)$, vagyis

$d'(h(x_j), f_v(x_j)) < \varepsilon/2$.

Ha $x \in M$, akkor létezik egyetlen olyan $j \in J$, hogy $x \in M_j$, és ekkor $(x, x_j) \in M_j \times M_j$, tehát (1) alapján $d'(h(x), h(x_j)) < \varepsilon/2$, ugyanakkor f_v értelmezése alapján $f_v(x) = v(j)$, következésképpen

$$d'(h(x), f_v(x)) \leq d'(h(x), h(x_j)) + d'(h(x_j), f_v(x)) =$$
$$= d'(h(x), h(x_j)) + d'(h(x_j), v(j)) < 2(\varepsilon/2) = \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{d}'(h, f_v) \leq \varepsilon$, vagyis $h \in \overline{\mathrm{B}}_\varepsilon(f_v; \mathbf{d}')$. Ezzel a (3) összefüggést igazoltuk, tehát a H függvényhalmaz teljesen korlátos $\mathscr{F}^b(M; M')$-ben a d' metrika által meghatározott sup-metrika szerint. ■

11.9.8. Tétel. (Ascoli–Arzelá-tétel.) *Legyen (M, d) kompakt metrikus tér, $(F, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér, és $H \subseteq \mathscr{C}(M; F)$ olyan ekvifolytonos függvényhalmaz, hogy az $\bigcup_{h \in H} \mathrm{Im}(h) \subseteq F$ halmaz korlátos a $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrika szerint. Ekkor minden H-ban haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely egyenletesen konvergens az M halmazon.*

Bizonyítás. Véges dimenziós normált térben a korlátos halmazok megegyeznek a teljesen korlátos halmazokkal (9.4.3.), ezért a metrikus Ascoli-tétel (11.9.7.) alapján a H függvényhalmaz teljesen korlátos $\mathscr{C}(M; F)$-ben a sup-metrika szerint. A teljes korlátosság sorozatokkal való jellemzése, vagyis a Hausdorff-tétel (9.3.6.) alkalmazásával kapjuk, hogy minden H-ban haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely a sup-metrika szerint Cauchy-sorozat. Tudjuk, hogy $\mathscr{C}(M; F)$ a sup-metrikával teljes metrikus tér, mert $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér (11.3.1.), így minden H-ban haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely konvergens a sup-metrika szerint, ami 11.3.1. szerint azzal ekvivalens, hogy egyenletesen konvergens M-en. ■

11.10. Gyakorlatok

1. Ha T *megszámlálható* halmaz és (M, d) metrikus tér, akkor létezik olyan $\mathbf{d}$ metrika az $\mathscr{F}(T; M)$ függvényhalmaz felett, hogy minden $\mathscr{F}(T; M)$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és minden $f \in \mathscr{F}(T; M)$ függvényre az "$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez a $\mathbf{d}$ metrika szerint" kijelentés ekvivalens azzal, hogy "az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál a T halmazon és $f = \lim_{n\to\infty} f_n$".

(*Útmutatás.* Létezik olyan $\mathbf{d}'$ metrika az $\mathscr{F}(\mathbb{N}; M)$ függvényhalmaz felett, hogy minden $\mathscr{F}(\mathbb{N}; M)$-ben haladó $(\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és minden $\mathbf{s} \in \mathscr{F}(\mathbb{N}; M)$ függvényre az "$(\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $\mathbf{s}$-hez a $\mathbf{d}'$ metrika szerint" kijelentés ekvivalens azzal, hogy "minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(\mathbf{s}_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál $\mathbf{s}(k)$-hoz M-ben a d metrika szerint" (**MET** 3.7. **8.** gyakorlat). Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to T$ *szürjekció*, és tekintsük az

$$\mathscr{F}(T; M) \to \mathscr{F}(\mathbb{N}; M); \quad f \mapsto f \circ \sigma$$

leképezést. A σ függvény szürjektivitása miatt ez *injekció*, ezért az

$$\mathscr{F}(T; M) \times \mathscr{F}(T; M) \to \mathscr{F}(T; M); \quad (f, g) \mapsto \mathbf{d}'(f \circ \sigma, g \circ \sigma)$$

leképezés metrika $\mathscr{F}(T; M)$ felett, és könnyen látható, hogy ez eleget tesz a követelménynek.)

2. Ha (M, d) metrikus tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja M-be érkező függvény, és E olyan *véges* halmaz, amelyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontonként, konvergens, akkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az E halmazon egyenletesen is konvergens. Megfordítva, ha E *végtelen* halmaz, akkor létezik olyan (M, d) metrikus tér és olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, amelynek minden tagja M-be érkező függvény, és amely pontonként konvergens, de nem egyenletesen konvergens az E halmazon.

3. Legyen (M, d) olyan metrikus tér, hogy az M minden pontjának létezik kompakt környezete (ilyenkor azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *lokálisan kompakt*). Ha (M', d') metrikus tér, akkor egy $\mathscr{F}(M; M')$-ben haladó függvénysorozat pontosan akkor lokálisan egyenletesen konvergens M-en, ha az M minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens.

4. Legyen T halmaz, $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér, és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja $T \to F$ függvény. Ha az $\mathscr{F}(T; \mathbb{R})$-ben haladó $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|f_k(\cdot)\|$ függvénysor egyenletesen konvergens az $E \subseteq T$ halmazon, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor is egyenletesen konvergens az E halmazon. Azonban lehetséges, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens egy $E \subseteq T$ halmazon, de a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|f_k(\cdot)\|$ függvénysor nem egyenletesen konvergens E-n.
(*Példa.* A $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k (1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}).\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$ függvénysor egyenletesen konvergens a $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon, de a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}).\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$ függvénysor nem egyenletesen konvergens $[0, 1]$-en.)

5. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \chi_{[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}[}$$

függvénysor egyenletesen konvergens a $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon, de nem normálisan konvergens ezen a halmazon, tehát a Banach-térbe ható függvényekből álló függvénysorokra a normális konvergencia szigorúan erősebb feltétel, mint az egyenletes konvergencia.

6. Ha $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{K} \setminus \{0\}$-ban haladó sorozat, amelyre a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{z_k}$$

sor abszolút konvergens $\mathbb{K}$-ban, akkor a $D := \{z_k | k \in \mathbb{N}\}$ halmaz diszkrét és zárt $\mathbb{K}$-ban, továbbá a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{K}} - z_k}$$

függvénysor normálisan konvergens minden olyan $\mathbb{K}$-beli zárt gömbön, amely nem metszi a D halmazt.

7. Legyen $M := [1, \to [\subseteq \mathbb{R}$ és jelölje d az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika leszűkítését az M

halmazra.

a) Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen $f_n := \mathrm{id}^n_{[1,\to[}$. Ekkor az $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvényre $\mathrm{Dom}(f) = \{1\}$ teljesül, tehát 1 *nem torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$-nek, azonban létezik 1-nek olyan V környezete a d metrika szerint, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $V \cap \mathrm{Dom}(f)$ halmazon, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n-nek létezik határértéke 1-ben (sőt f_n folytonos is 1-ben), továbbá a $(\lim_1 f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben (ugyanakkor a $\lim_1 f$ jel *értelmetlen*, mert 1 nem torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek).

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyen

$$f_n : M \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x = 1 \\ (-1)^n x^n & \text{, ha } x \in]1,2[\\ 0 & \text{, ha } x \in [2,\to[\end{cases}.$$

Ekkor az $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvényre $\mathrm{Dom}(f) = \{1\} \cup [2,\to[$ teljesül, tehát 1 *nem torlódási pontja* $\mathrm{Dom}(f)$-nek, azonban létezik 1-nek olyan V környezete a d metrika szerint, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $V \cap \mathrm{Dom}(f)$ halmazon, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n-nek létezik határértéke 1-ben, ugyanakkor a $(\lim_1 f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *nem Cauchy-sorozat* $\mathbb{R}$-ben.

8. (*Dini-tétel.*) Legyen (M,d) kompakt metrikus tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{C}(M;\mathbb{R})$-ben haladó sorozat, amelyre minden $M \ni x$-re $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < +\infty$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ (amit úgy fejezünk ki, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *pontonként felülről korlátos* és *pontonként monoton növő*). Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens M-en, és a $\lim_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvény *akkor és csak akkor* folytonos, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens M-en.

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy az $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvény folytonos, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tetszőleges. A folytonosság topologikus jellemzése alapján az $(\{x \in M | f(x) - f_n(x) < \varepsilon\})_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat minden tagja *nyílt* halmaz M-ben, és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti monoton növése miatt ez a halmazsorozat tartalmazás tekintetében monoton növő. Ugyanakkor minden $x \in M$ esetén $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $f(x) - f_n(x) < \varepsilon$, tehát $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in M | f(x) - f_n(x) < \varepsilon\} = M$. Az M halmaz kompaktsága miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $\{x \in M | f(x) - f_N(x) < \varepsilon\} = M$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra $\{x \in M | f(x) - f_n(x) < \varepsilon\} = M$ teljesül, vagyis minden $M \ni x$-re $-\varepsilon < f(x) - f_n(x) < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az M halmazon.)

9. Legyen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a rekurzióval értelmezhető, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekből álló sorozat, amelyre P_0 az azonosan 0 függvény, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$P_{n+1} := P_n + \frac{1}{2}.(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - P_n^2).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan polinomiális függvény, amelynek szabad tagja 0 (azaz $P_n(0) = 0$), és a $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon pontonként monoton növő, egyenletesen konvergens, és a pontonkénti limeszfüggvénye egyenlő ezen az intervallumon az $\sqrt{\mathrm{id}_{[0,1]}}$ függvénnyel.

(*Útmutatás.* Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $t \in [0,1]$ pontra és $n \in \mathbb{N}$ számra

$$0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \leq \frac{2}{n}$$

teljesül. Ebből következik az állítás.)

10. Legyen (M, d) olyan metrikus tér, hogy M korlátos halmaz. Ekkor létezik olyan $(E, \|\cdot\|)$ valós Banach-tér, és létezik olyan $j : M \to E$ leképezés, amely izometria a d és $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ metrikák szerint, vagyis minden korlátos metrikus tér izometrikusan *beágyazható* egy valós Banach-térbe.

(*Útmutatás.* Legyen $E := \mathscr{C}^b(M;\mathbb{R})$, és $j : M \to E$ az a leképezés, amelyre minden $x \in M$ esetén $j(x) := d(x, \cdot)$.)

11. Az alábbi lépéseket követve bizonyítsuk be olyan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-ben haladó folytonos ív létezését, amelynek értékkészlete *egyenlő* a $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzettel.

(*Útmutatás.* a) Minden $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ függvényre jelölje $T\gamma$ azt a $[0,1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $t \in [0,1]$ esetén

$$(T\gamma)(t) = (1 - \mathrm{pr}_1(\gamma(t)), \mathrm{pr}_2(\gamma(t))).$$

b) Iterációval értelmezzük azt a $[0,1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ függvényekből álló $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ t \mapsto (t,t)$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\gamma_{n+1} : [0,1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $t \in [0,1]$ esetén

$$\gamma_{n+1}(t) := \begin{cases} \frac{1}{3}\gamma_n(9t) & \text{, ha } t \in [0, \frac{1}{9}[\\ \frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t-1) + (0, \frac{1}{3}) & \text{, ha } t \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\\ \frac{1}{3}\gamma_n(9t-2) + (0, \frac{2}{3}) & \text{, ha } t \in [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}[\\ -\frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t-3) + (\frac{2}{3}, 1) & \text{, ha } t \in [\frac{3}{9}, \frac{4}{9}[\\ -\frac{1}{3}\gamma_n(9t-4) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) & \text{, ha } t \in [\frac{4}{9}, \frac{5}{9}[\\ -\frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t-5) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) & \text{, ha } t \in [\frac{5}{9}, \frac{6}{9}[\\ \frac{1}{3}\gamma_n(9t-6) + (\frac{2}{3}, 0) & \text{, ha } t \in [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}[\\ \frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t-7) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) & \text{, ha } t \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[\\ \frac{1}{3}\gamma_n(9t-8) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) & \text{, ha } t \in [\frac{8}{9}, 1] \end{cases}.$$

Rajzoljuk le a γ_1 és γ_2 függvényeket!

c) Minden $\mathbb{N} \ni n$-re γ_n folytonos $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-ben haladó ív. Ez teljes indukcióval igazolható, felhasználva a **MET** 7.16. **1**. gyakorlatban megfogalmazott állítást.

d) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{Im}(\gamma_n) \subseteq [0,1] \times [0,1]$ és $\mathrm{Im}(\gamma_n) \subseteq \mathrm{Im}(\gamma_{n+1})$. Minden $k < 9$ és $n \in \mathbb{N}^*$ természetes számra, valamint $t \in [\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}]$ pontra

$$\|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)\|_\infty = \frac{1}{3}\|\gamma_n(9t-k) - \gamma_{n-1}(9t-k)\|_\infty$$

teljesül.

e) Ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sup_{t\in[0,1]} \|\gamma_m(t) - \gamma_n(t)\|_\infty \leq \frac{3/2}{3^{\min(m,n)}}.$$

f) A $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen konvergens; legyen $\gamma := \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$.

g) A γ függvény olyan $[0,1]\times[0,1]$-ben haladó folytonos ív, hogy

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(\gamma_n)},$$

és a

$$D := \left\{\left(\frac{j}{3^m}, \frac{k}{3^m}\right) | j, k, m \in \mathbb{N},\ j, k \leq 3^m\right\}$$

halmaz része $\mathrm{Im}(\gamma)$-nak és *sűrű* $[0,1]\times[0,1]$-ben.

h) $\mathrm{Im}(\gamma) = [0,1]\times[0,1]$.)

12. Értelmezzük a

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \min(x - [x], [x] + 1 - x)$$

függvényt és legyen $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bázisrendszer $\mathbb{N}$-ben (**ENS** 5.2.1. Definíció)). A g függvény folytonos, 1 szerint periodikus, és $\mathrm{Im}(g) = [0, 1/2]$, és mivel minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $d_k \geq 2^k$, így a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{g \circ (d_k.\mathrm{id}_\mathbb{R})}{d_k}$$

függvénysor *normálisan konvergens* $\mathbb{R}$-en, továbbá az összegfüggvénye szintén folytonos. Azonban ez az összegfüggvény az $\mathbb{R}$ egyetlen pontjában sem differenciálható.

13. Vezessük be az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x < 0, \\ x & \text{, ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{, ha } x > 1 \end{cases}$$

függvényt, és minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(n(x - n)).$$

Ekkor az $\{f_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ függvényhalmaz ekvifolytonos, de nem egyenletesen ekvifolytonos az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint, holott minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f_n egyenletesen folytonos függvény.

(*Útmutatás.* Az f függvény definíciójából következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x < n, \\ n(x-n) & \text{, ha } n \leq x \leq n + \dfrac{1}{n}, \\ 1 & \text{, ha } x > 1 + \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ rögzített és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}^*$ számot, hogy $\mathfrak{a} < N$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $f_n = 0$ az $U :=]\leftarrow, N[$ halmazon, amely $\mathfrak{a}$-nak környezete. Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ha $n \leq N$, akkor az f_n függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli folytonossága miatt van olyan U_n környezete $\mathfrak{a}$-nak $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $x \in U_n$ pontra $|f_n(x) - f_n(\mathfrak{a})| < \varepsilon$. Ekkor $V := U \cap \left(\bigcap_{n=1}^{N} U_n\right)$ olyan környezete $\mathfrak{a}$-nak $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $x \in V$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $|f_n(x) - f_n(\mathfrak{a})| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy az $\{f_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ függvényhalmaz ekvifolytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

Tegyük fel, hogy az $\{f_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ függvényhalmaz egyenletesen ekvifolytonos az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint, és vegyünk egy $\varepsilon \in]0, 1[$ valós számot. Ekkor van olyan $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, hogy minden $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ha $|x_1 - x_2| < \delta$, akkor $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon$. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy $1/n < \delta$. Ekkor az $x_1 := n$ és $x_2 := n + \frac{1}{n}$ pontokra $|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} < \delta$, ezért $1 = |0 - 1| = |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon < 1$, ami lehetetlen. Ezért az $\{f_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ függvényhalmaz nem egyenletesen ekvifolytonos az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint.

Mivel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos, monoton, folytonos függvény, így f egyenletesen folytonos (**ANA** 2.12.15. gyakorlat). Ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto n(x - n)$ függvény is egyenletesen folytonos, ezért ezek kompozíciója, vagyis f_n is egyenletesen folytonos.)

Tárgymutató